대학수학능력시험 대비 포카칩 100제 (나형)

정답 및 해설

제작자 소개

문항 제작

이덕영 (연세대학교 수학과)
(1~17, 21~52, 64~93)
문호진 (인하대학교 의예과)
(12, 18~20, 53~63, 94~100)

해설 제작

고광현, 고한영, 곽호연, 김태준, 문호진, 우현길, 이덕영, 이동솔, 진겸, 최지훈, 홍용기

해설을 시작하면서...

이번 포카칩 N제는 2009 개정 7차교육과정 대학수학능력시험을 대비할 수 있도록 만들어졌습니다. 대학수학능력시험 대비 뿐만 아니라 내신, 논술 시험을 대비할 때에도 도움이 될 수 있게끔 구성하였습니다.

문제 수는 적지만 3점짜리 수준 중 약간 어려운 문항부터 30번급 매우 어려운 문항까지 골고루 구성되어 있습니다. 다만 배점은 너무 믿지 마시기 바랍니다. 1등급 커트라인 70~80점 모의고사 기준으로 구성했을 때를 기준으로 한 것이므로, 3점짜리이지만 상당한 수준의 문제인 것도 있을 것입니다.

고난도 문항만을 선별하다보면 추론능력이나 문제해결능력 위주의 문항 선별이 될 수 있어서 중간중간 의도적으로 계산능력이나 이해능력을 물어보는 문항도 포함시켰습니다.
따라서 쉬운 문항일지라도 풀어보면 도움 되겠거니 생각하시고 모든 문항을 꼼꼼히 해결하시기 바랍니다. 또한 가형 응시자들은 나형 100제도 가급적 풀어볼 것을 강력히 권장합니다. 사고력은 수능 시험 범위가 아닌 문항에서도 충분히 키울 수 있으며 이뿐만 아니라 단원간 통합 문항 출제에도 대비할 필요가 있습니다.

문항을 선별할 때, 2010~2016년에 만들어진 포카칩 모의평가에 수록된 모든 문항 중에서 2014학년도 포카칩 모의평가에 수록된 문항을 제외하고 문항 선별을 하였으며 2014학년도 포카칩 모의평가에 수록된 문항들은 차후 어떠한 경로로든 만나볼 수 있게 하겠습니다. 그때에도 여기 있는 N제는 추가 연습교재로 충분히 활용할 수 있을 것입니다.

빠른 정답

1	26	**41**	④	**81**	③
2	②	**42**	①	**82**	②
3	⑤	**43**	④	**83**	86
4	③	**44**	②	**84**	75
5	⑤	**45**	③	**85**	④
6	②	**46**	21	**86**	④
7	20	**47**	50	**87**	37
8	55	**48**	①	**88**	⑤
9	⑤	**49**	⑤	**89**	144
10	①	**50**	③	**90**	②
11	③	**51**	42	**91**	140
12	②	**52**	①	**92**	⑤
13	4	**53**	③	**93**	①
14	2	**54**	③	**94**	⑤
15	8	**55**	④	**95**	13
16	46	**56**	②	**96**	①
17	46	**57**	28	**97**	④
18	192	**58**	③	**98**	①
19	①	**59**	⑤	**99**	16
20	70	**60**	152	**100**	65
21	②	**61**	④		
22	③	**62**	②		
23	34	**63**	56		
24	④	**64**	⑤		
25	⑤	**65**	⑤		
26	⑤	**66**	144		
27	100	**67**	38		
28	185	**68**	①		
29	⑤	**69**	49		
30	②	**70**	⑤		
31	①	**71**	①		
32	①	**72**	①		
33	⑤	**73**	②		
34	14	**74**	③		
35	16	**75**	28		
36	③	**76**	①		
37	④	**77**	④		
38	6	**78**	④		
39	7	**79**	⑤		
40	②	**80**	③		

정답 및 해설

해설

※ 일부 문항의 해설은 구 교육과정의 표기법을 활용한 것도 있습니다. 해설을 보실 때 참고하시기 바랍니다.
(예를 들어, $x\to 0+$를 $x\to +0$으로 표기했을 수 있음)

※ 해설지는 출제자가 거의 관여하지 않았으며 출제자의 의도와 완벽히 일치하지는 않을 수 있습니다.

1. $f(x)=\begin{cases} x-1 & (x\text{는 짝수}) \\ 2x & (x\text{는 홀수}) \end{cases}$ 이면

$(f\circ f)(x)=\begin{cases} 2(x-1) & (x\text{는 짝수}) \\ 2x-1 & (x\text{는 홀수}) \end{cases}$이다.

$f(f(x))=1$을 만족시키는 x의 값은 1이다. : $a_1=1$

$f(f(x))=2$를 만족시키는 x의 값은 2이다. : $a_2=1$

$f(f(x))=3$을 만족시키는 실근은 존재하지 않는다. : $a_3=0$

$f(f(x))=4$을 만족시키는 실근은 존재하지 않는다. : $a_4=0$

$\vdots$

$f(f(x))=n$을 만족시키는 실근의 개수는 $n=4k-3$꼴일 때 1개, $n=4k-2$꼴일 때 1개, $n=4k-1$꼴일 때 0개, $n=4k$꼴일 때 0개

$\sum_{n=1}^{50}a_n=26$이다.

2. ㄱ. 정수가 아닌 유리수는 제곱해도 정수가 아닌 유리수이다. (거짓)

ㄴ. $\log\frac{1}{10}$은 유리수이다. (참)

ㄷ. 먼저, 정수가 아닌 양의 유리수 $\frac{q}{p}$에 대하여 $2^{\frac{q}{p}}$가 무리수임을 보이자. 유리수라고 가정하면,

$2^{\frac{q}{p}}=\frac{s}{r}$이다. 양변에 p제곱을 하면 $2^q=\frac{s^p}{r^p}$(r과 s는 서로소)이다.

따라서 $2^q r^p=s^p$이다. $2^q r^p$이 짝수이므로, s^p는 짝수이다.

따라서 s는 짝수이다. 또한 s가 짝수이면 $s=2^t\times m$꼴로 표현가능하다. (단, t는 자연수이고 m은 홀수)

r이 짝수이면 r과 s는 서로소가 아니므로, r은 홀수이다.

r이 홀수이면 $2^q=2^{tp}$이다. 따라서 $q=tp$이다.

따라서 p와 q는 서로소가 아니다. (모순)

결론 : 정수가 아닌 양의 유리수 $\frac{q}{p}$에 대하여 $2^{\frac{q}{p}}$가 무리수이다.

$2^{\frac{q}{p}}$가 무리수이면 $2^{-\frac{q}{p}}$도 무리수이므로 모든 정수가 아닌 유리수 x에 대하여 2^x는 무리수이다. (거짓)

3. ㄱ. $A_1=\varnothing$이므로 $A_2=\{\varnothing\}$이고,

$A_3=\{\{\varnothing\}\}\cup\{\varnothing\}=\{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}$이다. (참)

ㄴ. $A_{n+1}=\{A_n\}\cup A_n$이므로 $A_n\subset A_{n+1}$이다.

$A_1\subset A_2\subset A_3\subset\cdots\subset A_{2017}$이다. (참)

ㄷ. $A_{n+1}=\{A_n\}\cup A_n$이므로 $A_n\in A_{n+1}$이다.

따라서, $A_{2016}\in A_{2017}$이다.

$A_k\in A_{2017}$ $(1<k<2017)$이라 할 때, $A_{k-1}\in A_{2017}$임을 보이자.

$A_{k-1}\in A_k$이고 $A_k\subset A_{2017}$이므로 $A_{k-1}\in A_{2017}$임을 알 수 있다.

따라서, 2017보다 작은 모든 자연수 k에 대하여 $A_k\in A_{2017}$이다.

(참)

4. $a_n=a_1+n-1$이다. $|b_{k+1}|<|b_k|$가 $k=14$에서만 성립하므로

$|b_{15}|<|b_{14}|$이다. 따라서 $\left|\frac{b_{15}}{b_{14}}\right|=|a_{15}|<1$이다.

$-1<a_{15}<0$이면, $|b_{15}|<|b_{14}|$이고 $|b_{16}|<|b_{15}|$이므로 모순.

$0<a_{15}<1$이면 $|b_{15}|<|b_{14}|$이고 $|b_{14}|<|b_{13}|$이므로 모순.

따라서 $a_{15}=0$이다.

$a_n=n-15$, $\sum_{n=1}^{30}a_n=\frac{30\times 31}{2}-15\times 30$

$=\frac{30}{2}\times(31-30)\ =\ 15\quad \therefore\sum_{n=1}^{30}a_n=15$

5. 주어진 식 $(2na_2-1)(2na_{n+1}-1)=1$의 좌변을 전개하면

$4n^2a_na_{n+1}-2n(a_n+a_{n+1})+1=1$ $(n\geqq 1)$이고, 이 식을 정리하면,

$\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}=2n$ $(n\geqq 1)$이다. 따라서, 모든 자연수 k에 대하여

$\frac{1}{a_1}+\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{2k-1}}+\frac{1}{a_{2k}}\right)=2k^2\cdots$ (ㄱ)

이고,

$\frac{1}{a_1}+\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{2k}}+\frac{1}{a_{2k+1}}\right)=$ (가) $\cdots$(ㄴ)

(가)$=\frac{1}{2}+2\sum_{n=1}^{k}2n=\frac{1}{2}+2k(k+1)$

$=\frac{1}{2}(2k+1)^2=f(k)$

(ㄱ)$-f(k-1)=\frac{1}{a_{2k}}=2k-\frac{1}{2}=\frac{4k-1}{2}$이므로

$\therefore$ (나)$=\frac{1}{a_{2k}}=\frac{4k-1}{2}$

$f(7)+g(13)=\frac{225}{2}+\frac{51}{2}=138$

6. $\frac{T_1}{T_2}=\frac{E_1}{E_2}=\frac{1}{3}$ 이므로 $T_2=3T_1$ 이다.

$9E_1^2=3^3\times(\log_9T_1+1)$, $9E_2^2=6^3\times(\log_9T_2+1)$에서

양변을 나누면 $\frac{9E_1^2}{9E_2^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{\log_9T_1+1}{\log_9T_2+1}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{\log_9T_1+1}{\log_9 3T_1+1}$, $\frac{8}{9}=\frac{\log_9T_1+1}{\log_9 3T_1+1}$

$\therefore\log_9T_1=3$, $9^{\log_9T_1}=9^3$, $T_1=9^3=3^6$

7. $a_n=r^{n-1}$ 이므로

$\frac{a_5+a_7}{a_2+a_4}=\frac{r^4+r^6}{r+r^3}=r^3=4$

$\therefore a_4+a_7=20$

정답 및 해설

8.

sol)

규칙에 의해 수열을 한 번 나열해보면,

$\{a_n\}$: $7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, \boxed{k, k-1, \cdots, 2, 1, 0}, \boxed{k, k-1, \cdots, 2, 1, 0}, \cdots$

과 같이 0까지 줄어들었다가 k로 리필되는 패턴이 아니라

$\{a_n\}$: $7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, \boxed{k-1, \cdots, 0, -1}, \boxed{k-1, \cdots, 0, -1}, \cdots$

으로 나옵니다. 그러면 처음 7을 다 소진하고 나서, 제 10항 이후로는 $(k+1)$개씩 주기수열을 이루는 모양이네요. 그러므로 $23-16=k+1$임을 알 수 있으니, $k=6$이 됩니다. 그러면

$\{a_n\}$: $7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, \boxed{5, \cdots, 2, 1, 0, -1}, \boxed{5, \cdots, 2, 1, 0, -1}, \cdots$

이 되고, $20=9+7+4$에서 $\sum_{n=1}^{20} a_n = 27+14+14=55$가 나옵니다.

9. 등차수열 합 공식 $S_n = \dfrac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}$에서 $a_1=2$, $n=9$, $S_9=54$를 대입하면 $d=1$임을 알 수 있다.
다시 등차수열 공식에 a_1, d, n을 대입하면 $S_8=44$임을 알 수 있다.

10. 두 수열의 합과 차를 새로운 수열로 정의하십시오. a_n+b_n은 지문에서 주어진 바와 같이 초항이 5이고 공비가 5인 등비수열이므로 $a_n+b_n=5^n$가 됩니다. (가)는 5^n입니다. a_n-b_n은 지문에서 주어진 바와 같이 초항이 1이고 공차가 2인 등차수열이므로,
(나)$=a_n-b_n=2n-1$입니다. 이제 대입하시면 됩니다.
답은 5^{10}입니다.

11. ㄱ. $x \in A$이면 $x \in B$이고, $x \in B$이면 $x \in C$이다.
따라서 $A \subset C$이다. (참)
ㄴ. $A \subset B \cap C$는 $x \in A$이면 $x \in B \cap C$라는 뜻이다.
$x \in B \cap C \Leftrightarrow x \in B$이고 $x \in C$이므로,
$A \subset B \cap C$이면 $A \subset B$이고 $B \subset C$이다. (참)
ㄷ. (반례) $A=\{1, 3, 4\}$, $B=\{1, 2, 3\}$, $C=\{2, 3, 4\}$라 하면,
$A \subset B \cup C$이지만 $A \not\subset B$, $A \not\subset C$이다. (거짓)

12. a_9까지는 숫자가 계속 증가하다가, a_{10}에서 각자리 수의 합이 1이므로, a_9일 때가 최댓값이다. 따라서, $a_{10}=9$가 된다.
여기서 알 수 있는 것은 $10n+9$꼴 (단, n은 0 이상의 정수)일 때 각 자리 수의 합이 최대가 된다.
$a_{11}=9$, $\cdots$, $a_{18}=9$까지였다가 a_{19}부터 10이 된다.
이와 같은 방식으로 계속하면,

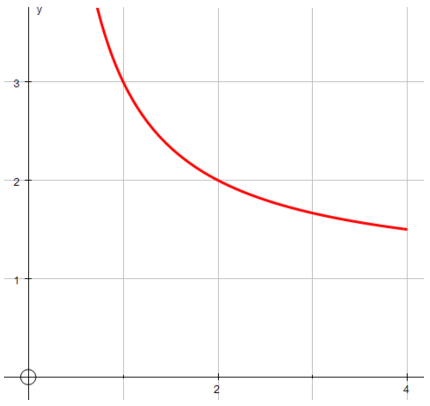
$$\sum_{n=1}^{40} a_n = 1+2+3+\cdots+8+9\times10+10\times10+11\times10+12+12$$
$$=36+90+100+110+24=360\text{임을 알 수 있다.}$$

13. $\{a_{2n}-a_n\}$의 첫째항부터 제4항까지의 합은
$(a_2-a_1)+(a_4-a_2)+(a_6-a_3)+(a_8-a_4)$
$=(a_6-a_1)+(a_8-a_3)$
이다. $(a_6-a_1)+(a_8-a_3)=(r^2+1)(a_6-a_1)=4$이다.

14. $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}=\dfrac{a_2}{(a_2)^2}+\dfrac{a_1+a_3}{a_1a_3}=\dfrac{a_1+a_2+a_3}{(a_2)^2}=1$
이고, $a_1+a_2+a_3=4$이므로 $(a_2)^2=4$이다. 따라서 $a_2=2$이다.

15. $(a_4+a_7)a_5a_6=a_4a_5a_6+a_5a_6a_7=2$이다.
따라서 $\sum_{n=1}^{8} a_na_{n+1}a_{n+2}=8$이다.

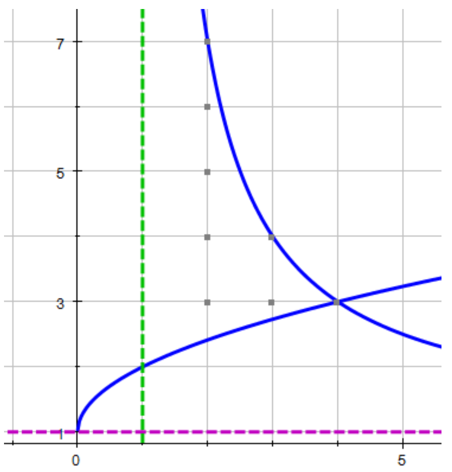
16. $y=\dfrac{2}{x}+1$의 그래프는 그림과 같다.



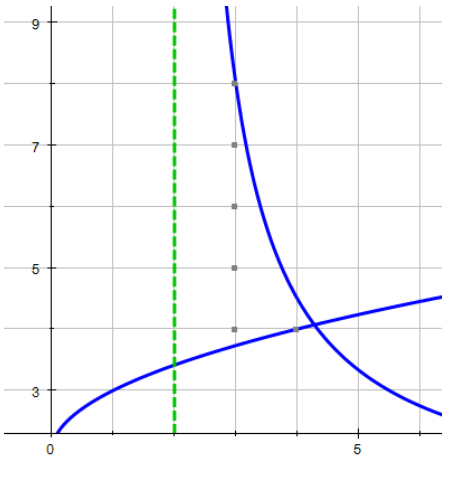
$y=\sqrt{x-n}+n$의 그래프는 (n, n)을 시점으로 하는 그래프이다.
따라서, $n=1, 2$일 때 한 점에서 만난다. 그러나 $n \geq 3$부터는 만나지 않는다.

$y=\dfrac{2}{x}+2$의 그래프도 그려보면 마찬가지로 $n=1$일 때, $n=2$일 때에만 성립함을 알 수 있다.
$n=3$일 때 성립하려면, $m=3$일 때부터 가능하다.
$n=4$일 때 성립하려면, $m=4$일 때부터 가능하다.
이와 같은 과정을 반복하면, 결국 $n=1$일 때에만 2개이고, 나머지 모든 n에 대하여 $n=k$일 때 한 점에서 만나는 m의 개수는 k개다.
따라서 $2+(2+3+4+\cdots+9)=46$이다.

17. a_1의 상황을 그려보면 다음과 같다. 8개임을 확인한다.

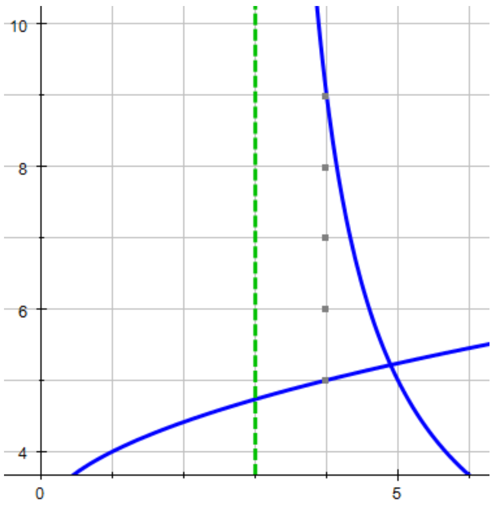


a_2의 상황을 그려보면 다음과 같다. 6개임을 확인한다.



정답 및 해설

한번만 더 그려보자. a_3의 상황을 그려보면 다음과 같다.



$a_3=5$이다.

여기에서 알 수 있는 것은
① 무리함수의 그래프와 분수함수의 그래프의 교점의 x좌표에 대하여 n이 커질수록 $x=n$과의 거리가 점점 작아지고 있다는 것이다.
② 그러나 교점은 반드시 $x=n+1$보다는 크다.

그 이유를 알아보자.
① 분수함수의 그래프는 $(n+1,\ n+6)$과 $\left(n+2,\ \frac{n+7}{2}\right)$을 지난다.
즉, n의 값이 1 커지면 y의 값은 각각 1, $\frac{1}{2}$만큼 커진다.
무리함수의 그래프는 $(n+1,\ n+\sqrt{n+1})$과 $(n+2,\ n+\sqrt{n+2})$를 지난다. 즉, n의 값이 1 커지면 y의 값은 $x=n+1$일 때 1보다 더 커지며, $x=n+2$일 때에도 마찬가지이다.
따라서, 무리함수의 그래프가 분수함수보다 더 크게 커지므로, 교점의 x좌표가 작아지게 되는 것이다.
② 분수함수의 그래프는 $(n+1,\ n+6)$을 지나고 무리함수의 그래프는 $(n+1,\ n+\sqrt{n+1})$을 지난다.
$n<35$이면 $n+6>n+\sqrt{n+1}$이므로, 교점은 반드시 $x=n+1$보다는 큰 곳에서 생긴다.

①과 ②에 의하여, a_1부터 a_3의 그래프를 모두 관찰하였을 때 a_3부터는 결국 자연수 점을 $x=n+1$에서만 세어 주어도 충분하다는 것을 알 수 있다.

그러므로, a_3부터는 $n+\sqrt{n+1}\le y\le n+6$을 만족시키는 자연수 y의 개수를 세어 주면 된다.

$a_1=8,\ a_2=6,$
a_3은 $n+2\le y\le n+6$인 자연수 y의 개수 : 5
a_4부터 a_8까지는 $n+3\le y\le n+6$인 자연수 y의 개수 : 4
a_9부터 a_{15}까지는 $n+4\le y\le n+6$인 자연수 y의 개수 : 3
따라서, $\sum_{n=1}^{15}a_n=8+6+5+4\times5+3\times7=60$이다.

18. (가) $a_{n+3}=-2a_n$이므로 $a_{n+3k}=(-2)^k a_n$이 성립한다.
(나) $\sum_{k=16}^{18}a_k=(a_{16}+a_{17}+a_{18})$
$=(-2)^5(a_1+a_2+a_3)=-32(a_1+a_2+a_3)$이므로
$a_1+a_2+a_3=0$이고 자연수 k에 대하여 $a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k}=0$이다.
(다) $\sum_{k=20}^{30}a_k=a_{20}+a_{21}+(a_{22}+a_{23}+a_{24})+\cdots(a_{28}+a_{29}+a_{30})$
$=a_{20}+a_{21}=-a_{19}$
$-a_{19}=a_{1+3\cdot6}=(-2)^6(-3)=-192$이므로 $\sum_{k=20}^{30}a_k=192$이다.

19. $a_{n+1}=\frac{1}{(a_n)^2}$에서 양변에 로그를 취하면
$\log_2 a_{n+1}=-2\log_2 a_n$이다. 즉 $\log_2 a_n$이 공비가 -2이고 초항이 1인 등비수열이다. 그러므로 $\log_2 a_5=16$이다.

20. $n=2$일 때
$2-a\le a\le 2^{2^{2-a}}$
이를 만족하는 자연수 a는 $a=1,2$ 두개다. : $f(2)=2$
($a=3$이면 $2^{2^{2-3}}=2^{\frac{1}{2}}<3$)

$n=12$일 때
$12-a\le a\le 2^{2^{12-a}}$이다.
$12-a\le a$에서 $a\ge 6$임을 알 수 있다.
$a\le 2^{2^{12-a}}$는 대입을 통해 알 수 있다.
$a=6$부터 10까지는 자명하게 성립함을 알 수 있다.
$a=11$일 때 성립하지 않는다.
$\therefore 6\le a\le 10$으로 $f(12)=5$

$n=19$일 때
$19-a\le a\le 2^{2^{19-a}}$이다.
$19-a\le a$에서 $a\ge\frac{19}{2}$임을 알 수 있다.
$a\le 2^{2^{19-a}}$에서 $a=10$부터 $a=16$까지는 대입을 통해 자명하게 성립함을 알 수 있다.
$a=17$일 때 : $17\le 16$이므로 성립하지 않는다.
$\therefore 10\le a\le 16$으로 $f(19)=7$

따라서 $f(2)\times f(12)\times f(19)=70$이다.

21. $a_n=a_1r^{n-1}$이라고 하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_1}{r}\times(6r)^n+3^{n+1}}{3^n+\frac{a_1}{r}\times(2r)^n}$ 이고 이 극한값이 6으로 수렴하려면 $6r=3$ 이여야 한다. 또한 극한값이 6 으로 수렴하므로 $2a_1=3$ 이다.
따라서 $a_n=3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n a_n=6$

22. 문자 a에 관하여 식을 다시 정리하면 $2x^3-x+a(x^2-2x+1)$이고 a값에 관계없이 일정한 점 P 를 구하려면 $(x^2-2x+1)=0$이 돼야 한다. 따라서 점 $\mathrm{P}(1,1)$ 이고 이 점에서 접선이 $(0,\ b)$를 지나므로 접선 식을 세우면
$y=5(x-1)+1$ 에서 $(0,\ b)$를 대입 해주면 $b=-4$ 이다.
$\therefore b=-4$

정답 및 해설

23.

$$f(t)=\begin{cases} t+1 & (0 \le t < 1) \\ 2 & (1 \le t < 2\pi+1) \\ (2\pi+3)-t & (2\pi+1 \le t < 2\pi+2) \\ 1 & (2\pi+2 \le t \le 3\pi+2) \end{cases}$$ 이다.

$$\int_0^1 (t+1)dt + \int_1^{2\pi+1} 2\,dt + \int_{2\pi+1}^{2\pi+2} (-t+2\pi+3)dt + \int_{2\pi+2}^{3\pi+2} 1dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}t^2+t\right]_0^1 + \left[2t\right]_1^{2\pi+1} + \left[-\frac{1}{2}t^2+(2\pi+3)t\right]_{2\pi+1}^{2\pi+2} + \left[t\right]_{2\pi+2}^{3\pi+2}$$

$=5\pi+3$ $\quad\therefore p^2+q^2=34$이다

24. $f(x)=kx(x+4)(x-4)$ 라고 하면

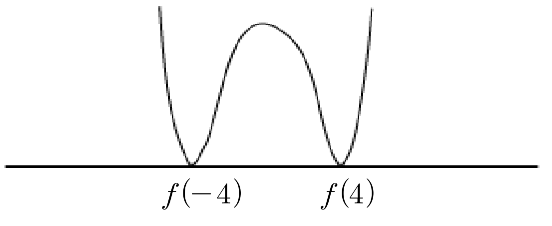
$\int_a^x f(x)dx = \frac{k}{4}x^4 - 8kx^2 - \frac{k}{4}a^4 - 8ka^2$ 이다.

$\int_a^x f(x)dx$의 도함수가 $f(x)$이므로 $f(x)$의 부호를 따져보면

$x=0$에서 극대, $x=\pm 4$에서 극소이다. 또한 $-4,4$를 대입해보면

$f(4)=f(-4)$ 이므로 $\int f(x)dx = F(x)$라고 하면 $F(x)=F(a)$의

서로 다른 실근이 4개가 되어야 한다.



$F(a)=F(0)$의근을 $a=\alpha,0,\beta$ $(\alpha<\beta)$ 라고하면 만족하는 a의 범위는 $\alpha<a<\beta$ (단 $a\neq 0,\pm 4$)이다. $a^4-32a^2=0$ 에서 $\alpha=-\sqrt{32}$, $\beta=\sqrt{32}$ 이므로 서로 다른 실근이 4개가 되게 하는 a의 개수는 8개이다.

25. ㄱ. , $g'(x)=f(x)+xf'(x)$ 에서 $g(0)=0$ 이므로 $g'(0)=f(0)$ 그래프에서 $f(0)>0$ (참)

ㄴ. $g'(x)=f(x)+xf'(x)$ 에서 $(-1,0)$에서 $f(x)>0$이고 $f'(x)$는 $f(x)$가 감소하므로 $f'(x)<0$ 이다. 따라서 $xf(x)>0$이므로 $f(x)+xf'(x)>0$이다. 따라서 $g(x)$는 구간 $(-1,0)$에서 증가한다.(참)

ㄷ. 평균값 정리에 의하여 $\frac{g(b)-g(a)}{b-a}=2$를 만족하는 a, b를 찾아보면 $(-2,0)$, $(0,2)$가 있으므로 평균값의 정리에 의하여 $g'(c)=2$인 c가 구간$(-2,0)$와 $(0,2)$에 적어도 하나씩 존재한다. (참)

26, ㄱ. $\lim_{x\to 1+} f(-x)=1$ (거짓)

ㄴ. $\{f(2)\}^2=4$ 이고 $\lim_{x\to 2+0}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to 2-0}\{f(x)\}^2=4$이다. (참)

ㄷ. 연속함수의 성질에 의해 $f(x)$의 불연속점에서만 $f(x)f(1-x)$가 연속인지 확인하면 된다.

$x=2$ 에서 $f(2)f(-1)=f(2)f(3)=-2$,

$\lim_{x\to 2+} f(x)f(1-x)=-2$, $\lim_{x\to 2-} f(x)f(1-x)=-2$ 이므로 $x=2$ 에서 연속

$x=3$에서 $f(3)f(-2)=f(3)f(2)=-2$

$\lim_{x\to 3+} f(x)f(1-x)=-2$ $\lim_{x\to 3-} f(x)f(1-x)=-2$

이므로 $x=3$에서 연속이다. 따라서 실수 전체 집합에서 연속이다.

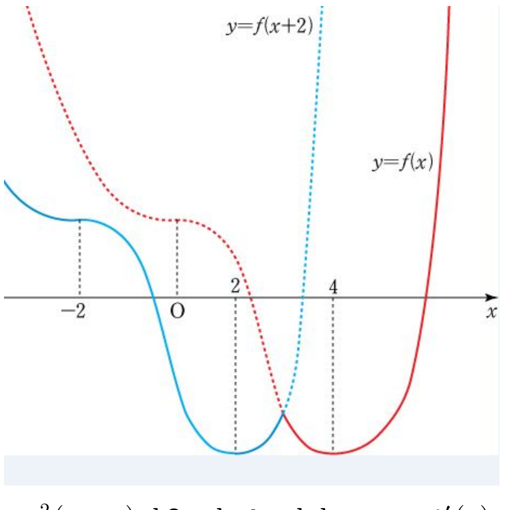
27. $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가질 때,
즉 $f'(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$일 때에는 그래프를 그려보면
(가) 조건에 위배된다.

$f'(x)=0$이 오직 하나의 실근을 가질 때에는 (가) 조건은 성립하지만 (나)조건에는 위배된다.

따라서 $f'(x)=0$이 두 실근을 가진다. 이 경우 중근과 하나의 실근을 갖는데, 중근이 다른 하나의 실근보다 더 큰 경우에는 (가) 조건은 성립하지만 (나) 조건을 성립시키지 못한다.

결론적으로, $f'(x)=0$이 두 실근을 갖는데, 중근이 다른 하나의 실근보다 작은 경우에는 (가)와 (나)를 모두 만족시킬 가능성이 생긴다.

따라서, (가)와 (나)조건을 모두 만족시키는 개형은 다음과 같다.



따라서 $f'(x)=4x^2(x-4)$임을 알 수 있다. $\quad\therefore f'(5)=100$

28. $\int_0^2 f(x)+g(x)dx=0, \int_0^2 f(x)dx=-\int_0^2 g(x)dx=4$

$f(x)-g(x)=k(x+2)x(x-1)$

두 곡선 사이의 넓이를 구해야 하므로 $\int_{-2}^1 |f(x)-g(x)|dx$를

구하면 된다. $\int_{-2}^0 |f(x)-g(x)|dx+\int_0^1 |f(x)-g(x)|dx$

문제 조건에서 $\int_0^2 f(x)-g(x)dx=8$ 임을 알 수 있으므로

$$\int_0^2 f(x)-g(x)dx=\int_0^2 k(x+2)x(x-1)$$

이를 적분하면 $\left[k(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2)\right]_0^2=\frac{8}{3}k=8$

따라서 $k=3$이다. 두 곡선 사이의 넓이이므로 교점을 기준으로 함수를 나누어서 각각 적분 값을 구한 후 양수로 더하면 된다.

$S=\left|\int_{-2}^0 3(x+2)x(x-1)dx\right|+\left|\int_0^1 3(x+2)x(x-1)dx\right|$

$=8+\frac{5}{4}=\frac{37}{4}$. 따라서 $20S=185$ 이다.

29. 절댓값을 없애기 위해 x의 범위를 나누자

$|x|\geqq 3$ 인 경우 $f(x)=x^3+2ax^2-9a$

$|x|<3$ 인 경우 $f(x)=x^3+9a$

도함수를 구해보면,

정답 및 해설

$|x| \geqq 3$ 인 경우 $f'(x)=3x^2+4ax$

$|x|<3$ 인 경우 $f'(x)=3x^2$

극값이 존재하지 않으려면 도함수의 부호표를 그렸을 때 부호가 변하지 않으면 된다. $x=\pm3$에서 부호가 안바뀌어야 한다.

도함수에 대해 극한값을 조사하자.

3의 좌극한 값이 양수이므로 우극한도 양수여야 한다.

$\lim\limits_{x \to 3+}(3x^2+4ax) \geqq 0 \quad a \geqq -\frac{9}{4}$

-3의 우극한 값이 양수이므로 좌극한도 양수여야 한다.

$\lim\limits_{x \to -3-}(3x^2+4ax) \geqq 0 \quad a \leqq \frac{9}{4}$

따라서 이를 만족하는 정수 $a=-2,-1,0,1,2$ 로 5개이다.

30. 수열 a_n에 $n=1$부터 대입해보면

$a_1=(-1)^2(\log\frac{5}{1})=\log5$

$a_2=(-1)^3(\log\frac{6}{2})=-\log6+\log2$

$a_3=(-1)^4(\log\frac{7}{3})=\log7-\log3$

$a_4=(-1)^5(\log\frac{8}{4})=-\log8+\log4$

$a_5=(-1)^6(\log\frac{9}{5})=\log9-\log5$

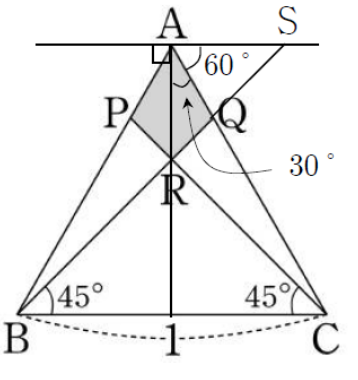
$a_6=(-1)^7(\log\frac{10}{6})=-\log10+\log6$

$a_7=(-1)^8(\log\frac{11}{7})=\log11-\log7$

이를 무한대까지 더하면 $\log2-\log3+\log4$만 남게된다.

$a=\log\frac{8}{3}$ 이므로 $10^a=\frac{8}{3}$ 이다.

31.



점 A를 지나고 밑변인 선분 BC와 평행한 직선이, 반직선 BR과 만나는 점을 S라 하겠습니다. 이때 생기는 삼각형 ARS를 분할하여 얻은 삼각형 ARQ와 삼각형 AQS의 길이를 살펴보면 $\overline{AQ}$는 공통변이고 $\overline{AR}=\overline{AS}$로 세 변 중 두 변의 길이가 일치하게 됩니다. 그러면 이 상황에 적합한 넓이 공식을 적용하였을 때 넓이비는

$\triangle ARQ : \triangle AQS = \frac{1}{2}\overline{AR}\cdot\overline{AQ}\cdot\sin30^\circ : \frac{1}{2}\overline{AS}\cdot\overline{AQ}\cdot\sin60^\circ$

로서 결국 끼인각에 대한 사인 값의 비가 됩니다. 즉,

$\sin30^\circ : \sin60^\circ = 1 : \sqrt{3}$ 으로 삼각형 ARS의 넓이를 나눠 갖는 셈이죠.

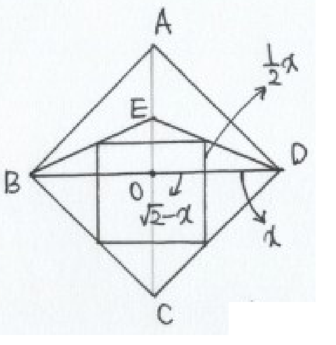
한편, $\overline{AR}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$이므로, $\frac{S_1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2\times\frac{1}{1+\sqrt{3}}$에서

$S_1=\frac{3\sqrt{3}-5}{4}$이고,

닮음비는 연이어 발생하는 정삼각형들 사이의 높이비로서 $\frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2}$가 되고, 따라서 실질적인 공비인 넓이비는 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3:1$에서 $\frac{1}{3}$이라 할 수 있습니다. 그러면 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n = \frac{S_1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}S_1$

이 됨을 알 수 있습니다. 따라서 답은 $\frac{9\sqrt{3}-15}{8}$입니다.

32.



$\frac{1}{2}x+x=2(\sqrt{2}-x)$이므로 $\frac{7}{4}x=\sqrt{2} \quad \therefore x=\frac{4\sqrt{2}}{7}$

공비는 $r=\left(\frac{\frac{6\sqrt{2}}{7}}{2}\right)=\left(\frac{3\sqrt{2}}{7}\right)^2=\frac{18}{49}$이다.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1-\frac{18}{49}}=\frac{49}{31}$

33. 원 C_1의 중심의 좌표를 P, 원 C_2의 중심의 좌표를 Q라 하면

P $(0,\ t)$, Q$(8-t,\ 6)$

i) 두 원이 외접할 때

$\sqrt{(t-8)^2+(t-6)^2}=2$

$t^2-16t+64+t^2-12t+36=4$

$2t^2-28t+96=0$

따라서 모든 t값의 곱은 48

ii) 두 원이 일치할 때

$\begin{cases} 0=8-t \\ t=6 \end{cases}$

이를 만족하는 t는 없다.

$\therefore$ i), ii) 에 의해 모든 t값의 곱은 48

34. $f'(x)-f(2)=-6x^2$이다.

따라서, $f'(x)=-6x^2+f(2)$이므로 $f(x)=-2x^3+f(2)x+C$이다.

$x=2$를 대입하면 $f(2)=16-C$임을 알 수 있다.

한편, $f(1)=-2+f(2)+C=14$이다.

35. $x=-1$, $x=0$인 지점을 제외하고는 $\frac{f(x)}{g(x)}$가 반드시 연속임이 자명하다.

(i) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)}{g(x)}=-f(-1)$이고, $\frac{f(-1)}{g(-1)}=f(-1)$이다. $x=-1$에서 연속이려면 $f(-1)=0$이어야 한다.

정답 및 해설

(ii) $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$이고, 극한값이 존재해야 한다. 따라서
$f(0)=0$이고 극한값은 $f'(0)$이다. 한편, $\frac{f(0)}{g(0)}=f(0)$이므로,
$x=0$에서 연속이려면 $f(0)=f'(0)=0$이어야 한다.

(i)과 (ii)에 의하여 $f(x)=kx^2(x+1)$이다. (단, k는 상수)
그러므로, $\frac{f(8)}{f(3)}=\frac{k\times64\times9}{k\times4\times9}=16$

36. (가)에서 $f(1)>0$이고 $f(2)<0$이다.
따라서 사잇값의 정리에 의하여 구간 $(1,\ 2)$에 적어도 하나의 해가 존재한다.
한편, 열린 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 $f(x)<0$이므로, $f(0)<0$이다.
$f(1)>0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 구간 $(0,\ 1)$에서도 적어도 하나의 해가 존재한다.

37. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^n}{5^{n-1}+3^n}=5$에서 $a>5$이면 발산하므로, $a\le5$이다.
한편, $a=5$일 때, $b>5$이면 발산하고, $b=5$이면 극한값이 30이고 $b<5$이면 극한값이 25이므로, $a=5$인 경우도 모순이다.
따라서, $a<5$이다.
$a<5$일 때, $b>5$이면 발산하고 $b=5$이면 극한값이 5이고 $b<5$이면 극한값이 0이다.
그러므로, $a<5$이고 $b=5$이다.
$a+b$의 최댓값은 9이다.

38. $f(x+1)=\begin{cases}x & (x<a-1)\\(x-1)^2 & (x\ge a-1)\end{cases}$ 이므로

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x+1)}{f(x)}=\lim_{x\to a+}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2$$

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x+1)}{f(x)}=\lim_{x\to a-}\frac{(x-1)^2}{x-1}$$

$\left(\frac{a-1}{a-2}\right)^2=a-1$ 이고 이 식을 a에 대하여 정리하면
$(a-1)(a^2-5a+5)=0$이므로 $a=1$ 또는 a^2-5a+5의 판별식 $D>0$이므로 근과 계수의 관계에 의해 근의 합 =5
∴모든 근의 합 =6

39. $a_n=a_1+(n-1)d$라 하자.

$$S_n=\frac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n\text{이다.}$$

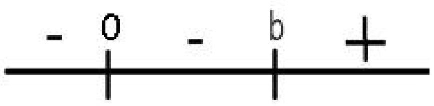
$$\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{S_n+S_k}-n)=\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n+S_k}-n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\frac{\left(\frac{d}{2}-1\right)n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n+S_k}{\sqrt{\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n+S_k}+n}=8$$

이 성립해야 한다.
따라서, $d=2,\ a_1=1$이고, $S_k=16$이다.
$S_n=n^2$이므로 $S_4=16$이다. 따라서 $k=4$이다.
그러므로 $a_k=a_4=7$이다.

40. $f(x)$는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이고 삼차함수는 최대 3개의 실근을 가질 수 있다.
ⅰ. 도함수가 하나의 실근을 가질 때
문제의 부호표 조건과 맞지 않는다.
$\because x=0$과 중간값정리에 따라서 $0<x<1$사이에서 적어도 하나의 실근을 더 가진다.

ⅱ. 도함수가 두 개의 실근을 가질 때
문제의 증감표 조건과 일치한다. 증감표를 그려보면 아래와 같다.



따라서 $f'(x)=4x^2(x-b)$라고 할 수 있다.
$f'(1)$에서 $b=\frac{3}{4}$, $f'(x)=4x^2\left(x-\frac{3}{4}\right)$이고
적분해주면 $f(x)=x^4-x^3+C$ (C는 적분상수) 이다.

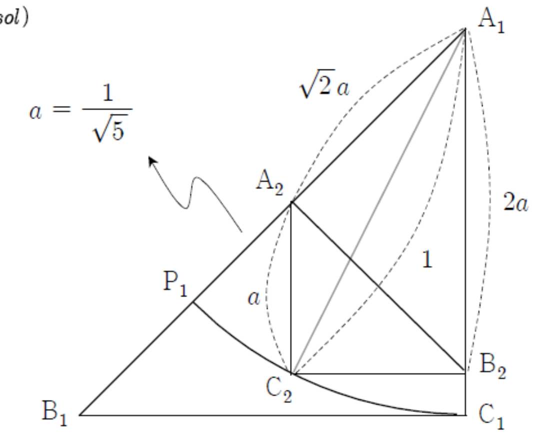
$$\int_0^1|f(x)-f(0)|dx=\left|\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{20}$$

41. 분모가 0으로 수렴하므로 분자도 0으로 수렴해야 한다.
따라서 $f(0)=f(1)$이고 $f(x)-f(0)=ax(x-1)$이라고 할 수 있다.
조건식에서 $a=2$, 극한값을 계산해보면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^3-x}=\frac{2x(x-1)}{x(x+1)(x-1)}=1$$

42.

sol)



지금도 그렇다시피 무한등비급수 문제는 보통 초항과 공비만 구하면 끝나죠!
위와 같이 보조선을 그어보면 $1:1:\sqrt{2}$와 $1:2:\sqrt{5}$가 포개어져 있는 상황으로서 $a=\frac{1}{\sqrt{5}}$임을 알 수 있습니다. 물론 공비는 닮음비의 제곱으로서 a^2이 되어야 하고, 초항은 $S_1=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$이므로

$$\therefore\ \frac{S_1}{1-a^2}=\frac{S_1}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$$

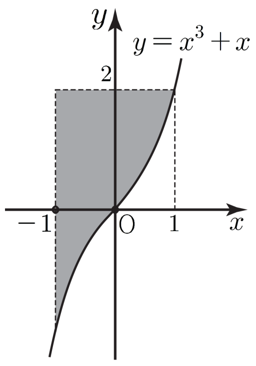
43. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n^2}}{2^n}=\frac{(-1)^1}{2^1}+\frac{(-1)^4}{2^3}+\frac{(-1)^9}{2^3}+\frac{(-1)^{16}}{2^4}+\cdots$$

$$=\left\{\frac{-1}{2^1}+\frac{-1}{2^3}+\frac{-1}{2^5}+\cdots\right\}+\left\{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots\right\}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2^2}}+\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2^2}}=\frac{-2}{4-1}+\frac{1}{4-1}=-\frac{1}{3}$$

정답 및 해설

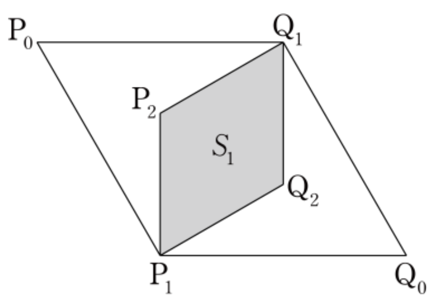
44. $y=2$와 $y=x^3+x$의 교점은 $(1,\ 2)$이므로 곡선 $y=x^3+x$와 직선 $x=-1,\ y=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는 다음 그림과 같다.

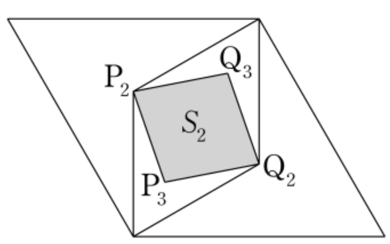


따라서 그림에서의 넓이를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_{-1}^{1}|x^3+x-2|dx=-\int_{-1}^{1}(x^3+x-2)dx=\Big[4x\Big]_0^1=4$$

45.





마름모 $\mathrm{P_0P_1Q_0Q_1}$의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 1^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다. 이 마름모에서

한 대각선의 길이가 $\dfrac{1}{3}$배 되었으므로, $S_1=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$이다.

S_1에서 마름모의 한 대각선의 길이가 $\dfrac{2}{4}$배 되었으므로, $S_2=\dfrac{2}{4}S_1$이다.

S_2에서 마름모의 한 대각선의 길이가 $\dfrac{3}{5}$배 되었으므로, $S_3=\dfrac{3}{5}S_2$이다.

이와 같은 과정을 반복하여, S_{n-1}에서 마름모의 한 대각선의 길이가

$\dfrac{n}{n+2}$배 되었으므로, $S_n=\dfrac{n}{n+2}S_{n-1}$ 이다.

$S_2=\dfrac{2}{4}S_1,\ S_3=\dfrac{3}{5}S_2,\ \cdots,\ S_n=\dfrac{n}{n+2}S_{n-1}$을 변변 곱하여 정리하면,

$S_n=\dfrac{6}{(n+1)(n+2)}S_1=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\sqrt{3}$이다. $\quad\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

46. 함수 $g(x)$가 실수 전체 집합에서 연속이기 위해서는
$f(1)=1,\ f(2)=3$이 되어야 한다.
그리고 오직 $x=2$에서만 미분가능하지 않기 위해서는 $x=1$에서는 미분가능해야만 된다. 즉 $f'(1)=1$이 되어야 한다.
$f(1)=1,\ f'(1)=1$이고 $f(x)$는 다항함수 이므로
$f(x)-x=k(x-1)^2$로 둘 수 있다. $f(x)=k(x-1)^2+x$
$f(2)=k(2-1)^2+2=3$ 이므로 $k=1$
$\therefore f(5)=(5-1)^2+5=16+5=21$

47. 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f^{-1}(x)=g(x)$라 했으므로,
$f(x)$는 일대일 함수이다.
(가) $f'(1)=-6$ 인데 $f(x)$는 일대일 함수여야 되므로 $f(x)$는 실수 전체 집합에서 감소함수이다. 즉 $f'(x)\le 0$이 되어야 한다.

(나) $f(0)=g(0),\ f(1)=g(1),\ f(3)=g(3)$
어떤 α에 대하여 $f(0)=g(0)=\alpha$ 이면 $f(\alpha)=g(\alpha)=0$ 이다.
이때 $\alpha=0,\ 1,\ 3$ 이고 $f(x)$는 감소함수 이므로
$f(0)=3,\ f(1)=1,\ f(3)=0$ 이렇게 밖에 되지 않는다.
(이해가 잘 안가면 $x=0,\ x=1, x=3$ 과 $y=0,\ y=1, y=3$의 교점을 모두 찍고 그래프를 그려서 직관적으로 확인을 해보자)

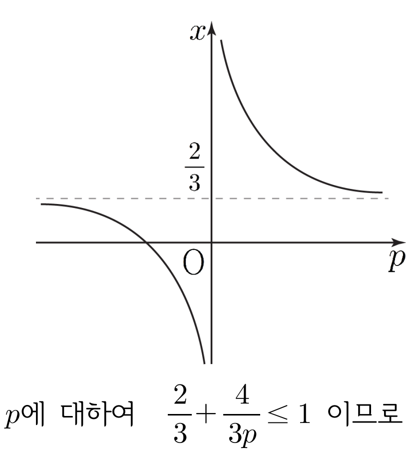
(다) 구간 $(-\infty,\ 1]$에서 함수 $f(x)$는 삼차함수의 일부이다.
$f(x)$는 다항함수이므로 $f(0)=3,\ f(1)=1,\ f'(1)=-6$ 의 조건을 활용하여 구간 $(-\infty,\ 1]$에서의 $f(x)$를 가정 해보자.

$f(1)=1$이고 $f'(1)=-6$이므로
함수 $f(x)$는 직선 $y=-6(x-1)+1$에 접한다.
따라서 함수 $f(x)$를 다음과 같이 가정할 수 있다.

$f(x)-\{-6(x-1)+1\}=(x-1)^2Q(x)$
$f(x)=(x-1)^2Q(x)-6(x-1)+1$
구간$(-\infty,\ 1]$에서 $f(x)$는 삼차함수이므로
$Q(x)$는 일차 이하의 다항식이다.

$f(x)=(x-1)(px+q)-6x+7$ 라 두면
$f(0)=q+7=3,\ q=-4$
$\therefore f(x)=(x-1)^2(px-4)-6x+7\ \ (x\in(-\infty,-1])$

따라서 구간 $(-\infty,\ 1]$에서
$f'(x)=2(x-1)(px-4)+p(x-1)^2-6$
$=2px^2-2(p+4)x+8+px^2-2px+p-6$
$=3px^2-(4p+8)x+p+2\le 0$ 이어야 한다.
우리는 구간 $(-\infty,\ 1]$에서의 $f(x)$만을 찾는 것이므로
$y=3px^2-(4p+8)x+p+2$의 축이 $x=1$보다 클 때랑 작을 때로 분할을 해서 생각을 해보면
$x=\dfrac{2p+4}{3p}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3p}$

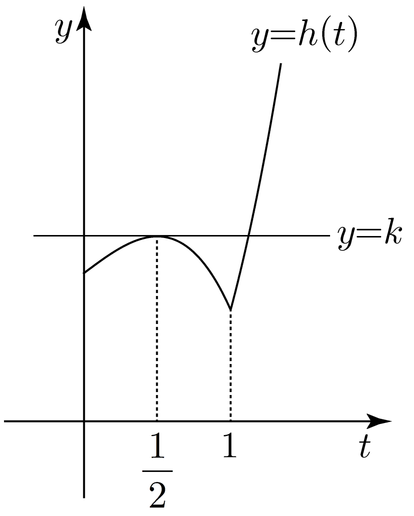


즉 $p<0$인 모든 p에 대하여 $\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3p}\le 1$ 이므로 판별식만을 생각해도 된다.
$\dfrac{D}{4}=(2p+4)^2-3p(p+2)=p^2+10p+16\le 0$에서 $-8\le p\le -2$이다.
$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{8}{3}+\dfrac{p}{12}\le\dfrac{5}{2}=a \qquad\qquad \therefore 20a=50$

정답 및 해설

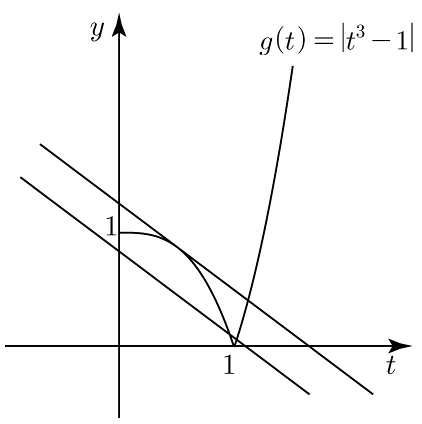
48. $g(t)=\sqrt{f(t)+(t-1)^2}=\sqrt{t^6-2t^3+1}=|t^3-1|$이다.

(풀이1) $h(t)=|t^3-1|+\frac{3}{4}t$라 하면 주어진 방정식의 근의 개수를 구하는 것은 곡선 $y=h(t)$의 그래프와 $y=k$의 교점의 개수를 구하는 것과 같다. $0\le t<1$인 경우, $h(t)=1-t^3+\frac{3}{4}t$를 그리기 위해 도함수를 구해보면 $h'(t)=-3x^2+\frac{3}{4}$이고 $x=\frac{1}{2}$에서 극댓값을 가짐을 알 수 있다. $t\ge 1$인 경우, $h(t)=t^3-1+\frac{3}{4}t$이고, $h'(t)>0$이다.
종합하면 함수 $h(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



실근의 개수가 2개일 때의 k의 값은 함수 $h(t)$의 극댓값이거나 $\frac{3}{4}<k<1$인 경우이므로 k의 최댓값은 $h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}$

(풀이2) t에 대한 방정식 $g(t)+\frac{3}{4}t=k$을 $|t^3-1|=k-\frac{3}{4}t$로 변형하여 그래프의 교점의 개수에 관한 관점으로 풀자. 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우는 다음 그림과 같은 상황이고, k의 최댓값은 직선 $y=k-\frac{3}{4}t$가 함수 $g(t)$의 그래프에 접할 때다.



접하는 점의 좌표를 a라 하면 $0<a<1$이므로 $g(a)=1-a^3$이고 $g'(a)=-3a^2=-\frac{3}{4}$이므로 $a=\frac{1}{2}$이다. $1-a^3=k-\frac{3}{4}a$이므로 $k=\frac{5}{4}$를 얻는다.

49. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{3^n+1}{3^n-1}\right)$가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{3^n+1}{3^n-1}\right)=0$이고, $\lim_{n\to\infty}a_n=1$을 얻는다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+5}{a_n+1}=3$이다.

50. $\lim_{x\to 1-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f^{-1}(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)+\lim_{y\to 1+}f^{-1}(y)$로 생각하면 쉽게 이해할 수 있다.
$\lim_{x\to 1-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f^{-1}(x)=1+(-1)=0$이다.

51. $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{f(x)}=0$에서 $g(1)=0$임을 알 수 있다.
또 $\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{f(x)}=1$에서 $f(x)$가 $+0$에 가까이가므로 $g(2)=0$임을 알 수 있다. 따라서 $g(x)=k(x-1)(x-2)$이다.

$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{f(x)}=1$에서 $\lim_{x\to 2+}\frac{k(x-1)(x-2)}{x-2}=1$이므로 $k=1$이다.

따라서 $g(8)=42$이다.

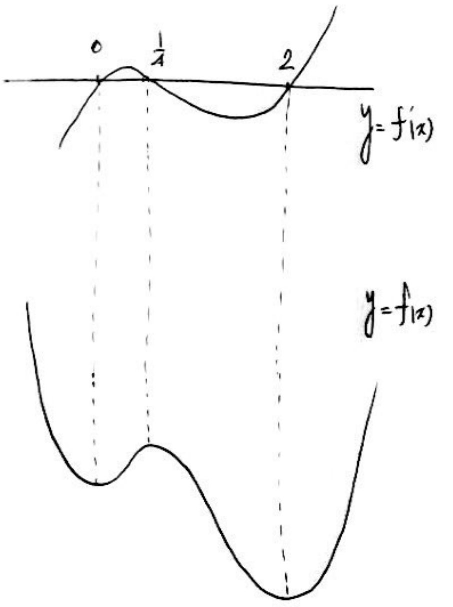
52. $a-k\le x\le a+k$인 임의의 실수 x에 대해 $f(x)\ge f(a)$
→ $f(x)$가 $x=a$에서 극솟값을 갖는다는 걸 의미한다!!

※참고: 고등학교 교과서에서는 극솟값을 다음과 같이 정의한다.

적당히 작은 양수 h에 대해 $\forall x\in(a-h,a+h)$ $f(x)\ge f(a)$일 때 함수 f는 $x=a$에서 극솟값을 가진다.
위 조건을 만족하는 a는 함수 $f(x)$의 극솟값임을 알 수 있다.

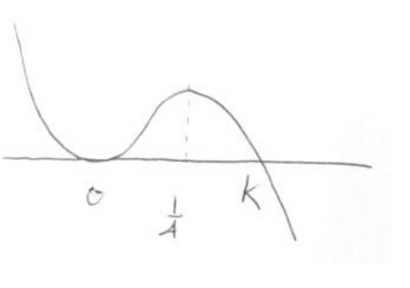
도함수 $f'(x)=4x^3-9x^2+2x=x(4x-1)(x-2)$

따라서 $f(x)$는 $x=0, x=2$에서 극솟값을, $x=\frac{1}{4}$에서 극댓값을 갖는다. 함수 $y=f'(x)$와 $y=f(x)$의 개형은 다음과 같다.



$f(0)>f(2)$이므로 함수 $f(2)$는 함수 $f(x)$의 최솟값이다.

아래 그림은 함수의 그래프 중 $x=0$의 좌우로 일부분만 표현한 것이다.



정답 및 해설

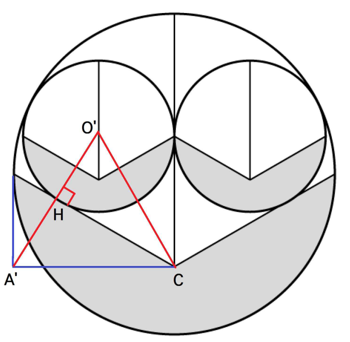
모든 $t \in (0,k)$에 대하여 $f(t) \geq f(0)$을 만족하는 k가 양수 k의 범위이다. 왜냐하면 $f(0)$보다 함숫값이 더 작으면 열린 구간에서의 최솟값이 달라지기 때문이다.

$\therefore t^2(t^2-3t+1) \geq 0$이려면 $0 \leq t \leq \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ or $t \geq \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$이 범위에 포함되기 위한 k의 최댓값은 $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$이다.

53. 보기와는 달리 쉬운 문제입니다. 굳이 x좌표까지 수열로 만드려고 하신 분도 계실지 모르겠습니다만, 문제에서 묻고자 하는 것을 명확하게 파악하셔야 합니다. y좌표만을 문제에서 a_n으로 정의하여 묻고 있습니다. 그리고 문제에서 제시하는대로 무게중심 공식을 사용하면 $3a_{n+1}-a_n=2^n+2^{n+1}$이 되며, 이를 문제에 주어진 극한식에 대입하면 답이 도출됩니다. 극한값은 3입니다.

54. 큰 원에 내접하는 작은 원의 반지름의 길이를 r이라고 합시다. 큰 원의 중심 O를 기준으로, 내접하는 원의 중심인 O′에 선을 긋는 것은 상당히 개연성높은 보조선긋기 과정입니다. 이후, 내접하는 원의 성질에 의해 OO′은 $1-r$이 됩니다. (잘 이해가 가질 않는다면, 2016학년도 6월 모의평가 29번 문항을 참조하십시오. 완벽히 똑같은 과정입니다.) 또한, CO′의 길이는 $2r$이 되고, 점 O′에서 점 C와 O를 지나는 직선에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, OH = r이 됩니다.

$\mathrm{CH}=\sqrt{3}\,r$, $\mathrm{OH}=\sqrt{3}\,r-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이고, 직각삼각형 OO′H에 대하여 피타고라스정리를 이용하면 r이 쉽게 도출됩니다.



55. $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\frac{4}{3}$

56. $\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h^2}=\lim_{h\to 0+}\frac{(1+h)^2-1-1+(1-h)^2}{h^2}=2$

57. $a_n=a_1(r_1)^{n-1}$, $b_n=b_1(r_2)^{n-1}$이다.

$a_{2n-1}=a_1(r_1)^{2n-2}$이므로, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_1}{a_1}\right)\left(\frac{r_2}{(r_1)^2}\right)^{n-1}=14$가 되기 위해선, $\dfrac{r_2}{(r_1)^2}=1$이어야 하고, $\dfrac{b_1}{a_1}=14$이면 된다.

$b_{2n-1}=b_1(r_2)^{2n-2}$이므로,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n-1}}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{b_1}{a_1}}{1-\left(\frac{(r_2)^2}{r_1}\right)}=\frac{14}{1-(r_1)^3}=16$에서 $r_1=\dfrac{1}{2}$임을 알 수 있다. $r_1=\dfrac{1}{2}$이면 $r_2=\dfrac{1}{4}$이므로, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{14}{1-\frac{1}{2}}=28$이다.

58. 사차함수를 미분하면 $f'(x)=4(x-1)(x-2)(x-3)$임을 알 수 있다. 그래프를 그려보면, $f(1)=f(3)=-9$, $f(2)=-8$이다.

$f(x)$가 0부터 1까지는 감소하므로 $f\left(\dfrac{k}{n}\right)-f\left(\dfrac{k-1}{n}\right)<0$이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right|=f(0)-f(1)$이다.

$f(x)$가 1부터 2까지는 증가하므로 $f\left(\dfrac{k}{n}\right)-f\left(\dfrac{k-1}{n}\right)>0$이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right|=f(2)-f(1)$이다.

$f(x)$가 2부터 3까지는 감소하므로 $f\left(\dfrac{k}{n}\right)-f\left(\dfrac{k-1}{n}\right)<0$이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{k=2n+1}^{3n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right|=f(2)-f(3)$이다.

$f(x)$가 3부터 4까지는 증가하므로 $f\left(\dfrac{k}{n}\right)-f\left(\dfrac{k-1}{n}\right)>0$이다.

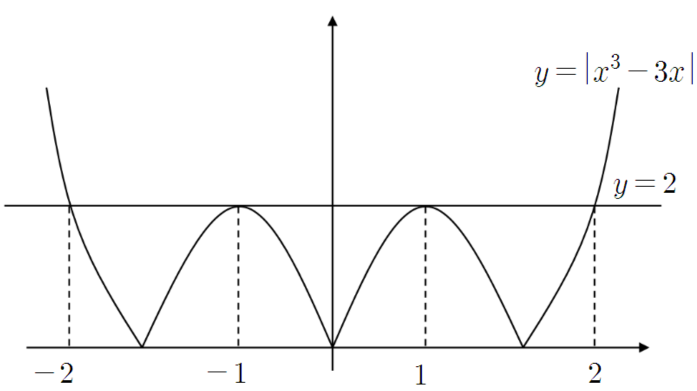
따라서 $\displaystyle\sum_{k=3n+1}^{4n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right|=f(4)-f(3)$이다.

따라서 위 네 식을 모두 더하면

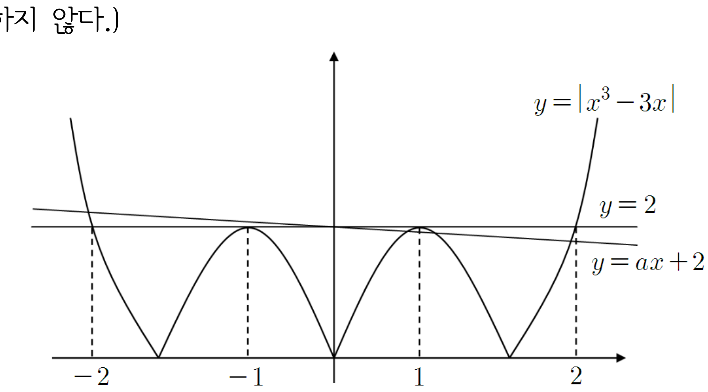
$f(0)-2f(1)+2f(2)-2f(3)+f(4)=20$이다.

따라서 $\dfrac{20}{n}<3$인 n의 최솟값을 구하면 되므로, $n=7$이다.

59. 함수 $y=x^3-3x$를 미분하면 $x=-1$일 때 극댓값 2, $x=1$일 때 극솟값 -2를 갖는 것을 알 수 있다. 그러므로 함수 $y=|x^3-3x|$의 그래프는 다음과 같이 그려진다.

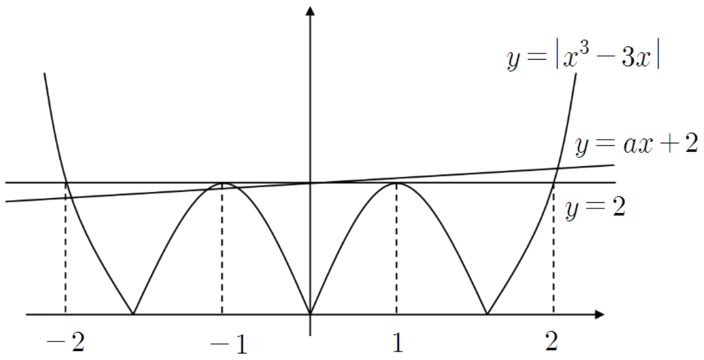


그러므로 $a=0$일 때 직선 $y=2$와 함수 $y=|x^3-3x|$는 다음과 같이 $x=-2$, $x=-1$, $x=1$, $x=2$에서 만나게 된다. ($y=\pm(x^3-3x)$와 직선 $y=2$를 연립시키면 $x=-2$와 $x=2$에서 만난다는 사실을 알 수 있지만, 풀이의 완결성을 위해 표기했을 뿐 문제 풀이에는 전혀 필요하지 않다.)



$a<0$일 때 직선 $y=2$와 함수 $y=|x^3-3x|$는 다음과 같이 그려진다. a를 무한히 0에 가깝게 보내면 $y=2$와 함수 $y=|x^3-3x|$는 그림과 같이 $x=1$ 주위에서 두 개의 교점을 갖게 된다. 그러므로 $\displaystyle\lim_{a\to 0-}f(a)=(-2)+1+1+2=2$이다.

정답 및 해설

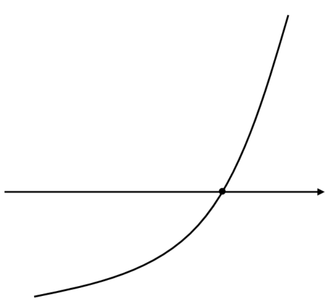


$a>0$일 때 직선 $y=2$와 함수 $y=|x^3-3x|$는 다음과 같이 그려진다. a를 무한히 0에 가깝게 보내면 $y=2$와 함수 $y=|x^3-3x|$는 그림과 같이 $x=-1$ 주위에서 두 개의 교점을 갖게 된다. 그러므로 $\lim_{a \to 0+} f(a) = (-2)+(-1)+(-1)+2=-2$이다.

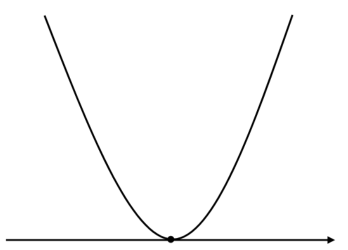
그러므로 $\lim_{a \to 0-} f(a) - \lim_{a \to 0+} f(a) = 4$이다.

60. 그래프를 그려가며 생각하면 함수 $g(x)h(x)$가 $x=a$에서 불연속이 되기 위해서는 $f(a)=0$이거나 $f'(a)=0$이어야 한다는 것을 발견할 수 있을 것이다.

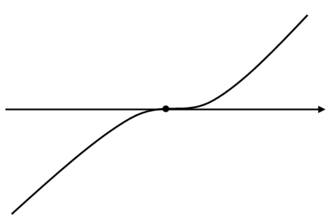
(1)



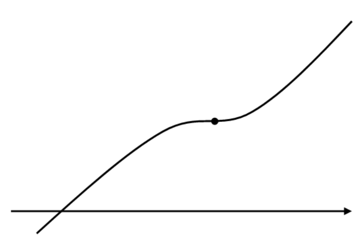
(2)



(3)



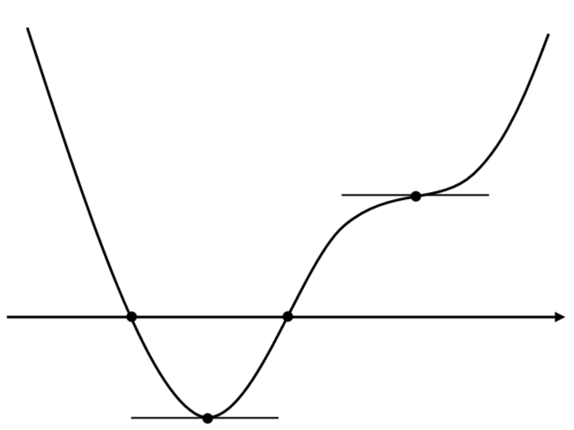
(4)



다음과 같이 그래프를 그려가며 함수 $g(x)h(x)$가 $x=a$에서 불연속이지만 $\lim_{x \to a} f(x)g(x)$의 값이 존재하는 상황을 생각해보자.

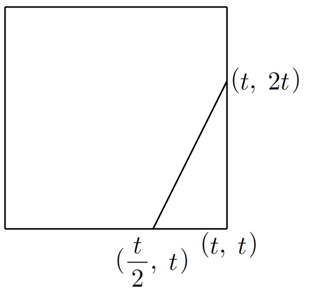
그래프를 그려가며 생각하다 보면 네 번째 그래프과 같이 $f(a) \neq 0$, $f'(a)=0$이지만 함수의 증감은 바뀌지 않는 상황일 때만 좌우 극한값이 동일하다는 것을 알 수 있다.

그렇다면 $f'(x)$를 이용해 생각하면 가능한 도함수는 $f'(x)=4x^2(x-a)$꼴뿐이라는 것을 알 수 있다. $f'(a)=0$일 때 함수 $g(x)h(x)$가 $x=a$에서 불연속이고, 함수 $g(x)h(x)$는 $x=3$에서 불연속이므로 반드시 $a=3$이어야 한다는 것을 알 수 있다.

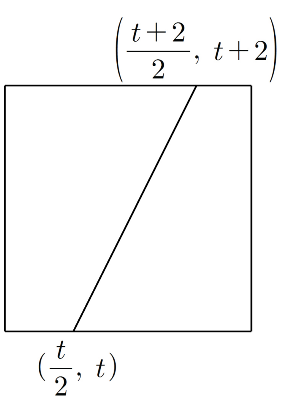


결국 $f(x)=x^4-4x^3+k$로 나타낼 수 있다. 그런데 그림과 같이 방정식 $f(x)=0$의 근이 둘 이상일 경우 함수 $g(x)h(x)$는 반드시 세 점 이상에서 불연속이 된다. 결국, 방정식 $f(x)=0$의 근은 오로지 하나만 존재하며, $x=3$일 때 함수 $f(x)$의 값이 최소이므로 $f(3)=0$이다. 그러므로 $k=27$이고, $f(5)=152$이다.

61. i) $0<t<2$일 때 아래 그림과 같으므로 $f(t)=\dfrac{\sqrt{5}}{2}t$이다.

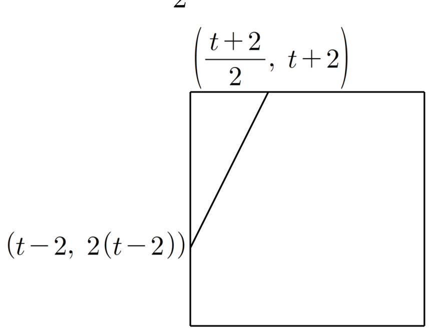


ii) $2 \le t < 4$일 때 아래 그림과 같으므로 $f(t)=\sqrt{5}$이다.



iii) $4 \le t < 6$일 때 아래 그림과 같으므로

$f(t)=\sqrt{\left(\dfrac{6-t}{2}\right)^2+(6-t)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}(6-t)$이다.



따라서 $t=2$, $t=4$에서만 미분가능하지 않다.

62. $(b_n)^2=(a_n)^2$에서 수열 b_n의 의미는 수열 b_n의 절댓값은 등비수열을 의미한다.

$2<\sum_{n=1}^{\infty} b_n<3$이기 위해선, 일단 $b_1=8$이어야 한다. $b_1=-8$일 경우 b_2부터 차례로 $+4$, $+2$, $\cdots$이렇게 진행되어도 절대 저 범위 안에 들어갈 수 없기 때문이다. $b_2=-4$인데, 마찬가지 이유에서다. $b_3=-2$, $b_4=1$임을 알 수 있다. 따라서 $b_2+b_4=-3$이다.

63. (가) 조건을 해석하면 $f(0)=-4$임을 알 수 있다.

(나) 조건을 해석하기 위해 식을 변형하자.

$\lim_{x \to 4} \dfrac{1}{x-4}\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \lim_{x \to 4} \dfrac{F(x)-F(0)}{x-4}$이므로

극한값이 어떤 값으로 수렴하기 위해서는 분모가 0이 될 때 분자도 0이 된다는 점을 활용하자. $F(4)-F(0)=0$이다.

정답 및 해설

또한, $F(0)$ 대신 $F(4)$를 대입하면 $f(4)=20$이다.

그러므로 $F(4)-F(0)=0$에서 $\int_0^4 f(x)dx=0$이다.

삼차함수 $f(x)$를 x^3+ax^2+bx+c로 놓자. $f(0)=-4$이므로
$c=-4$이다. $f(4)=64+16a+4b-6=20$이므로 정리하면
$10+4a+b=0$이다. ⋯(가)

$\int_0^4 f(t)dt=\frac{1}{4}4^4+\frac{a}{3}4^3+\frac{b}{2}4^2-4\cdot 4=0$이므로

$18+8a+3b=0$이다. ⋯(나)

(가) 식과 (나) 식을 연립하여 정리하면 $a=-3$, $b=2$이므로
$f(x)=x^3-3x^2+2x-4$이다. 그러므로 $f(5)=56$이다.

64. $A\star(B\star C)$를 벤-다이어그램에 그려보면, A, B, C 중 하나에만 속하거나, 혹은 모두 속하는 부분만 칠해짐을 알 수 있다.
각 선지별로 조사해보자.
① A에 속하고 B, C에 속하지 않음.
② A, B, C에 모두 속함.
③ B에 속하고 A, C에 속하지 않음.
④ A, B, C에 모두 속함.
⑤ B, C에 속하고 A에 속하지 않음. 따라서 답은 ⑤이다.

65. 언어, 수리, 외국어, 사회탐구영역 중에 두 번(두 시간) 공부할 영역을 고르는 경우의 수는 4가지이고,
1시간마다 영역을 바꾼다고 하였기에 아래와 같이

○ ○ ○ ○ ○

5개의 자리에서 서로 이웃하지 않게 자리를 배치하는 경우의 수는 총 6가지가 된다. (직접 나열해보도록 한다.)
나머지 세 영역(가지)를 배치하면 되므로 $3!=6$ $\therefore 4\times 6\times 6=144$

66. 1) 한 나라만 여행하는 대륙을 고르고 그 중에서 한 나라를 고르는 경우의 수 : $3\times 2=6$가지
 2) 국가 배열 : $3!\times 2\times 2=24$
 $1)\times 2)=144$ 답 : 144가지

67. 첫째 글자, 둘째 글짜, 셋째 글자에 모두 현이라는 글자가 있음을 발견할 수 있다. 그러므로 두 가지로 Case 분류를 할 수 있어야 한다.

Case 1) 첫째 글짜가 '김', '이,' '박'인 경우

$$\underset{①}{3}\times\underset{②}{4}\times\underset{③}{3}-\underset{④}{3}=33$$

① : 김, 이, 박 의 3가지 경우
② : 민, 수, 현, 호 의 4가지 경우
③ : ②에서 고른 1가지를 제외한 3가지의 경우
④ : 둘째 글자에 민, 셋째 글자에 수를 고르는 3가지의 경우

Case 2) 첫째 글짜가 '현'인 경우

$$\underset{①}{3}\times\underset{②}{2}-\underset{③}{1}=5$$

① : 둘째 글자에서 현을 제외한 3가지의 경우
② : ①에서 고른 1가지를 제외한 2가지의 경우
③ : 둘째 글자에 민, 셋째 글자에 수를 고르는 1가지의 경우
$\therefore 33+5=38$

68.

과목 / 경우	지리 선택	역사 선택	일사 선택
case 1	1가지	국사+그논	1가지
case 2	1가지	세계사 or 그논	2가지
case 3	2가지	세계사 or 그논	1가지
case 4	1가지	세계사+그논	1가지

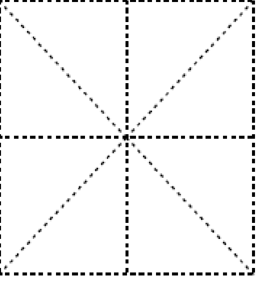
case 1) $3\times 1\times 5=15$
case 2) $3\times 2\times 10=60$
case 3) $3\times 2\times 5=30$
case 4) $3\times 1\times 5=15$ sum.. 답 : 120가지

69. 다음은 위에서 보았을 때 모양이고, 안의 수는 위에서 보았을 때 쌓여진 개수를 말하는 것이다.

3	1	1
3	1	1
3	1	1

위의 그림만큼 반드시 쌓여져야 한다.
여기서 2열 세칸중 적어도 하나, 3열 세칸중 적어도 하나가 채워지면 문제의 조건을 만족한다.
따라서, $(2^3-1)(2^3-1)=49$이다.

70.



① 빨간색 직각이등변삼각형을 나열할 수 있는 경우의 수 : 4가지
② 검은색 직각이등변삼각형을 나열할 수 있는 경우의 수 : 2가지
③ 파란색 직각이등변삼각형을 나열할 수 있는 경우의 수 : 2가지
④ 초록색 직각이등변삼각형을 나열할 수 있는 경우의 수 : 1가지
$\therefore 4\times 2\times 2\times 1=16$ 답 : ⑤

71. 중복을 허락하여 5개중 3개를 뽑는 경우 − 중복을 허락하여 4개중 3개를 뽑는 경우
이므로, ${}_5H_3-{}_4H_3={}_7C_3-{}_6C_3=15$

72. 철수와 영희가
ⅰ 10열에 앉는 경우 ⅱ 11열에 앉는 경우
로 분할 할 수있고 구하는 확률은 ⅰ+ⅱ이다.
철수와 영희가 앉을 곳을 지정해주면 나머지는 어디에 앉든 조건을 만족하므로
철수와 영희를 앉혀주면 나머지는 줄세우기와 같다.
ⅰ. 철수와 영희가 자리를 바꾸는 경우가 있으므로 $=\frac{2\times 3!}{5!}=\frac{12}{120}$
ⅱ 철수&영희가 AB 또는 BC 에 앉을 수 있고 자리를 바꾸는 경우가 있으므로 $=\frac{2\times 2\times 3!}{5!}=\frac{24}{120}$ $\therefore$ ⅰ+ⅱ $=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$

73. C 회사의 음반을 구매할 확률은 $p=\dfrac{1}{10}$이므로 표본비율이

정규분포 $\mathrm{N}\left(\dfrac{1}{10}, \left(\dfrac{1}{50}\right)^2\right)$을 따른다. 구하는 값은

$\mathrm{P}\left(\hat{p}\geq\dfrac{27}{225}\right)$ 이므로 표준화 해주면 $\mathrm{P}\left(\hat{p}\geq\dfrac{\frac{27}{225}-\frac{1}{10}}{\frac{1}{50}}\right)$ 이므로

$\mathrm{P}(Z\geq 1)=0.5-0.3413=0.1587$ 이다.

74. ${}_n\mathrm{H}_{7-n}={}_6\mathrm{C}_{7-n}$이므로 $\sum_{n=1}^{7}{}_6\mathrm{C}_{7-n}=2^6=64$이다.

75. 이러한 생김새를 가진 문제에 해당되는 단원은 중복조합밖에 없다. 따라서 중복조합으로 어떻게 해결할 것인가를 고민해야한다. 보통은 익숙한 꼴로 변형하는 것이 시작이다.
우선 $|x|\leq 3$으로부터 $0\leq x+3\leq 6$을 얻을 수 있고, 마찬가지로 y, z에 대한 부등식을 얻을 수 있다.
(가)에 주어진 $x+y+z=-3$의 양변에 9를 더하여
$(x+3)+(y+3)+(z+3)=6$으로 변형하면 원래의 문제는
방정식 $X+Y+Z=6$ (X, Y, Z는 0이상 6이하의 정수)을 만족시키는 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수를 구하는 것과 같다.
따라서 구하는 순서쌍의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_6=28$

76. 주어진 그림을 고정시켰을 때, 위에서부터 색1, 색2, 색3, 색4로 칠한 것과 아래서부터 색4, 색3, 색2, 색1로 칠한 것을 같은 것으로 보겠다는 뜻이다. 곧 서로 다른 4가지 색을 모두 사용하여 타일의 네 부분을 임의로 칠한 24가지의 경우에서 회전하여 일치하는 그림 한 쌍(원래 그림과 180°회전한 그림)을 같은 것으로 보기 위해 2로 나누어야함을 안다. 따라서 답은 12가지다.

77. $10원=x$, $50원=y$, $100원=z$, $500원=w$라 하면
$x+y+z+w=5$ (단, $x,y,z,w\leq 4$)이므로 ${}_4\mathrm{H}_5$에서 x, y, z, w 각각이 5인 경우를 포함하고 있으므로 $(5,0,0,0), (0,5,0,0), (0,0,5,0), (0,0,0,5)$인 4가지를 빼주면 52가지이다.

78.
sol)
대학교 학생 중에서 192명을 임의추출 하였다는 말로 미루어 적어도 192명 이상의 학생이 있을거라 알 수 있으나 정확히 몇 명이 있는지는 모릅니다. 하지만 문제에서 언급하고 있는 운전면허 소지자 비율과 면허 종류에 따른 비율을 고려하여 다음과 같이 표본 공간을 나타내어도 일반성을 잃지 않습니다.

	1종	2종	total
면허 소지	$2n$	$3n$	$5n$
면허 미소지			$3n$
total			$8n$

이때 1종 면허 소지자의 비율은 $\dfrac{2n}{8n}=\dfrac{1}{4}$로서 표의 나머지 빈칸은 채우지 못하더라도 문제 푸는데 지장이 없습니다! 이제 192명의 임의추출한 학생 중에서 1종 면허 소지자의 수를 확률변수 X라 잡으면, 이는 이항분포 $\mathrm{B}\left(192, \dfrac{1}{4}\right)$를 따릅니다. 그리고 이제 $\mathrm{P}(X\leq 57)$를 구해야 하는데,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\leq 57)&=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\cdots+\mathrm{P}(X=57)\\&={}_{192}\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{192}+{}_{192}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^{191}\\&\quad+\cdots+{}_{192}\mathrm{C}_{57}\left(\frac{1}{4}\right)^{57}\left(\frac{3}{4}\right)^{135}\end{aligned}$$

로서 계산을 통해 구하는 것은 불가능에 가깝습니다. 따라서 지금과 같이 n이 충분히 큰 경우 이항분포를 정규분포로 근사하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(48, 6^2)$를 따르게 되어

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\leq 57)&=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{57-48}{6}\right)=\mathrm{P}(Z\leq 1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)\\&=0.5+0.4332=0.9332\end{aligned}$$

가 나옵니다.

79.
sol)
주사위 눈이 2를 인수로 몇 개 갖고 있는지에 따라
A : 1, 3, 5의 눈이 나오는 사건
B : 2, 6의 눈이 나오는 사건
C : 4의 눈이 나오는 사건
이라 하였을 때, 여사건으로 구하는 것이 훨씬 빠르겠네요. 그렇다면 총 4회의 시행 동안 $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$와 $\{A_1, A_2, A_3, B_1\}$에 해당하는 확률 값을 전체에서 빼주면 되겠죠? 문제를 좀 더 와 닿도록 표현을 바꾸자면,

"각 시행마다 A, B, C중에 하나만 일어나는데,
4회 동안 B는 기껏해야 한 번, C는 일어나지 않을 확률은?"

이라 할 수 있습니다. 이때 독립시행으로 그 확률을 구해보면

$\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$는 ${}_4\mathrm{C}_4\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{1}{16}$이고,

$\{A_1, A_2, A_3, B_1\}$는 ${}_4\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{6}$입니다. 따라서 구하고자 하는 값은

$\therefore 1-\left(\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{6}\right)=1-\dfrac{11}{48}=\dfrac{37}{48}$

80.
sol)

	중국어(B)	일본어	
물리(A)	$73-x$	27	$100-x$
화학	$x-9$	9	x
	64	36	100

여차저차 세운 식을 다 풀었을 때 나온 x값이 바로 답이 되도록 의도적으로 수치를 잡아서 표를 채워 보았습니다.
그리고 독립사건에 대하여 항상 성립하는 식인 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$에서

$$\frac{73-x}{100}=\frac{100-x}{100}\cdot\frac{64}{100}$$

그리고 이를 계산하면 $100(73-x)=64(100-x)$ 즉, $x=25$가 나옵니다.

81. 서로 다른 5개의 원소에서 중복을 허락하여 3개의 원소를 뽑는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{H}_3$
$(2,\ 2,\ k)$, $(1,\ 4,\ k)$ (단, $k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$)
는 동일하므로 ${}_5\mathrm{H}_3-5=30$

정답 및 해설

82. 주어진 식의 이항계수는

$_8\mathrm{C}_r(2x^2)^{8-r}\left(-\frac{1}{4}\right)^r=(-1)^r{}_8\mathrm{C}_r\cdot 2^{8-3r}x^{16-2r}$

ⅰ) $r=0,\ 1,\ 2$일 때

이항계수가 정수의 곱으로 표현되므로 정수이다.

ⅱ) $r=3$일 때

$(-1)^3{}_8\mathrm{C}_3\times\frac{1}{2}=-28$

ⅲ) $r\geq 4$일 때

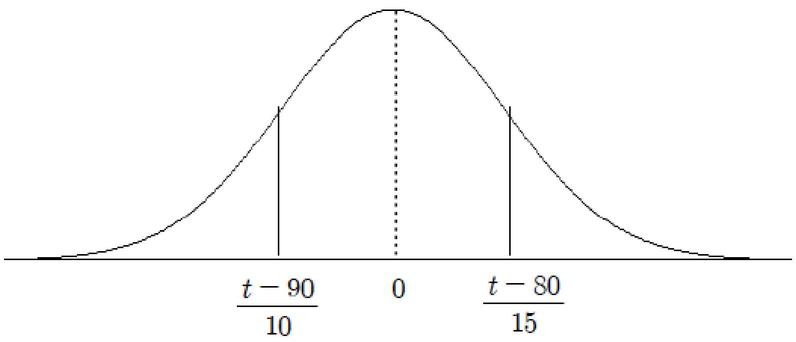
이항계수는 정수가 되지 않는다.

$\therefore\ r=0,\ 1, 2,\ 3$

83.

sol)

광역버스 A, B의 과속 방지 장치에서 하루 동안 경고음이 울린 시간을 각각 확률변수 X_A, X_B로 잡을 수 있습니다. 그리고 두 확률변수가 모두 정규분포를 따른다고 하였으므로 $\mathrm{P}(X_A\geq t)=\mathrm{P}(X_B\leq t)$를 표준화하면 $\mathrm{P}\left(z\leq\frac{t-90}{10}\right)=\mathrm{P}\left(z\geq\frac{t-80}{15}\right)$가 됩니다. 한편, 표준 정규분포함수에서 서로 원점을 기준으로 대칭인 구간을 적분해야 넓이가 같게 나와야 합니다.



따라서 $\frac{t-90}{10}+\frac{t-80}{15}=0\ \rightarrow\ t=86$이 정답이 됩니다.

84. $\mathrm{E}(X)=4p,\ \mathrm{V}(X)=4p(1-p)$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{V}(X)=3p+1-(4p)^2=4p(1-p)$

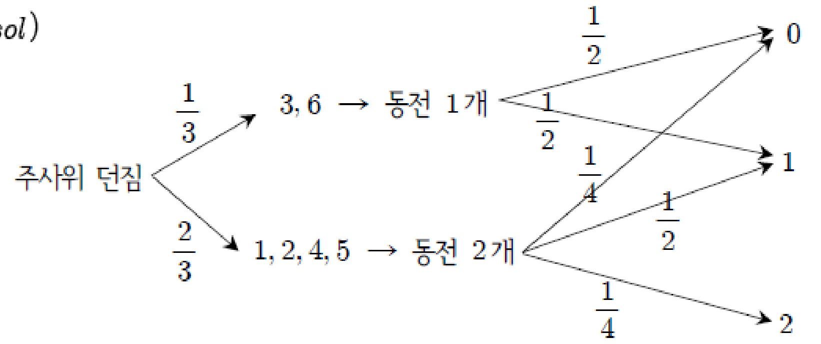
$=12p^2+p-1=0$ 이므로 방정식을 풀면

$0<p<1$이므로 $p=\frac{1}{4}$, $\mathrm{V}(X)=\frac{3}{4}$

$\therefore \mathrm{V}(10X)=100\mathrm{V}(X)=75$

85.

sol)



수형도로 생각해보면 주사위 눈에 따라 동전을 던져서 앞면이 나오는 횟수는 위와 같습니다. 이때 팁이 있다면 동전의 앞면이 나오지 않을 확률은 어차피 0에다 곱해줘야 하니 굳이 따로 구해주지 않아도 된다는 것입니다.

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=0\cdot(\quad)+1\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)+2\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{6}$

86.

카드가 만약 4장씩 있었다면 $4^4=2^8=256$가지로 바로 구할 수 있었겠지만, 3장씩 있다고 합니다. 따라서 추가적인 상황은 여사건 처리로 하여 카드가 4장씩 일 때만 만들 수 있는 1111, 2222, 3333, 4444의 네 가지를 뺀 $4^4-4=252$가지가 답이라고 볼 수 있습니다.

87. $x^2+y^2=25$에서 $0\leq x\leq y$ 인 범위에서만 정수인 점의 개수를 찾아본 뒤 대칭성을 이용하여 개수를 찾자.

(i) $x=0$일 때 $y=5$ 따라서 $\pm(0,\ 5),\ \pm(5,\ 0)$

총 $2\times 2=4$개

(ii) $x=3$일 때 $y=4$ 따라서 $\pm(3,\ 4),\ \pm(4,\ 3),\ \pm(-3,\ 4),$ $\pm(-4,\ 3)$

총 $2\times 2\times 2=8$개

이때 x좌표가 3일 확률은 총 12가지 경우의 수에서 $(3,\ \pm 4)$인 2가지 경우의 수 이므로 $\therefore\ \frac{q}{p}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6},\quad p^2+q^2=36+1=37$

88. $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$로 나타낼 수 있다.

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{6}{5}$ 이므로,

$\frac{1}{\mathrm{P}(A)}+\frac{1}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}=\frac{24}{5}$

$\frac{6}{5}\times\frac{1}{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}=\frac{24}{5},\ \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

두사건 A와 B는 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ 이다.

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{6}{5}-\frac{1}{4}=\frac{24-5}{20}=\frac{19}{20}$

89. ($a\leq m\leq b$를 $[a,\ b]$로 표현함을 양해 바랍니다.
또한 해당문항은 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.96)=0.95$임을 몰라도
해결 가능합니다만 해설지에는 편의를 위해 적어놓았습니다.)

모비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\left[\hat{p}-1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}},\ \hat{p}+1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right]$에서 $\hat{p}=0.25,\ \hat{q}=0.75,$

$n=108$을 대입하면,

$\left[0.25-1.96\times\frac{1}{24},\ 0.25+1.96\times\frac{1}{24}\right]$이다. 따라서,

$c=1.96\times\frac{1}{24}$이다.

한편, 같은 신뢰구간에서 $\hat{p}=0.5,\ \hat{q}=0.5$을 대입하면,

$\left[0.5-1.96\times\sqrt{\frac{1}{4n}},\ 0.5+1.96\times\sqrt{\frac{1}{4n}}\right]$이다.

$1.96\times\sqrt{\frac{1}{4n}}=1.96\times\frac{1}{24}$에서 $n=144$임을 알 수 있다.

90. $\mathrm{P}(0\leq X\leq 3)=1$이므로

$\mathrm{P}(0\leq X\leq 1)+\mathrm{P}(1\leq X\leq 2)+\mathrm{P}(2\leq X\leq 3)=k+k\times 2+k\times 3=1$

에서 $k=\frac{1}{6}$이다. 따라서 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\leq X\leq\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+1\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{2}{3}$

정답 및 해설

91. $x+y$, $z+w$가 모두 홀수이다.
x, z가 모두 홀수, y, w가 모두 짝수인 경우
$(2x+1)+2y+(2z+1)+2w=10$이므로
$x+y+z+w=4$이다. $_4\mathrm{H}_4={}_7\mathrm{C}_4=35$

이와 같은 경우는 총 4가지가 있다.
(x, z가 모두 홀수, y, w가 모두 짝수,
x, w가 모두 홀수, y, z가 모두 짝수,
y, z가 모두 홀수, x, w가 모두 짝수,
y, w가 모두 홀수, x, z가 모두 짝수)

따라서, 답은 총 140가지이다.

92. (i) $a^2-b>0$인 경우 : $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$~$(3, 6)$, $(4, 1)$~$(4, 6)$, $(5, 1)$~$(5, 6)$, $(6, 1)$~$(6, 6)$: 총 27가지

(ii) $a^2-b=0$인 경우 : $(1, 1)$, $(2, 4)$: 총 2가지

따라서, $\mathrm{E}(X)=\frac{27}{36}\times2+\frac{2}{36}\times1=\frac{14}{9}$이므로 $\mathrm{E}(9X)=14$이다.

93. 문제에서 주어진 식을 변형하면 $\mathrm{E}(X)=4\mathrm{V}(X)$가 됩니다. 또한, 확률변수 X가 이항분포 $(n,\ p)$를 따르므로 $\mathrm{E}(X)$와 $\mathrm{V}(X)$를 n과 p에 대하여 나타낼 수 있습니다.

우선 p의 값을 구하기 위해 $\mathrm{E}(X)=4\mathrm{V}(X)$을 모두 n과 p에 대한 식으로 나타내면, $np=4np(1-p)$이므로 $p=\frac{3}{4}$가 된다는 것을 쉽게 알 수 있습니다.

$\mathrm{P}(X=0)$를 이용하면, $\mathrm{P}(X=0)={}_n\mathrm{C}_0\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^n=\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1}{2^8}$

이므로, n의 값은 4가 됩니다.
이제, $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$을 이용하셔서 문제에서 묻고자 하는 것을 직접 구하시면 됩니다. $\frac{3}{4}=\mathrm{E}(X^2)-9$이므로 $\mathrm{E}(X^2)=\frac{39}{4}$입니다.

94. $\mathrm{P}(A)=a$, $\mathrm{P}(B)=b$라고 할 때, 두 사건이 독립이므로 문제에서 주어진 두 식 중 첫 번째 식의 조건에 의해 $ab=\frac{1}{3}$이고, 두 번째 조건은 $a^2+b^2=\frac{25}{36}$입니다. 따라서 $(a+b)^2=(a^2+b^2)+2ab$의 성질을 이용하여 $a+b=\frac{7}{6}$임을 알 수 있습니다.

$\mathrm{P}(A\cup B)=a+b-ab=\frac{5}{6}$입니다.

95. 다섯 번째 던진 동전이 앞면이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$이다. 이 경우 첫 번째~네 번째 동전이 어떻게 던져지든 상관없이 24원 이상을 만족한다.
다섯 번째 던진 동전이 앞면이 안나올 경우, 세 번째 및 네 번째 던진 동전이 모두 앞면이 나와야 하고, 첫 번째 및 두 번째 던진 동전은 무관하다. 따라서 이 경우 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$를 만족시키므로 $\frac{1}{8}$이다.

그러므로 $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$이다.

96. 화폐 A의 현재 가치를 c_A라 하면, 화폐 A의 일주일 후의 환율 X는 평균이 c_A, 표준편차가 $c_Ak^{\frac{2}{3}}p^{-\frac{1}{2}}$인 정규분포를 따른다.
화폐 B의 현재 가치를 c_B라 하면, 시장불안정성 지표가 8배, 거래량이 36배이므로 화폐 B의 일주일 후의 환율 Y는 평균이 c_B, 표준편차가 $c_B(8k)^{\frac{2}{3}}(36p)^{-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}c_Bk^{\frac{2}{3}}p^{-\frac{1}{2}}$인 정규분포를 따른다.
확률변수 X와 Y를 표준화시켜 정리하면

$P(X\geq\frac{103}{100}c_A)=P(Z\geq1)=P(Z\geq\frac{\left(\frac{103}{100}-1\right)c_A}{c_Ak^{\frac{2}{3}}p^{-\frac{1}{2}}})$이고,

$P(Y\geq c_B+\frac{a}{100}c_B)=P(Z\geq2)=P(Z\geq\frac{\frac{a}{100}c_B}{\frac{2}{3}c_Bk^{\frac{2}{3}}p^{-\frac{1}{2}}})$이므로

$2\frac{\frac{3}{100}c_A}{c_Ak^{\frac{2}{3}}p^{-\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{a}{100}c_B}{\frac{2}{3}c_Bk^{\frac{2}{3}}p^{-\frac{1}{2}}}$를 만족시킨다. 정리하면 $a=4$이다.

97. (가) 짝수개, 홀수개만큼 뽑을 그릇을 2개씩 선택하는 경우의 수는 $_4\mathrm{C}_2=6$이다.
(나) 홀수에서 1을 빼면 짝수가 된다. 그러므로 홀수개만큼 뽑을 그릇 두 종류를 먼저 하나씩 뽑아둔다면, 네 종류의 그릇을 짝수개만큼 선택해 총 8개를 뽑는 경우의 수와 동일하다.
즉 네 종류의 그릇을 중복을 허락해 4개만큼 뽑는 경우의 수와 같다.
$_4\mathrm{H}_4={}_7\mathrm{C}_4=35$
(다) $6\times35=210$이 구하는 경우의 수가 된다.

98. 실선 방향으로 움직이는 것은 1칸, 점선 방향으로 움직이는 것은 2칸 이동하는 것으로 해석할 수 있다. 그렇다면 6번 공이 돈 이후에 게임이 끝나기 위해서는 10칸을 이동해 A로 되돌아오는 것으로 해석할 수 있다.
그렇다면 점선 방향으로 이동하는 횟수를 x회, 실선 방향으로 이동하는 횟수를 y회로 놓으면 연립방정식 $x+y=6$, $x+2y=10$를 얻을 수 있다. 그러므로 실선 방향으로 2회, 점선 방향으로 4회 이동한다면, 오각형을 두 바퀴 돌아 A로 되돌아온다. 이렇게 움직이는 경우의 수는 $_6\mathrm{C}_2=15$가지이다.
다만, 중간에 A를 지나게 되면 게임이 끝나기 때문에 중간에 A를 지나 A로 되돌아오는 경우를 제외해야 한다. 실선 방향으로 1회, 점선 방향으로 2회 움직이면 한 바퀴 돌아 A로 되돌아오게 된다. 다시 실선 방향으로 1회, 점선 방향으로 2회 움직이면 두 바퀴 돌아 A로 되돌아오게 된다. 이렇게 움직이는 경우의 수는
$_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1=9$가지이므로 이 경우를 제외하면 된다.

그러므로 구하는 확률은 $(15-9)\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{243}$이다.

99. i) 세 공의 색이 모두 다른 경우(ABC)
첫 번째에는 아무 공이나, 두 번째에는 뽑았던 공의 색깔과 다른 색의 공을, 세 번째에는 첫 번째, 두 번째에 뽑았던 공의 색과 다른 색의 공을 뽑아야 한다. 따라서 $\frac{6}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{2}{5}$이다.

정답 및 해설

ii) 첫 번째 공과 두 번째 공의 색이 다르고, 첫 번째 공과 세 번째 공의 색이 같은 경우(ABA)
첫 번째에는 아무 공이나, 두 번째에는 뽑았던 공의 색깔과 다른 색의 공을, 세 번째에는 첫 번째에 뽑았던 공의 색과 같은 색의 공을 뽑아야 한다. $\frac{6}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$
남은 3개의 공을 순서대로 하나씩 뽑을 때, 같은 색깔의 공이 연속해서 나오지 않을 확률을 구해보자.
처음에 i)의 방식으로 세 공을 모두 다르게(ABC) 뽑았으면, 남아있는 공도 서로 모두 다를 것(ABC)이므로, 아무렇게나 뽑아도 같은 색의 공이 연달아 나오지 않는다.
처음에 ii)의 방식으로 처음 뽑은 공과 마지막에 뽑은 공의 색만 같게(ABA) 뽑았으면, 한 색깔의 공이 2개, 다른 색깔의 공이 1개 남아 있을 것(BCC)이므로, 마찬가지로 처음 뽑은 공과 마지막에 뽑은 공의 색만 같게(CBC) 뽑아야 같은 색의 공이 연달아 나오지 않는다.
$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{3}$

그러므로 구하는 확률은 $\dfrac{\frac{2}{5}\times1+\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}+\frac{1}{5}}=\frac{7}{9}$이다.

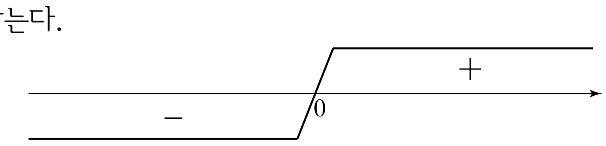
100. 1) 함수가 극값을 갖는 점의 개수를 구하기 위해서는 함수를 미분한 후 도함수의 부호가 변하는 점의 개수를 찾으면 된다. 우선 함수 $f(x)=x(x^a+x^b)$를 미분하기 위해서는, 일단 최고차항에 대해 알아야 한다.

$a>b$일 때 최고차항은 x^{a+1} $a=b$일 때 최고차항은 $2x^{a+1}$
$a<b$일 때 최고차항은 x^{b+1}

이다. 따라서 가능한 순서쌍 (a,b)는 $a>b$일 때, $a=b$일 때, $a<b$일 때 이렇게 세 가지 경우로 나뉘게 된다. $a>b$일 때와 $a<b$일 때의 각각의 순서쌍은 $(1,5)$와 $(5,1)$처럼 서로 일대일로 대응하고, 함수 역시 같으므로 $a<b$일 때의 경우의 수는 따로 셀 필요 없이, $a>b$일 때의 경우의 수를 구한 뒤 2를 곱해주면 될 것이다.

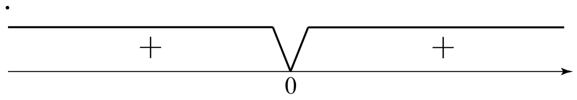
2) 일단 $a=b$일 때가 간단하므로 먼저 구해주자. 증감표를 그리기 위해 일단 먼저 $f'(x)$의 식을 구해보면, $a=b$일 때 $f(x)=2x^{a+1}$이므로, $f'(x)=2(a+1)x^a$이다.

a가 홀수일 때 $f(x)$의 증감표는 다음과 같으므로, $f(x)$는 1개의 극값을 갖는다.



이를 만족시키는 순서쌍은 $(1,1),(3,3),(5,5)$이므로, 경우의 수는 3가지이다.

a가 짝수일 때 $f(x)$의 증감표는 다음과 같으므로, $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

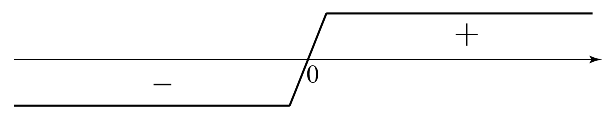


이를 만족시키는 순서쌍은 $(2,2),(4,4),(6,6)$이므로, 경우의 수는 3가지이다.

3) $a>b$일 때 $f(x)$의 개형을 살펴보자. 증감표를 그리기 위해 일단 먼저 $f'(x)$의 식을 구해보면,
$f'(x)=(a+1)x^a+(b+1)x^b=(a+1)x^b\left\{x^{a-b}+\frac{b+1}{a+1}\right\}$이므로, b가 홀수일 때 $f'(x)$는 $x=0$ 근처에서 부호가 변하고, b가 짝수일 때 $f'(x)$는 $x=0$ 근처에서 부호가 변하지 않는다.

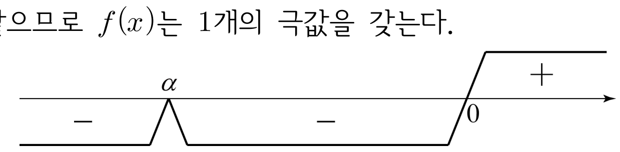
$a-b$가 짝수일 때 $x^{a-b}=-\frac{b+1}{a+1}$는 근을 갖지 않고,
$a-b$가 홀수일 때 $x^{a-b}=-\frac{b+1}{a+1}$는 하나의 음수 근을 갖는다.

a가 홀수, b가 홀수일 때 $a-b$는 짝수이다. 이 때 $f(x)$의 증감표가 다음과 같으므로 $f(x)$는 1개의 극값을 갖는다.



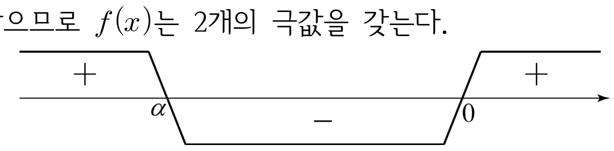
이를 만족시키는 순서쌍은 $(3,1),(5,1),(5,3)$이므로, 경우의 수는 3가지이다.

a가 홀수, b가 짝수일 때 $a-b$는 홀수이다. 이 때 $f(x)$의 증감표가 다음과 같으므로 $f(x)$는 1개의 극값을 갖는다.



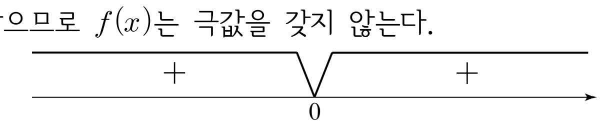
이를 만족시키는 순서쌍은 $(3,2),(5,2),(5,4)$이므로, 경우의 수는 3가지이다.

a가 짝수, b가 홀수일 때 $a-b$는 홀수이다. 이 때 $f(x)$의 증감표가 다음과 같으므로 $f(x)$는 2개의 극값을 갖는다.



이를 만족시키는 순서쌍은
$(2,1),(4,1),(4,3),(6,1),(6,3),(6,5)$이므로, 경우의 수는 6이다.

a가 짝수, b가 짝수일 때 $a-b$는 짝수이다. 이 때 $f(x)$의 증감표가 다음과 같으므로 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.



이를 만족시키는 순서쌍은 $(4,2),(6,2),(6,4)$이므로, 경우의 수는 3가지이다.

4) $b>a$일 때의 경우의 수는 $a>b$일 때와 동일하다.

5) 그러므로
극값의 개수가 0개가 되도록 하는 순서쌍의 개수는 9가지이다.
극값의 개수가 1개가 되도록 하는 순서쌍의 개수는 15가지이다.
극값의 개수가 2개가 되도록 하는 순서쌍의 개수는 12가지이다.

이에 따라 확률분포표를 그리면 아래와 같으므로 $\mathrm{E}(X)=\frac{13}{12}$이다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	1