서문

새 교육과정에 맞춘 기출문제집의 기준이 되려고 합니다 !

2016년 11월 17일에 실시된 대학수학능력평가 수학 영역은 6년만의 불수능으로, 고득점을 노리는 수험생에게 만점과 1등급을 결정하는 최고 난문(30번)에 대한 대비가 그 어느 때보다 중요해졌습니다.

○ 올해 최고 난문의 특징은

가형 : 가형 30번은 최소한 6단계 이상의 사고과정을 거쳐야 풀 수 있는 문제였습니다. 물론 수학적 직관으로 몇 단계는 줄일 수 있겠습니다만, 그렇다고 해도 지난 5년간 출제된 이과 30번에 비하여 사고과정의 단계가 많았습니다. 그런데 어려워 보이는 이 문제는 사실 알고 보면 **지난 23년간 출제된 평가원 기출문제들의 재조합일 뿐이며, 풀이의 각 과정과 과거 평가원 기출문제 사이에 일대일대응이 가능**합니다. 이처럼 평가원이 수험생에게 우선적으로 요구하는 것은 교과서의 개념을 정확하게 숙지하고, 이를 바탕으로 교과서 문제, 평가원 기출문제를 반복 연습하는 것입니다. 이런 원칙을 지켜서 연습을 충분히 한 수험생의 경우 올해 가형 30번은 도전해 볼만 했을 것이지만, 빠르고 멋있는 풀이에 길들여진 수험생의 경우 당혹스러웠을 것입니다. 더 이상 피상적인 학습만으로는 가형에서 만점은 불가능 한 것입니다.

나형 : 나형 30번은 최소한 3단계 이상의 사고과정을 거쳐야 풀 수 있는 문제였습니다. 풀이의 중간 단계에서 역함수의 개념이 사용되는데, 역함수에 대한 정확한 이해를 바탕으로 다양한 상황의 문제를 푼 경험이 없었다면 당혹스러웠을 것입니다. 지난 5년간의 수능과 비교해 볼 때, 이젠 나형에서도 개념에 대한 정확한 이해와 이를 문제풀이에 실제로 적용할 수 있는 능력을 요구하고 있는 것입니다. 특히 난문의 경우 풀다 보면 어떻게든 풀리는 문제가 출제될 가능성은 적어지고 있는 것입니다.

○ 수능 수학을 대비하기 위해서는

(1) 교과서의 정의/정리/공식/성질/법칙을 정확하게 이해하고, 이를 교과서의 예제와 연습문제에 적용하는 연습을 해야 합니다.
(2) (1)의 연습을 바탕으로 평가원 기출문제를 최소 3회 이상 반복해서 풀어야 합니다. 특히 **정답률이 낮은 난문에 대해서는 자신의 손에서 정확한 풀이가 나올 때까지 서술형 풀이를 여러 번 작성**해야 합니다. 이 책의 모든 풀이는 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 가능하면 표현의 경제성보다는 수학적 엄밀함에 무게를 두었습니다. 자신의 풀이와 해설집의 풀이를 대조비교 하는 것도 좋은 공부가 될 것입니다.
(3) 평가원 기출문제에서 자주 등장하는 수학적 사고력, 수학적 사실들은 스스로 정리하는 것이 필요합니다. 평가원 기출문제는 확장된 교과서이기 때문입니다. 한 번 풀고 마는 문제들이 아닙니다.

○ 해설에 대하여

이 책에 실린 **해설은 지난 5년간 1만 시간 이상 작업한 결과물**입니다. 다양한 관점을 제시하기 위하여 시중에 출시된 대부분의 개념서와 기출문제집의 해설을 읽었으며, 이를 해설에 적극적으로 반영하였습니다. 아직은 부족한 점이 많겠지만 **시중의 어떤 기출 문제집 보다도 많은 다른 풀이와 참고 사항을 수록**하였다고 생각합니다.

수능 수학의 모든 것을 한 권에 담는 다는 각오로, 매년 개정판을 내면서 해설 보강 작업을 계속해나갈 것입니다.

이동훈

2018학년도 수능의 시작입니다 !

학년도	시험	실시년도/월	학년도	시험	실시년도/월
5차 교육과정			2007	대학수학능력	2006년 11월
1991	실험평가(1차)	1990년 12월	2008	모의평가(6월)	2007년 6월
1992	실험평가(2차)	1991년 5월	2008	모의평가(9월)	2007년 9월
1992	실험평가(3차)	1991년 8월	2008	대학수학능력	2007년 11월
1992	실험평가(4차)	1991년 11월	2009	모의평가(6월)	2008년 6월
1993	실험평가(5차)	1992년 5월	2009	모의평가(9월)	2008년 9월
1993	실험평가(6차)	1992년 8월	2009	대학수학능력	2008년 11월
1993	실험평가(7차)	1992년 11월	2010	모의평가(6월)	2009년 6월
1994	대학수학능력(1차)	1993년 8월	2010	모의평가(9월)	2009년 9월
1994	대학수학능력(2차)	1993년 11월	2010	대학수학능력	2009년 11월
1995	대학수학능력	1994년 11월	2011	모의평가(6월)	2010년 6월
1996	대학수학능력	1995년 11월	2011	모의평가(9월)	2010년 9월
1997	대학수학능력	1996년 11월	2011	대학수학능력	2010년 11월
1998	대학수학능력	1997년 11월	2007개정 교육과정		
6차 교육과정			2012	모의평가(6월)	2011년 6월
1999	대학수학능력	1998년 11월	2012	모의평가(9월)	2011년 9월
2000	대학수학능력	1999년 11월	2012	대학수학능력	2011년 11월
2001	대학수학능력	2000년 11월	2014	예비평가	2012년 5월
2002	대학수학능력	2001년 11월	2013	모의평가(6월)	2012년 6월
2003	대학수학능력	2002년 9월	2013	모의평가(9월)	2012년 9월
2003	대학수학능력	2002년 11월	2013	대학수학능력	2012년 11월
2004	대학수학능력	2003년 6월	2014	모의평가(6월)	2013년 6월
2004	대학수학능력	2003년 9월	2014	모의평가(9월)	2013년 9월
2004	대학수학능력	2003년 11월	2014	대학수학능력	2013년 11월
7차 교육과정			2015	모의평가(6월)	2014년 6월
2005	예비평가	2003년 12월	2015	모의평가(9월)	2014년 9월
2005	모의평가(6월)	2004년 6월	2015	대학수학능력	2014년 11월
2005	모의평가(9월)	2004년 9월	2016	모의평가(6월)	2015년 6월
2005	대학수학능력	2004년 11월	2016	모의평가(9월)	2015년 9월
2006	모의평가(6월)	2005년 6월	2016	대학수학능력	2015년 11월
2006	모의평가(9월)	2005년 9월	2009개정 교육과정		
2006	대학수학능력	2005년 11월	2017	모의평가(6월)	2016년 6월
2007	모의평가(6월)	2006년 6월	2017	모의평가(9월)	2016년 9월
2007	모의평가(9월)	2006년 9월	2017	대학수학능력	2016년 11월

각 과목별 문항 수 및 비율 (총 3108 문항)

수학2	미적분1	미적분2	확률과 통계	기하와 벡터	수학1	교육과정 外
467	528	539	478	244	134	718
15 %	17 %	17.4 %	15.4 %	7.8 %	4.3 %	23.1 %

※ 수학1, 교육과정 外의 문항과 해설은 오르비북스(orbibooks.com)에서 무료PDF파일 다운로드 가능

○ **‘이동훈 기출문제집 수학2’** 에는 평가원이 세상에 선보인 3108개의 문항 중에서
2009개정 교육과정에 맞는 467개의 문항을 엄선하여 수록하였습니다.
(일부 문항은 새 교육과정에 맞게 용어와 기호를 수정)

○ 문항 정렬은 단원별, 출제년도 순을 따랐습니다.
소단원별의 문항 구성은 교과서의 서술 체계를 가장 잘 드러내며,
출제년도 순의 문항 구성은 출제 경향을 뚜렷하게 보여줄 것입니다.

○ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
다른 풀이 및 참고 사항을 최대한 수록하여 문제 해결의 다양한 시각을 제시하였습니다.

문제집 목차

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학2	집합과 명제	A	확률과 통계	순열과 조합	M
	함수	B		확률	N
	수열	C		통계	P
	지수와 로그	D	기하와 벡터	평면 곡선	Q
미적분1	수열의 극한	E		평면 벡터	R
	함수의 극한과 연속	F		공간 도형	S
	다항함수의 미분법	G		공간 벡터	T
	다항함수의 적분법	H	수학1	다항식	U
미적분2	지수함수와 로그함수	I		방정식과 부등식	V
	삼각함수	J		도형의 방정식	W
	미분법	K	교육과정 外		Z
	적분법	L			

B. 함수

– 2009개정 교육과정

○ 무리식에서 ‘이중근호’에 대한 문제는 제외하였습니다.

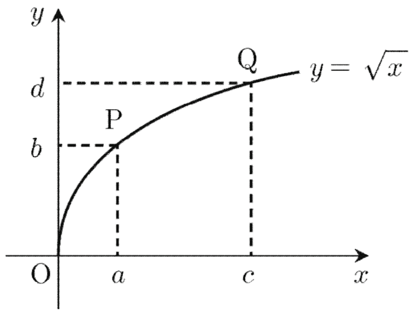
B. 무리함수

B063

(2000-인문6/예체능6/자연6)

함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(c,\ d)$에 대하여 $\dfrac{b+d}{2}=1$일 때, 직선 PQ의 기울기는?

(단, $0<a<c$) [3점]



① $\dfrac{1}{5}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{3}$

④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

B064

(2017(6)-나형15)

함수 $y=a\sqrt{x}+4$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하였더니 함수 $y=\sqrt{9x-18}$의 그래프와 일치하였다. $a+m+n$의 값은? (단, a, m, n은 상수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

B065

(2017(9)-나형30)

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 영역

$$\left\{(x,\ y)\,\middle|\,0\le x\le n,\ 0\le y\le \frac{\sqrt{x+3}}{2}\right\}$$

에 포함되는 정사각형 중에서 다음 조건을 만족시키는 모든 정사각형의 개수를 $f(n)$이라 하자.

(가) 각 꼭짓점의 x좌표, y좌표가 모두 정수이다.
(나) 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$ 이하이다.

예를 들어 $f(14)=15$이다. $f(n)\le 400$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값을 구하시오. [4점]

C. 수열

- 2009개정 교육과정

○ 계차수열에 대한 문제는 제외하였습니다.
○ 수열의 귀납적 정의에서 일반항을 유도하는 문제는 제외하였습니다.
(단, 등차수열, 등비수열, 규칙이 쉽게 보이는 수열의 일반항을 유도하는 문제는 수록)

C. 수열 (발견적 추론)

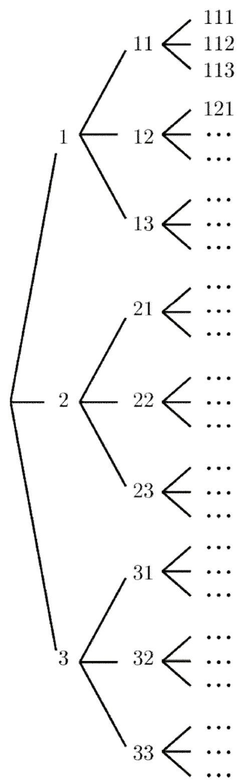
C001

(1994(2차)-공통11)

오른쪽 그림에 나타나는 수를 크기순으로 나열하여 다음과 같은 수열을 만들었다.

1, 2, 3, 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33, 111, 112, 113, 121, $\cdots$

이 수열의 제200항은?



① 13323 ② 13332 ③ 21111
④ 21113 ⑤ 21122

C002

(1998-인문예체능15/자연15)

수열 $\{a_n\}$은 처음 6개 항 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6이 서로 다르고, $a_{n+6}=a_n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 만족시킨다.

다음과 같이 정의된 수열 $\{b_n\}$ 중 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6의 값이 모두 나타나는 것은? [3점]

① $b_n=a_{2n+1}$ ② $b_n=a_{3n+1}$ ③ $b_n=a_{4n+1}$
④ $b_n=a_{5n+1}$ ⑤ $b_n=a_{6n+1}$

C003

(2002-인문12/자연12)

수열 $\{a_n\}$이

$$\sqrt{17}-4=\frac{1}{8+a_1}=\frac{1}{8+\dfrac{1}{8+a_2}}=\frac{1}{8+\dfrac{1}{8+\dfrac{1}{8+a_3}}}=\cdots$$

을 만족시킬 때, a_{2002}의 값은? [3점]

① $\sqrt{17}-4$ ② $3-\sqrt{17}$ ③ $5-\sqrt{17}$
④ $\sqrt{17}$ ⑤ $\sqrt{17}+4$

C004
(2003(9)-인문11/예체능11/자연11)

어느 상점에는 ㉮, ㉯, ㉰ 3개의 진열대가 있다. 9월 1일에 ㉮, ㉯, ㉰에 진열된 상품은 각각 A, B, C이다. 9월 2일부터 아래의 규칙에 따라 상품을 진열할 때, 같은 해 9월 30일에 진열될 상품을 바르게 나타낸 것은? [2점]

> [규칙1]
> 홀수 날에는 전날 ㉮에 진열되었던 상품을 ㉯로, ㉯의 상품을 ㉰로, ㉰의 상품을 ㉮로 옮겨 진열한다.
> [규칙2]
> 짝수 날에는 전날 ㉯와 ㉰에 진열되었던 상품을 서로 바꾸어 진열한다.

	㉮	㉯	㉰
①	A	B	C
②	A	C	B
③	B	A	C
④	B	C	A
⑤	C	B	A

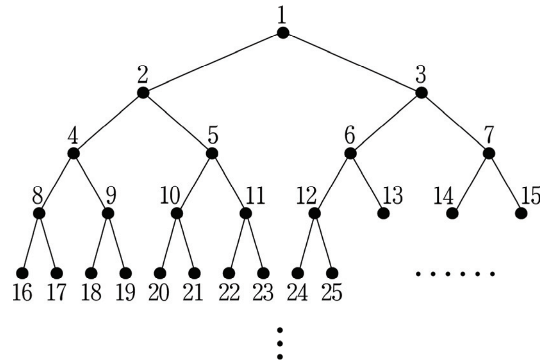
C005
(2004(9)-인문16/자연16)

각 자리의 수에 0이 없는 자연수를 크기 순서로 배열한 수열이 있다. 예를 들면, 11은 이 수열의 제 10항이고, 103은 이 수열의 항이 아니다. 자연수 1111은 이 수열의 몇 번째 항인가? [3점]

① 800 ② 820 ③ 900
④ 920 ⑤ 1000

C006
(2004-인문15/자연15)

아래 그림과 같이 각각의 점에 1부터 연속된 자연수를 규칙적으로 대응시키고 이 점들을 선분으로 연결한다.



서로 다른 두 자연수 a와 b에 대응되는 두 점을 연결하는 선분들의 최소 개수를 $N(a,\ b)$라 하자. 예를 들면, $N(4,\ 6)=4$ 이고 $N(12,\ 27)=3$이다.
$N(32,\ 33)+N(32,\ 34)+N(32,\ 35)+\cdots+N(32,\ 63)$의 값은? [3점]

① 196 ② 258 ③ 270
④ 312 ⑤ 344

C007

(2005-가형11/나형11)

아래 그림과 같이 자연수 n에 대하여 n개의 항

$$\left[\frac{n}{1}\right],\ \left[\frac{n}{2}\right],\ \left[\frac{n}{3}\right],\ \cdots,\ \left[\frac{n}{n}\right]$$

이 n행에 1열부터 n열까지 차례로 나열되어 있다.
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

	1열	2열	3열	4열	5열	$\cdots$	n열	$\cdots$
1행	1							
2행	2	1						
3행	3	1	1					
4행	4	2	1	1				
5행	5	2	1	1	1			
⋮		⋮						
n행	$\left[\frac{n}{1}\right]$	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$\left[\frac{n}{3}\right]$		$\cdots$		$\left[\frac{n}{n}\right]$	
⋮		⋮						

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. n행에서 그 값이 1인 항은 $\left[\frac{n+1}{2}\right]$개다.
ㄴ. 100행에서 그 값이 3인 항은 8개다.
ㄷ. 3열에서 그 값이 5인 항은 5개다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

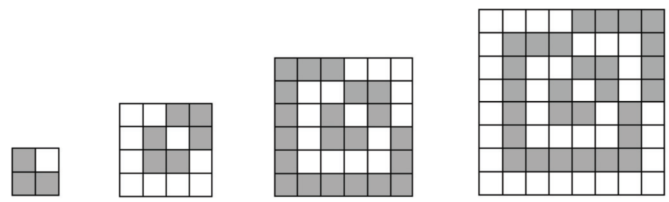
C008

(2006(6)-가형14/나형14)

한 변의 길이가 1인 정사각형 모양의 검은 타일과 흰 타일이 있다.

(가) [그림1]과 같이 검은 타일 3개와 흰 타일 1개를 붙여 한 변의 길이가 2인 정사각형이 되도록 한다.
(나) [그림2]와 같이 [그림1]의 정사각형의 바깥쪽에 타일을 붙여 한 변의 길이가 4인 정사각형이 되도록 한다. 이때 [그림1]에 있는 흰 타일의 둘레에는 검은 타일을, 검은 타일의 둘레에는 흰 타일을 붙인다.
(다) [그림3]과 같이 [그림2]의 정사각형의 바깥쪽에 타일을 붙여 한 변의 길이가 6인 정사각형이 되도록 한다. 이때 [그림2]에 있는 흰 타일의 둘레에는 검은 타일을, 검은 타일의 둘레에는 흰 타일을 붙인다.

이와 같은 과정을 계속하여 전체 타일의 개수가 400개가 되었을 때, 검은 타일의 개수와 흰 타일의 개수 사이의 관계를 옳게 나타낸 것은? [4점]



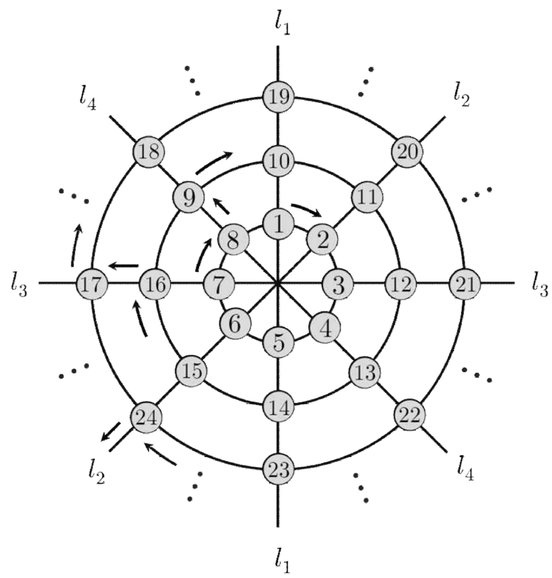
[그림1] [그림2] [그림3]

① 검은 타일과 흰 타일의 개수가 같다.
② 검은 타일의 개수가 흰 타일의 개수보다 18개 많다.
③ 검은 타일의 개수가 흰 타일의 개수보다 20개 많다.
④ 흰 타일의 개수가 검은 타일의 개수보다 18개 많다.
⑤ 흰 타일의 개수가 검은 타일의 개수보다 20개 많다.

C009

(2008(6)-나형23)

다음 그림은 동심원 O_1, O_2, O_3, $\cdots$과 직선 l_1, l_2, l_3, l_4의 교점 위에 자연수를 1부터 차례로 적은 것이다.

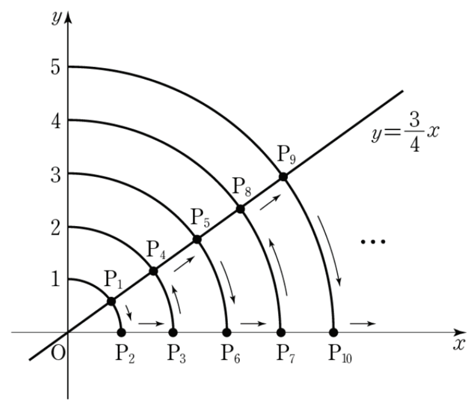


이미 채워진 수들의 규칙에 따라 계속하여 적어 나가면 475는 원 O_m과 직선 l_n의 교점 위에 있다. $m+n$의 값을 구하시오. [4점]

C011

(2010(9)-나형7)

다음 그림은 좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1부터 1씩 증가하는 원들이 두 직선 $y=\frac{3}{4}x$, $y=0$과 각각 만나는 점들의 일부를 P_1부터 시작하여 화살표 방향을 따라 P_1, P_2, P_3, $\cdots$으로 나타낸 것이다.



점 P_{25}의 x좌표는? [3점]

① $\frac{52}{5}$　　② 11　　③ $\frac{56}{5}$

④ 12　　⑤ $\frac{64}{5}$

C010

(2009(6)-나형28)

자연수 n의 모든 양의 약수를 a_1, a_2, $\cdots$, a_k라 할 때,

$$x_n=(-1)^{a_1}+(-1)^{a_2}+\cdots+(-1)^{a_k}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $x_8=2$
ㄴ. $n=3^m$이면 $x_n=-m+1$이다. (단, m은 음이 아닌 정수이다.)
ㄷ. $n=10^m$이면 $x_n=m^2-1$이다. (단, m은 음이 아닌 정수이다.)

① ㄱ　　② ㄷ　　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

C012

(2010(9)-가형22/나형22)

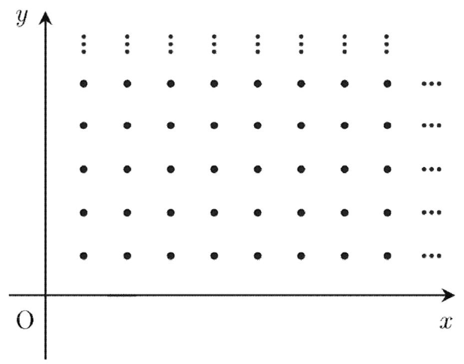
수열 $\{a_n\}$의 제n항 a_n을 $\frac{n}{3^k}$이 자연수가 되게 하는 음이 아닌 정수 k의 최댓값이라 하자. 예를 들어 $a_1=0$이고 $a_6=1$이다. $a_m=3$일 때, $a_m+a_{2m}+a_{3m}+\cdots+a_{9m}$의 값을 구하시오. [4점]

C. 등차수열

C013

(2003(9)−인문9/자연9)

아래 그림은 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 격자점을 좌표평면에 나타낸 것이다.



위의 좌표평면에 직선 $y=ax$를 그렸을 때, <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $a>0$) [2점]

> ㄱ. a가 자연수일 때, 무수히 많은 격자점을 지난다.
> ㄴ. a가 유리수일 때, 지나는 격자점의 y좌표는 등차수열을 이룬다.
> ㄷ. a가 무리수일 때, 적어도 하나의 격자점을 지난다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

C014

(2005−나형3)

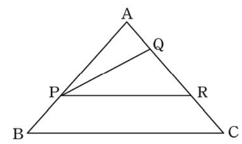
등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_2=10$, $a_3+a_4+a_5=45$가 성립할 때, a_{10}의 값은? [2점]

① 47　② 45　③ 43
④ 41　⑤ 39

C015

(2006(6)−가형11/나형11)

오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의 변 AB를 2 : 1로 내분하는 내분점을 P로 잡고, 변 AC 위에 두 점 Q, R을 잡자. 삼각형 APQ, PRQ와 사각형 PBCR의 넓이가 차례로 첫째항이 a이고 공차가 d인 등차수열을 이룰 때, 다음은 $\dfrac{\overline{CQ}}{\overline{AR}}$의 값을 a와 d로 나타내는 과정이다.



삼각형 APQ의 넓이는 a이므로 삼각형 APR의 넓이는 $2a+d$가 되어

$a:2a+d=\triangle APQ:\triangle APR$

$=\dfrac{1}{2}\overline{AP}\cdot\overline{AQ}\sin A:\dfrac{1}{2}\overline{AP}\cdot\overline{AR}\sin A$

가 성립한다. 따라서 $\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AR}}=\dfrac{a}{2a+d}$　…㉠

같은 방법으로, 삼각형 ABC의 넓이는 $\boxed{(가)}$이므로

$a:\boxed{(가)}=\triangle APQ:\triangle ABC$

$=\dfrac{1}{2}\overline{AP}\cdot\overline{AQ}\sin A:\dfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin A$

또한 점 P는 변 AB를 2 : 1로 내분하는 내분점이므로

$\overline{AP}=\dfrac{2}{3}\overline{AB}$

따라서

$\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AC}}=\boxed{(나)}$

그러므로

$\dfrac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}}=\dfrac{\overline{AC}-\overline{AQ}}{\overline{AQ}}=\boxed{(다)}$　…㉡

㉠, ㉡에 의해

$\dfrac{\overline{CQ}}{\overline{AR}}=\dfrac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}}\cdot\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AR}}=\dfrac{a+2d}{2a+d}$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

　(가)　(나)　(다)

① $a+2d$, $\dfrac{a}{3(a+d)}$, $\dfrac{2a+3d}{a}$

② $a+2d$, $\dfrac{a+d}{2a+3d}$, $\dfrac{a+2d}{a+d}$

③ $3(a+d)$, $\dfrac{a}{2(a+d)}$, $\dfrac{a+2d}{a+d}$

④ $3(a+d)$, $\dfrac{a}{2(a+d)}$, $\dfrac{a+2d}{a}$

⑤ $3(a+d)$, $\dfrac{a}{3(a+d)}$, $\dfrac{2a+3d}{a}$

C016

(2006-나형3)

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_5 = 4a_3,\ a_2 + a_4 = 4$$

가 성립할 때, a_6의 값은? [2점]

① 5 ② 8 ③ 11
④ 13 ⑤ 16

C017

(2007(6)-나형9)

집합 $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$에서 선택한 세 개의 원소 a_1, a_2, a_3이 $2a_2 = a_1 + a_3$을 만족시키는 경우의 수는? (단, $a_1 < a_2 < a_3$이다.) [3점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

C018

(2007(9)-나형18)

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + a_3 = 6$, $a_4 - a_2 = 6$이 성립할 때, a_6의 값을 구하시오. [3점]

C019

(2008-나형18)

등차수열 $\{a_n\}$이 $a_2 = 3$, $a_5 = 24$일 때, a_7의 값을 구하시오. [3점]

C020

(2009-나형19)

공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + a_5 + a_9 = 45$일 때, $a_1 + a_{10}$의 값을 구하시오. [3점]

C021

(2010(6)-나형19)

네 수 1, x, y, z가 이 순서대로 등차수열을 이루고 $6x + z = 5y$를 만족시킨다. $x + y + z$의 값을 구하시오. [3점]

C022

(2010-나형18)

등차수열 $\{a_n\}$이 $a_2 + a_4 = 8$, $a_7 = 52$를 만족시킬 때, 공차를 구하시오. [3점]

C023

(2011(9)-나형18)

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3 = 5$, $a_6 - a_4 = 4$일 때, a_{10}의 값을 구하시오. [3점]

해설집 목차

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학2	집합과 명제	A	확률과 통계	순열과 조합	M
	함수	B		확률	N
	수열	C		통계	P
	지수와 로그	D	기하와 벡터	평면 곡선	Q
미적분1	수열의 극한	E		평면 벡터	R
	함수의 극한과 연속	F		공간 도형	S
	다항함수의 미분법	G		공간 벡터	T
	다항함수의 적분법	H	수학1	다항식	U
미적분2	지수함수와 로그함수	I		방정식과 부등식	V
	삼각함수	J		도형의 방정식	W
	미분법	K	교육과정 外		Z
	적분법	L			

B. 함수

1	해설참고	**2**	해설참고	**3**	①	**4**	④	**5**	②
6	④	**7**	③	**8**	②	**9**	③	**10**	⑤
11	③	**12**	②	**13**	④	**14**	①	**15**	②
16	⑤	**17**	②	**18**	②	**19**	①	**20**	①
21	⑤	**22**	④	**23**	③	**24**	④	**25**	①
26	②	**27**	④	**28**	②	**29**	⑤	**30**	②
31	⑤	**32**	⑤	**33**	③	**34**	⑤	**35**	①
36	⑤	**37**	5	**38**	-3	**39**	④	**40**	④
41	④	**42**	10	**43**	⑤	**44**	③	**45**	①
46	④	**47**	①	**48**	⑤	**49**	-2	**50**	②
51	①	**52**	①	**53**	③	**54**	①	**55**	①
56	2.25	**57**	14	**58**	⑤	**59**	91	**60**	④
61	10	**62**	⑤	**63**	④	**64**	①	**65**	65

B001 | 답 아래의 답을 참고하세요.

[풀이]

(1) $a=b=\frac{2}{3}$일 때, $a^2 \le 2b$이므로

$\frac{2}{3} * \frac{2}{3} = 2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

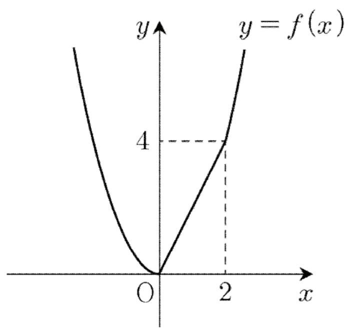
(2) 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=\begin{cases} 2x & (x^2 \le 2x) \\ x^2 & (x^2 > 2x) \end{cases}$

정리하면

$f(x)=\begin{cases} 2x & (0 \le x \le 2) \\ x^2 & (x<0,\ x>2) \end{cases}$

함수 $f(x)$의 그래프는



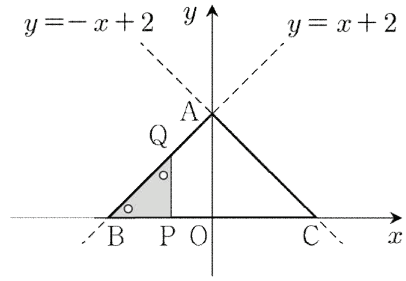
답 (1) $\frac{4}{3}$, (2) 위의 그림

B002 | 답 아래의 답을 참고하세요.

[풀이]

점 P를 지나고 $\overline{\mathrm{BC}}$에 수직인 직선이 삼각형 ABC와 만나는 두 점 중에서 점 P가 아닌 점을 Q라고 하자.

(1) $-2<x\le 0$인 경우

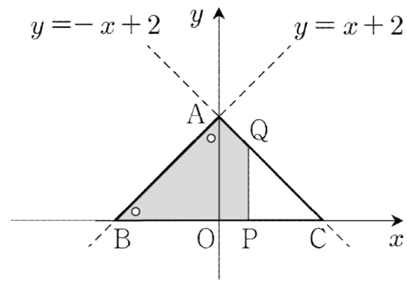


점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(x,\ x+2)$이므로

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$(\triangle\mathrm{BPQ}$의 넓이$)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BP}}\,\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{2}(x+2)^2$

(2) $0<x<2$인 경우



점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(x,\ -x+2)$이므로

삼각형과 사다리꼴의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$(\square\mathrm{ABPQ}$의 넓이$)$

$=(\triangle\mathrm{ABO}$의 넓이$)+(\square\mathrm{OPQA}$의 넓이$)$

$=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BO}}\,\overline{\mathrm{OA}}+\frac{\overline{\mathrm{AO}}+\overline{\mathrm{QP}}}{2}\times\overline{\mathrm{OP}}$

$=\frac{1}{2}\times 2\times 2+\frac{2+(-x+2)}{2}\times x=-\frac{1}{2}x^2+2x+2$

(1), (2)에서 구하는 함수의 방정식은

$y=\begin{cases} \frac{1}{2}(x+2)^2 & (-2<x\le 0) \\ -\frac{1}{2}x^2+2x+2 & (0<x<2) \end{cases}$

답 위의 함수의 방정식

B003 | 답 ①

[풀이]

임의의 정수 n에 대하여

$[x]=n$이면 $n\le x<n+1$

$-n-1<-x<-n$일 때, $[-x]=-n-1$

$-x=-n$일 때, $[-x]=-n$

이므로

$x=n$일 때, $f(x)=n+(-n)=0$

$n<x<n+1$일 때, $f(x)=n+(-n-1)=-1$

따라서 함수 $f(x)$의 치역은

$\{0,\ -1\}$

답 ①

ㄷ. (참)

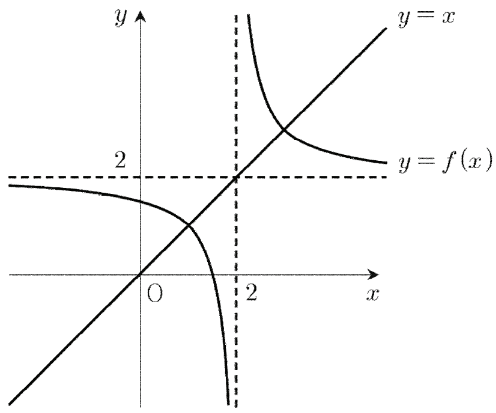
$y=\dfrac{2x-3}{x-2}$를 x에 대하여 풀면

$x=\dfrac{2y-3}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ 즉, $f^{-1}(x)=\dfrac{2x-3}{x-2}$

함수 $f(x)$의 역함수는 $f(x)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프와 함수 $f^{-1}(x)$의 그래프는 일치한다.



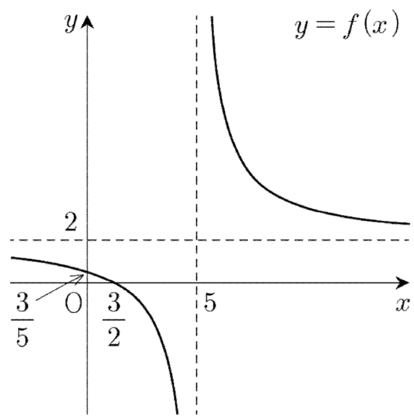
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

B061 | 답 10

[풀이]

$\dfrac{2x-3}{x-5}=2+\dfrac{7}{x-5}$이므로 함수 $y=\dfrac{7}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동시키면 함수 $f(x)$의 그래프와 일치한다.



함수 $f(x)$의 그래프의 두 점근선은 각각 두 직선

$x=5,\ y=2$

이므로

$p=5,\ q=2$

$\therefore\ pq=10$

답 10

B062 | 답 ⑤

[풀이]

문제에서 주어진 함수

$y=\dfrac{3}{x-5}+k$ …㉠

의 방정식을 x에 대하여 풀면

$xy-5y=3+kx-5k,\ (y-k)x=5y+3-5k$

$x=\dfrac{5y+3-5k}{y-k}$

x와 y를 서로 바꾸어 역함수를 구하면

$y=\dfrac{5x+3-5k}{x-k}$

정리하면

$y=\dfrac{3}{x-k}+5$ …㉡

㉠, ㉡(㉠의 역함수)의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로 ㉠, ㉡의 그래프가 서로 일치하면 ㉠은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$\therefore\ k=5$

답 ⑤

[참고]

문제에서 주어진 함수의 두 점근선이 만나는 교점 $(5,\ k)$가 직선 $y=x$ 위에 있으면 문제에서 주어진 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$\therefore\ k=5$

B063 | 답 ④

[풀이]

두 점 P, Q가 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위에 있으므로

$b=\sqrt{a},\ d=\sqrt{c}$

정리하면

$a=b^2,\ c=d^2$

주어진 조건에서 $\dfrac{b+d}{2}=1$이므로

$\therefore$ (직선 PQ 의 기울기)

$=\dfrac{d-b}{c-a}=\dfrac{d-b}{d^2-b^2}=\dfrac{1}{d+b}=\dfrac{1}{2}$

답 ④

B064 | 답 ①

[풀이]

○ $a=0$인 경우

상수함수 $y=4$의 그래프를 평행이동시켜서 함수 $y=\sqrt{9x-18}$의 그래프와 일치시킬 수 없다.

○ $a<0$인 경우

함수 $y=-\sqrt{a^2x}+4$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시키면 함수

$y=-\sqrt{a^2(x-m)}+4+n$ $\cdots$ ㉠

의 그래프와 일치한다.

함수 ㉠의 치역은 $\{y|y \le 4+n\}$이고

함수

$y=\sqrt{9x-18}$ $\cdots$ ㉡

의 치역은 $\{y|y \ge 0\}$이므로

두 함수 ㉠, ㉡은 서로 같을 수 없다.

○ $a>0$인 경우

함수 $y=\sqrt{a^2x}+4$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시키면 함수

$y=\sqrt{a^2(x-m)}+4+n$ $\cdots$ ㉢

의 그래프와 일치한다.

주어진 조건에 의하여 함수 ㉢은 함수

$y=\sqrt{9(x-2)}$

와 같아야 하므로

$a^2=9$, $m=2$, $4+n=0$

풀면

$a=3$, $m=2$, $n=-4$

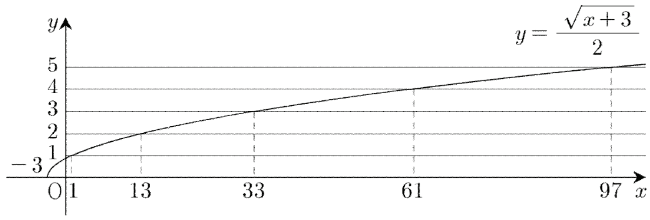
$\therefore$ $a+m+n=1$

답 ①

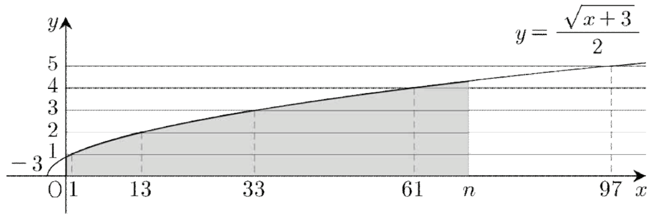
B065 | 답 65

[풀이]

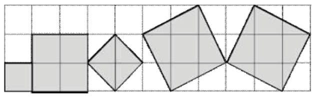
함수 $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{2}$의 그래프는



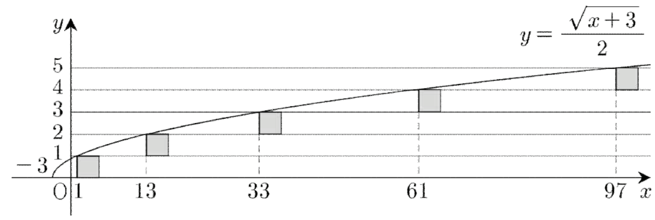
문제에서 주어진 부등식의 영역을 좌표평면에 나타내면



조건 (가), (나)를 만족시키는 정사각형은 다음과 같다.



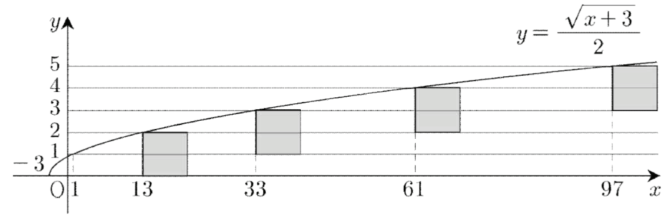
○ 한 변의 길이가 1인 정사각형의 경우



$x \le n$일 때,

y의 범위	정사각형의 개수
$0 \le y \le 1$	$n-1$
$1 \le y \le 2$	$n-13$
$2 \le y \le 3$	$n-33$
$3 \le y \le 4$	$n-61$
$4 \le y \le 5$	$n-97$

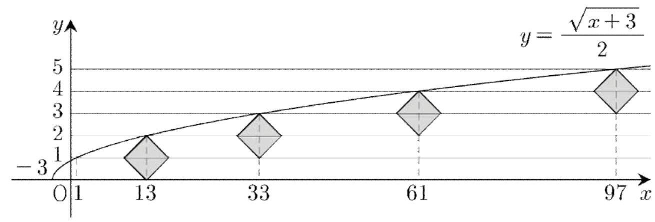
○ 한 변의 길이가 2인 정사각형의 경우



$x \le n$일 때,

y의 범위	정사각형의 개수
$0 \le y \le 2$	$n-14$
$1 \le y \le 3$	$n-34$
$2 \le y \le 4$	$n-62$
$3 \le y \le 5$	$n-98$

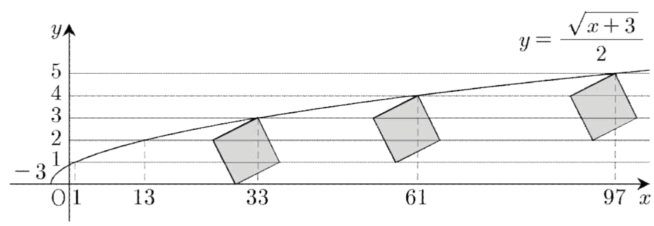
○ 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정사각형의 경우



$x \le n$일 때,

y의 범위	정사각형의 개수
$0 \le y \le 2$	$n-13$
$1 \le y \le 3$	$n-33$
$2 \le y \le 4$	$n-61$
$3 \le y \le 5$	$n-97$

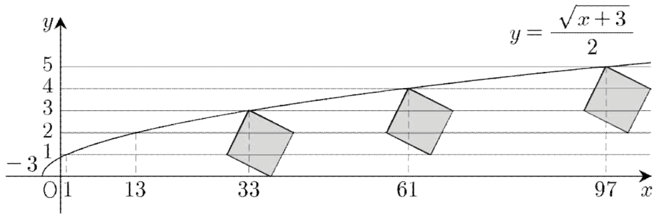
○ 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$인 정사각형의 경우 ( )



$x \le n$일 때,

y의 범위	정사각형의 개수
$0 \le y \le 3$	$n-33$
$1 \le y \le 4$	$n-61$
$2 \le y \le 5$	$n-97$

○ 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$인 정사각형의 경우 (◇)



$x \le n$일 때,

y의 범위	정사각형의 개수
$0 \le y \le 3$	$n-34$
$1 \le y \le 4$	$n-62$
$2 \le y \le 5$	$n-98$

98 이상 141 이하의 자연수 n에 대하여
$x \le n$, $y \le 5$일 때,
문제에서 주어진 영역에 속하는 정사각형의 개수는
$f(n)=19n-1002$
$f(98)=860$이므로 n은 97 이하의 자연수이다.
62 이상 97 이하의 자연수 n에 대하여
$x \le n$, $y \le 4$일 때,
문제에서 주어진 영역에 속하는 정사각형의 개수는
$f(n)=14n-515$
부등식 $f(n) \le 400$을 풀면
$\therefore\ n \le 65.4$
따라서 자연수 n의 최댓값은 65이다.
답 65

C. 수열

1	②	**2**	④	**3**	①	**4**	②	**5**	②
6	②	**7**	④	**8**	⑤	**9**	64	**10**	④
11	①	**12**	31	**13**	②	**14**	⑤	**15**	④
16	③	**17**	②	**18**	15	**19**	38	**20**	32
21	15	**22**	12	**23**	19	**24**	②	**25**	39
26	21	**27**	④	**28**	10	**29**	26	**30**	22
31	①	**32**	⑤	**33**	③	**34**	11	**35**	7
36	3	**37**	③	**38**	①	**39**	④	**40**	①
41	⑤	**42**	②	**43**	④	**44**	④	**45**	①
46	10	**47**	⑤	**48**	35	**49**	①	**50**	196
51	③	**52**	16	**53**	①	**54**	①	**55**	②
56	③	**57**	10.25	**58**	④	**59**	⑤	**60**	25
61	③	**62**	128	**63**	25	**64**	108	**65**	64
66	15	**67**	④	**68**	10	**69**	⑤	**70**	①
71	①	**72**	①	**73**	③	**74**	③	**75**	20
76	④	**77**	②	**78**	③	**79**	①	**80**	96
81	②	**82**	②	**83**	③	**84**	63	**85**	①
86	④	**87**	④	**88**	256	**89**	②	**90**	63
91	④	**92**	14	**93**	①	**94**	⑤	**95**	⑤
96	47	**97**	①	**98**	39	**99**	⑤	**100**	511
101	332	**102**	42	**103**	①	**104**	④	**105**	13
106	94	**107**	①	**108**	5	**109**	②	**110**	100
111	④	**112**	310	**113**	⑤	**114**	②	**115**	11
116	250	**117**	88	**118**	④	**119**	③	**120**	①
121	④	**122**	⑤	**123**	②	**124**	③	**125**	②
126	420	**127**	①	**128**	②	**129**	345	**130**	④
131	⑤	**132**	110	**133**	①	**134**	11	**135**	④
136	④	**137**	19	**138**	④	**139**	150	**140**	29
141	①	**142**	⑤	**143**	②	**144**	④	**145**	④
146	④	**147**	③	**148**	④	**149**	①	**150**	56
151	46	**152**	④	**153**	③	**154**	④	**155**	156
156	②	**157**	④	**158**	30	**159**	②	**160**	21
161	②	**162**	39	**163**	①	**164**	②	**165**	513
166	23	**167**	①	**168**	255	**169**	256	**170**	8
171	⑤	**172**	④	**173**	②	**174**	③	**175**	②
176	②	**177**	④	**178**	⑤	**179**	⑤		

C001 | 답 ②

[풀이]

자연수 n에 대하여 주어진 수열에서 n자리 자연수의 개수는 3^n이다.

3의 거듭제곱은 각각

$3^1=3,\ 3^2=9,\ 3^3=27,\ 3^4=81,\ 3^5=243,\ \cdots$

이므로

$3^1+3^2+3^3+3^4=120<200$

$3^1+3^2+3^3+3^4+3^5=363>200$

주어진 수열의 제200항은 5자리 자연수 중에서 $80(=200-120)$번째 수이다.

그런데 5자리 자연수 중에서 1○○○○인 수의 개수는 $81(=3^4)$이다.

$\cdots,\ \underbrace{13332}_{200번째},\ \underbrace{13333}_{201번째},\ \cdots$

따라서 주어진 수열의 제200항은 13332이다.

답 ②

C002 | 답 ④

[풀이]

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+6}=a_n$이므로

$a_1=a_7=a_{13}=a_{19}=a_{25}=\cdots$

$a_2=a_8=a_{14}=a_{20}=a_{26}=\cdots$

$a_3=a_9=a_{15}=a_{21}=a_{27}=\cdots$

$a_4=a_{10}=a_{16}=a_{22}=a_{28}=\cdots$

$a_5=a_{11}=a_{17}=a_{23}=a_{29}=\cdots$

$a_6=a_{12}=a_{18}=a_{24}=a_{30}=\cdots$

① $b_n=a_{2n+1}$인 경우

수열 $\{b_n\}$은

$a_3,\ a_5,\ a_7,\ a_9,\ a_{11},\ a_{13},\ \cdots$

다시 쓰면

$a_3,\ a_5,\ a_1,\ a_3,\ a_5,\ a_1,\ \cdots$

수열 $\{b_n\}$은 $a_3,\ a_5,\ a_1$이 번갈아가면서 나타난다.

② $b_n=a_{3n+1}$인 경우

수열 $\{b_n\}$은

$a_4,\ a_7,\ a_{10},\ a_{13},\ a_{16},\ a_{19},\ \cdots$

다시 쓰면

$a_4,\ a_1,\ a_4,\ a_1,\ a_4,\ a_1,\ \cdots$

수열 $\{b_n\}$은 $a_4,\ a_1$이 번갈아가면서 나타난다.

③ $b_n=a_{4n+1}$인 경우

수열 $\{b_n\}$은

$a_5,\ a_9,\ a_{13},\ a_{17},\ a_{21},\ a_{25},\ \cdots$

다시 쓰면

$a_5,\ a_3,\ a_1,\ a_5,\ a_3,\ a_1,\ \cdots$

수열 $\{b_n\}$은 $a_5,\ a_3,\ a_1$이 번갈아가면서 나타난다.

④ $b_n=a_{5n+1}$인 경우

수열 $\{b_n\}$은

a_6, a_{11}, a_{16}, a_{21}, a_{26}, a_{31}, $\cdots$

다시 쓰면

a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, $\cdots$

수열 $\{b_n\}$은 a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1이 번갈아가면서 나타난다.

⑤ $b_n = a_{6n+1}$인 경우

수열 $\{b_n\}$은

a_7, a_{13}, a_{19}, a_{25}, a_{31}, a_{37}, $\cdots$

다시 쓰면

a_1, a_1, a_1, a_1, a_1, a_1, $\cdots$

수열 $\{b_n\}$은 a_1이 번갈아가면서 나타난다.

이상에서 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6이 모두 나타나는 수열은 ④ 뿐이다.

답 ④

[참고]

모든 자연수 k에 대하여

① $b_n = a_{2n+1}$인 경우

$n = 3k-2$일 때, $b_{3k-2} = a_{6k-3} = a_3$

$n = 3k-1$일 때, $b_{3k-1} = a_{6k-1} = a_5$

$n = 3k$일 때, $b_{3k} = a_{6k+1} = a_1$

② $b_n = a_{3n+1}$인 경우

$n = 2k-1$일 때, $b_{2k-1} = a_{6k-2} = a_4$

$n = 2k$일 때, $b_{2k} = a_{6k+1} = a_1$

③ $b_n = a_{4n+1}$인 경우

$n = 3k-2$일 때, $b_{3k-2} = a_{12k-7} = a_5$

$n = 3k-1$일 때, $b_{3k-1} = a_{12k-3} = a_3$

$n = 3k$일 때, $b_{3k} = a_{12k+1} = a_1$

④ $b_n = a_{5n+1}$인 경우

$n = 6k-5$일 때, $b_{6k-5} = a_{30k-24} = a_6$

$n = 6k-4$일 때, $b_{6k-4} = a_{30k-19} = a_5$

$n = 6k-3$일 때, $b_{6k-3} = a_{30k-14} = a_4$

$n = 6k-2$일 때, $b_{6k-2} = a_{30k-9} = a_3$

$n = 6k-1$일 때, $b_{6k-1} = a_{30k-4} = a_2$

$n = 6k$일 때, $b_{6k} = a_{30k+1} = a_1$

⑤ $b_n = a_{6n+1}$인 경우

$b_n = a_{6n+1} = a_1$

C003 | 답 ①

[풀이]

$\sqrt{17} - 4 = \dfrac{1}{8 + a_1}$에서

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{17}-4} - 8 = \frac{\sqrt{17}+4}{(\sqrt{17}-4)(\sqrt{17}+4)} - 8 = \sqrt{17} - 4$$

$a_1 = \dfrac{1}{8+a_2}$에서 $a_2 = \dfrac{1}{a_1} - 8 = \sqrt{17} - 4$

$a_2 = \dfrac{1}{8+a_3}$에서 $a_3 = \dfrac{1}{a_2} - 8 = \sqrt{17} - 4$

⋮

일반항 a_n은

$a_n = \sqrt{17} - 4$

$\therefore\ a_{2002} = \sqrt{17} - 4$

답 ①

C004 | 답 ②

[풀이]

[규칙1]과 [규칙2]에 의하여

세 상품 A, B, C는 다음과 같이 진열된다.

9월	㉮	㉯	㉰
1일	A	B	C
2일	A	C	B
3일	B	A	C
4일	B	C	A
5일	A	B	C
⋮	⋮	⋮	⋮

$30 = 4 \times 7 + 2$이므로 9월 30일에

세 상품 A, B, C는 다음과 같이 진열된다.

9월	㉮	㉯	㉰
⋮	⋮	⋮	⋮
28일	B	C	A
29일	A	B	C
30일	A	C	B

답 ②

C005 | 답 ②

[풀이]

주어진 수열에서 1자리 자연수의 개수는 9이다.

~~0~~	1	2	3	4	5	6	7	8	9

주어진 수열에서 2자리 자연수의 개수는 9^2이다.

~~10~~	11	12	13	14	15	16	17	18	19
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
~~90~~	91	92	93	94	95	96	97	98	99

주어진 수열에서 3자리 자연수의 개수는 9^3이다.

~~100~~	~~101~~	~~102~~	~~103~~	~~104~~	~~105~~	~~106~~	~~107~~	~~108~~	~~109~~
~~110~~	111	112	113	114	115	116	117	118	119
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
~~190~~	191	192	193	194	195	196	197	198	199
				⋮					
~~900~~	~~901~~	~~902~~	~~903~~	~~904~~	~~905~~	~~906~~	~~907~~	~~908~~	~~909~~
~~910~~	911	912	913	914	915	916	917	918	919
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
~~990~~	991	992	993	994	995	996	997	998	999

9의 거듭제곱은

$9^1=9,\ 9^2=81,\ 9^3=729,\ \cdots$

이므로

$9+9^2+9^3=819$

주어진 수열에서 999는 제819항이다.

주어진 수열은

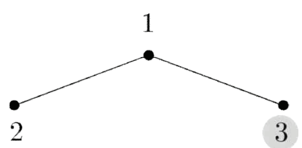
$\cdots,\ 998,\ 999,\ 1111,\ 1112,\ \cdots$

주어진 수열에서 1111은 제820항이다.

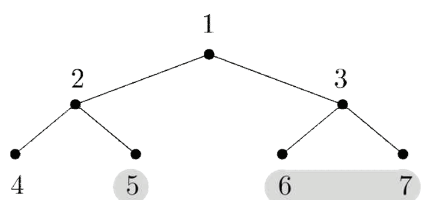
답 ②

C006 | 답 ②

[풀이]



$N(2,\ 3)=2$

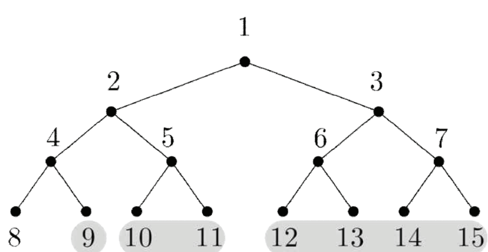


$N(4,\ 5)=2$

$N(4,\ 6)=N(4,\ 7)=4$

이므로

$N(4,\ 5)+N(4,\ 6)+N(4,\ 7)=2\cdot 1+4\cdot 2^1$



$N(8,\ 9)=2$

$N(8,\ 10)=N(8,\ 11)=4$

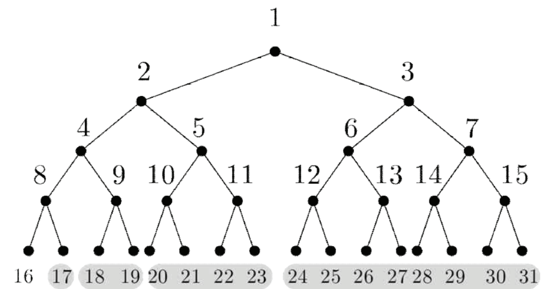
$N(8,\ 12)=N(8,\ 13)=N(8,\ 14)$

$=N(8,\ 15)=6$

이므로

$N(8,\ 9)+N(8,\ 10)+\ \cdots\ +N(8,\ 15)$

$=2\cdot 1+4\cdot 2^1+6\cdot 2^2$



$N(16,\ 17)=2$

$N(16,\ 18)=N(16,\ 19)=4$

$N(16,\ 20)=N(16,\ 21)=N(16,\ 22)$

$=N(16,\ 23)=6$

$N(8,\ 24)=N(8,\ 25)=\ \cdots$

$=N(16,\ 31)=8$

이므로

$N(16,\ 17)+N(16,\ 18)+\ \cdots\ +N(16,\ 31)$

$=2\cdot 1+4\cdot 2^1+6\cdot 2^2+8\cdot 2^3$

⋮

다음과 같이 추론 할 수 있다.

모든 자연수 n에 대하여

$N(2^n,\ 2^n+1)+N(2^n,\ 2^n+2)+\ \cdots$

$+N(2^n,\ 2^{n+1}-1)$

$=2\cdot 1+4\cdot 2^1+\ \cdots\ +(2n-2)\cdot 2^{n-2}+2n\cdot 2^{n-1}$

$\therefore\ N(32,\ 33)+N(32,\ 34)+\ \cdots\ +N(32,\ 63)$

$=2\cdot 1+4\cdot 2^1+6\cdot 2^2+8\cdot 2^3+10\cdot 2^4=258$

답 ②

C007 | 답 ④

[풀이]

ㄱ. (참)

$\left[\dfrac{n}{k}\right]=1$ 에서 $1\le \dfrac{n}{k}<2$

정리하면

$\dfrac{n}{2}<k\le n$ $\cdots(*)$

n이 짝수일 때, $(*)$를 만족시키는 k의 개수는

$\dfrac{n}{2}\left(=n-\dfrac{n}{2}\right)$

n이 홀수일 때, $(*)$를 만족시키는 k의 개수는

$\dfrac{n+1}{2}=\left(n-\dfrac{n-1}{2}\right)$

따라서 n행에서 그 값이 1인 항의 개수는

$\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$

ㄴ. (참)

$\left[\dfrac{100}{k}\right]=3$에서 $3 \le \dfrac{100}{k} < 4$

정리하면

$25=\dfrac{100}{4} < k \le \dfrac{100}{3} \approx 33.3$

이 부등식을 만족시키는 자연수 k만을 원소로 하는 집합은 $\{26,\ 27,\ 28,\ 29,\ 30,\ 31,\ 32,\ 33\}$

따라서 100행에서 그 값이 3인 항의 개수는 8이다.

ㄷ. (거짓)

3 이상의 자연수 n에 대하여

$\left[\dfrac{n}{3}\right]=5$에서 $5 \le \dfrac{n}{3} < 6$

정리하면

$15 \le n < 18$

이 부등식을 만족시키는 자연수 n만을 원소로 하는 집합은 $\{15,\ 16,\ 17\}$

따라서 3열에서 그 값이 5인 항의 개수는 3이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④

[참고]

발견적 추론으로 ㄱ과 ㄷ의 참, 거짓을 판단할 수도 있다. 문제에서 주어진 표를 좀 더 쓰면 다음과 같다.

	1열	2열	3열	4열	5열	6열	7열	8열	⋯
1행	1								
2행	2	1							
3행	3	1	1						
4행	4	2	1	1					
5행	5	2	1	1	1				
6행	6	3	2	1	1	1			
7행	7	3	2	1	1	1	1		
8행	8	4	2	2	1	1	1	1	
9행	9	4	3	2	1	1	1	1	
10행	10	5	3	2	2	1	1	1	
11행	11	5	3	2	2	1	1	1	
12행	12	6	4	3	2	2	1	1	
⋮				⋮					⋱

ㄱ. (참)

1행에서 그 값이 1인 항은 1개,

2행에서 그 값이 1인 항은 1개,

3행에서 그 값이 1인 항은 2개,

4행에서 그 값이 1인 항은 2개,

5행에서 그 값이 1인 항은 3개,

6행에서 그 값이 1안 항은 3개,

⋮

모든 자연수 k에 대하여

$2k-1$행에서 그 값이 1인 항은 k개고,

$2k$행에서 그 값이 1인 항은 k개다.

따라서 n행에서 그 값이 1인 항은 $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$개다.

ㄷ. (거짓)

1열의 수를 1행부터 차례대로 나열하면

1, 2, 3, 4, 5, 6, ⋯

2열의 수를 2행부터 차례대로 나열하면

1, 1, 2, 2, 3, 3, ⋯

3열의 수를 3행부터 차례대로 나열하면

1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, ⋯

⋮

n열의 수를 n행부터 차례대로 나열하면

$\underbrace{1,\ 1,\ \cdots,\ 1}_{n개},\ \underbrace{2,\ 2,\ \cdots,\ 2}_{n개},\ \cdots,\ \underbrace{n,\ n,\ \cdots,\ n}_{n개},\ \cdots$

따라서 3열에서 그 값이 5인 항은 3개다.

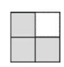
C008 | 답 ⑤

[풀이1]

수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

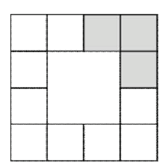
a_n=([그림n]에서 흰 타일의 개수)−([그림n]에서 검은 타일의 개수)

[그림1]에서



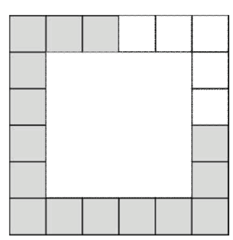
$a_1=-2$

[그림2]에서

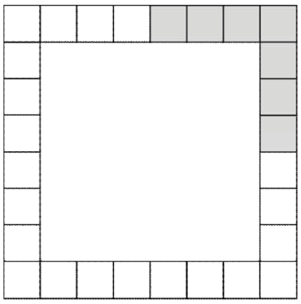


$a_2=a_1+6=4$

[그림3]에서

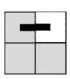


$a_3 = a_2 - 10 = -6$
[그림4]에서

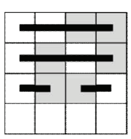


$a_4 = a_3 + 14 = 8$
$\vdots$
수열 a_n의 일반항은 $a_n = (-1)^n \times 2n(n \geq 1)$
[그림n]에서 전체 타일의 개수는 $(2n)^2$이므로
$400 = (2 \times 10)^2$에서 $n = 10$이다.
$a_{10} = 20$이므로 [그림10]에서 흰 타일의 개수는 검은 타일의 개수보다 20 개 많다.
답 ⑤

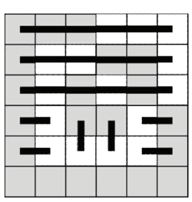
[풀이2]
자연수 n에 대하여 [그림n]에서 흰 타일의 개수와 검은 타일의 개수를 각각 a_n, b_n이라고 하자.
[그림1]에서



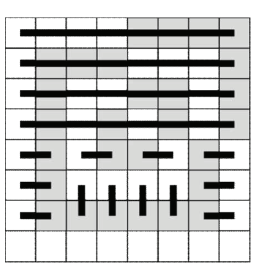
$a_1 + b_1 = 2^2$, $b_1 - a_1 = 2$
[그림2]에서



$a_2 + b_2 = 4^2$, $a_2 - b_2 = 4$
[그림3]에서

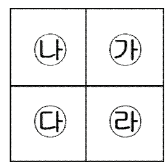


$a_3 + b_3 = 6^2$, $b_3 - a_3 = 6$
[그림4]에서



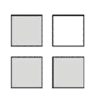
$a_4 + b_4 = 8^2$, $a_4 - b_4 = 8$
$\vdots$
자연수 k에 대하여
$n = 2k - 1$일 때, [그림n]에서
$a_n + b_n = (4k-2)^2$, $b_n - a_n = 4k - 2$
$n = 2k$일 때, [그림n]에서
$a_n + b_n = (4k)^2$, $a_n - b_n = 4k$
$400 = (4 \times 5)^2$이므로 $n = 10(k = 5)$이다.
[그림10]에서 흰 타일의 개수는 검은 타일의 개수보다 20개 많다.
답 ⑤

[풀이3]
[그림n]에서 주어진 도형을 4개의 영역으로 나누고, 우측상단에서 시작하여 시계반대방향으로 4개의 영역을 각각 ㉮, ㉯, ㉰, ㉱라고 하자. 단, 각 영역에는 n^2개의 타일이 붙어있다.

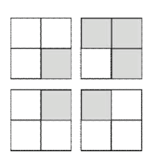


[그림n]

영역 ㉮에 붙어 있는 흰 타일의 개수와 영역 ㉯에 붙어 있는 검은 타일의 개수는 같고, 영역 ㉮에 붙어 있는 검은 타일의 개수와 영역 ㉯에 붙어 있는 흰 타일의 개수는 같다.
따라서 두 영역 ㉮와 ㉯에 붙어있는 흰 타일의 개수와 검은 타일의 개수는 같다.
영역 ㉰에 붙어 있는 흰 타일의 개수와 영역 ㉱에 붙어 있는 흰 타일의 개수는 같고, 영역 ㉰에 붙어 있는 검은 타일의 개수와 영역 ㉱에 붙어 있는 검은 타일의 개수는 같다.
수열 $\{a_n\}$을
a_n=([그림n]에서 흰 타일의 개수)−([그림n]에서 검은 타일의 개수)
으로 정의하면
$\frac{a_n}{2}$=([그림n]의 영역 ㉰에 붙어 있는 흰 타일의 개수)−([그림n]의 영역 ㉰에 붙어 있는 검은 타일의 개수)
[그림1]에서

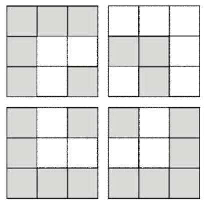


$a_1 = 2(-1) = -2$
[그림2]에서



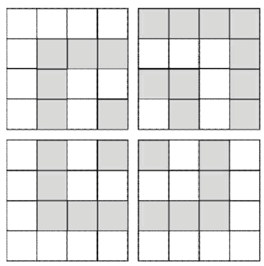
$a_2=2(-1+3)=4$

[그림3]에서



$a_3=2(-1+3-5)=-6$

[그림4]에서



$a_4=2(-1+3-5+7)=8$

⋮

수열 a_n의 일반항은

$a_n=(-1)^n\times 2n(n\geq 1)$

[그림n]에서 전체 타일의 개수는 $(2n)^2$이므로

$400=(2\times 10)^2$에서 $n=10$이다.

$a_{10}=20$이므로 [그림10]에서 흰 타일의 개수는 검은 타일의 개수보다 20 개 많다.

답 ⑤

C009 | 답 64

[풀이]

○ 우선 m을 결정하자.

자연수 i에 대하여 원 O_i 위에 적히는 수를 가장 작은 수부터 크기순으로 나열하면

$8i-7,\ 8i-6,\ \cdots,\ 8i-1,\ 8i$

$475=8\times 60-5$이므로

원 O_{60} 위에 적히는 수를 가장 작은 수부터 크기순으로 나열하면

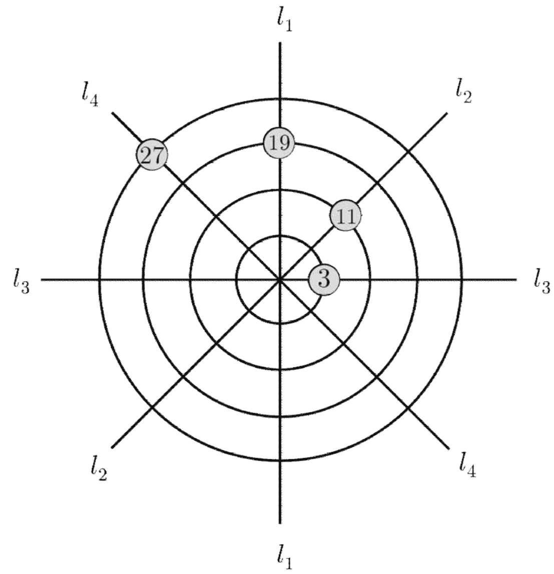
473, 474, $\boxed{475}$, 476, 477, 478, 479, 480

$\therefore\ m=60$

○ 이제 n을 결정하자.

자연수 j에 대하여 원 O_j 위에 적히는 수 중 8로 나누어 나머지가 3이 되는 수가 놓인 직선은 다음과 같다.

수	3	11	19	27	35	43	51	59	⋯
원	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_7	O_8	⋯
직선	l_3	l_2	l_1	l_4	l_3	l_2	l_1	l_4	⋯



$60=4\times 15+0$이므로

수	⋯	451	459	467	475	⋯
원	⋯	O_{57}	O_{58}	O_{59}	O_{60}	⋯
직선	⋯	l_3	l_2	l_1	l_4	⋯

$\therefore\ n=4$

$\therefore\ m+n=64$

답 64

C010 | 답 ④

[풀이]

ㄱ. (참)

8의 양의 약수는 1, 2, 4, 8이므로

$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=4,\ a_4=8$로 두면

$x_8=(-1)^1+(-1)^2+(-1)^4+(-1)^8$

$=-1+1+1+1=2$

ㄴ. (거짓)

3^m의 양의 약수는 $1,\ 3,\ 3^2,\ \cdots,\ 3^m$이므로

$a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=3^2,\ \cdots,\ a_{m+1}=3^m$으로 두면

$x_n=(-1)^1+(-1)^3+\ \cdots\ +(-1)^{3^m}$

$=(-1)\times(m+1)=-m-1$

ㄷ. (참)

10^m의 양의 약수는 아래 표와 같다.

$\times$	2^0	2^1	2^2	⋯	2^m
5^0	2^05^0	2^15^0	2^25^0		2^m5^0
5^1	2^05^1	2^15^1	2^25^1		2^m5^1
5^2	2^05^2	2^15^2	2^25^2		2^m5^2
⋮				⋱	
5^m	2^05^m	2^15^m	2^25^m		2^m5^m

10^m의 양의 약수 중에서

홀수와 짝수의 개수는 각각 $m+1$, $m(m+1)$이므로
x_n은 $m+1$개의 -1과 $m(m+1)$개의 1을 합한 값이다.
$x_n=m(m+1)-(m+1)=m^2-1$
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.
답 ④

C011 | 답 ①

[풀이]

점 P_1은 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=\frac{3}{4}x$의 두 교점 중에서 제1사분면의 점이다.
원과 직선의 방정식을 연립하여 점 P_1의 좌표를 구하면
$\mathrm{P}_1\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$
점 P_2는 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=0$의 교점 중에서 x좌표가 양수인 점이다.
원과 직선의 방정식을 연립하여 점 P_2의 좌표를 구하면
$\mathrm{P}_2(1,\ 0)$
점 P_3은 원 $x^2+y^2=4$와 직선 $y=0$의 교점 중에서 x좌표가 양수인 점이다.
원과 직선의 방정식을 연립하여 점 P_3의 좌표를 구하면
$\mathrm{P}_3(2,\ 0)$
점 P_4는 원 $x^2+y^2=4$와 직선 $y=\frac{3}{4}x$의 두 교점 중에서 제1사분면의 점이다.
원과 직선의 방정식을 연립하여 점 P_4의 좌표를 구하면
$\mathrm{P}_4\left(\frac{8}{5},\ \frac{6}{5}\right)$
⋮
모든 자연수 n에 대하여
점 P_{4n-3}은 원 $x^2+y^2=(2n-1)^2$과 직선 $y=\frac{3}{4}x$의 두 교점 중에서 제1사분면 위의 점이다.
점 P_{4n-2}은 원 $x^2+y^2=(2n-1)^2$과 직선 $y=0$의 두 교점 중에서 x좌표가 양수인 점이다.
점 P_{4n-1}은 원 $x^2+y^2=(2n)^2$과 직선 $y=0$의 두 교점 중에서 x좌표가 양수인 점이다.
점 P_{4n}은 원 $x^2+y^2=(2n)^2$과 직선 $y=\frac{3}{4}x$의 두 교점 중에서 제1사분면 위의 점이다.
$25=4\times7-3$이므로, 점 P_{25}는 원 $x^2+y^2=13^2$과 직선 $y=\frac{3}{4}x$의 두 교점 중에서 제1사분면 위의 점이다.
원과 직선의 방정식을 연립하여 점 P_{25}의 좌표를 구하면
$\mathrm{P}_{25}\left(\frac{52}{5},\ \frac{39}{5}\right)$
따라서 구하는 값은 $\frac{52}{5}$이다.
답 ①

[참고]
점 P_n의 좌표를 $(x_n,\ y_n)$이라고 하자.
자연수 k에 대하여
$x_{4k-3}=(2k-1)\times x_1$
$x_{4k-2}=(2k-1)\times x_2$
$x_{4k-1}=2k\times x_2$
$x_{4k}=2k\times x_1$

C012 | 답 31

[풀이]

$a_m=3$이므로 $\frac{m}{3^k}$이 자연수가 되게 하는 음이 아닌 정수 k의 최댓값은 3이다.
자연수 m을 다음과 같이 두자.
$m=3^3\times p$
(단, p는 3의 배수가 아닌 자연수)
$\frac{2m}{3^k}=3^{3-k}\times2p$가 정수가 되게 하는 음의 아닌 정수 k의 최댓값은 3이므로
$a_{2m}=3$
$\frac{3m}{3^k}=3^{4-k}\times p$가 정수가 되게 하는 음의 아닌 정수 k의 최댓값은 4이므로
$a_{3m}=4$
⋮
마찬가지의 방법으로
$a_m=a_{2m}=a_{4m}=a_{5m}=a_{7m}=a_{8m}=3$
$a_{3m}=a_{6m}=4$
$a_{9m}=5$
$\therefore\ a_m+a_{2m}+a_{3m}+\cdots+a_{9m}=31$
답 31

C013 | 답 ②

[풀이]

ㄱ. (참)
a, n이 자연수이면 an도 자연수이므로
(자연수는 곱셈에 대하여 닫혀있다.)
직선 $y=ax$는
$(1,\ a)$, $(2,\ 2a)$, $(3,\ 3a)$, $\cdots$, $(n,\ an)$, $\cdots$
의 무수히 많은 격자점을 지난다.