대학수학능력시험 대비 포카칩 120제 (가형)

정답 및 해설

제작자 소개

문항 제작

이덕영 (연세대학교 수학과)
(1~47, 51~79, 87~110)
문호진 (인하대학교 의예과)
(48~50, 80~86, 111~120)

해설 제작

고광현, 고한영, 곽호연, 김태준, 문호진, 우현길, 이덕영,
이동솔, 진겸, 최지훈, 홍용기

해설을 시작하면서...

이번 포카칩 N제는 2009 개정 7차교육과정 대학수학능력시험을 대비할 수 있도록 만들어졌습니다. 대학수학능력시험 대비 뿐만 아니라 내신, 논술 시험을 대비할 때에도 도움이 될 수 있게끔 구성하였습니다.

문제 수는 적지만 3점짜리 수준 중 약간 어려운 문항부터 30번급 매우 어려운 문항까지 골고루 구성되어 있습니다. 다만 배점은 너무 믿지 마시기 바랍니다. 1등급 커트라인 70~80점 모의고사 기준으로 구성했을 때를 기준으로 한 것이므로, 3점짜리이지만 상당한 수준의 문제인 것도 있을 것입니다.

고난도 문항만을 선별하다보면 추론능력이나 문제해결능력 위주의 문항 선별이 될 수 있어서 중간중간 의도적으로 계산능력이나 이해능력을 물어보는 문항도 포함시켰습니다.
따라서 쉬운 문항일지라도 풀어보면 도움 되겠거니 생각하시고 모든 문항을 꼼꼼히 해결하시기 바랍니다. 또한 가형 응시자들은 나형 100제도 가급적 풀어볼 것을 강력히 권장합니다. 사고력은 수능 시험 범위가 아닌 문항에서도 충분히 키울 수 있으며 이뿐만 아니라 단원간 통합 문항 출제에도 대비할 필요가 있습니다.

문항을 선별할 때, 2010~2016년에 만들어진 포카칩 모의평가에 수록된 모든 문항 중에서 2014학년도 포카칩 모의평가에 수록된 문항을 제외하고 문항 선별을 하였으며 2014학년도 포카칩 모의평가에 수록된 문항들은 차후 어떠한 경로로든 만나볼 수 있게 하겠습니다. 그때에도 여기 있는 N제는 추가 연습교재로 충분히 활용할 수 있을 것입니다.

PDF 파일이므로, 직접 인쇄를 하셔도 좋고 주변 제본 업체에 맡기는 것도 좋습니다. 인터넷에는 저렴한 제본 업체들이 많이 있으니 이를 활용하는 것을 권장합니다. 그러나 이러한 행위 이외에,

빠른 정답

1	①	**41**	83	**81**	13
2	③	**42**	50	**82**	①
3	5	**43**	④	**83**	④
4	25	**44**	③	**84**	①
5	32	**45**	③	**85**	16
6	④	**46**	⑤	**86**	65
7	④	**47**	42	**87**	③
8	4	**48**	105	**88**	49
9	23	**49**	③	**89**	②
10	②	**50**	③	**90**	84
11	②	**51**	⑤	**91**	45
12	④	**52**	144	**92**	③
13	④	**53**	38	**93**	⑤
14	③	**54**	①	**94**	6
15	②	**55**	49	**95**	②
16	⑤	**56**	⑤	**96**	120
17	④	**57**	①	**97**	49
18	③	**58**	①	**98**	40
19	③	**59**	②	**99**	④
20	①	**60**	③	**100**	②
21	①	**61**	28	**101**	①
22	①	**62**	①	**102**	②
23	17	**63**	④	**103**	24
24	35	**64**	④	**104**	42
25	31	**65**	⑤	**105**	②
26	31	**66**	③	**106**	22
27	②	**67**	③	**107**	④
28	②	**68**	②	**108**	①
29	①	**69**	86	**109**	②
30	⑤	**70**	75	**110**	③
31	①	**71**	④	**111**	65
32	③	**72**	④	**112**	16
33	④	**73**	37	**113**	④
34	10	**74**	⑤	**114**	40
35	21	**75**	144	**115**	24
36	494	**76**	②	**116**	⑤
37	476	**77**	140	**117**	⑤
38	②	**78**	⑤	**118**	30
39	⑤	**79**	①	**119**	486
40	④	**80**	⑤	**120**	32

정답 및 해설

해설

※ 일부 문항의 해설은 구 교육과정의 표기법을 활용한 것도 있습니다. 해설을 보실 때 참고하시기 바랍니다.
(예를 들어, $x \to 0+$를 $x \to +0$으로 표기했을 수 있음)

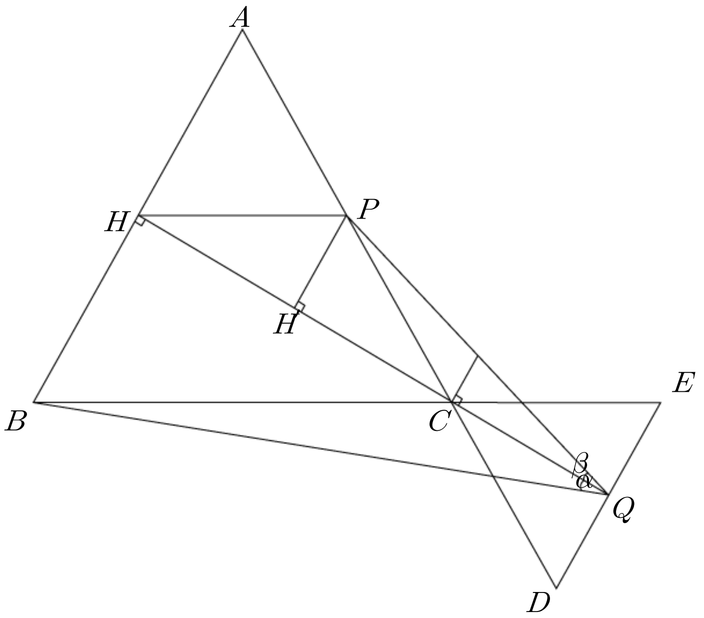
※ 해설지는 출제자가 거의 관여하지 않았으며 출제자의 의도와 완벽히 일치하지는 않을 수 있습니다.

1. 0을 대입하면 $a=\dfrac{1}{2}$ 이고 미분하면

$y'=\dfrac{2e^{2x}(e^x+1)-e^{2x}\times e^x}{(e^x+1)^2}$이고 0을 대입하면 $b=\dfrac{3}{4}$ 이다.

따라서 $a+b=\dfrac{5}{4}$이다.

2. 다음과 같이 $\theta=\alpha+\beta$ 가 되게 점 Q에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 수선의 발을 내리고 그 점을 H라고 하자.



$\triangle$CDE가 한 변의 길이가 a 인 정삼각형이면
$\triangle$ABC는 한 변의 길이가 $2a$이다.
중점연결정리에 의하여 $\overline{\mathrm{HP}}=a$ 이므로 $\triangle$HPC는 이등변삼각형이다. 점 P에서 $\overline{\mathrm{HC}}$에 내린 수선의 발을 H$'$이라고 하면 $\triangle$PH$'$Q에서

$\tan\beta=\dfrac{\frac{a}{2}}{\sqrt{3}a}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$이고,

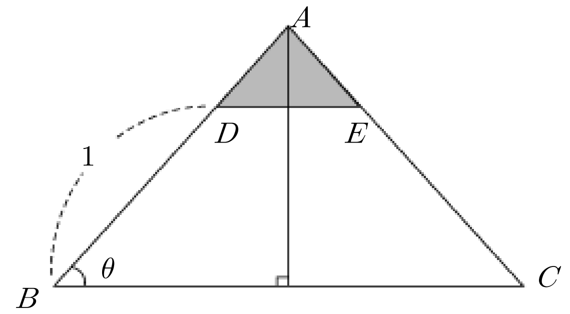
$\triangle$BHQ에서 $\tan\alpha=\dfrac{a}{\frac{3\sqrt{3}a}{2}}=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$이다.

따라서 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\frac{2}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{2\sqrt{3}}\times\frac{2}{3\sqrt{3}}}=\dfrac{7\sqrt{3}}{16}$이다.

3. 반원의 반지름은 $r=\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{8}}$ 이다. 따라서 입체도형의 단면의 넓이는 $\dfrac{1-\cos 2x}{16}\pi$이므로 입체도형의 부피는

$$V=\frac{\pi}{16}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx=\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}=\frac{1}{16}\pi \quad \therefore \frac{80V}{\pi^2}=5$$

4.



다음 그림과 같이 꼭짓점 A에서 수선의 발을 내려주면
$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BD}}=\sec\theta-1$ 이고 $\angle\mathrm{BAC}=(\pi-2\theta)$ 이므로 삼각형의 넓이

$S(\theta)=\dfrac{1}{2}(\sec\theta-1)^2\sin(\pi-2\theta)$

$=S(\theta)=\dfrac{1}{2}(\sec\theta-1)^2\sin 2\theta$

$=\sin 2\theta\left(\dfrac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right)^2=\dfrac{1}{2}sin2\theta\left(\dfrac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos\theta(1+\cos\theta)}\right)^2$

$=\dfrac{1}{2}\sin 2\theta\left(\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta(1+\cos\theta)}\right)^2=\dfrac{\sin^5\theta}{\cos\theta(1+\cos\theta)^2}$

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^5}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin^5\theta}{\theta^5}\times\frac{1}{\cos\theta(1+\cos\theta)^2}$

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^5}=\frac{1}{4}$이므로 $100a=25$

5. $a_{n+2}=\left(\sin\dfrac{\pi a_{n+1}}{2}\right)+\left(\cos\dfrac{\pi a_n}{2}\right)$에서

$a_3=\left(\sin\dfrac{\pi a_2}{2}\right)+\left(\cos\dfrac{\pi a_1}{2}\right)=0$이다.

$a_4=\left(\sin\dfrac{\pi a_3}{2}\right)+\left(\cos\dfrac{\pi a_2}{2}\right)=1$이다.

$a_5=\left(\sin\dfrac{\pi a_4}{2}\right)+\left(\cos\dfrac{\pi a_3}{2}\right)=2$이다.

$a_6=\left(\sin\dfrac{\pi a_5}{2}\right)+\left(\cos\dfrac{\pi a_4}{2}\right)=0$이다.

$a_7=\left(\sin\dfrac{\pi a_6}{2}\right)+\left(\cos\dfrac{\pi a_5}{2}\right)=-1$이다.

$a_8=\left(\sin\dfrac{\pi a_7}{2}\right)+\left(\cos\dfrac{\pi a_6}{2}\right)=0$이다.

$a_9=\left(\sin\dfrac{\pi a_6}{2}\right)+\left(\cos\dfrac{\pi a_7}{2}\right)=0$이다.

$a_{10}=\left(\sin\dfrac{\pi a_6}{2}\right)+\left(\cos\dfrac{\pi a_7}{2}\right)=1$이다.

$\vdots$

따라서, 이 수열은 6개의 주기로 반복된다. (첫째항만 규칙이 위배)
즉,
$a_1+\cdots+a_6=4$
$a_7+\cdots+a_{12}=2,\ a_{13}+\cdots+a_{18}=2,\ \cdots$
이다. 그러므로, $4+2\times 14=32$이다.

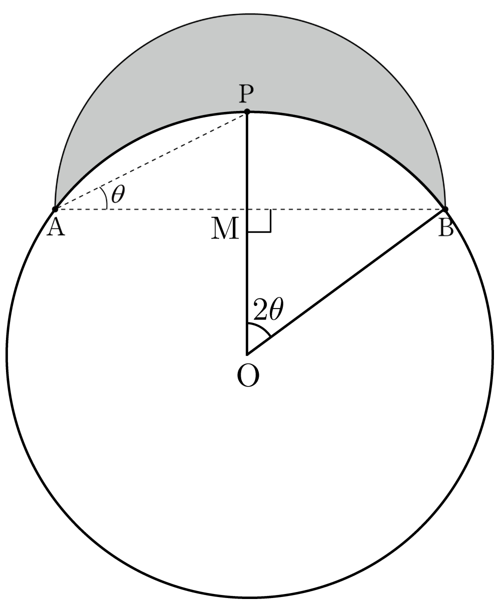
정답 및 해설

6. 규칙에 따라 관찰해보면 $\log_3 a$가 정수가 되는 a점$+1$ 에서 b값이 1 증가함을 알 수 있다.
이러한 점들을 관찰 해보면 2,10,28 $\cdots$등이 있다.
$x=1,2,3\cdots$에서 점들이 1개 2개 1개 1개 이므로
P_{31}은 (28, 3) 이다.

7. 길이는 항상 양의 값이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{P_nQ_n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left|4^{1-n}-2^{-n}\right|=\frac{1}{2}+0+\sum_{n=3}^{\infty}(2^{-n}-4^{1-n})$$
$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right)=\frac{2}{3}$$

8. 문제에서 선분 AB를 지름으로 하는 원 외에 새로 생긴 원의 중심을 O라 하자. 이때, 각POB는 호 PB에 대한 중심각이고, 각 PAB는 호 PB에 대한 원주각이므로 $2\angle\mathrm{PAB}=\angle\mathrm{POB}$이다. 즉, $\angle\mathrm{POB}=2\theta$이다.
그리고 삼각형 APB, 삼각형 ABO가 모두 이등변삼각형이므로 선분 OP와 선분 AB가 만나는 점을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{MB}}=1$, $\angle\mathrm{OMB}=90^{\circ}$이다.



$\overline{\mathrm{OM}}\times\tan2\theta=1$이므로 $\overline{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{\tan2\theta}$, $\overline{\mathrm{OB}}\times\sin2\theta=1$이므로 $\overline{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{\sin2\theta}$이다.

$S(\theta)$의 넓이는 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 넓이에서 (부채꼴 AOB의 넓이$-$삼각형AOB의 넓이)를 빼면 된다.
따라서 $S(\theta)=\dfrac{\pi}{2}-2\times\left(\dfrac{1}{2}\times2\theta\times\dfrac{1}{\sin^2 2\theta}-\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{1}{\tan2\theta}\right)$이고,

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{S(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{\sin^2 2\theta}+\frac{1}{\tan2\theta}}{\frac{\pi}{4}-\theta}$$

에서 $\dfrac{\pi}{4}-\theta=t$로 치환하면

$$\lim_{t\to0+}\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\frac{\pi}{2}-2t}{\cos^2 2t}+\tan2t}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\cos^2 2t}\right)+\frac{2t}{\cos^2 2t}+\tan2t}{t}$$

$=0+2+2=4$이다. 따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{S(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}=4$이다.

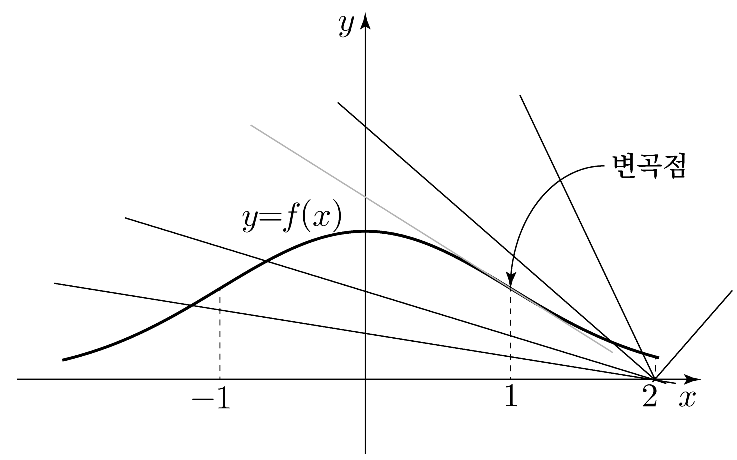
9. 두 곡선의 교점의 x좌표는 2이고, 그 외의 점에서는 만나지 않는다.
또한 $0<x<2$인 구간에서는 $\dfrac{2}{x^3}>\dfrac{1}{x^2}$이고 $x>2$인 구간에서는 $\dfrac{2}{x^3}<\dfrac{1}{x^2}$이다. 따라서

$$S_1=\int_1^2\left(\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right]_1^2=\frac{1}{4}$$

$$S_2=\int_2^3\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)dx=\left[-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right]_2^3=\frac{1}{36}$$

이고, $S_1+S_2=\dfrac{5}{18}$이다.

10. 함수 $f(x)$는 우함수이고, $f'(x)=-xe^{-\frac{1}{2}x^2}$,
$f''(x)=(x^2-1)e^{-\frac{1}{2}x^2}$이다. 따라서 그래프의 개형은 다음과 같다.



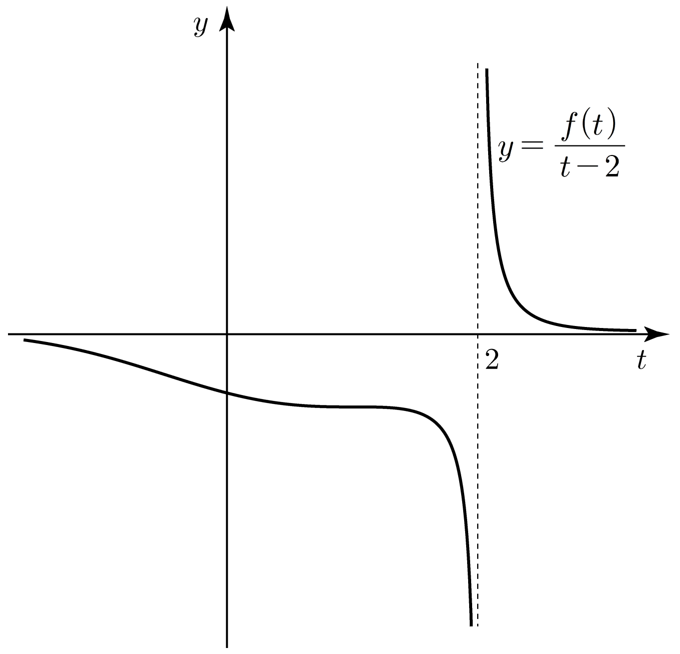
$t=2$인 경우, $f(t)=f'(a)(t-2)$를 만족시키는 a는 존재하지 않는다.
$t\neq2$인 경우, $\dfrac{f(t)}{t-2}=f'(a)$이고, 좌변은 점 $(2,\,0)$과 점 $(t,\,f(t))$를 지나는 직선의 기울기이고, 우변은 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 접선의 기울기이다.

이를 위에 그린 그림을 활용하여 생각해보면
$\dfrac{f(t)}{t-2}=f'(1)$을 만족시키는 t를 c_1이라 할 때, 구간 (c_1,∞)에서
$\dfrac{f(t)}{t-2}=f'(a)$를 만족시키는 a는 2개 존재하고 $g(t)=2$이다.. $t=c_1$인 경우 만족하는 a는 1개이고 $g(c_1)=1$이다.
$\dfrac{f(t)}{t-2}=f'(-1)$을 만족시키는 t를 c_2라 할 때, 구간 $(c_2,\,c_1)$에서
$\dfrac{f(t)}{t-2}=f'(a)$를 만족시키는 a는 존재하지 않고 $g(t)=0$이다. $t=c_2$인 경우 $g(t)=1$, 구간 (c_2,∞)에서는 $g(t)=2$이다.
따라서 불연속인 점의 개수는 2이다.
이렇게 푸는 것은 정확하지 않은 접선의 그림에 의존하기 때문에 명쾌하지 않다.

그러나 $y=\dfrac{f(t)}{t-2}$와 $y=f'(a)$를 그려서 생각해보면 위의 논리가 정당함을 알 수 있다.
$f'(a)$의 값이 언제 최대이고 언제 최소인지 알 수 있으므로 곡선 $y=\dfrac{f(t)}{t-2}$의 그래프의 개형과 직선 $y=f'(a)$(a를 상수 취급하여 어떤 정해진 값으로 보고 $y-t$그래프에서 보면 $y=k$와 같은 느낌으로 해석가능하다.)의 교점의 개수를 관찰할 수 있기 때문이다.

정답 및 해설

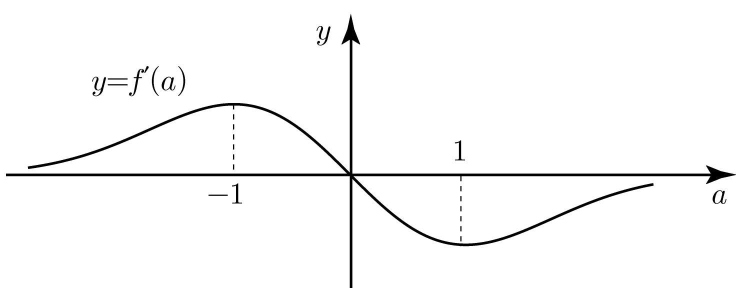
[참고] 함수 $y=\dfrac{f(t)}{t-2}$와 함수 $y=f'(a)$의 그래프의 개형



$y=\dfrac{f(t)}{t-2}$는 구간 $(-\infty,2)$에서 감소하며 $\lim\limits_{t\to 2-0}\dfrac{f(t)}{t-2}=-\infty$,

$\lim\limits_{t\to -\infty}\dfrac{f(t)}{t-2}=0-$ 이고, 구간 $(2,\infty)$에서 감소하며 $\lim\limits_{t\to 2+0}\dfrac{f(t)}{t-2}=\infty$,

$\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{f(t)}{t-2}=0+$ 이다.



$y=f'(a)$는 $x=1,-1$에서 극값을 가지며, $\lim\limits_{a\to\infty}f'(a)=0-$,

$\lim\limits_{a\to-\infty}f'(a)=0+$ 이다.

11. ㄱ. $\lim\limits_{x\to 0}g(x)\neq 0$임에도 불구하고 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$일 수 있으므로 거짓이다. (거짓)

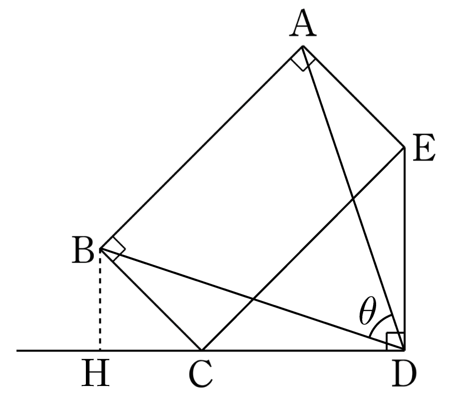
ㄴ. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}=1$이고 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{\sin f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\dfrac{g(x)}{f(x)}}{\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}}=\frac{1+1}{1}=2\text{이다. (참)}$$

ㄷ. $g(x)=0$인 경우, $f(x)=\sin g(x)=0$이고 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$이지만

$\lim\limits_{x\to}\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 정의되지 않는다. 이 외에도 무수히 많은 반례를 들 수 있다. (거짓)

12.



$\tan\angle\text{ADC}=3$, $\tan\angle\text{BDH}=\dfrac{1}{3}$이므로 $\tan\theta=\dfrac{3-\dfrac{1}{3}}{1+1}=\dfrac{4}{3}$임을 알 수 있다.

13. $\sqrt{x}=t$로 치환하면 $\displaystyle\int_a^b\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}}2\sin t^2dt=\frac{1}{4}$

14. $\lim\limits_{x\to 1}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(1)$이 되도록 하는 상수 a의 값을 찾자.

$\lim\limits_{x\to 1-0}(g\circ f)(x)=\log_a 3$, $\lim\limits_{x\to 1+0}(g\circ f)(x)=2^2=(g\circ f)(1)$

따라서 $\log_a 3=2^2$이면 $x=1$에서 연속이다. 곧, $a=3^{\frac{1}{4}}$이다.

15.

sol.1)

근과 계수와의 관계에 의해 $\sin\alpha+\sin\beta=1$이고 $\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{5}$ 입니다.

이때 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$로 풀어서 구하겠다면 $\cos\alpha\cos\beta$를 마저 구해주면 됩니다. 만약 다시 이차방정식을 풀어서 $\sin\alpha,\sin\beta$ 각각의 값을 구해주고서 $\cos\alpha,\cos\beta$를 따로 구하지 않는다면 다음과 같은 과정을 거쳐야 할 것입니다.

$$\begin{aligned}&\cos^2\alpha\cos^2\beta=(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\beta)\\&=1-(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)+\sin^2\alpha\sin^2\beta\\&=1-\{(\sin\alpha+\sin\beta)^2-2\sin\alpha\sin\beta\}+(\sin\alpha\sin\beta)^2\\&=1-\left(1^2-2\cdot\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{25-15+1}{25}=\frac{11}{25}\end{aligned}$$

한편, $0\le\alpha,\beta\le\dfrac{\pi}{2}$라는 조건은 해당 범위에서 사인, 코사인 값이 음수로 나올 일 없으니 부호 신경 쓰지 않고 근호를 계산해도 된다는 것이므로

$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{\sqrt{11}}{5}$라 할 수 있습니다. 그리고 여기까지만 해도 보기 중에서 $\sqrt{11}$을 품고 있는 ②번이 답이 아닐까 예측할 수 있죠!

$\therefore\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{\sqrt{11}+1}{5}$

정답 및 해설

sol.2) 켤레꼴의 이용

$5x^2-5x+1=0$라는 이차방정식의 두 실근은 $\frac{5\pm\sqrt{5}}{10}$이므로

$\sin\alpha=\frac{5-\sqrt{5}}{10}$, $\sin\beta=\frac{5+\sqrt{5}}{10}$이라 하여도 일반성을 잃지 않습니다.

이때, $\cos^2\alpha=1-\frac{30-10\sqrt{5}}{100}=\frac{7+\sqrt{5}}{10}$에서 $\cos\alpha=\sqrt{\frac{7+\sqrt{5}}{10}}$

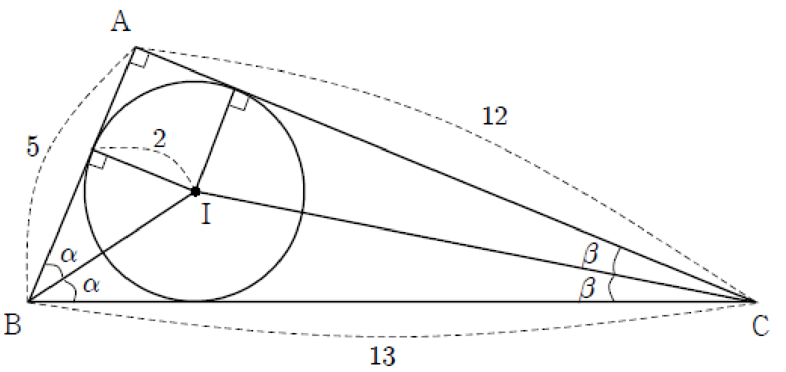
이고, $\cos\beta$는 다소 직관적일 수 있지만 켤레적으로 발생할테니, 혹은 직접 계산해봐도 $\cos\beta=\sqrt{\frac{7-\sqrt{5}}{10}}$가 됩니다.

따라서 $\cos\alpha\cos\beta=\sqrt{\frac{49-5}{100}}=\frac{2\sqrt{11}}{10}=\frac{\sqrt{11}}{5}$가 되어,

$\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{11}+1}{5}$를 이끌어 낼 수 있습니다.

16.

sol)



삼각형의 내접원의 중심은 내각의 이등분선의 교점으로서 작도할 수 있기에

$$\tan 2\alpha=\frac{12}{5},\ \tan 2\beta=\frac{5}{12}$$

로부터 $\tan\alpha, \tan\beta$를 찾아 다시 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$를 구하면 되겠죠!

하지만 지금은 삼각형 ABC의 세 변의 길이가 $5:12:13$인 친근한 직각삼각형으로서 내접원의 반지름이 2임을 금방 구할 수 있기 때문에

$\tan\alpha=\frac{2}{5-2}=\frac{2}{3}$과 $\tan\beta=\frac{2}{12-2}=\frac{1}{5}$를 통해 구하는 편이 빠릅니다. 어차피 문제가 쉬워서 이렇게 푼들 어떠하며 저렇게 푼들 어떠하련만

그러면 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{5}}{1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}}=\frac{10-3}{15+2}=\frac{7}{17}$

이 나옵니다.

17.

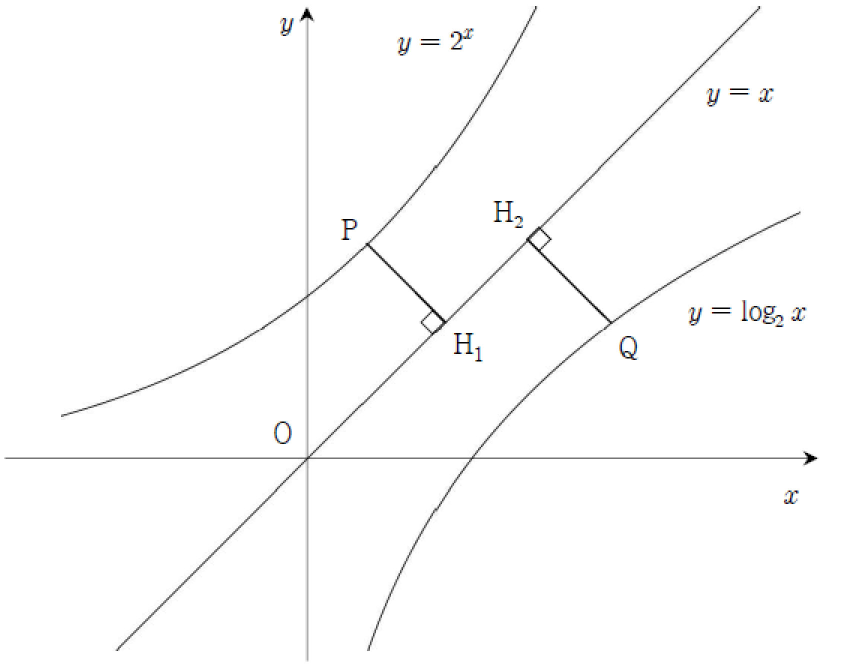
sol.1) 스피드 해법

'어머, 이건 최소일 때 점 P, Q가 서로 $y=x$ 대칭인 관계여야 해'

→ '게다가 점 P, Q에서 기울기가 1이겠는걸?'

→ '$y=2^x$를 미분한 $y'=2^x\ln 2$에서 점 $\mathrm{P}(x, 2^x)$의 x좌표를 대입한 순간 $2^x\ln 2=1$이고, 그때의 y좌표는 $2^x=\frac{1}{\ln 2}$구나!'

sol.2) 직관 OUT!



점 $\mathrm{P}(t, 2^t)$에서 직선 $y=x$에 이르는 거리는 $\frac{|t-2^t|}{\sqrt{2}}=\frac{2^t-t}{\sqrt{2}}$이고,

이를 미분해보면 $\frac{2^t\ln 2-1}{\sqrt{2}}$로 $2^t\ln 2-1=0$일 때 거리가 극솟값이자 최소가 됨을 알 수 있습니다. 이때 $2^t=\frac{1}{\ln 2}$ → $t\ln 2=-\ln(\ln 2)$에서

$\mathrm{P}\left(-\frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 2}\right)$이고 점 P에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발 H_1의 좌표는 $\left(\frac{1-\ln(\ln 2)}{2\ln 2}, \frac{1-\ln(\ln 2)}{2\ln 2}\right)$가 됩니다. 참고로 두 직선 $y=x$와 $y=-x+k$의 교점이 $\left(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right)$이므로 점 P의 x, y좌표를 더하여 2로 나누어 주면 H_1의 좌표를 쉽게 구할 수 있습니다.

동일한 방법으로 점 $\mathrm{Q}(s, \log_2 s)$에서 직선 $y=x$에 이르는 거리는

$\frac{|s-\log_2 s|}{\sqrt{2}}=\frac{s-\log_2 s}{\sqrt{2}}$이고, 이를 미분해보면

$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{s\ln 2}\right)=\frac{s(\ln 2)-1}{\sqrt{2}(\ln 2)s}$로 $s(\ln 2)-1=0$일 때 거리가

극솟값이자 최솟값이 됨을 알 수 있습니다. 이때 $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{\ln 2}, \log_2\frac{1}{\ln 2}\right)$, 즉

$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{\ln 2}, \frac{-\ln(\ln 2)}{\ln 2}\right)$로서 점 P가 직선 $y=x$에 가장 가까이 위치할 때의 좌표와 정확하게 $y=x$ 대칭 관계가 됩니다. 만약 이 경우 점 Q에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발을 H_2라 한다면 $\mathrm{H}_2\left(\frac{1-\ln(\ln 2)}{2\ln 2}, \frac{1-\ln(\ln 2)}{2\ln 2}\right)$

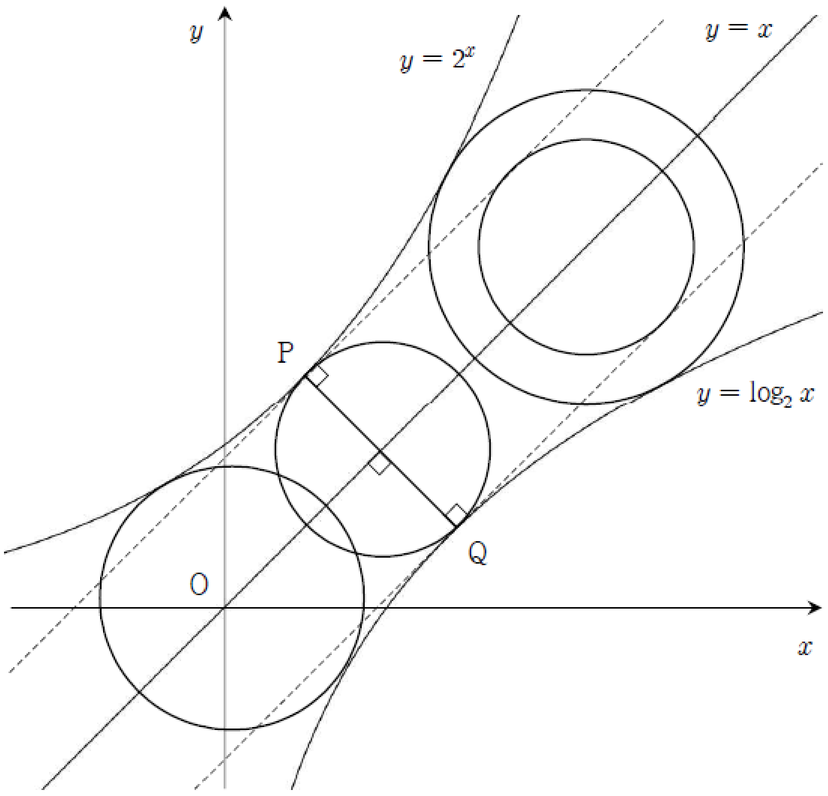
가 되고, 이는 점 H_1의 좌표와 일치하게 됩니다. 즉, 지수함수 $y=2^x$ 위의 점 P와 로그함수 $y=\log_2 x$ 위의 점 Q의 거리가 최소가 되게 하는 순간, 두 점에서 각각 $y=x$에 내린 수선의 발이 일치하게 되므로 나아가 선분 PQ의 기울기가 -1임을 알 수 있습니다. 하지만 이러한 접근은 두 곡선이 서로 역함수 관계임에서 기인한 것이고, 만약 지수함수와 로그함수의 역함수 관계가 성립하지 않는다면 수선의 발 $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2$가 일치하지 않게 되어 다른 풀이가 필요하게 될 것입니다.

고로, 선분 PQ의 길이가 최소가 되는 순간의 점 P, Q의 좌표는

$\mathrm{P}\left(-\frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 2}\right)$와 $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{\ln 2}, \frac{-\ln(\ln 2)}{\ln 2}\right)$가 되어 답은 $\frac{1}{\ln 2}$입니다.

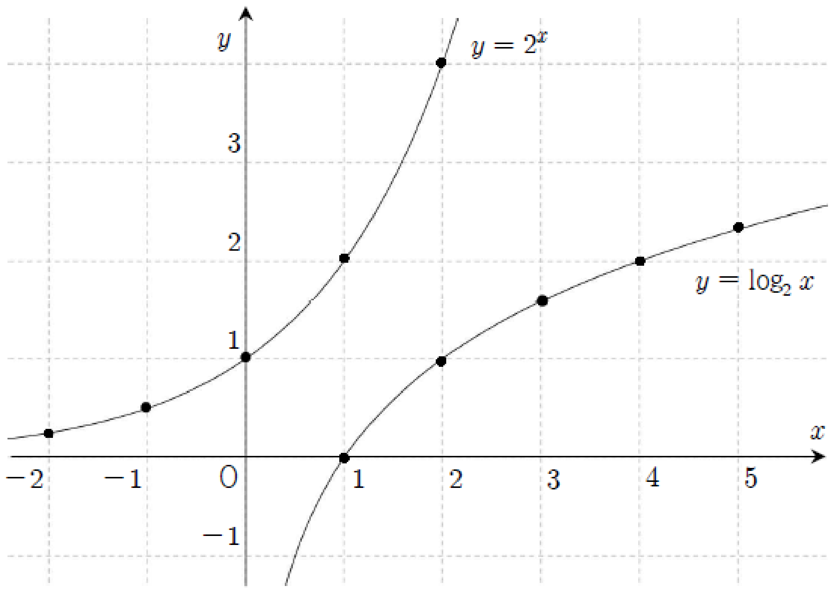
정답 및 해설

sol.3) 원 그리는 풀이

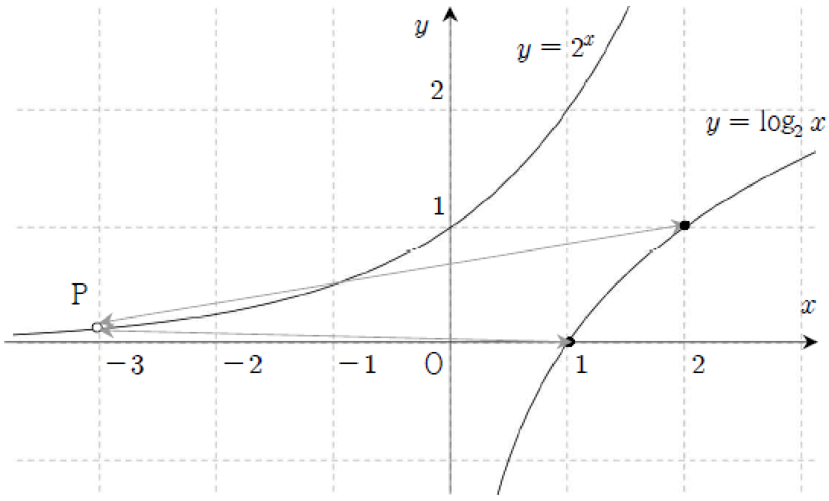


두 곡선 $y=2^x$와 $y=\log_2 x$에 기울기가 1인 접선을 각각 하나씩 그을 수 있고, 그때의 접점을 P, Q라 하면 이때 점 P의 y좌표가 답이 됩니다.
이러한 아이디어는 사실 미적분학에 등장하는 "라그랑주 승수법"에 의하여 정당화 될 수 있는데, 고교 과정에서는 직관에 기인한 것이라 볼 수 있죠.

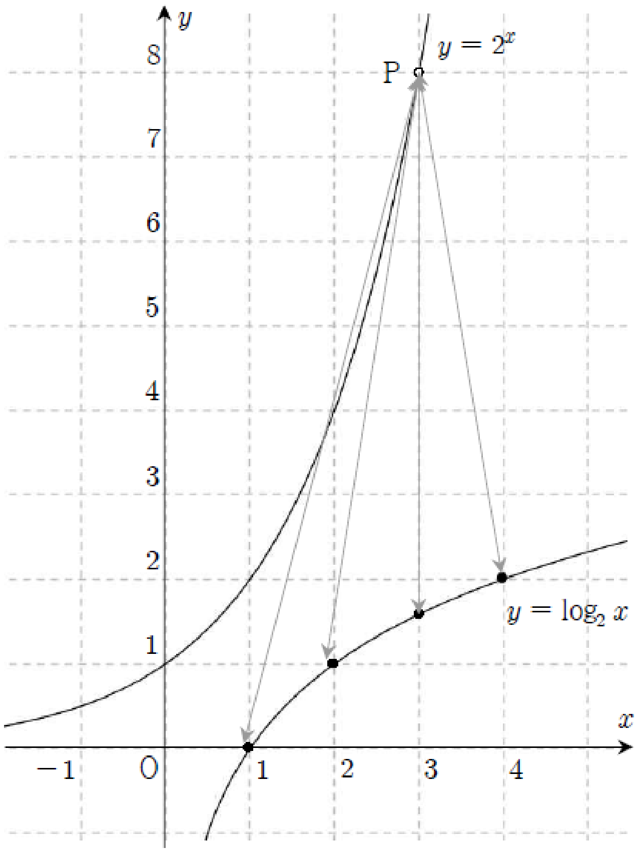
18.
sol)
지수로그 파트에서 얼마든지 응용의 여지가 있는데 이 문제는 기출문제들의 창조적인 변형이라 할 정도로 좋은 문제입니다! 먼저 그래프를 조금 정밀하게 살펴보도록 하겠습니다.



점 P의 x좌표가 $\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ 일 때를 기준으로 조건을 만족하는 점 Q의 개수를 각각 헤아려 준 다음에 취합하도록 하겠습니다.
그러고 보니 점 P의 x좌표가 설령 -3이라 하더라도 점 Q의 x좌표로 취할 수 있는 가장 작은 값이 1이기 때문에 (나) 조건을 만족할 수 없습니다.

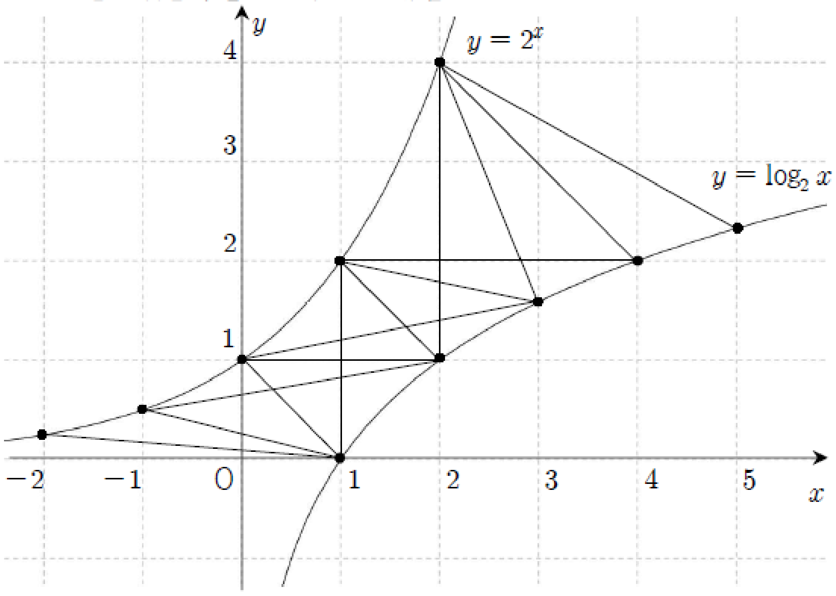


또한, 점 P의 x좌표가 3이면 P(3, 8)로 턱없이 높은 곳에 존재하므로 그 어떤 로그함수 위의 점 Q를 택하든 (나) 조건을 만족할 수 없습니다.



따라서, 점 P의 x좌표가 $-2, -1, 0, 1, 2$인 경우만 따져주어도 충분합니다.

이제 조건에 맞는 점들끼리 짝지어 보겠습니다.



$\text{P}(-2, 2^{-2})$의 경우, 점 Q의 x좌표가 1인 것은 거리 조건을 만족하고, 2 이상인 것은 전부 다 거리가 4보다 커지므로 총 1개
$\text{P}(-1, 2^{-1})$일 땐 점 Q의 x좌표가 1, 2인 것으로 총 2개
$\text{P}(0, 2^{0})$일 땐 점 Q의 x좌표가 1, 2, 3인 것으로 총 3개입니다.

이 경우 점 P를 중심으로 하고 반지름이 4인 원을 생각해보면 자명한데,
굳이 부등식 $(3-0)^2+(\log_2 3-1)^2 \le 4^2$?이 성립하는지 확인하려고
$\Leftrightarrow (\log_2 3-1)^2 \le 7$? $\Leftrightarrow \log_2 \frac{3}{2} \le \sqrt{7}$? $\Leftrightarrow \frac{3}{2} \le 2^{\sqrt{7}}$?! 까지 따지지 않아도 됩니다!

다음으로 $P(1,2^1)$일 때, 점 Q의 x좌표가 $1,2,3,4$인 것으로 총 4개
$P(2,2^2)$일 때, 점 Q의 x좌표가 $2,3,4,5$인 것으로 총 4개가 나옵니다.
따라서, 이를 모두 취합하면 $1+2+3+4+4=14$가 답이 됩니다.
복잡해 보이지만 실제로 풀 때는 문제를 해결하기까지 얼마 걸리지 않습니다.
현실적인 풀이로 최적화를 하자면

문제를 읽고 (가) 조건을 이해
→ 좌표 평면을 필요한 모눈종이 사이즈로 그리기
→ 지수, 로그함수 위의 필요한 점 찍기
→ 직각 삼각형 혹은 원을 이용해서 점 P의 x좌표를 기준으로 카운팅
; $1+2+3+4+4=14$

19. P_8은 $n=8$인 경우이므로 $(8,8)$에서 x축에 평행하게 그은 직선이 $y=2^x$와 만나는 점은 $(t,8)$이다. $y=2^x$이므로 $P_8=(3,8)$임을 알 수 있다. $y=2^x$와 $y=\log_2 x$는 서로 역함수 관계이므로 $Q_8=(8,3)$임을 알 수 있다. 문제에서 $A_k=(3,3)$이 된다. 이 네 점은 정사각형을 이루는데 그 변의 길이가 5이므로 사각형 $P_8A_8Q_8A_k$의 넓이는 25이다.

20. $A_n=(n,n), P_n=(\log_2 n,n),\ Q_n=(n,\log_2 n)$
선분 $\overline{A_nP_n}$과 선분 $\overline{A_nQ_n}$ 위의 점 들 중 (x,y)가 모두 정수가 되어야 하므로 두 가지 경우로 나눌 수 있다.
1) $n=1,2,4,8....2^k$ 인 경우
$\log_2 n$값이 정수가 되기 때문에 P_n, Q_n이 포함된다.
n=1 : 1+1×2=3
n=2 : 1+1×2=3
n=4 : 1+2×2=5
n=8 : 1+5×2=11
2) $n \ne 2^k$인 경우
시작점이 정수점이 아니므로 대소비교가 필요하다.
n=3 :$\log_2 3<2$ $x=2$인 경우엔 성립한다. 1+1×2=3
$n=5,6,7$: $\log_2 n<\log_2 3=8$ 이므로 $x=3$을 포함한다.
n=5 : 1+2×2 =5
n=6 : 1+3×2=7
n=7 : 1+4×2=9
$n=9,10$인 경우 $\log_2 n>\log_2 8=3$ 이므로 $x=3$을 포함하지 않는다.
n=9 : 1+5×2=11
n=10 : 1+6×2=13
(1씩 더한건 A_n이다.)

따라서 정수점의 개수 합 $\sum_{n=1}^{10} a_n=70$이다.

21.
sol)
예컨대 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$의 교점의 x좌표가 a,b $(a<b)$일 때 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$가 됩니다.
만약 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$의 교점의 x좌표가 a,c,b $(a<c<b)$라 하더라도 $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$라 하여도 됩니다. 왜냐하면

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|dx = \int_a^c |f(x)-g(x)|dx + \int_c^b |f(x)-g(x)|dx$$

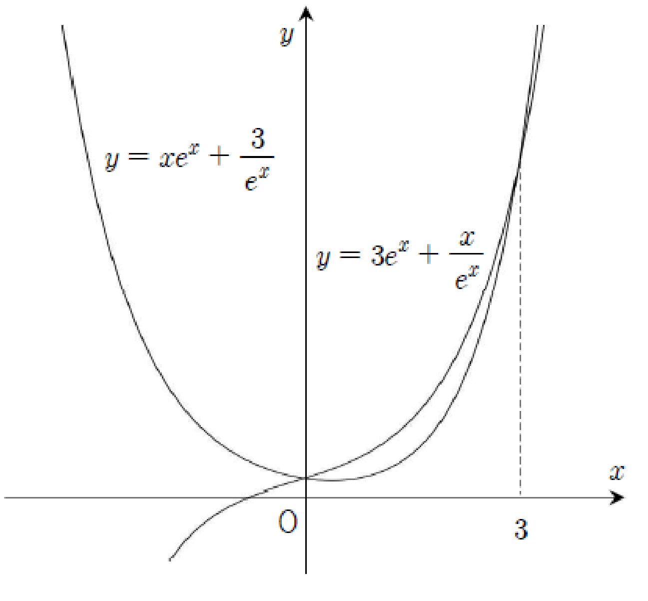
라 하면 충분하니까요! 이런 식으로 교점을 경계로 적절하게 절댓값을 벗겨서 정적분을 계산해야 하므로, 주어진 두 곡선의 교점을 찾는 작업이 우선되어야 마땅합니다. 그러면

$$xe^x+3e^{-x}=3e^x+xe^{-x} \to (x-3)(e^x-e^{-x})=0$$

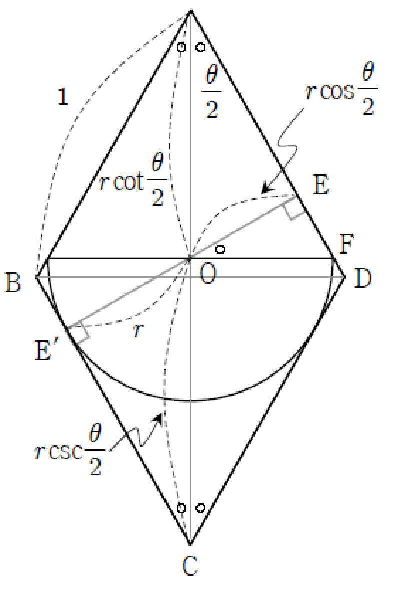
로부터 두 곡선은 $x=0,3$에서만 교점을 갖게 되니 $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$의 형식에 맞추어 적분을 해보면

$$\int_0^3 |(x-3)(e^x-e^{-x})|dx = \int_0^3 (3-x)(e^x-e^{-x})dx$$
$$=\int_0^3 \{(3-x)e^x+(x-3)e^{-x}\}dx$$
$$=\left[(4-x)e^x+(2-x)e^{-x}\right]_0^3 = e^3-e^{-3}-6$$

※ 대략적인 그래프의 개형을 살펴보면 다음과 같습니다.



22.
sol.1) 근사하지 않은 풀이



정답 및 해설

귀찮더라도 '설마 그렇게까지 풀어야 하나?' 싶을만큼 복잡하고 기나 긴 일련의 계산과정 끝에 답을 구해 보도록 하겠습니다. 계산이 복잡한 것이 문제를 풀지 못할 이유는 아니니까요. 차근차근 단계적으로 접근해보자면

① $\overline{BD} \neq 2r$임을 인식

② $\overline{AC}, \overline{BD}$ 작도 (마름모의 대각선으로서 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$)

③ $\overline{AD}$와 수직이면서 반원의 중심을 지나도록 $\overline{EE'}$를 작도하되 편의상 점 F 표시 <u>(수많은 닮은 직각 삼각형들 확인!)</u>

④ 삼각형 OE′C에서 $\overline{OC}$ 값 구하기

⑤ 차례대로 $\overline{OE}, \overline{OA}$ 값 구하기

⑥ 삼각형 ABC가 이등변삼각형임을 이용해서 $\overline{AC}$ 값 구하기

이때 $\overline{BD} = 2\sin\dfrac{\theta}{2}$이고, 반원의 반지름 r에 대해 $\overline{AC}$의 길이로 등치하면

$$2\cos\frac{\theta}{2} = r\cot\frac{\theta}{2} + r\csc\frac{\theta}{2}$$

$$\rightarrow\ r = \frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{\cot\frac{\theta}{2} + \csc\frac{\theta}{2}} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} + 1} = \frac{\sin\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{4}}$$

에서 $f(\theta) = 2r = \dfrac{\sin\theta}{\cos^2\frac{\theta}{4}} = \sin\theta\sec^2\dfrac{\theta}{4}$이 됩니다. 이제 극한 계산만 해주면 되겠네요.

$$\overline{BD} - f(\theta) = 2\sin\frac{\theta}{2} - \sin\theta\left(1 + \tan^2\frac{\theta}{4}\right)$$

$$= 2\sin\frac{\theta}{2} - \sin\theta - \sin\theta\tan^2\frac{\theta}{4}$$

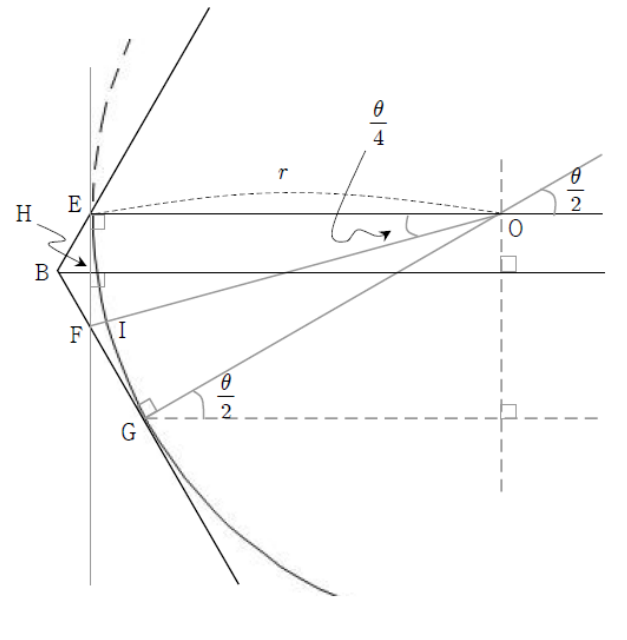
$$= 2\sin\frac{\theta}{2}\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right) - \sin\theta\tan^2\frac{\theta}{4}$$

이므로 극한값을 계산 가능하도록 꼴을 정리해서 답을 구해보면 이 타이밍에 테일러 전개에 의한 근사와 타협해서 $\sin\theta \simeq \theta, \tan\theta \simeq \theta, 1 - \cos\theta \simeq \dfrac{\theta^2}{2}$를 이용하여 빠르게 준 식을 계산할 수도 있습니다.

$$\therefore\ 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8} - 1\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$

sol.2) 근사한 풀이

상황을 관찰하기 위해서 요리조리 보조선도 그어보고 싶은데, 샤프심이 두껍게 느껴질 정도로 그림이 너무 작습니다. 그러니 새로이 큼지막하게 그림을 그리겠습니다. 그냥 막 그리는 것이 아니라 특징은 보존하면서, 프로 바둑 기사가 고심 끝에 한 수를 두듯이 신중하게요!



반원의 지름 한 끝을 E라 하였을 때, 그 점에서 지름에 수직이 되도록 보조선을 그어서 마름모 ABCD와 만나는 다른 점을 F라 하겠습니다. 그리고 반원의 호 부분이 변 BC와 접하는 점을 G라 하고서, 그림과 같이 점 H, I, O 도 잡아주겠습니다. 그러면 직각, 엇각, 각의 이등분 등을 통하여 $\angle EOG = \dfrac{\theta}{2}, \angle EOF = \dfrac{\theta}{4}$임을 파악할 수 있습니다.

그리고, $\overline{BD}, f(\theta)$를 따로 따로 구하는 것이 아니라 $\overline{BD} - f(\theta)$를 한 번에 구하는 것이 포인트입니다. 이는 $\overline{BD}$의 길이에 지름 $2r$을 뺀 값이기도 하지만, 그렇게 구해버리면 포카칩님의 계략에 빠지는 셈이 되죠.

$\overline{EH}$에 $\tan\dfrac{\theta}{2}$를 곱한 다음 다시 2를 곱하여도 구해도 됩니다.

이때, $r = \sin\dfrac{\theta}{2} \simeq \dfrac{\theta}{2}$와 $\widehat{EI} = r \times \dfrac{\theta}{4} \simeq \dfrac{\theta^2}{8}$ 정도는 근사할 수 있겠죠?

그리고 $\theta \rightarrow +0$이면 마름모의 네 변이 모두 수직에 가까워질테니 $\widehat{EI} \simeq \overline{EF}$로도 근사할 수 있습니다!

그렇다면 $\overline{EF} \simeq \dfrac{\theta^2}{8}$에서 $\overline{EH} \simeq \dfrac{\theta^2}{16}$이고,

$$\frac{1}{2}\{\overline{BD} - f(\theta)\} = \overline{BI} = \overline{EH}\tan\frac{\theta}{2} \simeq \frac{\theta^3}{32}$$

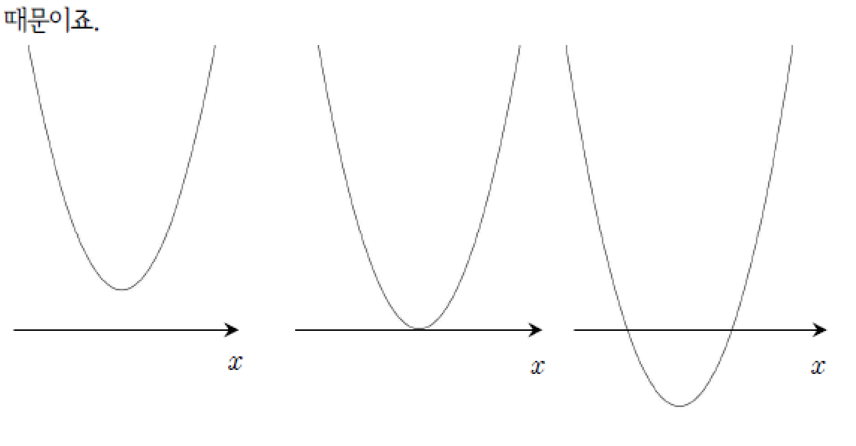
따라서, $\overline{BD} - f(\theta) \simeq \dfrac{\theta^3}{16}$이 됩니다.

사실 이 문제는 0으로 가는 요소들로 분해가 잘 안 되어서 상당한 시간을 투자한 끝에 겨우 겨우 운 좋게 발견 하였습니다. 대신 실전에서 이런 문제는 그만큼 잘 안 나오니 유형 익히기 차원에서 보고 넘어가도 충분합니다.

23.

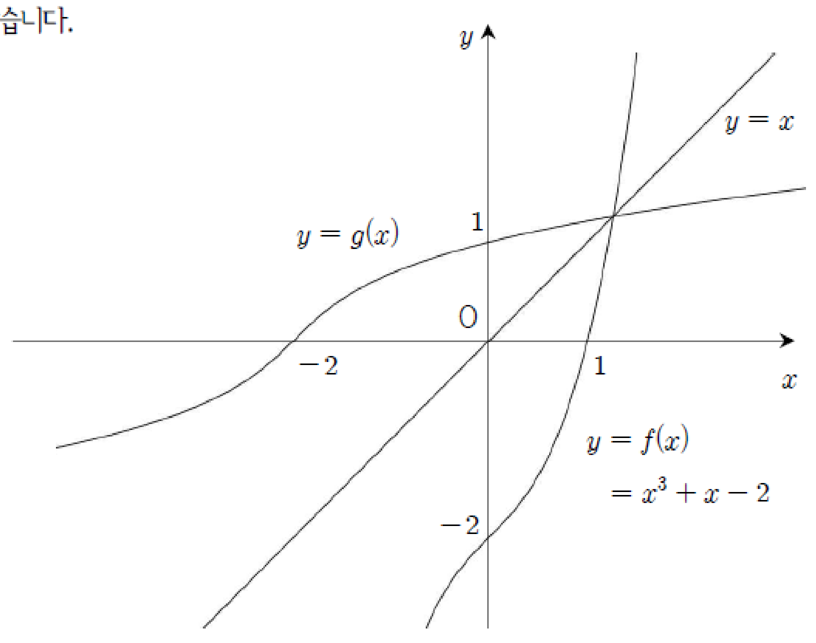
sol)

최고차항 계수가 양수라고 한정할 때, 삼차함수의 개형은 크게 세 가지로 나눌 수 있습니다. 왜냐하면 그 도함수인 이차함수 역시 최고차항의 계수가 양수가 되고, 이때 도함수와 x축과의 교점 관계는 세 가지가 가능하기 때문이죠.



각각의 경우, 변곡점(이차함수가 극솟값을 갖는 지점)에서 삼차함수의 기울기가 차례대로 양수, 0, 음수가 됩니다. 따라서 (나) 조건이 의미하는 바는 삼차함수가 극값을 갖지 않는 개형이면서 동시에 변곡점에서의 기울기가 양수로서 도함수의 최솟값이 1이라는 것입니다. 거기다 (가) 조건은 마치 적분상수와 같은 역할로서 좌표상 삼차함수의 상대적인 높이를 고정시켜

주네요. 따라서 이를 만족하는 $f(x)$와 그 역함수인 $g(x)$를 그려보면 다음과 같습니다.



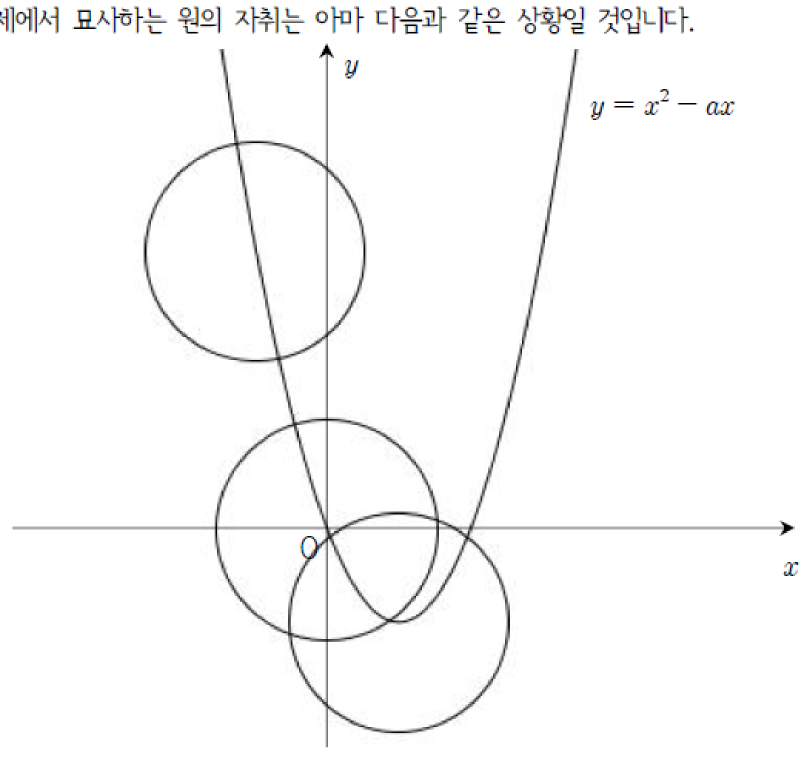
이때 $\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)g(x)-a}{x}=b$에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 하므로 $a=f(0)g(0)=-2\cdot1=-2$이고, 로피탈 정리와 역함수 미분법을 적용하면 $b=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)=1\cdot1+(-2)\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$ $\left(\because f'(1)=4=\dfrac{1}{g'(0)}\right)$가 되어 답이 금방 나오겠지만

$\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)g(x)+2}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}$는 함수 $h(x)=f(x)g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수로 $h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)=\dfrac{1}{2}=b$이 됩니다. 따라서 답은 $4(a^2+b^2)=4\left(4+\dfrac{1}{4}\right)=17$입니다.

24.

sol)

문제에서 묘사하는 원의 자취는 아마 다음과 같은 상황일 것입니다.



일단 $g(t)=\left|\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}-r\right|$이라 식을 세울 수 있는데, 선분 OQ 길이의 최솟값인 $g(t)$는 항상 연속임을 확신할 수 있습니다. 다만, 문제에서 미분이 불가능한 지점에 대해 묻고 있으니, 좌우미분계수가 다른 지점을 찾아주어야 합니다. 그리고 그 부분은 원점에서 이차함수 $f(t)$상의 거리와 원의 반지름 r과의 대소 관계에 따라 발생할 수 있습니다.

[2009년 06월 평가원 수리(가형) 24번]

24. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\dfrac{f'(5)}{f'(3)}$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다.
>
> (나) 함수 $|f(x)-f(1)|$은 오직 $x=a\ (a>2)$에서만 미분가능하지 않다.

위의 기출문제와 같은 방식으로 해석하자면 $h(t)=\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}$라는 함수에 대하여 $y=r$이라는 상수함수를 x축 삼아 그 아랫부분 접어 올린 것이 바로 $g(t)=\left|\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}-r\right|$가 됩니다.

그러니 이제 $h(t)$를 수식을 통해 분석해봅시다.

$$h'(t)=\frac{2t+2f(t)f'(t)}{2\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}}=\frac{t+(t^2-at)(2t-a)}{|t|\sqrt{1+(t-a)^2}}$$

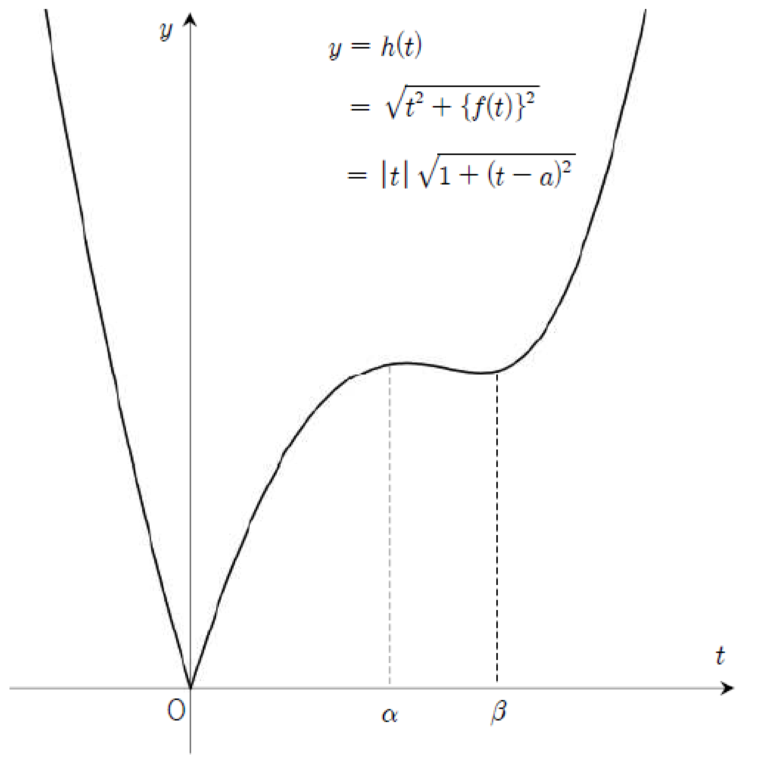
$$=\frac{t}{|t|}\cdot\frac{1+(t-a)(2t-a)}{\sqrt{1+(t-a)^2}}=\frac{t}{|t|}\cdot\frac{2t^2-3at+(a^2+1)}{\sqrt{1+(t-a)^2}}$$

여기서 $\dfrac{t}{|t|}$로부터 $t=0$에서 도함수의 부호가 불연속적으로 변함을 파악할 수 있습니다. 남은 부분인 $\dfrac{2t^2-3at+(a^2+1)}{\sqrt{1+(t-a)^2}}$는 $t=0$ 근처에서 부호 가 바뀌지 않기 때문에 $t=0$에서 $h(t)$는 극(소)값을 갖는다고 볼 수 있습니다.

그리고 분자 중 일부인 $p(t)=2t^2-3at+(a^2+1)$를 떼어내 살펴보면,

case Ⅰ. $D=9a^2-8(a^2+1)=a^2-8>0$

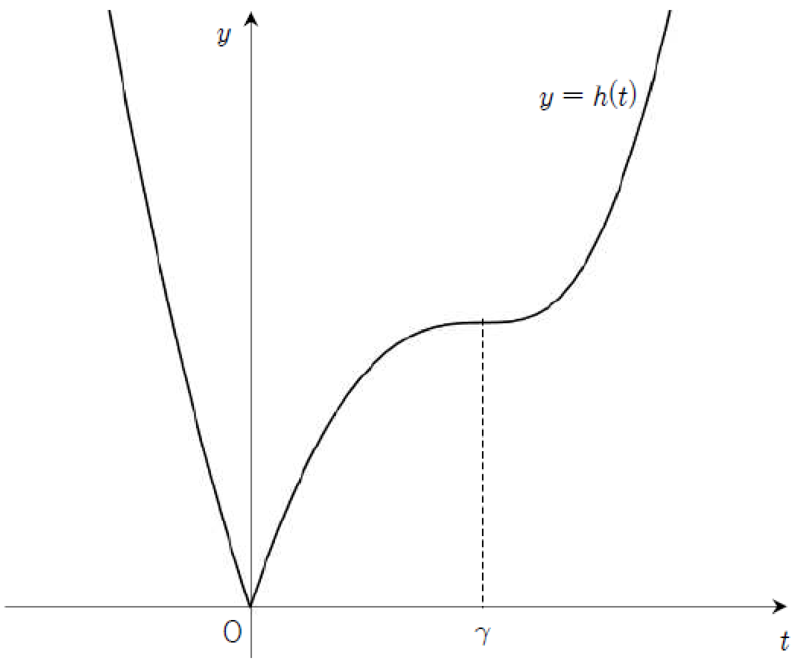
$h(t)$는 $p(t)=2t^2-3at+(a^2+1)=0$의 두 근 α,β를 포함하여 $t=0,\alpha,\beta$에서 총 세 개의 극값 (이때, $\alpha<\beta$)



정답 및 해설

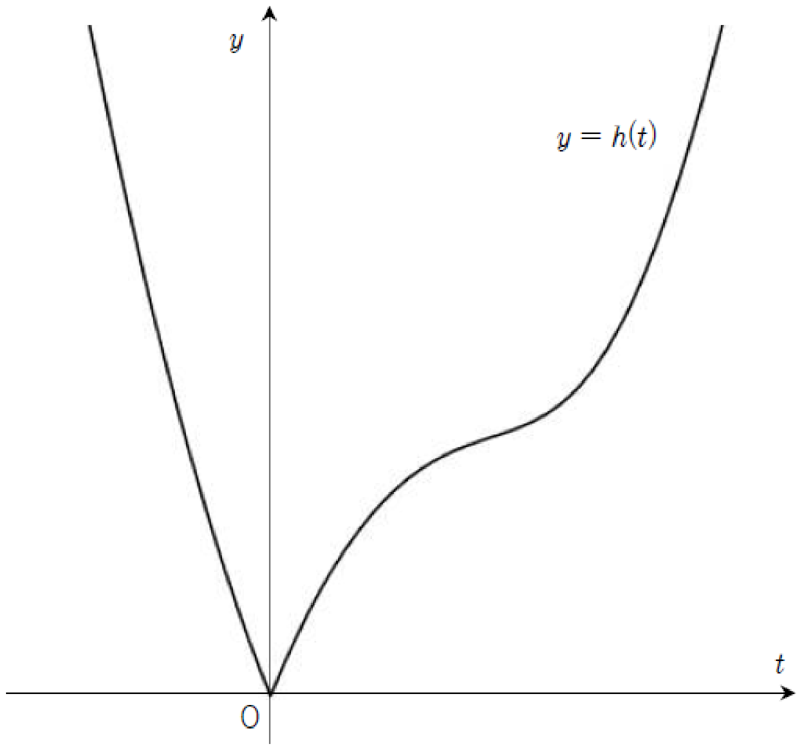
case Ⅱ. $D = a^2 - 8 = 0$

$h(t)$는 $p(t) = 2t^2 - 3at + (a^2+1) = 0$의 중근 $\gamma = \frac{3}{4}a$에서 변곡점을 갖고, 오직 $t=0$에서만 극값



case Ⅲ. $D = a^2 - 8 < 0$

$h(t)$는 오직 $t=0$에서만 극값



이때 $h(t)$에서 $g(t) = \left|\sqrt{t^2 + \{f(t)\}^2} - r\right|$로 그래프를 접어 올리는 과정을 거쳐도 미분불가능한 지점이 오직 두 군데 존재하려면, $h(t)$가 $t=0$에서 첨점으로서 $g(t)$에서도 여전히 미분불가능함을 고려하여서 결국 case Ⅱ에서 $y=r$이 변곡점의 높이인 $y=h(\gamma)$를 지나는 순간뿐입니다. 따라서 $p(t) = 2t^2 - 3at + (a^2+1)$ 부분이 중근을 가져야 하기에 $a^2 = 8$이고,

$p(t) = 2t^2 - 3\sqrt{8}t + 9 = (\sqrt{2}t - 3)^2 = 0$에서 $\gamma = \frac{3}{\sqrt{2}}$이고,

혹은 근과 계수와의 관계를 통해 $2\gamma = \frac{3}{2}a \to \gamma = \frac{3}{\sqrt{2}}$로 구해도 되고,

$r = h(\gamma) = \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left\{\frac{3}{\sqrt{2}}\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \sqrt{8}\right)\right\}^2} = \sqrt{\frac{27}{4}}$ 이 됩니다.

고로, $a^2 + 4r^2 = 8 + 27 = 35$가 답입니다.

25. $1 \le \overline{\mathrm{PQ}} = |20 - a^k| \leqq 18$

$-18 \leqq 20 - a^k \leqq 18 \ (20 - a^k \neq 0)$

$-38 \leqq -a^k \leqq -2 \quad (a^k \neq 20)$

$\therefore\ 2 \leqq a^k \leqq 38 \cdots (*) \ (a^k \neq 20)$

$f(a) = 1$이므로 $k=1$일 때는 *를 만족하고,

$k=2$일 때는 만족하지 않아야 한다.

$\therefore\ a = 7,\ 8, 9,\ \cdots,\ 38\ (a \neq 20)$

따라서 자연수 a의 개수는 31이다.

26. $\log_2 x^n - \log_2 x^2 - 6 = 0$에서

n이 홀수이면 $x > 0$이어야 한다. 따라서,

$\log_2 x^n - \log_2 x^2 - 6 = (n-2)\log_2 x - 6 = 0$이므로

$\log_2 x = \frac{6}{n-2}$이다. 따라서, 오직 하나의 실근을 갖는다.

n이 짝수이면 $\log_2 x^n - \log_2 x^2 - 6 = (n-2)\log_2|x| = 0$이므로

$\log_2|x| = \frac{6}{n-2}$이다. 따라서, 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \frac{2}{16} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$

27. 인수분해하면, $(2^x - k)(2^x - 8) < 0$이다.

이를 만족시키는 자연수 x의 개수가 1이 되어야 한다.

$k < 8$인 경우 : $\log_2 k < x < 3$

$\to k = 2, 3$

$k > 8$인 경우 : $3 < x < \log_2 k$

$\to k = 17,\ 18, \cdots, 32$ 따라서, 총 18개다.

28. $g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$
$f(x)$	↘		↗	0	↘		↗

$g(x)$는 $(-\infty,\ \alpha)$, $(\alpha,\ \beta)$, $(\beta,\ \gamma)$, $(\gamma,\ \infty)$에서 각각 하나의 극값을 가진다.

따라서 실수 a의 개수는 4이다.

29. $\cos\alpha = -\frac{1}{4}\alpha,\ \cos\beta = -\frac{1}{4}\beta$

$m = \int_{-\alpha}^{\beta}\frac{\cos x}{x^2}dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_{-\alpha}^{\beta} - \int_{-\alpha}^{\beta}\frac{\sin x}{x}dx$

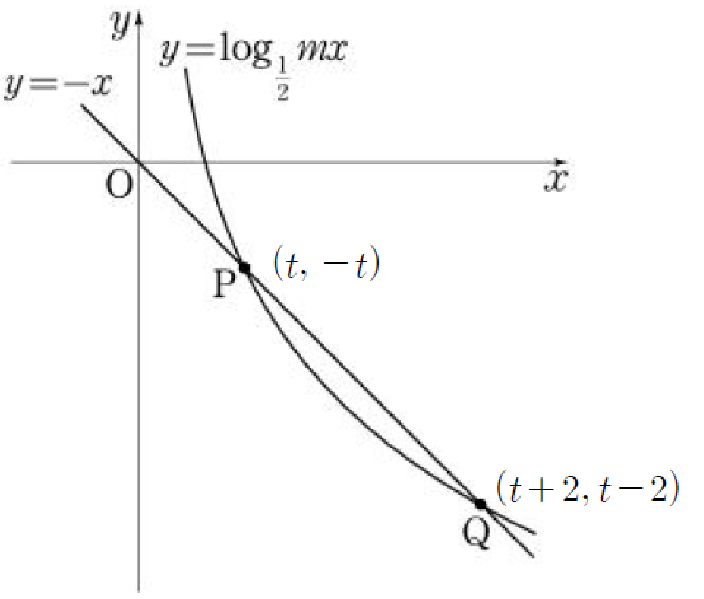
$\therefore \int_{-\alpha}^{\beta}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2} - m$

정답 및 해설

30.

sol)

기울기가 -1인 직선 $y=-x$ 위의 두 점 P, Q의 거리가 $2\sqrt{2}$이므로 $\mathrm{P}(t, -t), \mathrm{Q}(t+2, -t-2)$라 둘 수 있습니다.



(위의 그래프에서 점 Q의 y좌표는 $t-2$가 아니라 $-t-2$입니다.)

그리고 두 점 P, Q는 로그함수 위의 점이기도 하면서 직선 위의 점이기도 하다는 사실에 착안하여 식을 연립해보면

$$\begin{cases} -t=-\log_2 mt \\ -t-2=-\log_2 m(t+2) \end{cases} \rightarrow 2=-\log_2\frac{t}{t+2}=\log_2\frac{t+2}{t}$$

따라서 $t=\frac{2}{3}$로 $2^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}m \rightarrow m=\frac{3}{2}\times 2^{\frac{2}{3}}=3\times 2^{-\frac{1}{3}}$이 답입니다.

31.

sol)

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(m\sin x+n\cos x)e^{-x}=me^{-\frac{\pi}{2}}=e^{-\frac{\pi}{2}}$에서 $m=1$이 됩니다.

아직까지는 n이 어떠한 자연수인지 모르지만 $f''(x)$에서 $x\to+0$일 때의 극한값은 구할 수 있는 꼴이 되리라 예상을 할 수 있습니다. 그리고 곱에 대한 미분법, 삼각함수와 지수함수 각각의 도함수 꼴에 대한 특색들을 고려하면서 $\{\square\sin x+\triangle\cos x\}e^{-x}$에서 계수(?)인 $\square, \triangle$위주로 수식을 정리하자면

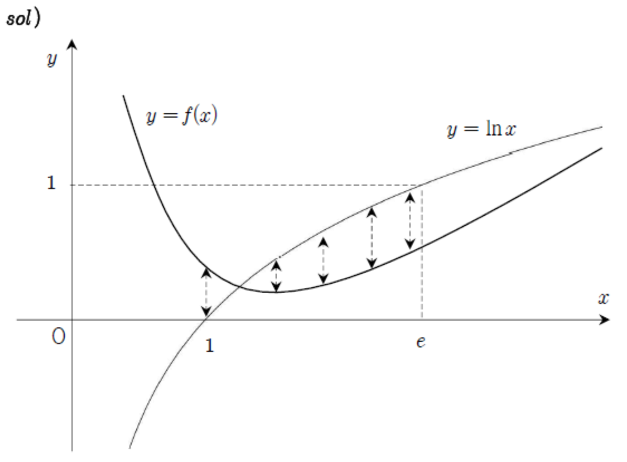
$$\begin{aligned} f'(x)&=(m\cos x-n\sin x-m\sin x-n\cos x)e^{-x} \\ &=\{(m-n)\cos x-(m+n)\sin x\}e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x)&=\{(n-m+m+n)\sin x+(-m-n-m+n)\cos x\}e^{-x} \\ &=2(n\sin x-m\cos x)e^{-x} \end{aligned}$$

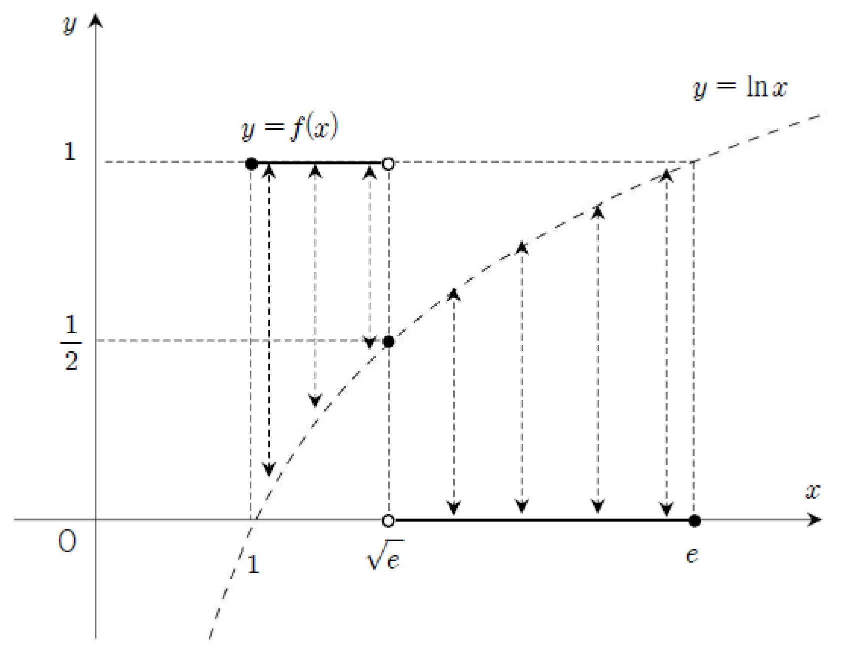
따라서, $\lim\limits_{x\to+0}f''(x)=-2m=-2$가 답이 됩니다.

32.

sol)



최댓값을 구하려는 피적분함수의 분자식 $|f(x)-\ln x|$는 두 함수 $f(x)$와 $\ln x$의 차이를 의미합니다. 분모인 $\frac{1}{x}$ 부분은 감소하고 있으므로 가급적이면 적분 구간 $[1, e]$에서 $|f(x)-\ln x|$의 값을 최대가 되게 $f(x)$를 잡아주는 것이 중요합니다. 비록 $f(x)$가 불연속이 되더라도 $0\le f(x)\le 1$ 범위를 만족하기만 하면 됩니다. 주어진 조건만으로 $f(x)$가 적분 가능함을 충분히 표현하고 있는 것은 아니지만, 최댓값을 논하려면 적분이 가능해야 하니까요. 그러면 다음과 같은 $f(x)$의 그래프를 생각해줄 수 있습니다.



$f(x)$가 연속이라는 말은 없으나 구간 $[1, e]$에서 정의된다 하였으니 불연속점 $x=\sqrt{e}$에서 함숫값은 0 이상 1 이하의 아무 값이나 취해줘도 되기에 $f(\sqrt{e})\neq\frac{1}{2}$이어도 됩니다. 어차피 적분하면 한 점은 영향을 끼치지 않죠!

이걸 증명하는 게 고등미적분학, 즉 해석학인데 고교 과정에선 불가피하게 직관적으로 받아들이고 넘어가야 합니다.

따라서, $h(t)=\ln t \rightarrow h(e^2)=2$, $a=\sqrt{e} \rightarrow \ln a=\frac{1}{2}$이고,

끝으로 $\frac{1}{x}=t$로의 치환 적분 등을 이용하여 정적분을 계산해보면

$$b=\int_1^{\sqrt{e}}\frac{1-\ln x}{x}dx+\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{\ln x}{x}dx=\frac{3}{4}$$

로 $\dfrac{b\times h(e^2)}{a}=\dfrac{\frac{3}{4}\times 2}{1/2}=3$이 됩니다.

33.

sol.1)

$\mathrm{P}\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$라 두면 $\tan\theta=\frac{t}{2}$이고 점 P에서의 미분계수가 t이므로 점 Q는 직선 $y-\frac{1}{2}t^2=-\frac{1}{t}(x-t)$의 y절편에 위치하는 $\mathrm{Q}\left(0, \frac{1}{2}t^2+1\right)$입니다.

그러면 $\overline{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}t^2+1$이고 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{t^2+1}$이므로

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{PQ}}}{\theta^4}&=\frac{\frac{1}{2}t^2+1-\sqrt{t^2+1}}{\tan^4\theta} \\ &=\frac{\left(\frac{1}{4}t^4+t^2+1\right)-(t^2+1)}{(t/2)^4\left(\frac{1}{2}t^2+1+\sqrt{t^2+1}\right)} \\ &=\frac{4}{\frac{1}{2}t^2+1+\sqrt{t^2+1}} \end{aligned}$$

정답 및 해설

로 정리할 수 있습니다. 한편, $\theta \to +0$일 때 $t \to +0$이므로 구하고자 하는 값은 $\frac{4}{1+1}=2$가 됩니다.

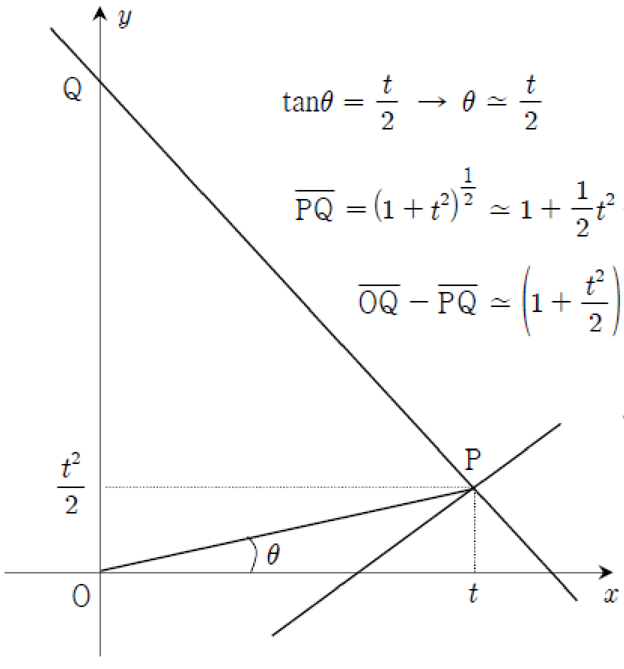
sol.2) 테일러 전개와 이항 전개에 의한 근사 쓰세요. 두 번 쓰세요.

$\tan\theta = \frac{t}{2} \to \theta \simeq \frac{t}{2}$

$\overline{PQ} = (1+t^2)^{\frac{1}{2}} \simeq 1+\frac{1}{2}t^2+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}t^4$

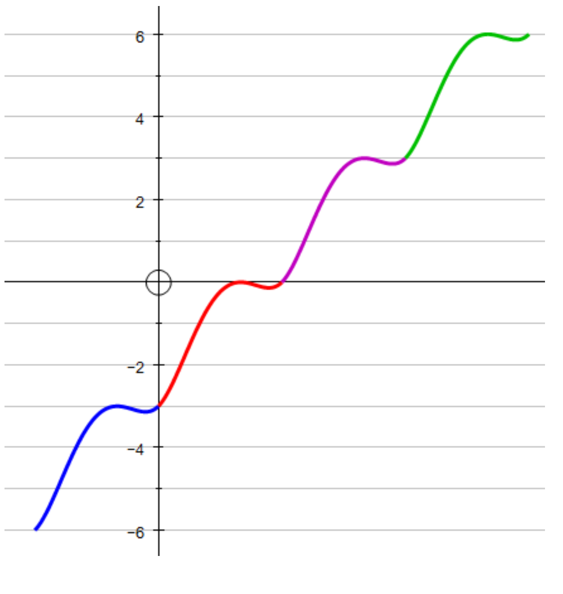
$\overline{OQ}-\overline{PQ} \simeq \left(1+\frac{t^2}{2}\right)-\left(1+\frac{t^2}{2}-\frac{t^4}{8}\right)$

$\therefore \frac{16}{t^4}\times\frac{t^4}{8}=2$



34.
$\angle BAC = 90-2\theta$이므로 $\angle BAD = 90-\theta$이다.
$\angle ADB = 90-\theta$이므로 삼각형 ABD는 이등변삼각형이다.
그러므로 $\overline{AD}=2\sin\theta$이다.
한편 $\overline{BD}=1$이므로 $\overline{DE}=\cos\theta$이다.
$3\overline{AD}+8\overline{DE}=6\sin\theta+8\cos\theta$에서 미분하면 $6\cos\theta-8\sin\theta$이고,
$\tan\theta=\frac{3}{4}$ (단, θ는 예각)인 지점에서 최댓값을 가진다.
따라서 $6\sin\theta+8\cos\theta=6\times\frac{3}{5}+8\times\frac{4}{5}=10$이다.

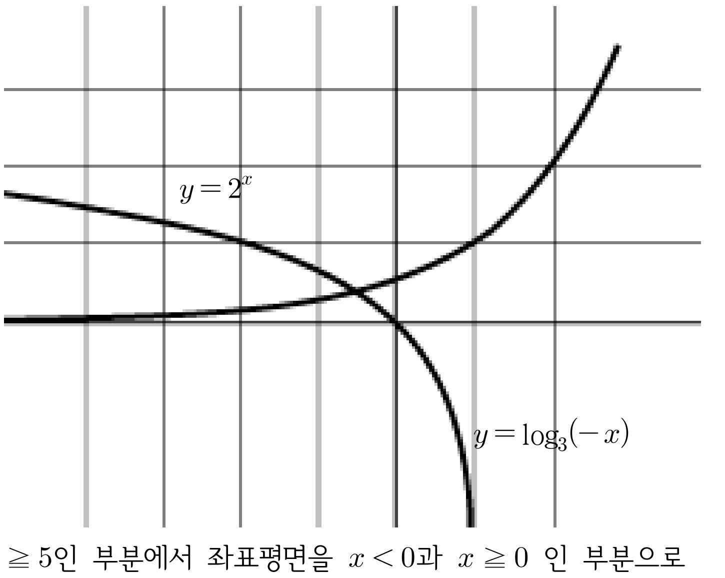
35.
$f(x)=\frac{1}{4}(x-3)(x^3+ax^2+b)$이므로 $f(3)=0$이다.
$f(3)=f(0)+3$이므로 $f(0)=-3$이다. 따라서 $b=4$이다.
또한 $f(x)=\frac{1}{4}(x-3)(x^3+ax^2+4)$에서 $f'(0)=\lim_{x\to 3-}f'(x)$이어야 한다. 즉 $1=\frac{27}{4}+\frac{9}{4}a+1$가 성립해야 한다. 따라서 $a=-3$이다.
따라서, $f(x)$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.
(미분을 통해 $0\le x<3$의 범위에서 그래프를 그린 후 평행이동하여 전체 범위의 그래프를 그릴 수 있다.)



$\{f'(t)|f(t)=f'(t)(t-3),\ -30\le t\le 30\}$이란 $(3,\ 0)$에서 그을 수 있는 접선의 개수를 의미한다.
먼저, $f(x)$의 그래프가 $(3,\ 0)$을 지나므로 그 점 위에서의 접선의 방정식은 $y=x-3$이다. 그리고 이 접선은 곡선 $y=f(x)$의 $x=\cdots,0,3,6,\cdots$에서의 접선의 방정식임을 알 수 있다.

$0<x<3$인 부분만 살펴보자.
$0<x<3$에서 $f(x)$의 변곡점들을 구해보면,
$f''(x)=\frac{3}{2}(2x^2-6x+3)$이므로 $x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$에서 변곡점을 갖는다.
따라서 $\frac{3-\sqrt{3}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{3}}{2}$에서 $f(x)$가 위로 볼록이므로
이 지점에서의 접선이 $(3,\ 0)$을 지나는 경우는 유일하게 존재할 것이다.
($0<x\le\frac{3-\sqrt{3}}{2}$인 점에서는 접선이 $(3,$ 양수$)$을 지날 것이고,
$\frac{3+\sqrt{3}}{2}\le x<3$인 점에서는 접선이 $(3,$ 음수$)$를 지날 것이다.)
마찬가지로, $\cdots,\ -3<x<0,\ 3<x<6,\ 6<x<9,\ \cdots$에서 각각 하나씩 접선이 있을 것이다.
그러므로, 원소의 개수는 21개다.

36. $n=5$ 일 때를 기점으로 $n<4$인 지점에서는 두 점근선의 교점이 제2,4 사분면에서 생기고 $n>5$인 지점에서는 제1,3 사분면에서 생긴다.
따라서 $a_1, a_2, a_3\ a_4=1$이다. (직접 그려서 확인해도 무방하다.)
아래그림은 $n=5$ 일 때 그래프이다.

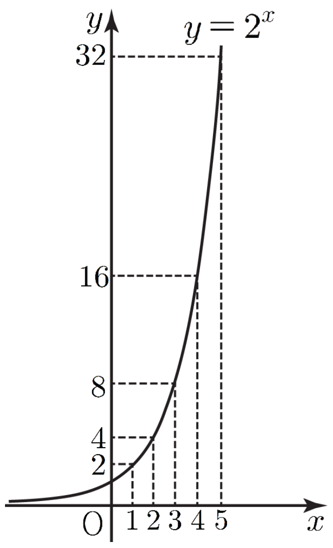


이제 $n\ge5$인 부분에서 좌표평면을 $x<0$과 $x\ge0$ 인 부분으로 분할하여 생각해보자.
$\because x<0$인 부분에서 2^x는 모두 분수이므로
$x<0$인 부분에서 2^x+n-5의 y값의 정수부분은 변화하지 않으므로 log 그래프가 어디서 만나는지만 관찰하여 주면 된다. (즉 가로만 생각하면 된다.)
$x<0$에서 $\log_3(-x+n-5)=n-5$, 이므로 $x=-\{3^{(n-5)}-(n-5)\}$
$x>0$인 부분에서는 $\sum_{k=5}^{n}2^{k-5}+1$이다. (이번에는 세로만 생각하면 된다.)
따라서 $a_n=3^{n-5}+2^{n-4}$ (단 $n\ge5$) 이다.
$\therefore \sum_{n=1}^{10}a_n=4+\sum_{n=5}^{10}3^{n-5}+2^{n-4}\ =494$

정답 및 해설

37. 문제를 읽고 문제의 의미를 단 한번에 파악하기 어려우므로 그림(그래프)을 그려 생각을 해본다.

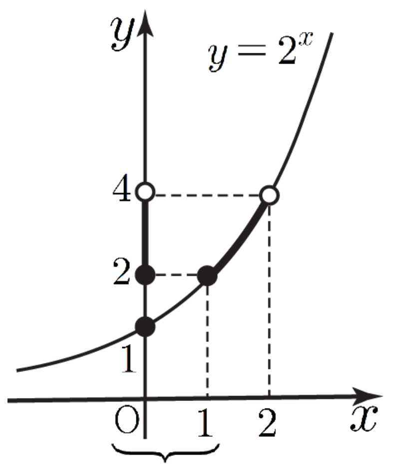
[그림을 그리고 문제를 풀기 전 알아야 할 사항]
(i) PQ위의 점 주에서 x좌표가 정수인 점의 개수가 2개 이기 위해선 x좌표 끼리 서로 무조건 붙어 있어야 한다. $(n,\ n+1)$
(ii) y좌표는 50이하의 자연수이고 x좌표는 정수 인 점을 유의하자.
(iii) 문제에서 a와 b의 대소 관계를 주지 않았고 $a=b$인 상황은 문제의 상황상 존재할 수 없기 때문에 $a<b$라 가정을 하고 푼 뒤 맨 마지막에 $a>b$인 경우는 첫 번째 경우의 수에 $\times 2$를 해주면 되겠다.



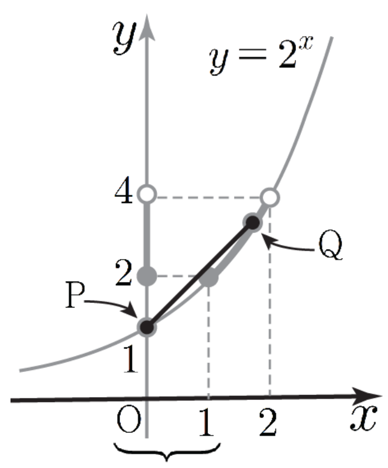
그래프를 그려보니 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 셀 방식을 두 가지 정도 생각할 수 있다.

(1) 점 P 혹은 점 Q의 자연수인 y좌표를 기준으로 분할
(2) 선분 PQ속 정수인 x좌표를 기준으로 분할
(x좌표 끼리 서로 붙어 있어 분할하여 세기가 편리하여 이 방법을 택하겠다.)

(i) PQ 속 정수인 x좌표가 0, 1 일 때를 보자
이때 점 P의 x좌표는 0일 때 밖에 존재할 수 없고
점 Q의 x좌표가 존재할 수 있는 영역은 $1\le x<2$이다.
선분 PQ는 [그림2]와 같이 존재하게 된다.



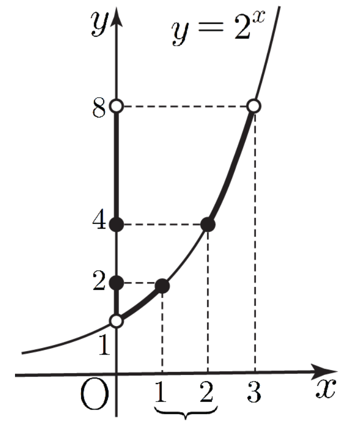
[그림1]



[그림2]

점 P, Q가 존재할 수 있는 각각의 영역에 대해 우리는 y좌표의 순서쌍의 개수를 구하는 것이므로 (영역내에 존재하는 점 P의 개수)×(영역내에 존재하는 점 Q의 개수)를 하면 된다.

(ii) PQ 속 정수인 x좌표가 1, 2 일 때를 보자
이때 점 P의 x 좌표가 존재할 수 있는 영역은 $0<x\le 1$
점 Q의 x 좌표가 존재할 수 있는 영역은 $2\le x<3$ 이다.

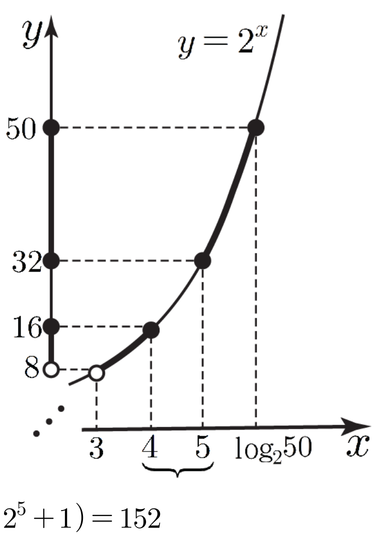


점 P, Q가 존재할 수 있는 각각의 영역에 대해 우리는 y좌표의 순서쌍의 개수를 구하는 것이므로 (영역내에 존재하는 점 P의 개수)×(영역내에 존재하는 점 Q의 개수)를 하면 된다.
$\therefore (2^1-2^0)\times(2^3-2^2)=4$

(iii) PQ속 정수인 x좌표가 2, 3일 때
점 P의 x 좌표가 존재할 수 있는 영역은 $1<x\le 2$
점 Q의 x 좌표가 존재할 수 있는 영역은 $3\le x<4$ 이다.
위의 (i)과 같은 방법으로 개수를 세어주면
$\therefore (2^2-2^1)\times(2^4-2^3)=16$

(iv) PQ 속 정수인 x좌표가 3, 4일 때
$\therefore (2^3-2^2)\times(2^5-2^4)=64$

(v) PQ 속 정수인 x좌표가 4, 5일 때
점 P의 x 좌표가 존재할 수 있는 영역은 $3<x\le 4$
점 Q의 x 좌표가 존재할 수 있는 영역은 $5\le x<\log_2 50$ 이다



$\therefore (2^4-2^3)\times(50-2^5+1)=152$

따라서 우리가 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는
$\therefore (2+4+16+64+152)\times 2=476$

38. $125.2=k+1.6$ $\quad\therefore\ k=123.6$
$134.1=k+(1.6)^{a-30}$
$(1.6)^{a-30}=10.5$
양변에 상용로그를 취하면
$(a-30)\log 1.6=\log 10.5$
$0.204(a-30)=1.02$ $\quad\therefore\ a=35$

정답 및 해설

39. 문제에서 주어진 조건 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^5}=0$는 $f(x)$가 사차 이하의 다항함수임을 의미한다.
ㄱ. $f(0)=0$, $f(1)=0$이면 $f'(c_1)=0$인 c_1이 구간 $(0,1)$에 적어도 하나 존재한다. 또, $f(1)=0$, $f(2)=0$이면 $f'(c_2)=0$인 c_2가 $(1,2)$에 적어도 하나 존재한다.
따라서, $f'(c_1)=0$과 $f'(c_2)=0$에 대하여 $f''(c_3)=0$인 c_3가 구간 (c_1,c_2)에 적어도 하나 존재한다. (참)
ㄴ. $f(0)=0$, $f''(9)=0$, $f(2)=0$, $f''(2)=0$이다.
따라서, $f''(x)=kx(x-2)=kx^2-2kx$이다.
($f(x)$가 사차 이하의 다항함수이므로 $f''(x)$는 이차 이하의 다항함수)
$f'(x)=\frac{1}{3}kx^3-kx^2+a$이고, $f(x)=\frac{1}{12}kx^4-\frac{1}{3}kx^3+ax+b$라 하자.
$f(0)=0$에서 $b=0$이고, $f(2)=0$에서 $-\frac{4}{3}k+2a+b=0$이다.
따라서, $a=\frac{2}{3}k$이다. $f(x)=\frac{1}{12}kx^4-\frac{1}{3}kx^3+\frac{2}{3}x$을 인수분해하면,
$f(x)=\frac{1}{12}kx(x-2)(x^2-2x-4)$이다. 방정식 $x^2-2x-4=0$의 해는 $x=1+\sqrt{5}$도 포함하고 있다. (참)
ㄷ. $A=\{0,1,2\}$이므로 ㄱ에서 $B\neq\varnothing$이다.
또, $f''(x)$가 이차 이하의 다항함수이므로 집합 B의 원소의 개수는 2개 이하이다.
(i) B의 원소의 개수가 2개인 경우
ㄴ에서 교집합의 원소의 개수가 2개이면 모순임을 알 수 있다.
(ii) B의 원소의 개수가 1개인 경우
$f(1)=0$, $f(2)=0$, $f(0)=0$이다. 따라서,
$f(x)=x(x-1)(x-2)(ax+b)=(x^3-3x^2+2x)(ax+b)$ 꼴이다.
$f'(x)=(3x^2-6x+2)(ax+b)+a(x^3-3x^2+2x)$이고,
$f''(x)=(6x-6)(ax+b)+2a(3x^2-6x+2)$이다.
$f''(0)=4a-6b$이므로, $f''(0)=0$이면 집합
$f(x)=ax(x-1)(x-2)\left(ax+\frac{2}{3}a\right)$이므로 $-\frac{2}{3}\in A$이다. (모순)
마찬가지로, $f''(2)=16a+6b$이므로 모순이다.
$f''(1)=-2a=0$이면 $a=0$이다. $b\neq0$이면 주어진 조건을 모두 만족시킨다. 그리고 이때 변곡점을 갖는다. (참)

40. $20=80a^{-3t}$, $2.5=80a^{-3(t_1+t_2)}$ 에서 $\frac{1}{8}=a^{-3t_2}$ $\frac{1}{4}=a^{-3t_1}$
이므로 $-3t_1=\log_a\frac{1}{4}$, $-3t_2=\log_a\frac{1}{8}$, $\frac{t_2}{t_1}=\frac{\log_a\frac{1}{8}}{\log_a\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}$

41. 최고차항의 계수가 1인 두 사차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)-g(x)$는 3차이하의 다항함수이다. 방정식 $f(x)=g(x)$의 근이 0과 3이므로 $f(x)-g(x)=kx^2(x-3)$ 혹은
$f(x)-g(x)=kx(x-3)^2$혹은 $f(x)-g(x)=kx(x-3)$이다.
$\int_0^4 xf'(x)dx=-\int_0^4 xg'(x)dx=1$이므로
$\int_0^4 xf'(x)-xg'(x)dx=\Big[x\{f(x)-g(x)\}\Big]_0^4-\int_0^4 f(x)-g(x)dx=2$
이다.
그런데 $0<f(4)-g(4)<\frac{1}{2}$,
$\int_0^4 f(x)-g(x)dx=\Big[x\{f(x)-g(x)\}\Big]_0^4-2$이므로
$-2<\int_0^4 f(x)-g(x)dx<0$이다.
위에서 분류한 세 가지 케이스를 모두 조건에 맞는지 확인해보면
$f(x)-g(x)=kx^2(x-3)$인 경우와 $f(x)-g(x)=kx(x-3)^2$인 경우는
$0<f(4)-g(4)<\frac{1}{2}$, $-2<\int_0^4 f(x)-g(x)dx<0$을 동시에 만족시키지 못하고, $f(x)-g(x)=kx(x-3)$인 경우에는 동시에 만족시킨 다는 것을 알 수 있다.
따라서 $\int_0^4 f(x)-g(x)dx=\Big[x\{f(x)-g(x)\}\Big]_0^4-2$을 이용하여
계산하면 $-\frac{8}{3}k=16k-2$, $k=\frac{3}{28}$이다. 따라서 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는
$\int_0^3|f(x)-g(x)|dx=\int_0^3\frac{3}{28}x(3-x)dx=\frac{27}{56}$

42. 두 원의 접점을 P라 하고 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 교점을 Q라 하자. 이때 생기는 직각삼각형들을 관찰하면
$\overline{OQ}=\frac{1}{\cos\theta}$이고 $\overline{PQ}=\overline{QH}=\tan\theta$임을 알 수 있다.
따라서 $\overline{AH}=\frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta-1$이고, $\overline{O'H}=\tan\theta\times\left(\frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta\right)$이다.
$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{O'H}-\overline{AH}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan^2\theta+\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}-\frac{1}{\cos\theta}-\tan\theta+1}{\theta^2}$$
$$=1+\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\theta\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta-1}{\cos\theta}}{\theta^2}=\frac{1}{2}$$ 따라서 $100a=50$

43. $(x-n)(2^x-k)<0$은 $(x-n)(x-\log_2k)<0$와 동치이다.
따라서 $\log_2k<n$인 경우와 아닌 경우로 나누어 풀자.

첫째로 $\log_2k<n$인 경우 $\log_2k<x<n$가 부등식의 해이다.
$\log_2k>n$인 경우 $n<x<\log_2k$가 부등식의 해이다.

$n=1$일 때, $\log_2k<x<1$을 만족시키는 자연수 x의 개수는 0이고,
$1<x<\log_2k$를 만족시키는 자연수 x의 개수가 1이 되게 하는 자연수 k는 $k=5,6,7,8$이다.

$n=2$일 때, $\log_2k<x<2$을 만족시키는 자연수 x의 개수가 1이 되게 하는 자연수 k는 $k=1$이다.
$2<x<\log_2k$를 만족시키는 자연수 x의 개수가 1이 되게 하는 자연수 k는 $k=9,10,\cdots,16$이다.

$n=3$일 때, $\log_2k<x<3$을 만족시키는 자연수 x의 개수가 1이 되게 하는 자연수 k는 $k=2,3$이다.
$3<x<\log_2k$를 만족시키는 자연수 x의 개수가 1이 되게 하는 자연수 k는 $k=17,18,\cdots,32$이다.

정답 및 해설

$n=4$일 때, $\log_2 k<x<4$을 만족시키는 자연수 x의 개수가 1이 되게 하는 자연수 k는 $k=4,5,6,7$이다.
$4<x<\log_2 k$를 만족시키는 자연수 x의 개수가 1이 되게 하는 자연수 k는 $k=33,34,\cdots,64$이다.

일반항은
$a_n=(2^{n+2}-2^{n+1})+(2^{n-1}-2^{n-2})=2^{n+1}+2^{n-2}\ (n\geq 2)$임을 부등식 $(x-n)(x-\log_2 k)<0$을 보고 나열하지 않고도 알 수 있는 경지에 오르도록 하자. $\quad\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{6}a_n=\frac{4(2^6-1)}{2-1}+\frac{1(2^5-1)}{2-1}=283$

44. ㄱ. $f(x)=x^{\ln x}$에서 $x=e^{\ln x}$이므로 $f(x)=e^{(\ln x)^2}$이다.
따라서 $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=\infty$ (참)

ㄴ. $f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}e^{(\ln x)^2}$이고 $f'(1)=0$이고 $x=1$ 좌우에서 부호변화가 $-$에서 $+$로 바뀌므로 $x=1$에서 극솟값 1을 가진다.
($f'(1)=0$, $f''(1)>0$이므로 $x=1$에서 극솟값 1을 가진다고 해도 좋다.) (참)

ㄷ. $f''(x)=\dfrac{4(\ln x)^2-2\ln x+2}{x^2}e^{(\ln x)^2}>0$이므로 변곡점이 존재하지 않는다. (거짓)
[참고] $\ln f(x)=\ln x\times\ln x$임을 이용하여 $f(x)=e^{(\ln x)^2}$임을 알 수도 있다. $x=e^{\ln x}$인 것을 증명하는 방법과 동일하기 때문이다.

45. $\cos x=t$로 치환하면 준식$=\displaystyle\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-\frac{2}{t^3}dt=\left[\frac{1}{t^2}\right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$

46. $\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{\cos x+2}$의 해는 $2\cos x=-1$이므로 $x=\dfrac{2}{3}\pi$이다.

우리가 구하고자 하는 답은 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi}\left|\frac{1}{\cos x+2}-\frac{2}{3}\right|dx$이다.

$\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq\dfrac{2}{3}\pi$에서 $\dfrac{1}{\cos x+2}\leq\dfrac{2}{3}$이므로

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi}\left|\frac{1}{\cos x+2}-\frac{2}{3}\right|dx&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{\cos x+2}\right)dx\\&=\frac{\pi}{9}-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+2}dx\\&=\frac{\pi}{9}-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{-\sin x+2}dx\end{aligned}$$

이다. 따라서, $\beta=\dfrac{\pi}{9}$이다.

47. $f'(x)=x+\dfrac{1}{x}-a$이다.
(i) $a>2$일 때
서로 다른 두 실근 α, β를 갖는다.

도함수는 모두 양의 근을 가지며, $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=-\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로, $|f(x)|$는 미분가능하지 않은 점이 반드시 존재한다.

(ii) $a=2$일 때
$x=1$을 근으로 갖는다. 따라서, $f'(1)=0$이다.
$f(x)$는 양수 전체의 집합에서 증가한다. $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=-\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로, $f(x)=0$을 만족시키는 x가 하나 존재한다.
$f(k)=0$이라 하면, $x=k$에서 $f(x)$의 부호가 바뀌므로, 그 지점에서만 $|f(x)|$의 미분가능성을 판단하면 된다.
$\displaystyle\lim_{x\to k+0}\frac{|f(x)|-|f(k)|}{x-k}=\lim_{x\to k+0}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}=f'(k)$이고,
$\displaystyle\lim_{x\to k-0}\frac{|f(x)|-|f(k)|}{x-k}=\lim_{x\to 1-0}\frac{-f(x)+f(k)}{x-k}=-f'(k)$
이다. 따라서, $f'(k)=-f'(k)$이기 위해선 $f'(k)=0$이어야 한다.
따라서, $k=1$이다. 그러므로, $f(1)=0$이다.
$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2x+b+\ln x$에서 $f(1)=0$이므로 $b=\dfrac{3}{2}$이다. 따라서 $12(a+b)=42$이다.

(iii) $-2<a<2$일 때
근을 갖지 않는다. 따라서, 전구간 증가하지만, $f'(k)=0$이 되는 k가 존재하지 않는다. (모순)

(iv) $a\leq-2$일 때
$f'(x)=0$이 음의 근을 갖는다. 따라서, 전구간 증가하며 $f'(k)=0$이 되는 k가 존재하지 않는다. (모순)

48. 일단 문제에서 구하고자 하는 것이 무엇인지 살펴봅시다. 자세히 보았더니 굉장히 치환하고싶게 생겼군요.
$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}g\left(\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^2\frac{g(x)}{x^2}dx$로 치환해줍시다.

그리고, 0부터 x까지 $f(t)$의 적분값을 $F(x)$라고 두면, 다음의 일련의 과정이 성립합니다.
$$\int_1^2\frac{g(x)}{x^2}dx=\int_1^2\left\{\frac{f(x)}{x}-\frac{F(x)}{x^2}\right\}dx=\left[\frac{F(x)}{x}\right]_1^2=\frac{F(2)}{2}-F(1)$$

즉, 우리는 $F(1)$과 $F(2)$의 값을 문제에서 주어진 조건들을 통하여 도출해내어야 합니다.
일단 함수 $\dfrac{\{f(x)\}^2}{g(x)}$의 극값에 대하여 논의해두었으니 $x=1$, $x=2$에서 각각 $\dfrac{\{f(x)\}^2}{g(x)}$의 값이 0이 되어야 하므로, 미분 후 그 값을 0으로 두면 다음과 같은 일련의 과정들이 성립합니다.

$$\frac{d}{dx}\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}=\frac{2f(x)f'(x)g(x)-g'(x)\{f(x)\}^2}{\{g(x)\}^2}=0$$
$$\therefore 2f(x)f'(x)g(x)-g'(x)\{f(x)\}^2=0$$

정답 및 해설

우리는 지금, $F(1)$과 $F(2)$를 구하려고 합니다. 즉, $x=1$, $x=2$인 두 점에서만 관심이 있다는 말입니다. 해당 두 점에서 $\dfrac{\{f(x)\}^2}{g(x)}$의 값이 각각 1, 4입니다. 즉, $\dfrac{\{f(x)\}^2}{g(x)}$의 값이 0이 되지 않으므로 $f(x)$또한 0의 값을 가지지 않는다는 것이지요.
$2f(x)f'(x)g(x)-g'(x)\{f(x)\}^2=0$의 식에서 $f(x)$를 제거할 수 있게 된 것입니다. 또한, $f'(x)$가 0보다 크다는 사실 즉, 0이 될 수 없다는 사실 또한 문제에서 주어져 있습니다. $f'(x)$와 $f(x)$를 제거하고, $g(x)$와 $g'(x)$를 대입해보죠.

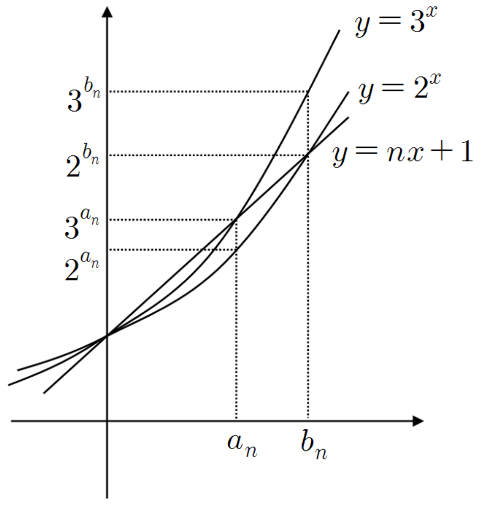
$g(x)=xf(x)-F(x)$이고, $g'(x)=xf'(x)$이므로, 대입하여 정리하면 다음 일련의 과정이 성립합니다.

$2f(x)f'(x)g(x)-g'(x)\{f(x)\}^2=0$
$\Leftrightarrow 2f'(x)\{xf(x)-F(x)\}-xf'(x)f(x)=0$
$\Leftrightarrow xf(x)-2F(x)=0$
$\Leftrightarrow xf(x)=2F(x)$
즉, 위와 같은 관계식이 $x=1$, $x=2$인 상황에서 성립하게 됩니다.
위의 관계식을 $\dfrac{\{f(x)\}^2}{g(x)}$에 대입하여 정리하면 다음과 같은 일련의 과정이 성립합니다.

$$\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}=\frac{\{f(x)\}^2}{xf(x)-F(x)}=\frac{\left\{\dfrac{2F(x)}{x}\right\}^2}{F(x)}=\frac{4F(x)}{x^2}$$

그리고, 위의 식은 $x=1$일 때 그 값이 1이고, $x=2$일 때 그 값이 4이므로 각각 $x=1$, $x=2$를 대입해주면 $F(1)=\dfrac{1}{4}$, $F(2)=4$를 도출해낼 수 있으며, 위의 과정에서 보였던 것과 같이 우리가 구하고자 하는 준 식은 $\displaystyle\int_1^2 \frac{g(x)}{x^2}dx=\left[\frac{F(x)}{x}\right]_1^2=\frac{F(2)}{2}-F(1)$ 의 형태로 나타내어지므로 $k=\dfrac{7}{4}$가 됩니다. 따라서, 구하고자 하는 값인 $60k$는 105가 됩니다.

49. ㄱ. $y=2x+1$는 $(2,\ 5)$, $(3,\ 7)$을 지나고, $y=2^x$는 $(2,\ 4)$, $(3,\ 8)$을 지나므로 $2<b_2<3$이다. (참)
ㄴ. $a_{n+1}>a_n$이고, $3>2$이므로 $3^{a_{n+1}}-3^{a_n}>2^{a_{n+1}}-2^{a_n}$이다. (참)



ㄷ. $n(b_n-a_n)=(nb_n+1)-(na_n+1)=2^{b_n}-3^{a_n}$이다.
좌표평면 상에 표시해보면 $2^{b_n}-3^{a_n}<2^{b_n}-2^{a_n}<3^{b_n}-3^{a_n}$임을 알 수 있다. (거짓)

50. 선분 OP의 길이는 1이고, 선분 OQ가 각 θ를 이등분하므로, 선분 PQ의 길이는 $\tan\dfrac{\theta}{2}$이다. $\angle POQ=\angle PQR=\dfrac{\theta}{2}$이므로,
선분 PR의 길이는 $\tan^2\dfrac{\theta}{2}$이다. 따라서 $f(\theta)=\tan^4\dfrac{\theta}{2}\pi$이다.
한편, 선분 AQ의 길이는 $\tan\dfrac{\theta}{2}$이다. $\angle AOQ=\angle AQS=\dfrac{\theta}{2}$이므로,
선분 AS의 길이는 $\tan^2\dfrac{\theta}{2}$이다.
따라서 $g(\theta)=\dfrac{1}{2}\tan^3\dfrac{\theta}{2}$이다. 그러므로, $\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta\times g(\theta)}=\pi$이다.

51. 언어, 수리, 외국어, 사회탐구영역 중에 두 번(두 시간) 공부할 영역을 고르는 경우의 수는 4가지이고,
1시간마다 영역을 바꾼다고 하였기에 아래와 같이

○ ○ ○ ○ ○

5개의 자리에서 서로 이웃하지 않게 자리를 배치하는 경우의 수는 총 6가지가 된다. (직접 나열해보도록 한다.)
나머지 세 영역(가지)를 배치하면 되므로 $3!=6$
$\therefore 4\times6\times6=144$

52. 1) 한 나라만 여행하는 대륙을 고르고 그 중에서 한 나라를 고르는 경우의 수 : $3\times2=6$가지
2) 잉여 4개 국가 배열 : $3!\times2\times2=24$
1) × 2) $=144$ 답 : 144가지

53. 첫째 글자, 둘째 글짜, 셋째 글자에 모두 현이라는 글자가 있음을 발견할 수 있다. 그러므로 두 가지로 Case 분류를 할 수 있어야 한다.

Case 1) 첫째 글자가 ‘김’, ‘이,’ ‘박’인 경우
$3\times4\times3-3=33$
☞ ① ② ③ ④
① : 김, 이, 박 의 3가지 경우
② : 민, 수, 현, 호 의 4가지 경우
③ : ②에서 고른 1가지를 제외한 3가지의 경우
④ : 둘째 글자에 민, 셋째 글자에 수를 고르는 3가지의 경우

Case 2) 첫째 글자가 ‘현’인 경우
$3\times2-1=5$
☞ ① ② ③
① : 둘째 글자에서 현을 제외한 3가지의 경우
② : ①에서 고른 1가지를 제외한 2가지의 경우
③ : 둘째 글자에 민, 셋째 글자에 수를 고르는 1가지의 경우
$\therefore 33+5=38$

54.

과목 / 경우	지리 선택	역사 선택	일사 선택
case 1	1가지	국사+그논	1가지
case 2	1가지	세계사 or 그논	2가지
case 3	2가지	세계사 or 그논	1가지
case 4	1가지	세계사+그논	1가지

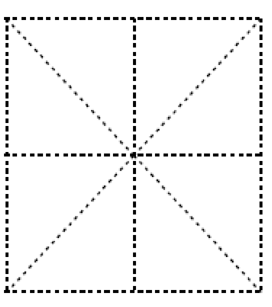
case 1) $3\times1\times5=15$
case 2) $3\times2\times10=60$
case 3) $3\times2\times5=30$
case 4) $3\times1\times5=15$ sum.. 답 : 120가지

55. 다음은 위에서 보았을 때 모양이고, 안의 수는 위에서 보았을 때 쌓여진 개수를 말하는 것이다.

3	1	1
3	1	1
3	1	1

위의 그림만큼 반드시 쌓여져야 한다.
여기서 2열 세칸중 적어도 하나, 3열 세칸중 적어도 하나가 채워지면 문제의 조건을 만족한다.
따라서, $(2^3-1)(2^3-1)=49$이다.

56.



① 빨간색 직각이등변삼각형을 나열할 수 있는 경우의 수 : 4가지
② 검은색 직각이등변삼각형을 나열할 수 있는 경우의 수 : 2가지
③ 파란색 직각이등변삼각형을 나열할 수 있는 경우의 수 : 2가지
④ 초록색 직각이등변삼각형을 나열할 수 있는 경우의 수 : 1가지
$\therefore 4\times2\times2\times1 = 16$ 답 : ⑤

57. 중복을 허락하여 5개중 3개를 뽑는 경우 – 중복을 허락하여 4개중 3개를 뽑는 경우
이므로, ${}_5H_3-{}_4H_3={}_7C_3-{}_6C_3=15$

58. 철수와 영희가
ⅰ 10열에 앉는 경우
ⅱ 11열에 앉는 경우
로 분할 할 수있고 구하는 확률은 ⅰ+ⅱ이다.
철수와 영희가 앉을 곳을 지정해주면 나머지는 어디에 앉든 조건을 만족하므로
철수와 영희를 앉혀주면 나머지는 줄세우기와 같다.
ⅰ. 철수와 영희가 자리를 바꾸는 경우가 있으므로
$=\dfrac{2\times3!}{5!}=\dfrac{12}{120}$
ⅱ 철수&영희가 AB 또는 BC 에 앉을 수 있고 자리를 바꾸는 경우가 있으므로
$=\dfrac{2\times2\times3!}{5!}=\dfrac{24}{120}$
ⅰ+ⅱ $=\dfrac{36}{120}=\dfrac{3}{10}$

59. C 회사의 음반을 구매할 확률은 $p=\dfrac{1}{10}$이므로 표본비율이 정규분포 $\mathrm{N}\left(\dfrac{1}{10},\left(\dfrac{1}{50}\right)^2\right)$을 따른다. 구하는 값은 $\mathrm{P}\left(\hat{p}\geq\dfrac{27}{225}\right)$ 이므로 표준화 해주면 $\mathrm{P}\left(\hat{p}\geq\dfrac{\frac{27}{225}-\frac{1}{10}}{\frac{1}{50}}\right)$ 이므로
$\mathrm{P}(Z\geq1)=0.5-0.3413=0.1587$ 이다.

#별해
C 회사의 음반을 구매할 확률은 이항분포 $\mathrm{B}\left(225,\dfrac{1}{10}\right)$을 따르고 숫자가 충분히 크므로 정규분포 $\mathrm{N}\left(22.5,\left(\dfrac{2}{9}\right)^2\right)$에 근사할 것이다.
$\mathrm{P}(X\geqq27)=\mathrm{P}\left(Z\geqq(27-22.5)\times\dfrac{2}{9}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\geqq1)$이므로 $0.5-0.3413=0.1587$이다.

60.
sol)
${}_nH_{7-n}={}_{\{n+(7-n)-1\}}C_{7-n}={}_6C_{7-n}$이므로
$\therefore \sum_{n=1}^{7}{}_6C_{7-n}={}_6C_6+{}_6C_5+\cdots+{}_6C_0=2^6=64$

61. 이러한 생김새를 가진 문제에 해당되는 단원은 중복조합밖에 없다. 따라서 중복조합으로 어떻게 해결할 것인가를 고민해야한다. 보통은 익숙한 꼴로 변형하는 것이 시작이다.
우선 $|x|\leq3$으로부터 $0\leq x+3\leq6$을 얻을 수 있고, 마찬가지로 y, z에 대한 부등식을 얻을 수 있다.
(가)에 주어진 $x+y+z=-3$의 양변에 9를 더하여 $(x+3)+(y+3)+(z+3)=6$으로 변형하면 원래의 문제는 방정식 $X+Y+Z=6$ (X, Y, Z는 0이상 6이하의 정수)을 만족시키는 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수를 구하는 것과 같다.
따라서 구하는 순서쌍의 개수는 ${}_3H_6=28$

62. 주어진 그림을 고정시켰을 때, 위에서부터 색1, 색2, 색3, 색4로 칠한 것과 아래서부터 색4, 색3, 색2, 색1로 칠한 것을 같은 것으로 보겠다는 뜻이다. 곧 서로 다른 4가지 색을 모두 사용하여 타일의 네 부분을 임의로 칠한 24가지의 경우에서 회전하여 일치하는 그림 한 쌍(원래 그림과 180° 회전한 그림)을 같은 것으로 보기 위해 2로 나누어야함을 안다.
따라서 답은 12가지다.

63. $10원=x$, $50원=y$, $100원=z$, $500원=w$ 라고하면
$x+y+z+w=5$ (단, $x,y,z,w\leqq4$)
중복조합을 이용하면 ${}_4H_5$ 인데 이 경우는 x,y,z,w 각각이 5인 경우를 포함하고 있으므로
$(5,0,0,0),(0,5,0,0),(0,0,5,0),(0,0,0,5)$ 인 4가지를 빼주면
56 - 4 = 52가지이다.

정답 및 해설

64.

sol)

대학교 학생 중에서 192명을 임의추출 하였다는 말로 미루어 적어도 192명 이상의 학생이 있을거라 알 수 있으나 정확히 몇 명이 있는지는 모릅니다. 하지만 문제에서 언급하고 있는 운전면허 소지자 비율과 면허 종류에 따른 비율을 고려하여 다음과 같이 표본 공간을 나타내어도 일반성을 잃지 않습니다.

	1종	2종	total
면허 소지	$2n$	$3n$	$5n$
면허 미소지			$3n$
total			$8n$

이때 1종 면허 소지자의 비율은 $\dfrac{2n}{8n}=\dfrac{1}{4}$로서 표의 나머지 빈칸은 채우지 못하더라도 문제 푸는데 지장이 없습니다! 이제 192명의 임의추출한 학생 중에서 1종 면허 소지자의 수를 확률변수 X라 잡으면, 이는 이항분포 $\mathrm{B}\left(192,\ \dfrac{1}{4}\right)$를 따릅니다. 그리고 이제 $\mathrm{P}(X\le 57)$를 구해야 하는데,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 57)&=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\cdots+\mathrm{P}(X=57)\\&={}_{192}\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{192}+{}_{192}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^{191}\\&\quad+\cdots+{}_{192}\mathrm{C}_{57}\left(\frac{1}{4}\right)^{57}\left(\frac{3}{4}\right)^{135}\end{aligned}$$

로서 계산을 통해 구하는 것은 불가능에 가깝습니다. 따라서 지금과 같이 n이 충분히 큰 경우 이항분포를 정규분포로 근사하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(48,6^2)$를 따르게 되어

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 57)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{57-48}{6}\right)=\mathrm{P}(Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5+0.4332=0.9332\end{aligned}$$

가 나옵니다.

65.

sol)

주사위 눈이 2를 인수로 몇 개 갖고 있는지에 따라

A : 1, 3, 5의 눈이 나오는 사건

B : 2, 6의 눈이 나오는 사건

C : 4의 눈이 나오는 사건

이라 하였을 때, 여사건으로 구하는 것이 훨씬 빠르겠네요. 그렇다면 총 4회의 시행 동안 $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$와 $\{A_1, A_2, A_3, B_1\}$에 해당하는 확률 값을 전체에서 빼주면 되겠죠? 문제를 좀 더 와 닿도록 표현을 바꾸자면,

"각 시행마다 A, B, C중에 하나만 일어나는데,
4회 동안 B는 기껏해야 한 번, C는 일어나지 않을 확률은?"

이라 할 수 있습니다. 이때 독립시행으로 그 확률을 구해보면

$\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$는 ${}_4\mathrm{C}_4\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{1}{16}$이고,

$\{A_1, A_2, A_3, B_1\}$는 ${}_4\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{6}$입니다. 따라서 구하고자 하는 값은

$\therefore\ 1-\left(\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{6}\right)=1-\dfrac{11}{48}=\dfrac{37}{48}$

66.

sol)

	중국어(B)	일본어	
물리(A)	$73-x$	27	$100-x$
화학	$x-9$	9	x
	64	36	100

여차저차 세운 식을 다 풀었을 때 나온 x값이 바로 답이 되도록 의도적으로 수치를 잡아서 표를 채워 보았습니다.

그리고 독립사건에 대하여 항상 성립하는 식인 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$에서

$$\frac{73-x}{100}=\frac{100-x}{100}\cdot\frac{64}{100}$$

그리고 이를 계산하면 $100(73-x)=64(100-x)$ 즉, $x=25$가 나옵니다.

67. 서로 다른 5개의 원소에서 중복을 허락하여 3개의 원소를 뽑는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{H}_3$

$(2,\ 2,\ k),\ (1,\ 4,\ k)$ (단, $k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$)

는 동일하므로 ${}_5\mathrm{H}_3-5=30$

68. 주어진 식의 이항계수는

${}_8\mathrm{C}_r(2x^2)^{8-r}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^r=(-1)^r{}_8\mathrm{C}_r\cdot 2^{8-3r}x^{16-2r}$

i) $r=0,\ 1,\ 2$일 때

이항계수가 정수의 곱으로 표현되므로 정수이다.

ii) $r=3$일 때

$(-1)^3{}_8\mathrm{C}_3\times\dfrac{1}{2}=-28$

iii) $r\ge 4$일 때

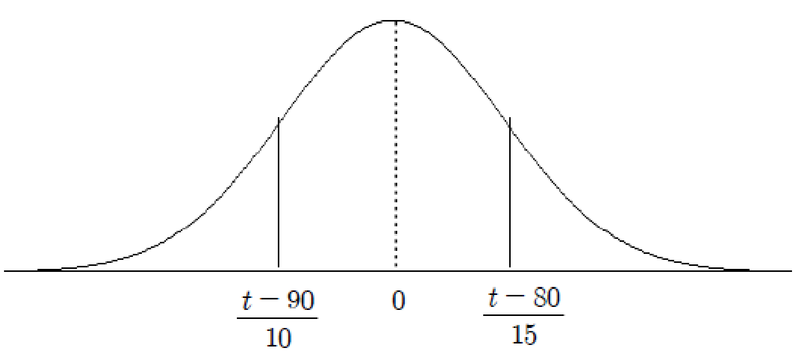
이항계수는 정수가 되지 않는다.

$\therefore\ r=0,\ 1, 2,\ 3$

69.

sol)

광역버스 A, B의 과속 방지 장치에서 하루 동안 경고음이 울린 시간을 각각 확률변수 X_A, X_B로 잡을 수 있습니다. 그리고 두 확률변수가 모두 정규분포를 따른다고 하였으므로 $\mathrm{P}(X_A\ge t)=\mathrm{P}(X_B\le t)$를 표준화하면 $\mathrm{P}\left(z\le\dfrac{t-90}{10}\right)=\mathrm{P}\left(z\ge\dfrac{t-80}{15}\right)$가 됩니다. 한편, 표준 정규분포함수에서 서로 원점을 기준으로 대칭인 구간을 적분해야 넓이가 같게 나와야 합니다.

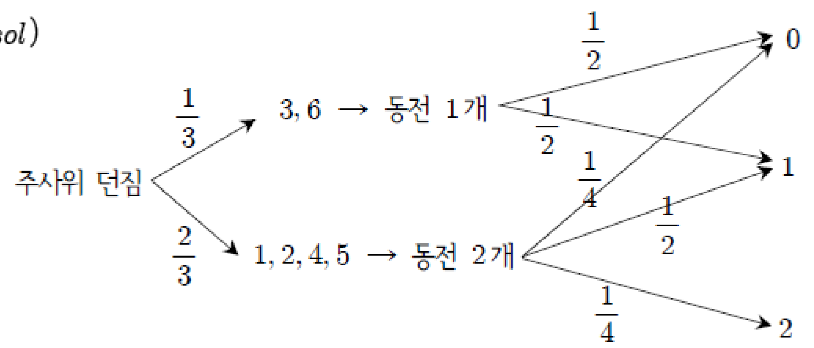


따라서 $\dfrac{t-90}{10}+\dfrac{t-80}{15}=0\ \rightarrow\ t=86$이 정답이 됩니다.

정답 및 해설

70. $\mathrm{E}(X)=4p$, $\mathrm{V}(X)=4p(1-p)$
$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서
$\mathrm{V}(X)=3p+1-(4p)^2=4p(1-p)$
$=12p^2+p-1=0$ 이므로 방정식을 풀면
$0<p<1$이므로 $p=\frac{1}{4}$, $\mathrm{V}(X)=\frac{3}{4}$
$\therefore \mathrm{V}(10X)=100\mathrm{V}(X)=75$

71.
sol)



수형도로 생각해보면 주사위 눈에 따라 동전을 던져서 앞면이 나오는 횟수는 위와 같습니다. 이때 팁이 있다면 동전의 앞면이 나오지 않을 확률은 어차피 0에다 곱해줘야 하니 굳이 따로 구해주지 않아도 된다는 것입니다.

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=0\cdot(\quad)+1\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)+2\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{6}$

72.
카드가 만약 4장씩 있었다면 $4^4=2^8=256$가지로 바로 구할 수 있었겠지만, 3장씩 있다고 합니다. 따라서 추가적인 상황은 여사건 처리로 하여 카드가 4장씩 일 때만 만들 수 있는 $1111, 2222, 3333, 4444$의 네 가지를 뺀 $4^4-4=252$가지가 답이라고 볼 수 있습니다.

73. $x^2+y^2=25$에서 $0\le x\le y$ 인 범위에서만 정수인 점의 개수를 찾아본 뒤 대칭성을 이용하여 개수를 찾자.

(i) $x=0$일 때 $y=5$ 따라서 $\pm(0,\ 5)$, $\pm(5,\ 0)$
총 $2\times2=4$개

(ii) $x=3$일 때 $y=4$ 따라서 $\pm(3,\ 4)$, $\pm(4,\ 3)$, $\pm(-3,\ 4)$, $\pm(-4,\ 3)$
총 $2\times2\times2=8$개

이때 x좌표가 3일 확률은 총 12가지 경우의 수에서 $(3,\ \pm4)$인 2가지 경우의 수 이므로 $\therefore \frac{q}{p}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$, $p^2+q^2=36+1=37$

74. $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$로 나타낼 수 있다.
$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{6}{5}$ 이므로,
$\frac{1}{\mathrm{P}(A)}+\frac{1}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}=\frac{24}{5}$
$\frac{6}{5}\times\frac{1}{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}=\frac{24}{5}$, $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$
두사건 A와 B는 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ 이다.
$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{6}{5}-\frac{1}{4}=\frac{24-5}{20}=\frac{19}{20}$

75. ($a\le m\le b$를 $[a,\ b]$로 표현함을 양해 바랍니다.)
모비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은
$\left[\hat{p}-1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}},\ \hat{p}+1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right]$에서 $\hat{p}=0.25$, $\hat{q}=0.75$, $n=108$을 대입하면,
$\left[0.25-1.96\times\frac{1}{24},\ 0.25+1.96\times\frac{1}{24}\right]$이다.
따라서, $c=1.96\times\frac{1}{24}$이다.
한편, 같은 신뢰구간에서 $\hat{p}=0.5$, $\hat{q}=0.5$을 대입하면,
$\left[0.5-1.96\times\sqrt{\frac{1}{4n}},\ 0.5+1.96\times\sqrt{\frac{1}{4n}}\right]$이다.
$1.96\times\sqrt{\frac{1}{4n}}=1.96\times\frac{1}{24}$에서 $n=144$임을 알 수 있다.

76. $\mathrm{P}(0\le X\le3)=1$이므로
$\mathrm{P}(0\le X\le1)+\mathrm{P}(1\le X\le2)+\mathrm{P}(2\le X\le3)=k+k\times2+k\times3=1$
에서 $k=\frac{1}{6}$이다.
따라서 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+1\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{2}{3}$

77. $x+y$, $z+w$가 모두 홀수이다.
x, z가 모두 홀수, y, w가 모두 짝수인 경우
$(2x+1)+2y+(2z+1)+2w=10$이므로
$x+y+z+w=4$이다.
${}_4\mathrm{H}_4={}_7\mathrm{C}_4=35$

이와 같은 경우는 총 4가지가 있다.
(x, z가 모두 홀수, y, w가 모두 짝수,
x, w가 모두 홀수, y, z가 모두 짝수,
y, z가 모두 홀수, x, w가 모두 짝수,
y, w가 모두 홀수, x, z가 모두 짝수)

따라서, 답은 총 140가지이다.

78. (i) $a^2-b>0$인 경우 :
$(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 1)$~$(3,\ 6)$, $(4,\ 1)$~$(4,\ 6)$, $(5,\ 1)$~$(5,\ 6)$, $(6,\ 1)$~$(6,\ 6)$: 총 27가지

(ii) $a^2-b=0$인 경우 : $(1,\ 1)$, $(2,\ 4)$: 총 2가지

따라서, $\mathrm{E}(X)=\frac{27}{36}\times2+\frac{2}{36}\times1=\frac{3}{2}+\frac{1}{18}=\frac{14}{9}$이므로
$\mathrm{E}(9X)=14$이다.

79. 문제에서 주어진 식을 변형하면 $\mathrm{E}(X)=4\mathrm{V}(X)$가 됩니다. 또한, 확률변수 X가 이항분포 $(n,\ p)$를 따르므로 $\mathrm{E}(X)$와 $\mathrm{V}(X)$를 n과 p에 대하여 나타낼 수 있습니다.

우선 p의 값을 구하기 위해 $\mathrm{E}(X)=4\mathrm{V}(X)$을 모두 n과 p에 대한 식으로 나타내면, $np=4np(1-p)$이므로 $p=\frac{3}{4}$가 된다는 것을 쉽게 알 수 있습니다.

정답 및 해설

$\mathrm{P}(X=0)$를 이용하면, $\mathrm{P}(X=0)={}_n\mathrm{C}_0\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^n=\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1}{2^8}$

이므로, n의 값은 4가 됩니다.

이제, $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$을 이용하셔서 문제에서 묻고자 하는 것을 직접 구하시면 됩니다.

$\frac{3}{4}=\mathrm{E}(X^2)-9$이므로 $\mathrm{E}(X^2)=\frac{39}{4}$입니다.

80. $\mathrm{P}(A)=a$, $\mathrm{P}(B)=b$라고 할 때, 두 사건이 독립이므로 문제에서 주어진 두 식 중 첫 번째 식의 조건에 의해 $ab=\frac{1}{3}$이고, 두 번째 조건은 $a^2+b^2=\frac{25}{36}$입니다. 따라서 $(a+b)^2=(a^2+b^2)+2ab$의 성질을 이용하여 $a+b=\frac{7}{6}$임을 알 수 있습니다.

$\mathrm{P}(A\cup B)=a+b-ab=\frac{5}{6}$입니다.

81. 다섯 번째 던진 동전이 앞면이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$이다. 이 경우 첫 번째~네 번째 동전이 어떻게 던져지든 상관없이 24원 이상을 만족한다. 다섯 번째 던진 동전이 앞면이 안나올 경우, 세 번째 및 네 번째 던진 동전이 모두 앞면이 나와야 하고, 첫 번째 및 두 번째 던진 동전은 무관하다.

따라서 이 경우 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$를 만족시키므로 $\frac{1}{8}$이다.

그러므로 $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$이다.

82. 화폐 A의 현재 가치를 c_A라 하면, 화폐 A의 일주일 후의 환율 X는 평균이 c_A, 표준편차가 $c_Ak^{\frac{2}{3}}p^{-\frac{1}{2}}$인 정규분포를 따른다.

화폐 B의 현재 가치를 c_B라 하면, 시장불안정성 지표가 8배, 거래량이 36배이므로 화폐 B의 일주일 후의 환율 Y는 평균이 c_B, 표준편차가 $c_B(8k)^{\frac{2}{3}}(36p)^{-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}c_Bk^{\frac{2}{3}}p^{-\frac{1}{2}}$인 정규분포를 따른다.

확률변수 X와 Y를 표준화시켜 정리하면

$P(X\geq\frac{103}{100}c_A)=P(Z\geq 1)=P(Z\geq\dfrac{\left(\frac{103}{100}-1\right)c_A}{c_Ak^{\frac{2}{3}}p^{-\frac{1}{2}}})$이고,

$P(Y\geq c_B+\frac{a}{100}c_B)=P(Z\geq 2)=P(Z\geq\dfrac{\frac{a}{100}c_B}{\frac{2}{3}c_Bk^{\frac{2}{3}}p^{-\frac{1}{2}}})$이므로

$2\dfrac{\frac{3}{100}c_A}{c_Ak^{\frac{2}{3}}p^{-\frac{1}{2}}}=\dfrac{\frac{a}{100}c_B}{\frac{2}{3}c_Bk^{\frac{2}{3}}p^{-\frac{1}{2}}}$를 만족시킨다. 정리하면 $a=4$이다.

83. (가) 짝수개, 홀수개만큼 뽑을 그릇을 2개씩 선택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2=6$이다.

(나) 홀수에서 1을 빼면 짝수가 된다. 그러므로 홀수개만큼 뽑을 그릇 두 종류를 먼저 하나씩 뽑아둔다면, 네 종류의 그릇을 짝수개만큼 선택해 총 8개를 뽑는 경우의 수와 동일하다.

즉 네 종류의 그릇을 중복을 허락해 4개만큼 뽑는 경우의 수와 같다.

${}_4\mathrm{H}_4={}_7\mathrm{C}_4=35$

(다) $6\times35=210$이 구하는 경우의 수가 된다.

84. 실선 방향으로 움직이는 것은 1칸, 점선 방향으로 움직이는 것은 2칸 이동하는 것으로 해석할 수 있다. 그렇다면 6번 공이 돈 이후에 게임이 끝나기 위해서는 10칸을 이동해 A로 되돌아오는 것으로 해석할 수 있다.

그렇다면 점선 방향으로 이동하는 횟수를 x회, 실선 방향으로 이동하는 횟수를 y회로 놓으면 연립방정식 $x+y=6$, $x+2y=10$를 얻을 수 있다.

그러므로 실선 방향으로 2회, 점선 방향으로 4회 이동한다면, 오각형을 두 바퀴 돌아 A로 되돌아온다. 이렇게 움직이는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_2=15$가지이다.

다만, 중간에 A를 지나게 되면 게임이 끝나기 때문에 중간에 A를 지나 A로 되돌아오는 경우를 제외해야 한다. 실선 방향으로 1회, 점선 방향으로 2회 움직이면 한 바퀴 돌아 A로 되돌아오게 된다. 다시 실선 방향으로 1회, 점선 방향으로 2회 움직이면 두 바퀴 돌아 A로 되돌아오게 된다. 이렇게 움직이는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1=9$가지이므로 이 경우를 제외하면 된다.

그러므로 구하는 확률은 $(15-9)\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{243}$이다.

85. i) 세 공의 색이 모두 다른 경우(ABC)

첫 번째에는 아무 공이나, 두 번째에는 뽑았던 공의 색깔과 다른 색의 공을, 세 번째에는 첫 번째, 두 번째에 뽑았던 공의 색과 다른 색의 공을 뽑아야 한다. 따라서 $\frac{6}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{2}{5}$이다.

ii) 첫 번째 공과 두 번째 공의 색이 다르고, 첫 번째 공과 세 번째 공의 색이 같은 경우(ABA)

첫 번째에는 아무 공이나, 두 번째에는 뽑았던 공의 색깔과 다른 색의 공을, 세 번째에는 첫 번째에 뽑았던 공의 색과 같은 색의 공을 뽑아야 한다.

$\frac{6}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$

남은 3개의 공을 순서대로 하나씩 뽑을 때, 같은 색깔의 공이 연속해서 나오지 않을 확률을 구해보자.

처음에 i)의 방식으로 세 공을 모두 다르게(ABC) 뽑았으면, 남아있는 공도 서로 모두 다를 것(ABC)이므로, 아무렇게나 뽑아도 같은 색의 공이 연달아 나오지 않는다.

처음에 ii)의 방식으로 처음 뽑은 공과 마지막에 뽑은 공의 색만 같게(ABA) 뽑았으면, 한 색깔의 공이 2개, 다른 색깔의 공이 1개 남아 있을 것(BCC)이므로, 마찬가지로 처음 뽑은 공과 마지막에 뽑은 공의 색만 같게(CBC) 뽑아야 같은 색의 공이 연달아 나오지 않는다.

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{3}$

그러므로 구하는 확률은 $\dfrac{\frac{2}{5}\times1+\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}+\frac{1}{5}}=\frac{7}{9}$이다.

정답 및 해설

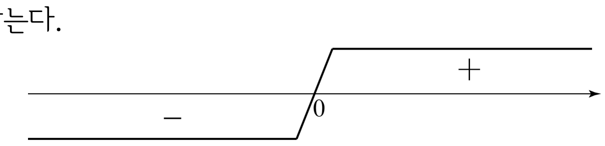
86. 1) 함수가 극값을 갖는 점의 개수를 구하기 위해서는 함수를 미분한 후 도함수의 부호가 변하는 점의 개수를 찾으면 된다. 우선 함수 $f(x)=x(x^a+x^b)$를 미분하기 위해서는, 일단 최고차항에 대해 알아야 한다.

$a>b$일 때 최고차항은 x^{a+1}
$a=b$일 때 최고차항은 $2x^{a+1}$
$a<b$일 때 최고차항은 x^{b+1}

이다. 따라서 가능한 순서쌍 $(a,\,b)$는 $a>b$일 때, $a=b$일 때, $a<b$일 때 이렇게 세 가지 경우로 나뉘게 된다. $a>b$일 때와 $a<b$일 때의 각각의 순서쌍은 $(1,\,5)$와 $(5,\,1)$처럼 서로 일대일로 대응하고, 함수 역시 같으므로 $a<b$일 때의 경우의 수는 따로 셀 필요 없이, $a>b$일 때의 경우의 수를 구한 뒤 2를 곱해주면 될 것이다.

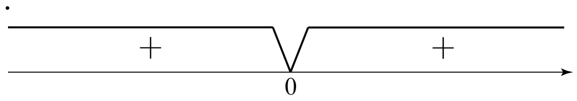
2) 일단 $a=b$일 때가 간단하므로 먼저 구해주자. 증감표를 그리기 위해 일단 먼저 $f'(x)$의 식을 구해보면, $a=b$일 때 $f(x)=2x^{a+1}$이므로, $f'(x)=2(a+1)x^a$이다.

a가 홀수일 때 $f(x)$의 증감표는 다음과 같으므로, $f(x)$는 1개의 극값을 갖는다.



이를 만족시키는 순서쌍은 $(1,\,1)$, $(3,\,3)$, $(5,\,5)$이므로, 경우의 수는 3가지이다.

a가 짝수일 때 $f(x)$의 증감표는 다음과 같으므로, $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.



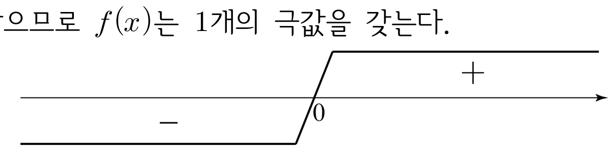
이를 만족시키는 순서쌍은 $(2,\,2)$, $(4,\,4)$, $(6,\,6)$이므로, 경우의 수는 3가지이다.

3) $a>b$일 때 $f(x)$의 개형을 살펴보자. 증감표를 그리기 위해 일단 먼저 $f'(x)$의 식을 구해보면,

$f'(x)=(a+1)x^a+(b+1)x^b=(a+1)x^b\left\{x^{a-b}+\dfrac{b+1}{a+1}\right\}$이므로, b가 홀수일 때 $f'(x)$는 $x=0$ 근처에서 부호가 변하고, b가 짝수일 때 $f'(x)$는 $x=0$ 근처에서 부호가 변하지 않는다.

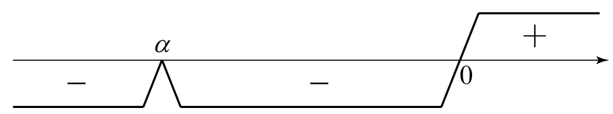
$a-b$가 짝수일 때 $x^{a-b}=-\dfrac{b+1}{a+1}$는 근을 갖지 않고, $a-b$가 홀수일 때 $x^{a-b}=-\dfrac{b+1}{a+1}$는 하나의 음수 근을 갖는다.

a가 홀수, b가 홀수일 때 $a-b$는 짝수이다. 이 때 $f(x)$의 증감표가 다음과 같으므로 $f(x)$는 1개의 극값을 갖는다.



이를 만족시키는 순서쌍은 $(3,\,1)$, $(5,\,1)$, $(5,\,3)$이므로, 경우의 수는 3가지이다.

a가 홀수, b가 짝수일 때 $a-b$는 홀수이다. 이 때 $f(x)$의 증감표가 다음과 같으므로 $f(x)$는 1개의 극값을 갖는다.

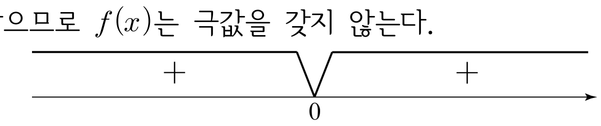


이를 만족시키는 순서쌍은 $(3,\,2)$, $(5,\,2)$, $(5,\,4)$이므로, 경우의 수는 3가지이다.

a가 짝수, b가 홀수일 때 $a-b$는 홀수이다. 이 때 $f(x)$의 증감표가 다음과 같으므로 $f(x)$는 2개의 극값을 갖는다.

이를 만족시키는 순서쌍은
$(2,\,1)$, $(4,\,1)$, $(4,\,3)$, $(6,\,1)$, $(6,\,3)$, $(6,\,5)$이므로, 경우의 수는 6가지이다.

a가 짝수, b가 짝수일 때 $a-b$는 짝수이다. 이 때 $f(x)$의 증감표가 다음과 같으므로 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.



이를 만족시키는 순서쌍은 $(4,\,2)$, $(6,\,2)$, $(6,\,4)$이므로, 경우의 수는 3가지이다.

4) $b>a$일 때의 경우의 수는 $a>b$일 때와 동일하다.

5) 그러므로 극값의 개수가 0개가 되도록 하는 순서쌍의 개수는 9가지이다.

극값의 개수가 1개가 되도록 하는 순서쌍의 개수는 15가지이다.

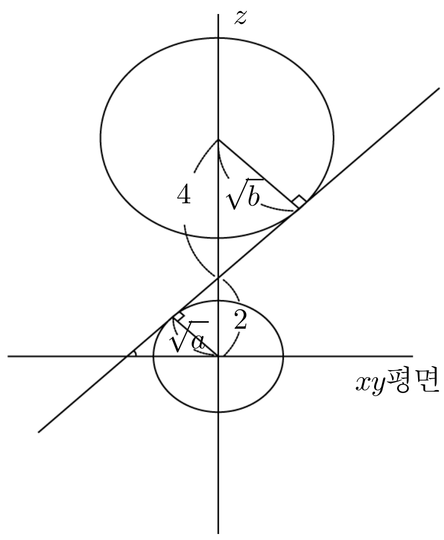
극값의 개수가 2개가 되도록 하는 순서쌍의 개수는 12가지이다.

이에 따라 확률분포표를 그리면

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X)$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{5}{12}$	$\dfrac{1}{3}$	1

이므로 $\mathrm{E}(X)=\dfrac{13}{12}$이다.

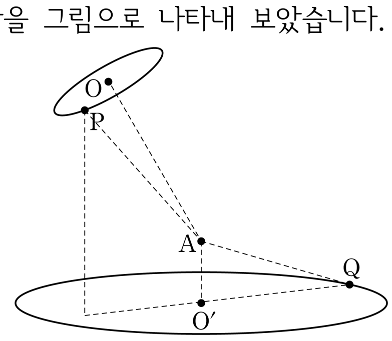
87. 두 원의 중심을 이은 직선과 평면에 내린 두 수선의 발을 이은 직선이 구성하는 평면을 기준으로 하여 그 평면을 내려다보는 방향으로 단면화를 하면 다음과 같다.



xy평면과 이루는 각도가 30° 이므로 $\sqrt{b}=2\sqrt{3}$ 에서 $b=12$ 이고 $\sqrt{a}:\sqrt{b}=1:2$ 이므로 $a=3$ 따라서 $a+b=15$

(참고 : 이 문항은 2013학년도 포카칩 직전모의평가 문항입니다. 2016학년도 9평을 먼저 풀고 이 문제를 접한다면 많이 익숙할 수 있습니다.)

88. 이 문제의 상황을 그림으로 나타내 보았습니다.



점 P에서 아랫 원에 수선의 발을 내린 후 가장 먼 점을 Q라 하면, $\angle PAQ=\angle O'AP+\angle O'AQ$가 됩니다.
그런데 이렇게 계산할 경우, $\angle PAQ$는 점 P가 어디에 있던지 180 가 넘습니다. 따라서 위와 같이 계산할 경우 $\angle PAQ$의 최댓값을 구하는 것이 아니라 $360-\angle PAQ$의 최댓값을 구해주어야 합니다. 그렇다면 $\angle O'AP$가 최소가 되는 지점을 찾아주어야 하겠지요. 이것 역시 점 O'에서 윗 원에 수선의 발을 내린 후 최단거리를 찾아주면 됩니다.
$\cos\angle PAQ=\cos(2\pi-\angle PAQ)=\cos(2\pi-\angle O'AP-\angle O'AQ)$에서 $\angle O'AP$의 최소가 되는 지점에서의 cos값을 구해보면,

$$\cos(\angle O'AO-\angle OAP)=-\frac{4}{5}\times\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{\sqrt{10}}=-\frac{9}{5\sqrt{10}}$$

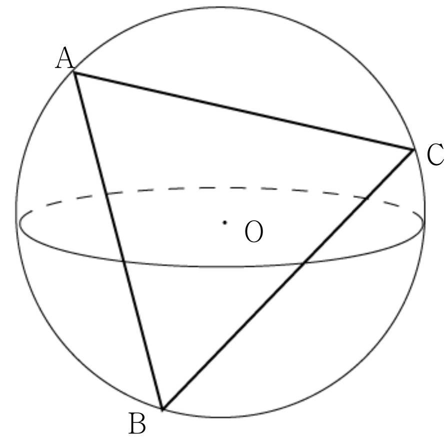
입니다.

따라서, $\cos(\angle O'AP)=-\dfrac{9}{5\sqrt{10}}$임을 알 수 있습니다.

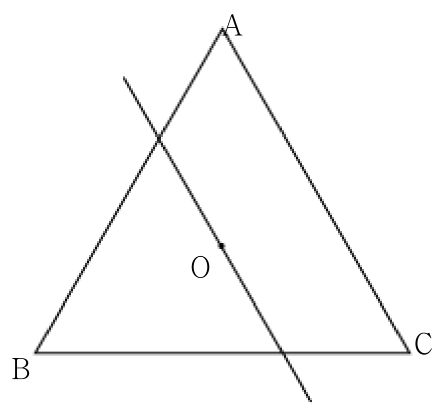
또한 $\cos(\angle O'AQ)=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$입니다.

그러므로, $\cos(2\pi-\angle O'AP-\angle O'AQ)$
$$=\cos(\angle O'AP+\angle O'AQ)=-\frac{9}{50}-\frac{39}{50}=-\frac{24}{25}$$
가 $\cos\angle PAQ$의 최솟값이 됩니다.

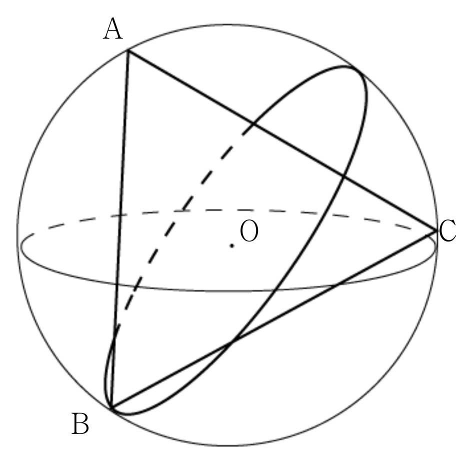
89. 문제의 상황은 다음 그림과 같다.



간단하게 보기 위하여 삼각형이 이루는 평면으로 구를 단면화를 해서 보자.
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{OP}=0$ 이므로 $\overrightarrow{AC}$을 평행이동 하여 원점 O 를 지나게 해주면 아래 그림과 같다.



따라서 점P는 $\overrightarrow{AC}$를 법선벡터로 가지고 원점O를 지나는 평면과 구의 교선 위에 존재 할 것이다. 즉 이와 같을 것 이다.

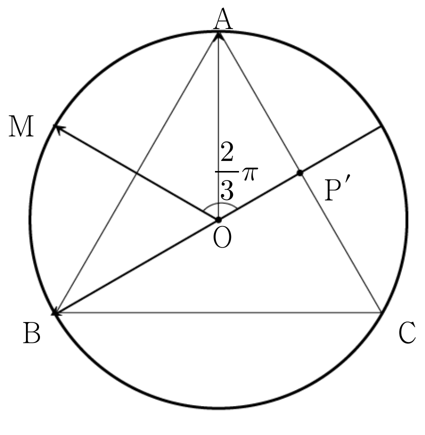


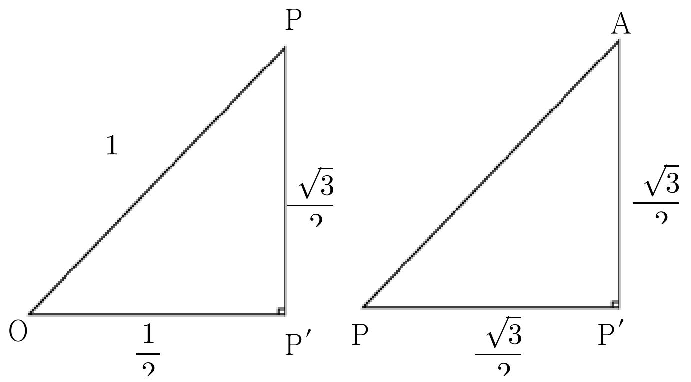
$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB})$
$=|\overrightarrow{OP}|^2-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OP}+(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})=\dfrac{3}{4}$
$=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OP}=-\dfrac{1}{4}$ 점 P에서 삼각형이 존재하는 평면에 내린 수선의 발을 P' 이라고 하면 점 P'은 점 B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선위에 존재 할 것이다. 또한 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP'}+\overrightarrow{P'P}$ 이므로
삼각형을 포함하는 평면에 존재하는 임의의 벡터와 $\overrightarrow{P'P}$는 수직 이므로 $\overline{AB}$의 중점을 M이라고 하면
$2\overrightarrow{OM}\cdot(\overrightarrow{OP'}+\overrightarrow{P'P})=2\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OP'}=-\dfrac{1}{4}$이다.

내적의 결과가 음수이므로 이루는 각도는 $\dfrac{\pi}{2}$보다 큼을 알 수 있다.

$\overline{OP'}=x$라고하면 $1\times x\times\cos120^\circ=-\dfrac{1}{4}$ 이므로 $x=\dfrac{1}{2}$

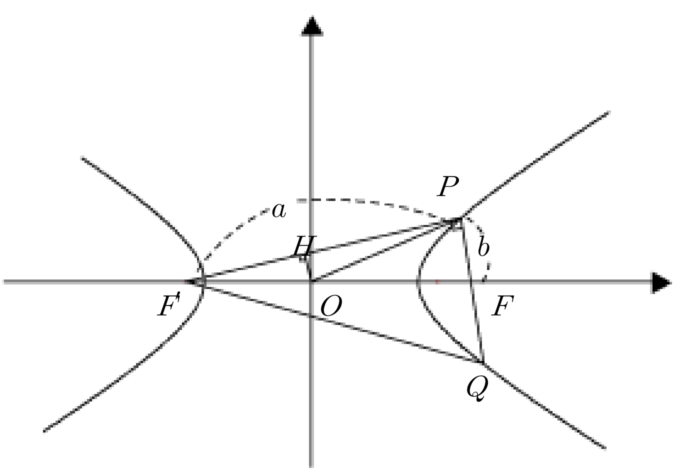
따라서 점 P′은 그림과 같이 위치한다.





△OPP′ 에서 $\overline{P'P}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ △AP′P에서 $|\overrightarrow{AP}|^2=\frac{3}{2}$

90.



$\overline{F'P}=a$, $\overline{PF}=b$ 라고하면 쌍곡선의 정의로부터 $a-b=6\sqrt{2}$ 이고 문제의 조건에 의하여 △FOP가 이등변 삼각형이므로 꼭짓점 O에서 내린 수선의 발을 H라고 하면 삼각형의 중점연결정리에 의하여 $\overline{F'H}=\frac{a}{2}$, $\overline{OH}=\frac{b}{2}$이고 △F′PF가 직각삼각형임을 알 수 있다.

직각삼각형 △F′OH에 대하여 $\frac{a^2+b^2}{4}=25$ 이므로 $a^2+b^2=100$

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=100-2ab=72$, $2ab=28$

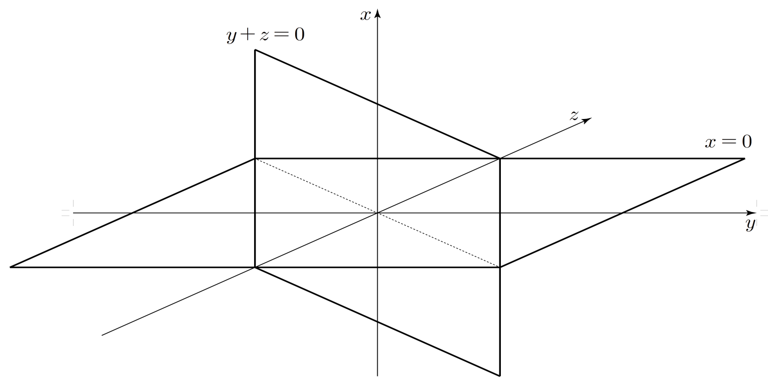
따라서, $a=7\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}$이다.

$\overline{F'Q}=x$, $\overline{FQ}=x-6\sqrt{2}$라 하면, $a^2+(b+x-6\sqrt{2})^2=x^2$에서

$98+(x-5\sqrt{2})^2=x^2$이고, $10\sqrt{2}x=148$에서 $x=\frac{37\sqrt{2}}{5}$이다.

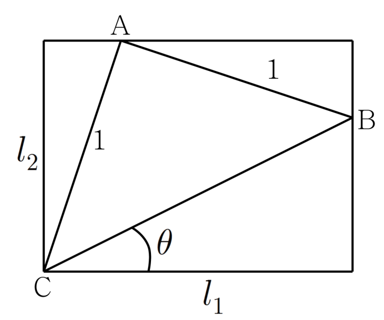
$S=\frac{1}{2}\times7\sqrt{2}\times\frac{12\sqrt{2}}{5}$ 이므로 $5S=84$

91. 두 평면 $y+z=0$, $x=0$을 모두 그려보면,



두 평면에 모두 수직인 평면의 방정식은, 직육면체의 관점에서 두 평면에 모두 수직이면 되므로 $y-z=0$임을 알 수 있다. (위의 그림을 가지고 두 평면에 모두 수직인 평면을 상상합니다.)

그렇다면,



(위의 그림을 90도 돌렸을 뿐이다.)

이 그림도 평면 $y-z=0$ 위에 있음을 확실히 알 수 있다. 위의 그림에서 직사각형을 평면 $y-z=0$라 생각해보면, 선분 l_1의 방향벡터는 $(0,\ 1,\ 1)$임을 알 수 있고, 선분 l_2의 방향벡터는 $(1,\ 0,\ 0)$임을 알 수 있다. 그런데, $\sqrt{2}\cos\theta+\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\sqrt{5}$ 이므로

$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos\theta=\sqrt{5}$이다.

$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$임을 알 수 있다.

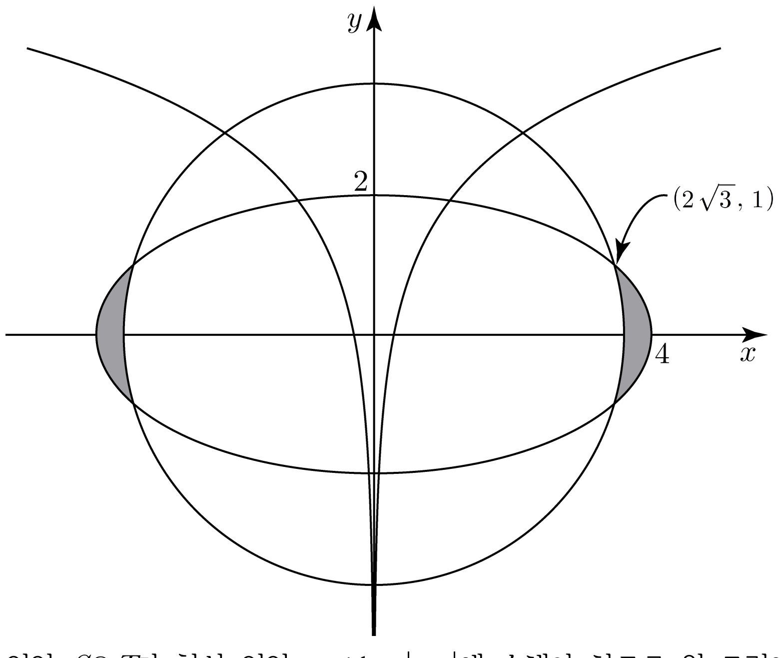
따라서 선분 BC의 선분 l_2 위로의 정사영, 즉 $\sqrt{2}\sin\theta$의 값은 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$이고, l_1의 길이가 $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$이므로, 선분 BC의 방향벡터는 $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}},\ \frac{3}{\sqrt{10}},\ \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$임을 알 수 있다. 이 방향벡터에 $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$배씩 해주면, 선분 BC의 방향벡터는 $\left(1,\ \frac{3}{\sqrt{2}},\ \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$가 된다. 따라서 $10ab=45$임을 알 수 있다.

∵ 직선 l_2는 x축으로의 이동이므로 $\overrightarrow{BC}$를 l_2에 정사영 시킨 크기는 $\overrightarrow{BC}$의 x값의 크기 변화를 알려준다. 마찬가지로 l_1은 y, z의 크기 변화를 알려준다.

92. $a=\sqrt{13}$일 때 영역 S의 경계와 영역 T의 경계의 교점은 $(2\sqrt{3},1)$, $(-2\sqrt{3},1)$, $(2\sqrt{3},-1)$, $(-2\sqrt{3},-1)$이다.

영역 $S\cap T$가 나타내는 영역은 다음 그림에서 색칠한 부분과 같다.

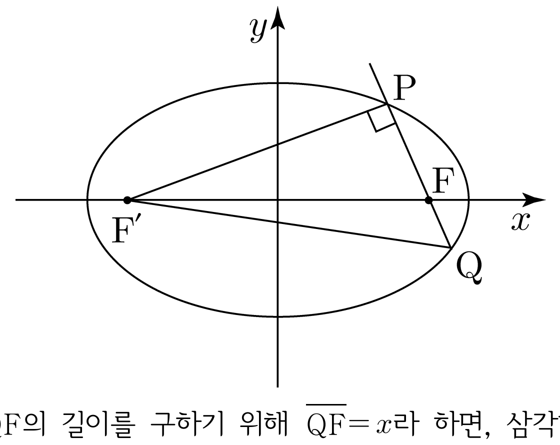
정답 및 해설



영역 $S\cap T$가 항상 영역 $y\le\log_2|mx|$에 속해야 하므로 위 그림에서 함수 $y=\log_2|mx|$의 $x=2\sqrt{3}$에서의 y값이 항상 1보다 크거나 같아야 함을 알 수 있다.

즉 $\log_2|2\sqrt{3}m|\ge 1$이므로 $m\ge\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이고, 따라서 양수 m의 최솟값은 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이다.

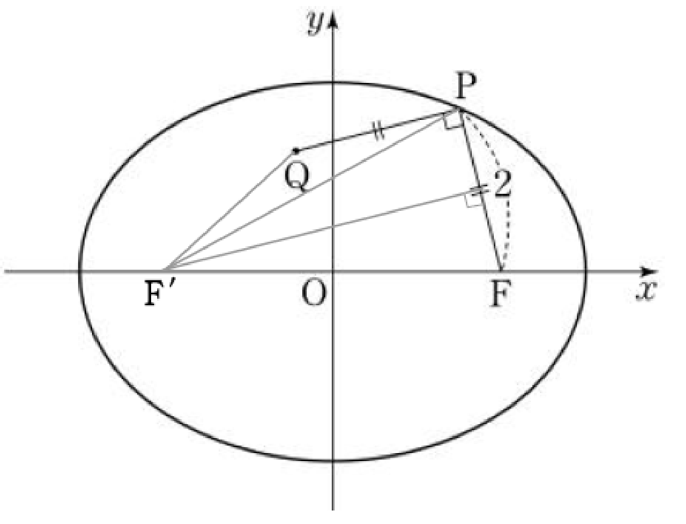
93. 그림을 그리는 편의를 위해 한 초점 F의 x좌표가 양수라 가정해도 문제를 풀 때 일반성을 잃지 않는다. 다른 한 초점을 F$'$라 하자.
우선 타원의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=4\sqrt{2}$이고, 문제의 조건에 따라 $\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{2}$을 알고 있으므로 $\overline{\mathrm{PF}}=3\sqrt{2}$를 얻는다. $\overline{\mathrm{FF'}}=2\sqrt{5}$이므로 삼각형 PFF$'$에서 피타고라스의 정리가 성립함을 알 수 있고, 삼각형 PFF$'$은 $\angle\mathrm{P}=90^\circ$인 직각삼각형임을 안다. 또한 삼각형 PQF$'$도 직각삼각형이다. 지금까지 알아낸 정보를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



이제 선분 QF의 길이를 구하기 위해 $\overline{\mathrm{QF}}=x$라 하면, 삼각형 PQF$'$에서 피타고라스 정리에 의해
$(\sqrt{2}+x)^2+(3\sqrt{2})^2=(4\sqrt{2}-x)^2$이고, 정리하면 $x=\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$를 얻는다.

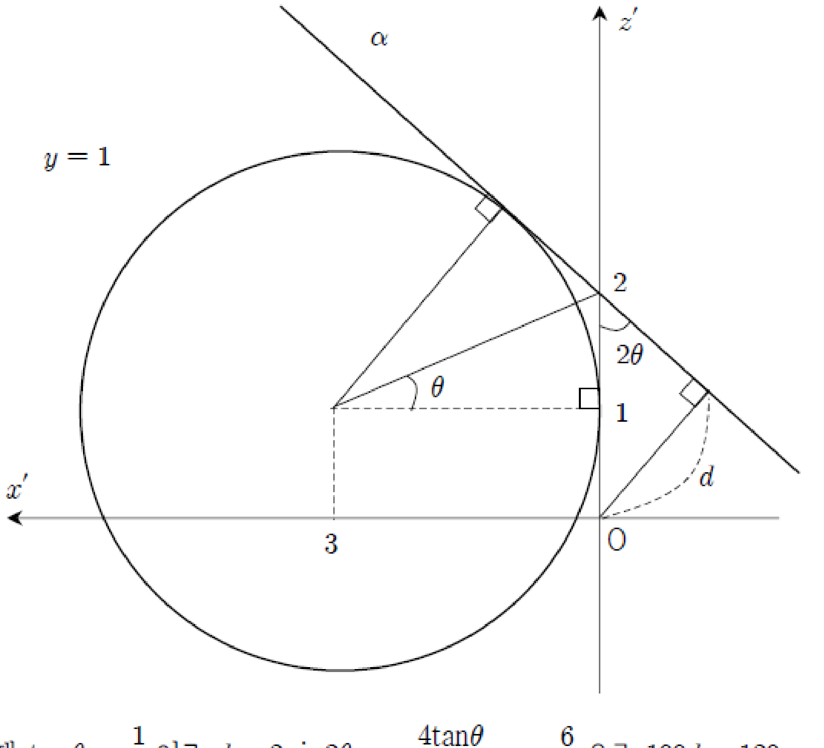
94. $y^2=4x$에서 양변을 x에 관해 미분하면 $2y\dfrac{dy}{dx}=4$이다.
$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{y}$이므로 $\left(\dfrac{a^2}{4},\ a\right)$에서의 접선의 방정식은
$y=\dfrac{2}{a}\left(x-\dfrac{a^2}{4}\right)+a=\dfrac{2}{a}x+\dfrac{a}{2}$이다.
또한 $y=-x^2$ 위의 점 $(b,\ -b^2)$에서의 접선의 방정식은
$y=-2b(x-b)-b^2=-2bx+b^2$이다.
$\dfrac{2}{a}=-2b,\ \dfrac{a}{2}=b^2$에서 $ab=-1,\ 2b^2=a$이므로 $2b^3=-1$이다.
$m^3+8n^3=-8b^3+8b^6=4+2=6$이다.

95.
sol)



두 초점간 거리로서 $\overline{\mathrm{FF'}}=4$이고, $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=6$에서 $\overline{\mathrm{PF'}}=4$이므로 삼각형 F$'$PF는 이등변삼각형입니다. 거기다 추가로 꼭짓점 F$'$에서 이등변 삼각형에서의 수직이등분선을 위와 같이 그어봅시다. 삼각형 PQF$'$의 밑변을 $\overline{\mathrm{PQ}}$로 보았을 때 높이는 $\overline{\mathrm{PF}}$의 절반으로 볼 수 있으므로 삼각형 PQF$'$의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\left(\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{PF}}\right)=1$이 됩니다.

96.
sol.1)
필요한 모든 정보를 담고 있는 평면 $y=1$로 잘라보겠습니다. 그러면 구는 원으로, 평면은 직선으로 보이고, 고등수학(하)에나 등장할 법한 좌표평면 문제로 바뀝니다.



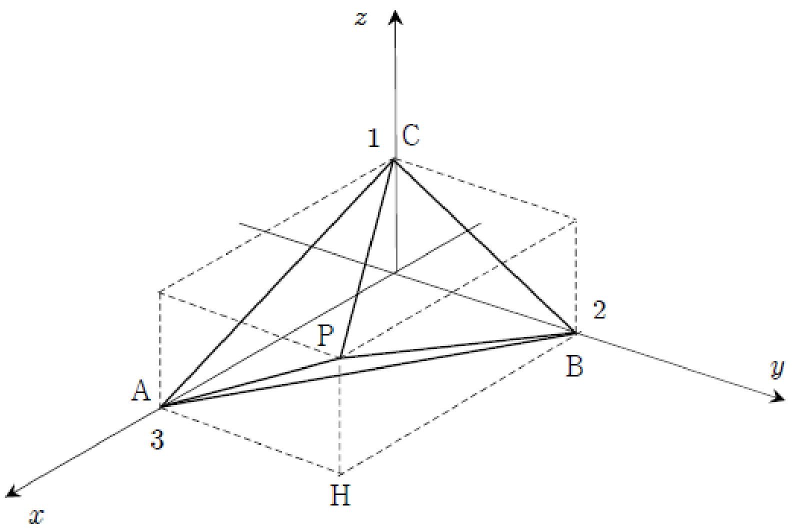
이때 $\tan\theta=\dfrac{1}{3}$이고 $d=2\sin2\theta=\dfrac{4\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{6}{5}$으로 $100d=120$

※ $\tan\theta$로부터 $\sin2\theta$를 구하는 방법은 여러 가지가 있습니다. 만약에 바이어 슈트라스 치환을 이용하자면 $\sin2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$로 단번에 나오지만, $\tan\theta\rightarrow\tan2\theta\rightarrow\sin2\theta$로 구하여도 됩니다.

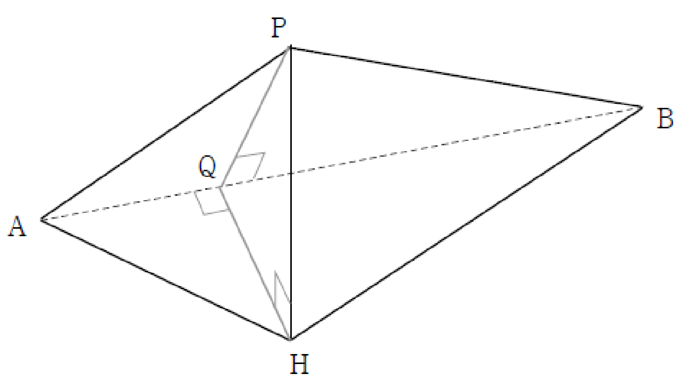
97.

sol)

좌표공간상의 임의의 점에서 xy, yz, zx 평면에 수선을 내릴 수도 있고, x, y, z 축에 수선을 내리는 것을 생각할 수 있습니다. 나아가 xy, yz, zx 평면 혹은 x, y, z 축에 대하여 대칭시킬 수도 있구요. 물론 그때마다 보존되는 수치인지 0으로 바뀌는 수치인지를 잘 파악하면서 나타내면 그만입니다. 일반적인 수험생이라면 다음과 같이 좌표공간에다 그림을 그릴 것입니다.



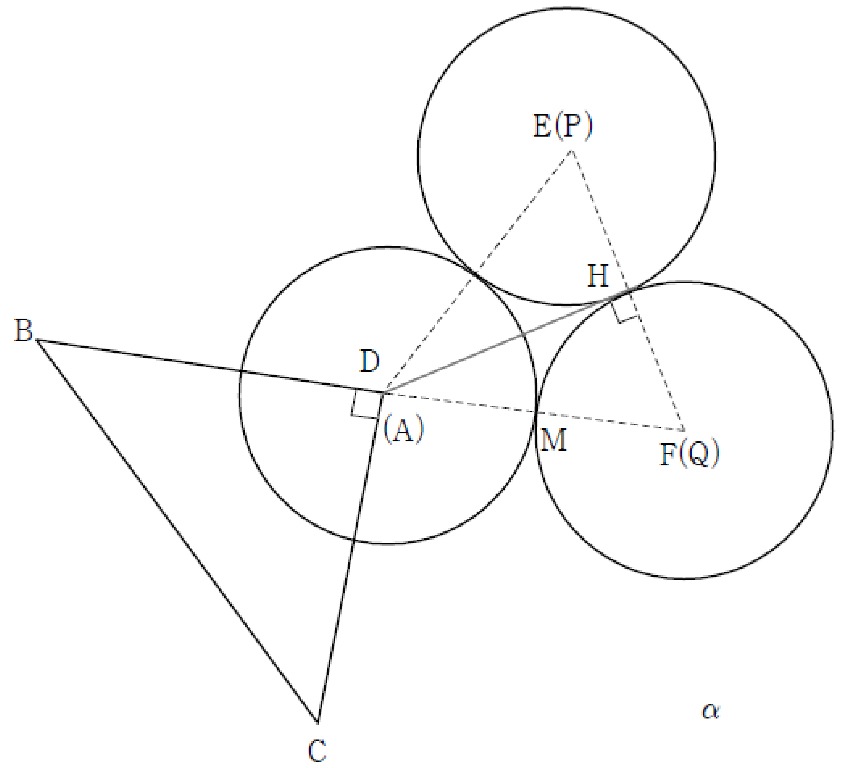
이때 꼭짓점 P에서 변 AB, BC, CA에 내린 수선의 길이를 비교하여야 합니다. 그래서 가장 짧은 수선의 발에 점 Q를 위치시키면 됩니다.
그런데 문제에서 하필 $13a^2$을 구하라 하였으니 길이가 $\sqrt{13}$인 변 AB에 내린 수선의 길이를 구하는 것이 제일 빠르고 편한 방법이 되겠네요! 어차피 삼각뿔의 세 면을 이루는 세 삼각형들의 모든 변의 길이를 아니까 마음만 먹으면 다 구해서 비교할 수 있습니다만 시간이 문제일 뿐이죠.
꼭짓점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 점 H라 할 때, 사면체 $\mathrm{P-AHB}$에서 적절히 수선을 내려서 관찰을 해보면



$a^2 = 1^2 + \left(\frac{6}{\sqrt{13}}\right)^2$에서 $13a^2 = 13 + 36 = 49$가 나옵니다.

98.

삼각형 DEF의 평면 α위로의 정사영이 삼각형 PAQ라 하였고, 또한 그것이 정삼각형이라 하였으므로, 앞선 기출문제에서의 마인드를 적용해서, 윗면의 중심이 E, D, F인 원이고, 높이가 각각 $\overline{\mathrm{EP}}, \overline{\mathrm{DA}}, \overline{\mathrm{FQ}}$인 원기둥을 상상할 수 있습니다. 이 상황을 평면 α의 조금 더 위에서 바라보면 다음과 같습니다.



이런 식으로 위에서 내려다 보아도 변하지 않는 값인 선분 DH의 길이가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$이니, 따라서 정삼각형 PAQ의 한 변의 길이가 $\frac{2}{\sqrt{6}}$로 됩니다.

이제 수직인 성분은 무시해도 된다는 내적의 성질을 떠올리며 계산하면

$$\overrightarrow{\mathrm{BQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CE}} = \overrightarrow{\mathrm{BQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CP}}$$

$$= \overrightarrow{\mathrm{BQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DM}} = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}+2}{6}$$

이므로 $p^2 + q^2 = 40$이 답입니다.

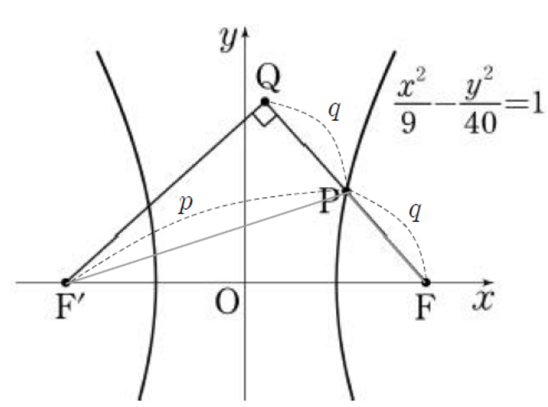
99. $f(a) = 2a$이고, $g(a) = 2\sqrt{a^2-4}$이다.

$h(a) = 2f(a) - g(a)$라 하면, $h'(a) = 4 - \frac{4a}{2\sqrt{a^2-4}}$이다.

a	2	$\cdots$	$\frac{4}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$h'(a)$		$-$	0	$+$
$h(a)$		↘	극소	↗

따라서 최솟값은 $h\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \frac{16}{\sqrt{3}} - \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$이다.

100.



쌍곡선의 정의에 의하여 $p - q = 2\sqrt{9} = 6 \ \cdots$ ①

삼각형 PQF′에 피타고라스 정리를 적용하면 $\overline{\mathrm{F'Q}}^2 = p^2 - q^2$이고, 다시 삼각형 FQF′에 피타고라스 정리를 적용하면 $14^2 - 4q^2 = p^2 - q^2 \quad \cdots$ ②

따라서 ①, ②를 연립하면 $p = 14, q = 5$가 되어 답은 5입니다.

정답 및 해설

101.

sol)

기본 꼴을 평행이동해서 구할 수도 있지만 본디 포물선의 정의로 돌아가서 수식을 세워보겠습니다. 포물선 위의 점들은 점 $(-2, q)$에서 준선 $y=-1$에 이르는 거리가 같은 점 (x, y)의 자취이므로 이를 그대로 수식으로 바꾸어서 나타내면 $\sqrt{(x+2)^2+(y-q)^2}=|y+1|$이고, 마저 정리해보면

$$x^2+4x+4+\cancel{y^2}-2qy+q^2=\cancel{y^2}+2y+1$$

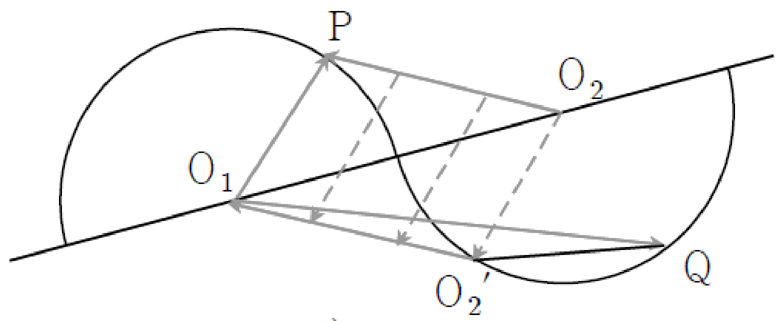
$$2(q+1)y=x^2+4x+3+q^2$$

그리고 이 식은 $y=x^2+ax+b$와 일치하므로 계수를 비교해보면

$2(q+1)=1 \rightarrow q=-\dfrac{1}{2}$이고 $a=4, b=3+\dfrac{1}{4}$이므로

$a+4b=4+13=17$이 답이 됩니다.

102.



점 P가 점 O_1에 위치하도록 $\overrightarrow{O_2P}$를 평행이동 해보면

$$\overrightarrow{O_1Q}+\overrightarrow{O_2P}=\overrightarrow{O_1Q}+\overrightarrow{O_2'O_1}=\overrightarrow{O_2'Q}$$

로 변형할 수 있으므로 $\left|\overrightarrow{O_1Q}+\overrightarrow{O_2P}\right|=\left|\overrightarrow{O_2'Q}\right|=1$이 됩니다. 이때 삼각형 $O_2O_2'Q$는 세 변의 길이가 모두 같으므로 정삼각형이 됩니다. 그러면

$$\overrightarrow{O_1Q}\cdot\overrightarrow{O_2P}=\overrightarrow{O_1Q}\cdot\overrightarrow{O_2'O_1}=-\overrightarrow{O_1Q}\cdot\overrightarrow{O_1O_2'}$$

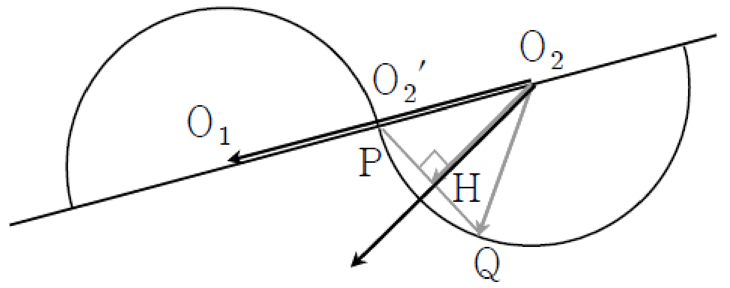
로부터 $\left|\overrightarrow{O_1Q}\cdot\overrightarrow{O_2P}\right|=\left|\overrightarrow{O_1Q}\cdot\overrightarrow{O_1O_2'}\right|$의 최솟값은, 다시 두 점 O_2, Q의 회전의 중심으로 성분을 분해해서 살펴보자면

$$\overrightarrow{O_1Q}\cdot\overrightarrow{O_1O_2'}=\left(\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2Q}\right)\cdot\left(\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2O_2'}\right)$$

$$=\left|\overrightarrow{O_1O_2}\right|^2+\overrightarrow{O_1O_2}\cdot\left(\overrightarrow{O_2O_2'}+\overrightarrow{O_2Q}\right)+\overrightarrow{O_2Q}\cdot\overrightarrow{O_2O_2'}$$

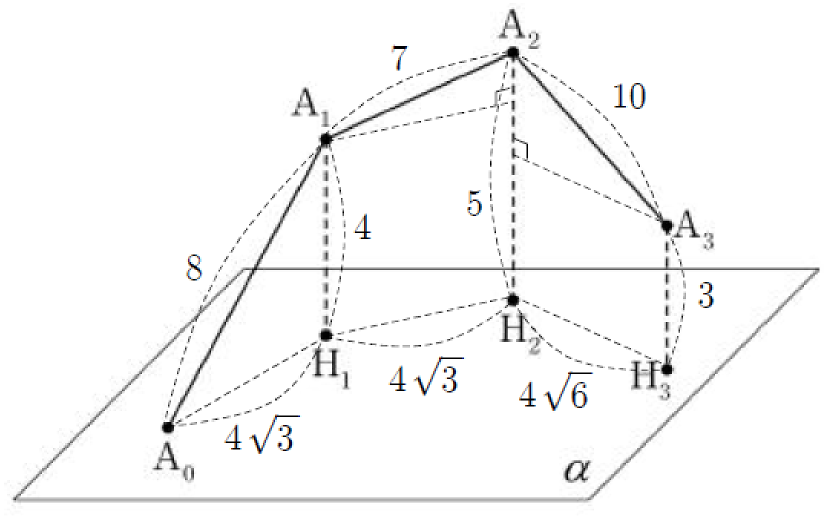
$$=4+\overrightarrow{O_1O_2}\cdot\left(\overrightarrow{O_2O_2'}+\overrightarrow{O_2Q}\right)+\frac{1}{2}$$

에서 $\overrightarrow{O_1O_2}\cdot\left(\overrightarrow{O_2O_2'}+\overrightarrow{O_2Q}\right)$가 최소, 즉 $\overrightarrow{O_2O_1}\cdot\left(\overrightarrow{O_2O_2'}+\overrightarrow{O_2Q}\right)$가 최대가 될 때 발생합니다. 그러면 두 점 O_2', Q의 중점을 H라 하였을 때 $\overrightarrow{O_2O_1}\cdot\left(\overrightarrow{O_2O_2'}+\overrightarrow{O_2Q}\right)=2\overrightarrow{O_2O_1}\cdot\overrightarrow{O_2H}$가 최대가 되어야 하므로 두 벡터 $\overrightarrow{O_2O_1}$, $\overrightarrow{O_2H}$가 이루는 사잇각이 최소가 되어야 하고, 그 순간 두 점 P, O_2가 일치해서 $\overrightarrow{O_2O_1}\cdot\overrightarrow{O_2H}\le 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{2}$이 성립합니다.

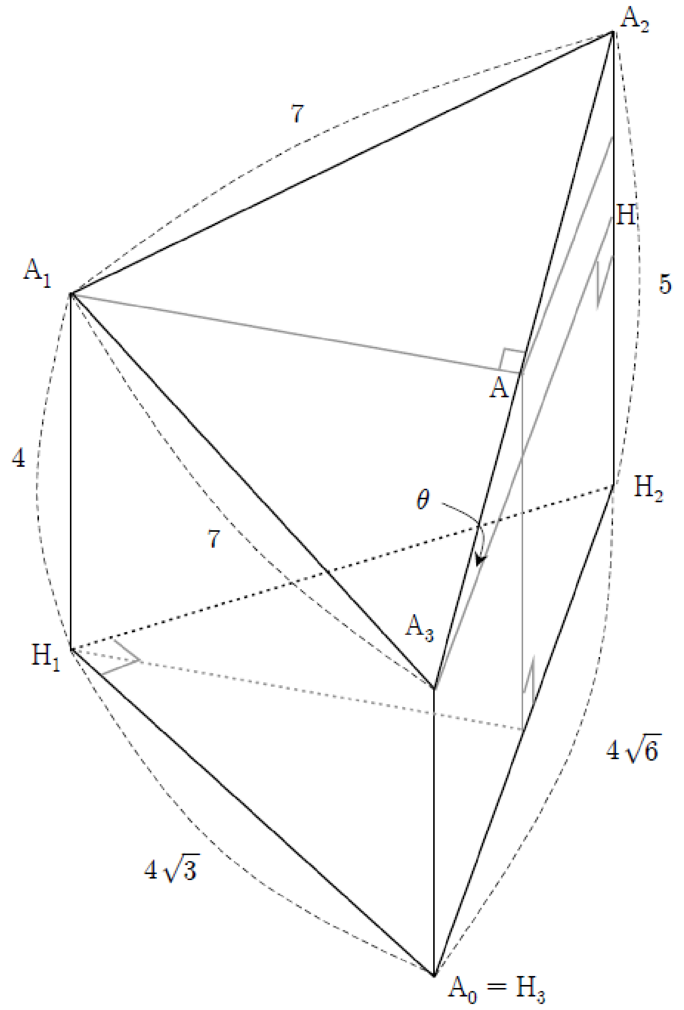


$$\therefore \left|\overrightarrow{O_1Q}\cdot\overrightarrow{O_2P}\right|=\left|\overrightarrow{O_1Q}\cdot\overrightarrow{O_1O_2'}\right|\ge 4-3+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

103.



편의상 바닥 평면인 α평면을 xy평면이라 두고 $\overrightarrow{H_1A_1}$의 방향을 z축 양의 방향으로 잡겠습니다. 이때 $\overline{A_0A_3}$가 최소가 되려면 A_3의 수선의 발이 A_0가 되어야 하는데, 그러려면 세 변 A_0H_1, H_1H_2, H_2H_3가 삼각형을 이루어야 합니다. 때마침 길이들을 보니 $1:1:\sqrt{2}$의 길이비로 직각이등변삼각형이 되네요. 그 상황을 다시 그려보면 다음과 같습니다.



삼각형 $A_1A_2A_3$가 이등변이므로 꼭짓점 A_1에서 모서리 A_2A_3에 내린 수선의 발을 A, 꼭짓점 A_3에서 모서리 A_2H_2에 내린 수선의 발을 H라 하였을 때, 평면 α와 평면 $A_1A_2A_3$의 교선이 A_1A와 평행하므로

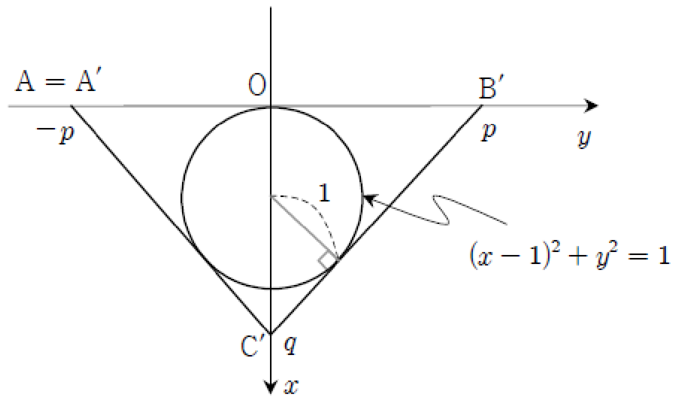
$\tan\theta=\dfrac{\overline{HA_2}}{\overline{A_3H}}=\dfrac{2}{4\sqrt{6}}$이고 $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}=\dfrac{25}{24}$로부터

역시 $25\cos^2\theta=24$가 나옵니다.

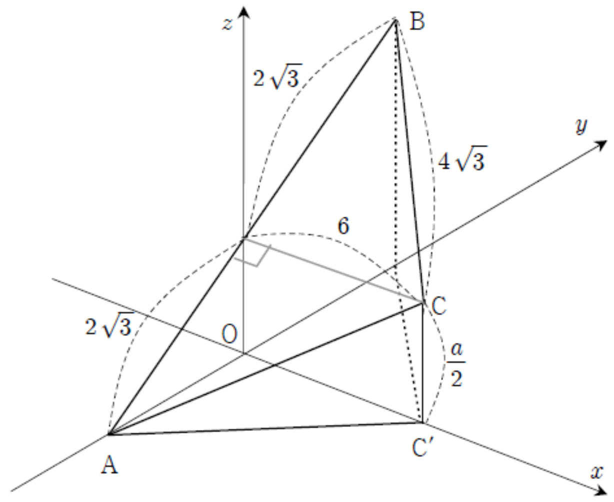
104.

sol)

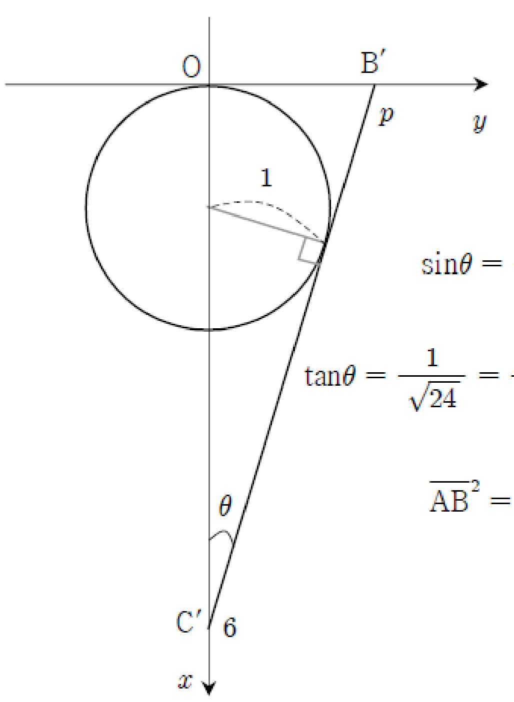
위에서 내려다 본 모습 혹은 정사영 상황을 생각해보겠습니다. 그러면 점 B'는 y축 상에, 점 C'는 x축 상에 존재합니다.



그러면 (나)에서 제시한 원의 방정식 $(x-1)^2+y^2=1, z=0$이 x축 대칭이므로 두 점 A', B'역시 x축 대칭인데 편의상 위 그림과 같이 위치를 잡았습니다. 그렇다면 이제 원래 A, B, C의 좌표를 생각해보면 $A(0,-p,0), B(0,p,a), C(q,0,r)$라 둘 수 있고, $\overline{CA}=\overline{CB}$이므로 $r=\frac{a}{2}$가 되어야 합니다. 즉, $A(0,-p,0), B(0,p,a), C\left(q,0,\frac{a}{2}\right)$가 됩니다.



이렇게 공간 상에서 있는 그대로 생각해보면 $q=6$임을 알 수 있고, 정사영 된 상태에서 원의 접선을 이용하여 p값도 마저 구할 수 있습니다.



$\sin\theta=\frac{1}{5} \rightarrow \tan\theta=\frac{1}{\sqrt{24}}$

$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{24}}=\frac{p}{6} \rightarrow p=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\overline{AB}^2=48=4p^2+a^2=6+a^2$

$\therefore a^2=42$

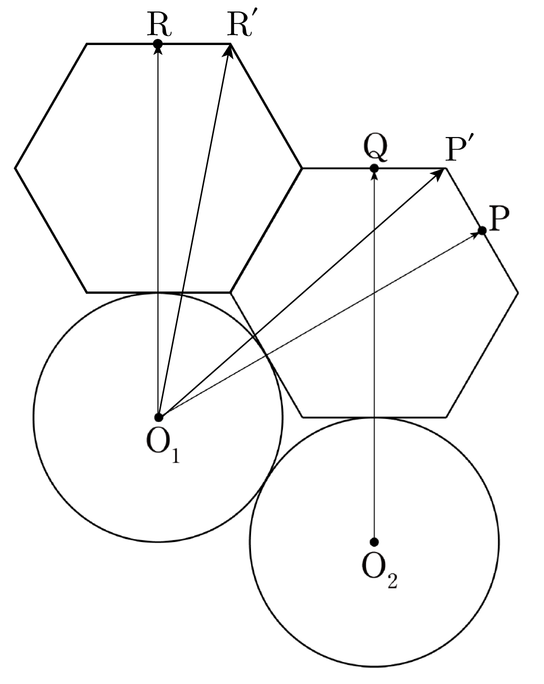
105. $(t\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+t\vec{b})=0$

$(t+2,\ 2t+1)\cdot(2t+1, 2+t)=0$ $(2t+1)(t+2)+(2t+1)(t+2)=0$,

$(2t+1)(t+2)=0$, 따라서 $t=-\frac{1}{2}$, -2이다.

106. 다음 그림과 같이 원 O_1에 접하고 기존의 정육각형과 한변을 공유하는 정육각형을 새로 그리자. 이 때 새로 생긴 정육각형의 위의 점을 R이라 하면 $\overrightarrow{O_2Q}=\overrightarrow{O_1R}$이다.

따라서 내적 $\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_1R}$의 최댓값을 구하는 문제와 같다.



먼저 점 P를 움직여보면, 그림 상의 고정된 점 R(고정된 것이 아니지만 편의상 일단 그렇게 생각하자.)에 대하여 내적 $\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_1R}$의 최댓값은 점 P가 그림 상의 점 P'에 있을 때 발생한다. 이는 선분 O_1R에 선분 O_1P를 정사영 할 때 가장 길이가 긴 것을 찾은 것과 같다.

이제 마찬가지로 고정된 점 P'에 대하여 점 R을 움직여보면 그림 상의 점 R'일 때 내적 $\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_1R}$의 값이 최대가 됨을 알 수 있다. 따라서

$$\overrightarrow{O_1P'}\cdot\overrightarrow{O_1R'}=\sqrt{28}\times\sqrt{28}\times\cos\angle P'O_1R'=\frac{28+28-(2\sqrt{3})^2}{2}=22$$

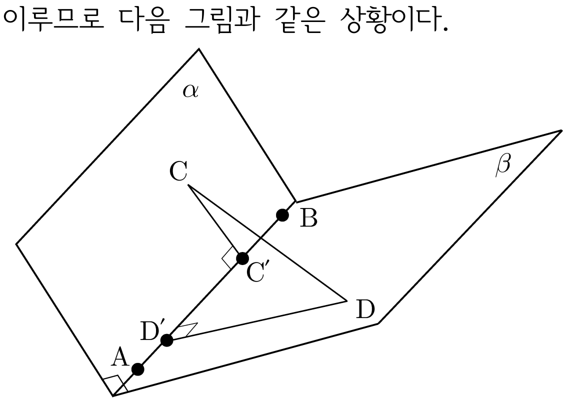
[참고]

실은 더 복잡한 과정이 있고, 해설은 직관의 타당성을 설명한 것에 불과하다. 그러나 언제 최대가 되는지 직관적으로 알 수 있으므로, 최대가 되는 상황에서 점을 움직여보면 그 외의 상황은 반드시 최대가 되는 상황보다 내적 값이 작다는 것을 파악할 수 있다. 좀 더 엄밀한 논리를 스스로 전개해보길 권장한다.

107. 삼각형 ABC의 넓이는 $3\times\frac{1}{\cos30^\circ}$이므로 점 C에서 선분 AB까지의 거리가 $\sqrt{3}$임을 알 수 있다.

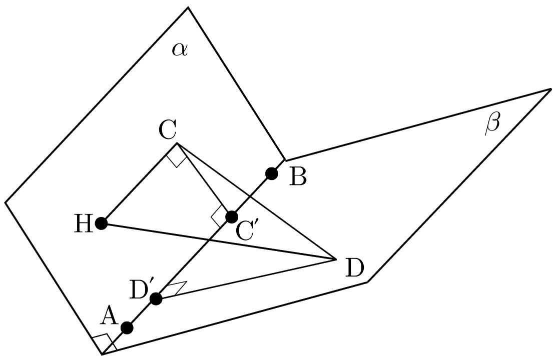
삼각형 ABD의 넓이는 $3\times\frac{1}{\cos60^\circ}$이므로 점 D에서 선분 AB까지의 거리가3임을 알 수 있다.

그런데 평면 $\alpha: y+\sqrt{3}z=0$과 평면 $\beta: \sqrt{3}y-z=0$이 이루는 각의 크기가 90°이루므로 다음 그림과 같은 상황이다.



정답 및 해설

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 C'라 할 때 $\overline{\mathrm{CC}'}=\sqrt{3}$,
점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 D'라 할 때 $\overline{\mathrm{DD}'}=3$,
지금까지의 수직관계에 의해 $\overline{\mathrm{CD}}^2=\overline{\mathrm{CC}'}^2+\overline{\mathrm{DD}'}^2+\overline{\mathrm{C}'\mathrm{D}'}^2$이므로
$\overline{\mathrm{C}'\mathrm{D}'}=2$이다.
따라서 선분 AB와 선분 CD가 이루는 각의 크기 θ를 구하기 위하여 선분 $\overline{\mathrm{C}'\mathrm{D}'}$를 평행이동시켜 다음 그림과 같이 점 C'을 점 C와 일치시키고, 점 D'이 이동한 새로운 점을 점 H라 하자.



$\angle\mathrm{CHD}=90^\circ$이므로 직각삼각형 CHD에서 $\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{CH}}}{\overline{\mathrm{CD}}}=\dfrac{2}{4}$이고,

$\cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$임을 쉽게 안다.

108. 준선이 x축과 평행하므로 포물선의 초점 F의 좌표를 $(a,\,b)$라 하면 꼭짓점 Q의 좌표는 $\left(a,\,\dfrac{b+1}{2}\right)$이다. 따라서

$\overline{\mathrm{OF}}^2-\overline{\mathrm{OQ}}^2=b^2-\dfrac{b^2+2b+1}{4}=\dfrac{3b^2-2b-1}{4}$의 최솟값은

$b=\dfrac{1}{3}$일 때 $-\dfrac{1}{3}$이다.

109. $\angle\mathrm{ACP}=\angle\mathrm{BCP}=90^\circ$이 의미하는 것은 선분 CP가 평면 α에 수직이라는 것이다.
(평면위의 임의의 직선과 수직이면 평면과 수직이라고 하고, 평면위의 두 직선과 수직인 것만 보여도 평면과 수직이라는 사실을 교과서에서 배운다.)
따라서 점 P에서 선분 AB에 수선의 발을 내리고 그 점을 H라 하면 $\overline{\mathrm{PH}}$와 $\overline{\mathrm{PC}}$가 수직이므로 삼각형 PHC는 직각삼각형이고 (나)에 따라서 $\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{7}$이다.
한편 $\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{3}$이므로 $\overline{\mathrm{PC}}=2$를 얻고, 삼각형 ACP의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times2\times2=2$임을 알 수 있다.

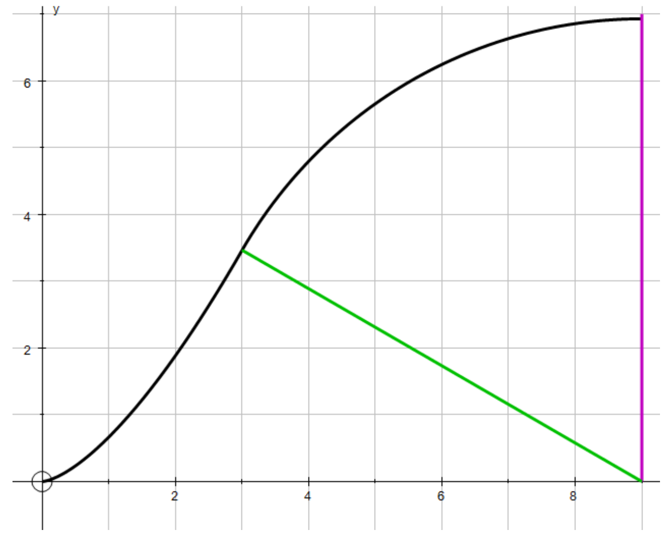
110. 미분가능하므로, $f'(3)=\sqrt{3}$, $f(3)=2\sqrt{3}$이다.
반원 $f(x)=\sqrt{r^2-(x-a)^2}$에서 $f(3)=\sqrt{r^2-(3-a)^2}=2\sqrt{3}$이다.
따라서, $(a-3)^2+12=r^2$이다. ……①

또한 $f'(x)=\dfrac{a-x}{\sqrt{r^2-(x-a)^2}}$에서

$f'(3)=\dfrac{a-3}{\sqrt{r^2-(3-a)^2}}=\sqrt{3}$이므로 $(a-3)^2=3r^2-3(a-3)^2$이다.
(또한 $a-3>0$에서 $a>3$이다.)

따라서 $\dfrac{4}{3}(a-3)^2=r^2$이다. ……②

①과 ②에서 $(a-3)^2=36$이므로 $a=9$이고 $r^2=48$이다.
이것을 그래프로 그려보면 다음과 같다.



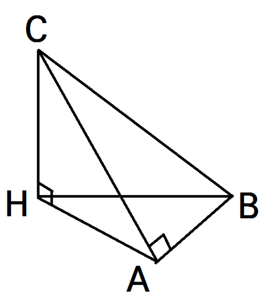
부채꼴은 중심각이 60이고 반지름의 길이가 $4\sqrt{3}$이므로

둘레의 길이는 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\pi$이다.

또한 $x=0$부터 $x=3$까지의 곡선의 길이는 공식을 활용하여
$\displaystyle\int_0^3\sqrt{1+x}\,dx=\frac{14}{3}$이다.

따라서, 둘을 합하면 $\dfrac{14+4\sqrt{3}\pi}{3}$이다.

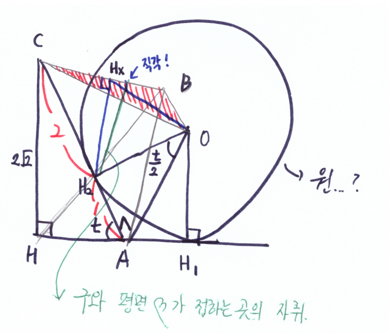
111.

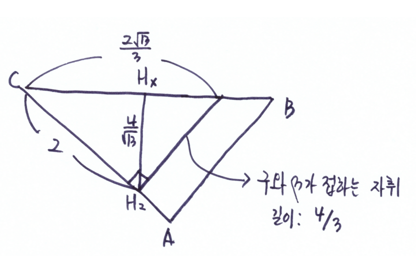


일단 이 상황에서 '이동가능한 요소'를 찾아보죠. 삼각형 ABC, 평면 α등은 모두 고정되어 있습니다. 하지만, 문제에 주어진 구는 두 평면에 접한 상태로 이동하게 됩니다. 그 구가 이동하면서 삼각형 OBC를 삼각형 ABC에 정사영한 넓이가 달라지게 되는 것 또한 알 수 있습니다.

삼각형 ABC를 포함하는 평면을 β라고 해보죠. 구가 α와 β에 동시에 접한 채로 이동합니다. 구와 평면 β의 접점의 자취는, 선분 AB와 평행하게 그어집니다. 이제 대략적인 전개는 잡혔습니다. 구도를 어떻게 잡고, 어떻게 도형을 그려내느냐, 그 문제만이 남았습니다.

대략적인 풀이의 형태는 아래와 같습니다. (그림만 보시면 상당히 모호할수도 있는데, 직접 하나하나 따라 그려가시면서 푸시면 훨씬 도움되실겁니다.)

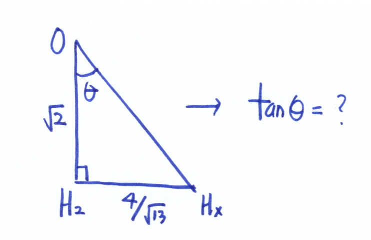




삼각형 CHA를 정면에 두고 그림을 다시 그리면 왼쪽 그림과 같은

구도가 됩니다. 그림에 표기된 것처럼 각 CAH를 t라고 했을 때, 각 H_2AH_1은 $\pi - t$가 되고, $AOH_1 = AOH_2 = \frac{t}{2}$가 된다는 사실을 알 수 있습니다. 이미 우리는 CA와 CH의 길이를 알고 있으므로, 이를 이용하여 각 CAH에 대한 삼각함수들을 이끌어낼 수 있습니다.

자연스럽게, 반각공식을 활용하면 각 $\frac{t}{2}$에 대한 삼각함수들도 이끌어 낼 수 있고, 이를 이용하여 H_2A의 길이가 1이라는 사실 또한 알아낼 수 있습니다. 그 뒤에는 이제 공간지각력의 문제입니다.



이제는, 삼각형 OBC와 삼각형 ABC의 이면각을 구해야합니다. 선분 BC에 수직이면서, 하나는 O를 지나고 하나는 H_2를 지나는 선분을 각각 작도합니다. 이 때 BC에 수직인 점을 H_x라고 정의합시다. 삼각형 ABC를 기준으로 떼어보면 아래와 같습니다. H_xH_2의 길이를 구하는 과정은 다들 알 것이라 생각합니다. (직각삼각형의 넓이는 빗변을 제외한 나머지 두 변의 곱이기도 하며, 빗변을 마주보는 한 점에서 빗변에 수직인 선분과 빗변의 곱이기도 하다는 사실을 이용합니다.)

H_xH_2는 $\frac{4}{\sqrt{13}}$입니다.

이제, 이면각을 구해야 할 차례입니다. 삼각형 OH_2H_x를 기준으로 새로운 그림을 그려봅시다.

왼쪽에 그려진 그림과 같이, 각 H_2는 직각이며, 각 변의 길이가 사실상 모두 나온 상태입니다. 이제 여기서 $\tan\theta$를 구하셔서, 문제에서 묻는 식에 대입하면 답이 도출됩니다.

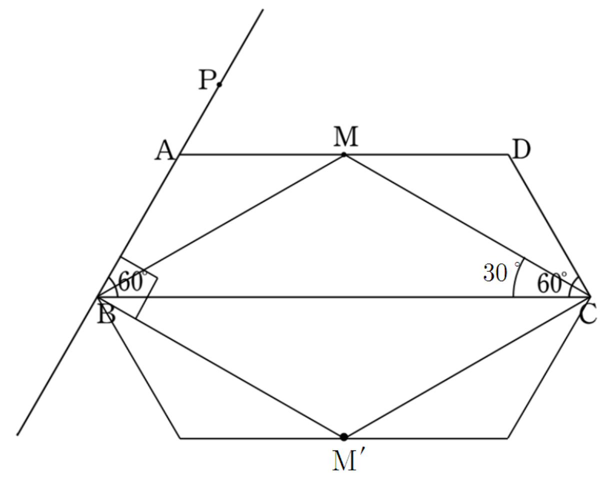
이 문제의 답은 65입니다.

112. 일단, AC와 BD를 작도했을 때, 두 선분이 직교한다는 사실을 이끌어내어야 합니다. 이는 각 AOD를 θ라 하고, 각 BOD를 $\pi - \theta$라고 두었을 때, 원주각의 성질에 의하여 각 ABD와 CAB를 도출된다는 사실을 이용하여 구할 수 있습니다. (AC와 BD의 교점부분이 직각인 직각삼각형이 작도가 될 것입니다.)
$|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}| = 8$이고, 각각이 직각을 이루니 AC와 BD의 길이는 $4\sqrt{2}$가 됩니다. 그리고 임의의 사각형에 대하여 두 대각선이 직각이므로 넓이는 $\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times 4\sqrt{2} = 16$ 입니다.

113.
ㄱ. 점 A와 B를 지나는 직선에 수선의 발 H를 내리면 $\overline{CH} = 2\sqrt{3}$이므로 $|\overrightarrow{CP}|$의 최솟값은 $2\sqrt{3}$이다. (거짓)

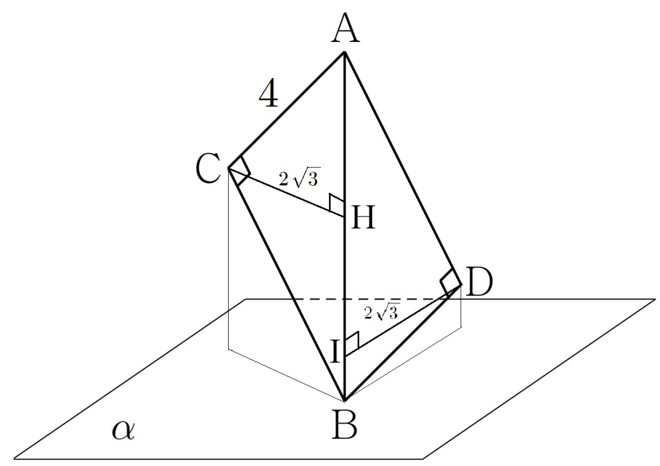
ㄴ. 점 M에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H′이라 할 때, $\overline{CH} = 3$; $\overline{MH} = \sqrt{3}$, $\overline{MC} = 2\sqrt{3}$이므로 $\angle BCM = 30^\circ$이다. 선분 CM과 선분 AB가 수직이므로 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CP}$의 값은 일정하다. (참)
(별해) 선분 AB와 CD를 연장해 큰 정삼각형을 그리면 점 M은 큰 정삼각형의 무게중심이면서 외심, 내심임을 알 수 있다. 꼭지점에서 내심에 그은 선분은 각을 이등분하므로 $\angle BCM = 30^\circ$가 성립한다.

ㄷ. 점 M을 선분 BC에 대해 대칭시킨 점을 M′이라 하자.



$\overrightarrow{M'C} = \overrightarrow{BM}$이므로 벡터 $\overrightarrow{BM}$의 종점 M을 점 C로 옮기면 $\overrightarrow{M'C}+\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{M'P}$이므로 $|\overrightarrow{M'P}|$의 최솟값을 구하면 된다.
$\angle CBM' = 30^\circ$이므로 선분 M′C와 선분 AB가 수직이고, $\overline{MC} = \overline{M'C} = 2\sqrt{3}$이므로 $|\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CP}|$의 최솟값은 $2\sqrt{3}$이다. (참)

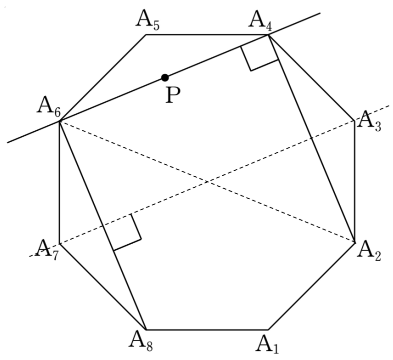
114. 점 C와 점 D를 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 C′, D′이라 하자. $\overline{BC'} = \overline{BD'}$이다. (삼각형 ABC와 삼각형 ABD가 합동이므로)
따라서 $\angle B'CD' = 90$이고, $\overline{BC'} = \overline{BD'} = 2\sqrt{3}$이다.
그림에 따르면, 직각삼각형들끼리 전부 닮음이므로, $\overline{AH} = \overline{BI} = 2$이다.
$\overline{HI} = 4$이므로 $\overline{CD}^2 = (2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 + 4^2 = 40$이다.



115. 점 A가 x축 위에 있으므로, A의 좌표는 $(-\sqrt{10},\ 0,\ 0)$이다. 따라서 선분 OA의 길이는 $\sqrt{10}$이다. 점 O에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하면, $\overline{AP}:\overline{AQ} = 5:3$이므로 $\overline{AH}:\overline{AQ} = 1:4$이다. $\overline{AH} = k$라 하면, $\overline{HQ} = 4k$이다. 따라서 $\overline{OH}^2 = 5^2 - (4k)^2 = (\sqrt{10})^2 - k^2$이다.
따라서 $15k^2 = 15$이므로 $k = 1$이다. $\overline{PQ} = 8$임을 알 수 있다. 삼각형 PQR은 직각삼각형이므로, 선분 PR의 길이는 6임을 알 수 있다. (선분 RQ는 지름이므로) 따라서 삼각형 PQR의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 6\times 8 = 24$이다.

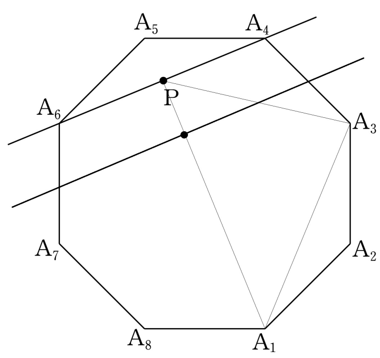
116. ㄱ. 전개도를 접었을 때, 선분 AB의 길이는 $3\sqrt{2}$이고, 선분 BQ의 길이는 $\sqrt{6}$, 선분 AQ의 길이는 $2\sqrt{3}$이다. 삼각형 ABQ가 피타고라스의 정리가 성립하므로, 수직이다.
ㄴ. $\overline{BQ} = \overline{PQ} = \sqrt{6}$이고 선분 $BP = 2\sqrt{3}$이다. 직각삼각형이므로 넓이는 3이다.
ㄷ. 선분 AP와 선분 PQ가 수직이고, 선분 PQ와 선분 BQ가 수직이므로, 두 평면 APQ와 BPQ가 이루는 각의 크기는 선분 BQ와 선분 AP가 이루는 각의 크기이다. 평행이동해보면 참임을 알 수 있다.

117. ㄱ. 삼각형 $A_2A_4A_6$이 $\overline{A_2A_4}=\overline{A_4A_6}=4$인 직각이등변삼각형이므로. $\overline{A_2A_4}=2\sqrt{2}$이다. 그러므로 $|\overrightarrow{A_2P}|$의 최솟값은 $2\sqrt{2}$이다. (참)



ㄴ. 선분 A_1A_5와 선분 A_4A_6이 서로 수직이므로 $\overrightarrow{A_1P}\cdot\overrightarrow{A_1A_5}$의 값은 일정하다. (참)

ㄷ. $|\overrightarrow{A_1P}+\overrightarrow{A_7A_5}|=|\overrightarrow{A_1P}+\overrightarrow{A_1A_3}|$이다. 두 벡터의 합은 점 A_3와 점 P의 중점을 지난다. 그 중점의 자취는 다음과 같다.



즉, 점 P를 지나는 직선과 평행하면서, 점 A_3와 점 P의 중점을 지나도록 하는 직선이다. 따라서 최소가 되려면, 직선 A_1A_5 위에 두 벡터의 합의 종점이 놓이는 경우이다.
따라서 점 P가 아닌 바로 아래쪽에 점찍은 부분을 점 Q라 하면, $|\overrightarrow{A_1P}+\overrightarrow{A_7A_5}|$의 최솟값은

$2|\overrightarrow{A_1Q}|=|\overrightarrow{A_1A_5}|+\frac{1}{2}|\overrightarrow{A_2A_4}|=4+\sqrt{2}$이다. (참)

118. 일단 점 P와 점 Q의 위치관계부터 구하도록 하자. 반지름이 1인 구 위의 점 P, Q에 대하여 $\overline{AP}=\overline{AQ}$이고, $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}|=\sqrt{10}$, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=2$이므로, $|\overrightarrow{AP}|^2+2\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}+|\overrightarrow{AQ}|^2=10$, $\overline{AP}=\overline{AQ}$이므로 $\overline{AP}=\overline{AQ}=\sqrt{3}$, $\overline{PQ}=\sqrt{2}$가 성립한다.

$\overline{AP}\perp\overline{BP}$이므로 $\overline{BP}=1$, $\overline{PH}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. $\overline{PH}=\overline{QH}$이고 $\angle AHP=\angle AHQ=90^\circ$이므로 세 점 P, Q, H를 포함하는 평면은 선분 AH과 수직이다. 따라서 선분 AH을 포함하는 xy평면과도 수직이다.

$\overline{PQ}=\sqrt{2}$이므로, 점 H에서 선분 PQ에 내린 수선의 발 H_1에 대하여 $\overline{HH_1}=\frac{1}{2}$이다. 평면 PQH가 xy평면과 수직이므로 선분 PQ가 xy평면과 만나는 점 R은 평면 PQH를 포함하는 평면과 xy평면이 만나는 직선 위에 있고, 따라서 선분 PQ와 xy평면이 이루는 각 θ는 $\angle H_1HR$과 같다.

따라서 $\overline{HR}=\frac{3}{2}$이고 $\overline{BH}=\frac{1}{2}$이므로 $k=\frac{3}{8}$이다.

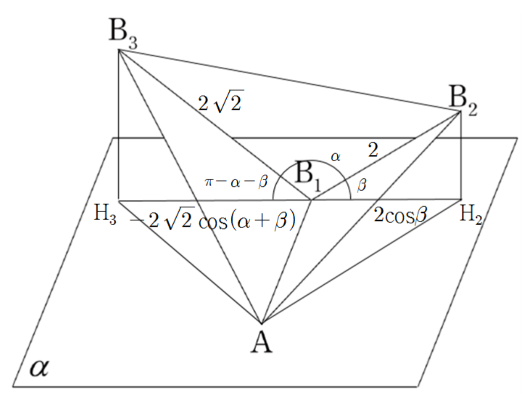
119. 일단 문제의 상황을 이해하기 위해서는 점 P의 좌표를 구해야 한다. 평면 OAP의 법선벡터를 $(1, p, q)$로 놓으면, $\overrightarrow{OA}=(4, 1, -1)$과 평면 α의 법선벡터 $(2, -1, 7)$이 전부 평면 OAP의 법선벡터와 수직이므로, $p=-5$, $q=1$이 성립한다. 점 P는 구 위에 있고, xz평면 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(a, 0, b)$로 놓을 수 있고, $a^2+b^2=18$이 성립한다. 점 P는 평면 $x-5y-z=0$ 위의 점이므로 $a=3$, $b=3$ 또는 $a=-3$, $b=-3$이다.

사면체 OAPQ의 높이를 구하기 위해 점 P와 평면 α와의 거리를 구하면, 평면 OAP와 평면 α는 수직이므로 점 P의 평면 α 위로의 수선의 발 H는 직선 OA 위에 있고, $a=3$, $b=3$일 때와 $a=-3$, $b=-3$일 때 평면 α와의 거리는 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$으로 동일하다. 사면체 OAPQ의 높이는 일정하므로, 밑면 OAQ의 넓이가 최대일 때 사면체 OAPQ의 부피는 최대가 된다.

선분 OA와 선분 OQ가 수직일 때 삼각형 OAB의 넓이가 최대가 된다. 선분 OA와 선분 OQ가 수직이고, 점 P의 평면 α 위로의 수선의 발 H가 직선 OA 위에 있으므로, 삼수선의 정리에 의해 선분 OP와 선분 OQ는 수직이다. 따라서 평면 OPQ와 평면 α가 이루는 각도의 크기는 $\angle POH$의 각도의 크기와 같다. 점 P와 평면 α와의 거리가 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$이므로, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos^2\theta=\frac{1}{4}$이 성립한다.

그리고 사면체 OAPQ의 부피의 최댓값 M은 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times3\times\frac{3\sqrt{6}}{2}=\frac{9\sqrt{6}}{4}$이므로, $\frac{M^2}{\cos^2\theta}=486$이 성립한다.

120.



공통) 문제의 조건에 의하여 $\overline{AB_1}=2$, $\overline{AB_2}=2\sqrt{2}$이고 $\angle AB_1B_2=90^\circ$이기 때문에 삼각형 AB_1B_2는 빗변이 아닌 변들의 길이가 2인 직각이등변삼각형이 된다.
문제의 조건에 의하여 $\overline{AB_3}=2\sqrt{3}$이고, B_3에서 평면 AB_1B_2에 내린 정사영이 선분 B_1B_2의 중점 M_1이다. $\overline{AM}=\sqrt{5}$이고 선분 B_3M_1과 평면 AB_1B_2는 수직이기 때문에 $\overline{B_3M_1}=\sqrt{7}$이다.
선분 B_3M_1과 평면 AB_1B_2는 수직이고, 선분 AB_1과 선분 B_1B_2가 수직이므로 삼수선의 정리에 의하여 선분 B_1B_3는 선분 AB_1과 수직이다. 때문에 평면 AB_1B_2와 평면 AB_1B_3가 이루는 각이 α일 때, 이면각의 정의에 의하여 $\angle B_3B_1B_2=\alpha$가 성립한다.
선분 B_3M_1과 평면 AB_1B_2는 수직이기 때문에 선분 B_3M_1과 선분 B_1B_2가 수직이고, 따라서 삼각형 $B_1B_3M_1$은 직각삼각형이다.

$\angle B_3B_1B_2=\angle B_3B_1M_1=\alpha$이므로, $\cos\alpha=\frac{\overline{B_1M_1}}{\overline{B_1B_3}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$이다.

정답 및 해설

풀이 1) 정사영 이용

문제의 조건은 문제 해결에 정사영을 사용할 것을 암시하고 있다.

정사영을 이용하기 위해, 삼각형 AB_2B_3를 평면 α 위로 정사영 해보자.
점 A는 평면 α 위의 점이므로 정사영할 필요가 없고, 점 B_2의 평면 α 위로의 정사영을 H_2, 점 B_3의 평면 α 위로의 정사영을 H_3라 하자.
그러면 삼각형 AB_2B_3의 평면 α 위로의 정사영은 AH_2H_3이다.

그러면 삼각형 AB_2B_3의 넓이와 삼각형 AH_2H_3의 넓이의 최댓값을 구하면, 정사영의 정의($\frac{S'}{S}=\cos\theta$)에 의하여 삼각형의 넓이가 최대일 때 평면 AB_2B_3와 평면 α가 이루는 이면각의 크기도 구할 수 있을 것이다.

일단 삼각형 AB_2B_3의 넓이를 구하자. 일단 $\overline{AB_2}=2\sqrt{2}$, $\overline{AB_3}=2\sqrt{3}$이고, 선분 B_3M과 선분 B_1B_2가 수직이기 때문에 삼각형 B_2B_3M은 직각삼각형이다. $\overline{B_2M}=1$, $\overline{B_3M}=\sqrt{7}$이므로 $\overline{B_2B_3}=2\sqrt{2}$이다. 따라서 삼각형 AB_2B_3이 이등변삼각형이므로, 점 B_2에서 선분 AB_3에 내린 수선의 발은 선분 AB_3의 중점 M_2이고, 선분 AM_2는 삼각형 AB_2B_3의 높이가 된다.
$\overline{AB_2}=2\sqrt{2}$, $\overline{AM_2}=\sqrt{5}$이므로, 삼각형 AB_2B_3의 넓이는
$\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{15}$가 된다.

삼각형 AH_2H_3의 넓이를 살펴보자. 일단 평면 $B_1B_2B_3$의 두 선분 B_1B_3와 B_1B_2가 선분 AB_1과 수직이므로, 선분 AB_1은 평면 $B_1B_2B_3$와 수직이다. 때문에 선분 AB_1을 포함하는 평면 α는 평면 $B_1B_2B_3$와 수직이다.

(부연설명: 평면 α와 평면 $B_1B_2B_3$의 교선 l에 대하여 교선 l은 평면 $B_1B_2B_3$ 위의 선분이므로 선분 AB_1과 수직이다. 평면 $B_1B_2B_3$ 위에서 B_1을 지나고 교선 l과 수직인 직선 m을 그을 수 있고, 직선 m은 평면 $B_1B_2B_3$ 위에 있기 때문에 선분 AB_1과 수직이다. 직선 m과 선분 AB_1이 각각 교선 l과 수직이고, 직선 m과 선분 AB_1이 수직이기 때문에 이면각의 정의에 의하여 평면 α와 평면 $B_1B_2B_3$는 수직이다.)

$\overline{AB_1}=2$이고, 선분 AB_1과 평면 $B_1B_2B_3$는 수직이기 때문에 평면 $B_1B_2B_3$ 위의 선분인 H_2H_3은 선분 AB_1과 수직이다. 때문에 삼각형 AH_2H_3의 높이는 $\overline{AB_1}$이고, 밑변의 길이는 $\overline{H_2H_3}$이다.

그런데 평면 α와 평면 $B_1B_2B_3$는 수직이기 때문에, 점 B_2에서 평면 α 위에 내린 정사영 H_2, 점 B_3에서 평면 α 위에 내린 정사영 H_3에 대하여 점 B_1, B_2, B_3, H_2, H_3은 한 평면 위에 있다. 따라서 선분 B_1B_2와 선분 B_1H_2가 이루는 각을 β라 할 때, 선분 B_1B_3와 선분 B_1H_3가 이루는 각은 $(\pi-\alpha-\beta)$가 된다.

(부연설명 2: 점 B_2와 H_2, 평면 α와 평면 $B_1B_2B_3$의 교선 l에 대하여 이면각의 정의와 삼수선의 정리를 적용하면, 점 H_2가 교선 l 위에 있고, 동시에 평면 $B_1B_2B_3$ 위에 있음을 알 수 있다. 점 H_3 역시 같은 방법으로 평면 $B_1B_2B_3$ 위에 있음을 보일 수 있다.)

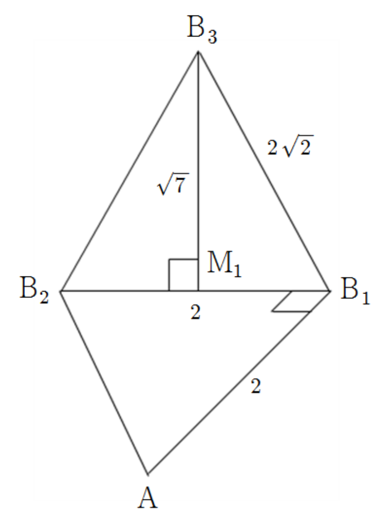
그러면 각각의 값들을 계산하여 풀이를 마무리하자.
$\overline{B_1B_2}=2$이므로 $\overline{B_1H_2}=2\cos\beta$, $\overline{B_1B_3}=2\sqrt{2}$이므로
$\overline{B_1H_3}=2\sqrt{2}\cos(\pi-\alpha-\beta)=-2\sqrt{2}\cos(\alpha+\beta)$이다.

앞에서 $\cos\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$임을 보였기 때문에
$\overline{B_1H_3}=\sqrt{7}\sin\beta-\cos\alpha$이다.
따라서
$\overline{H_2H_3}=\overline{H_2A}+\overline{AH_3}=2\cos\beta+(\sqrt{7}\sin\beta-\cos\beta)=\cos\beta+\sqrt{7}\sin\beta$가 성립한다.

따라서 삼각형 AH_2H_3의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\times(\cos\beta+\sqrt{7}\sin\beta)$이므로, 이 식을 미분하여 계산하면 삼각형 AH_2H_3의 넓이의 최댓값은 $2\sqrt{2}$임을 알 수 있다.

AB_2B_3의 넓이가 $\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{15}$, 삼각형 AH_2H_3의 넓이의 최댓값은 $2\sqrt{2}$이므로, 평면 AB_1B_3와 평면 α가 이루는 각도의 크기 θ에 대하여
$\cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$, $60\cos^2\theta=60\times\frac{8}{15}=32$가 성립한다.

풀이 2) 좌표도입 이용



(이전의 과정은 맨 위의 공통 풀이 참고)

평면 AB_2B_3의 평면 α 위로의 정사영의 넓이가 최대일 때, 삼각형 AB_2B_3의 넓이는 일정하기 때문에 정사영의 정의에서 $\cos\theta=\frac{S'}{S}$의 값이 가장 커지게 된다. 따라서 우리는 $\cos\theta$의 최댓값이 문제의 정답이 됨을 알 수 있다.

법선벡터를 구하기 위해 직교좌표를 도입하도록 하자. 문제의 그림에서 A, B_1, B_2, B_3을 따로 그려 나타내면 다음과 같다. 선분 AB_1, 선분 B_1B_2, 선분 M_1B_3이 서로 수직이므로 선분 A_1B_1을 x축, 점 A를 지나고 선분 B_1B_2와 평행한 직선을 y축, 점 A를 지나고 선분 M_1B_3과 평행한 선분을 z축으로 놓으면 점 A, B_2, B_3의 좌표를 각각 $(0,0,0)$, $(2,2,0)$, $(2,1,\sqrt{7})$로 놓을 수 있다.

따라서 A, B_2, B_3을 지나는 평면의 방정식은 $\sqrt{7}x-\sqrt{7}y-z=0$이 된다. 선분 AB_1을 포함하는 방정식의 법선벡터 (a,b,c)는 선분 AB_1의 벡터인 $(2,0,0)$과 수직이므로 $(0,b,c)$로 놓을 수 있다.

두 벡터를 내적하면 $\sqrt{15}\sqrt{b^2+c^2}\cos\theta=-\sqrt{7}b-c$가 된다. 법선벡터의 길이는 두 벡터가 이루는 각에 영향을 미치지 않으므로 편의상 $b^2+c^2=1$로 가정하면, $\cos\theta=\dfrac{-\sqrt{7}b-c}{\sqrt{15}}$가 된다. $\cos\theta$의 최댓값을 구하는 것이 문제의 목표이고, $\sqrt{7}b+c$가 최솟값을 가질 때 $\cos\theta$가 최대가 되므로 $\sqrt{7}b+c$의 최솟값을 구하도록 하자.

$\sqrt{7}b+c=k$일 때 k의 최솟값을 구하기 위해, 이 식을 $b^2+c^2=1$에 대입한다. 식을 c에 대해 정리했을 때 이 식을 만족시키는 c의 값이 존재하기 위해서는 $D\geq 0$이어야 한다. 판별식에 넣고 식을 정리했을 때 $-2\sqrt{2}\leq k\leq 2\sqrt{2}$이므로 $\sqrt{7}b+c$의 최솟값은 $-2\sqrt{2}$이다.

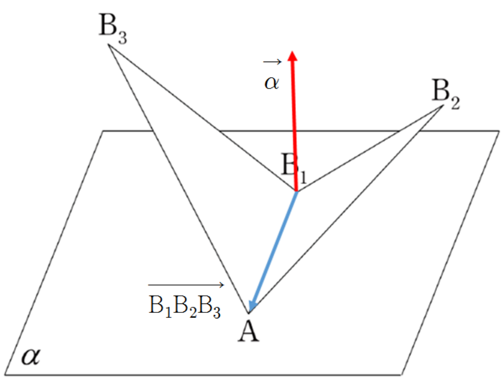
(부연설명 3: 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 k의 최솟값을 구할 수도 있다.)

따라서 $\cos\theta$의 최댓값은 $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$, $60\cos^2\theta=60\times\dfrac{8}{15}=32$가 성립한다.

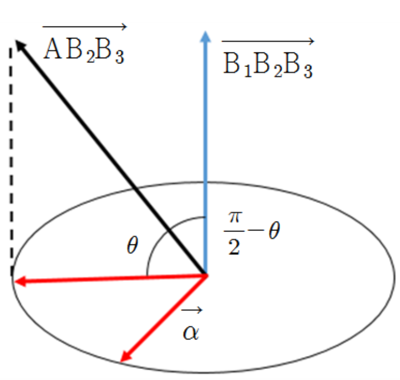
풀이 3) 법선벡터의 회전 이용
(이전의 과정은 맨 위의 공통 풀이 참고)

$0\leq\theta\leq\pi$에서 $\cos\theta$의 값이 커질수록 θ의 값은 작아지므로, 정사영의 넓이의 최댓값을 구하는 것은 두 평면이 이루는 각도의 최솟값을 구하는 것과 동일하다. 따라서 우리는 평면 AB_2B_3와 평면 α의 법선벡터가 이루는 각도의 최솟값을 구하는 방향으로 문제를 풀 수 있을 것이다.

다만 우리는 평면 α와 평면 AB_2B_3의 법선벡터의 관계를 직접 구하기는 어렵다. 그렇지만 평면 α와 평면 $B_1B_2B_3$, 평면 $B_1B_2B_3$와 평면 AB_2B_3의 법선벡터의 관계를 각각 구하는 것은 어렵지 않다. 그러므로 일단 평면 α의 법선벡터를 구하기 전에 각각의 평면들의 관계를 살펴보자. 일단 평면 $B_1B_2B_3$의 두 선분 B_1B_3와 B_1B_2가 선분 AB_1과 수직이므로, 선분 AB_1은 평면 $B_1B_2B_3$와 수직이다.



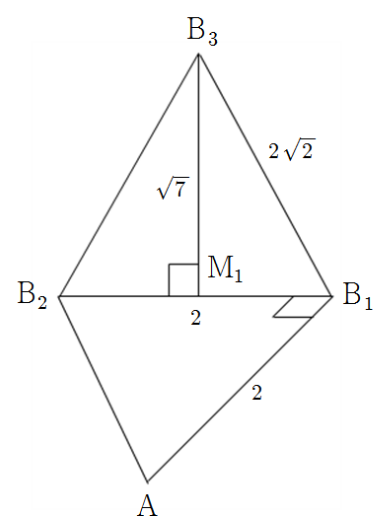
따라서 평면 α의 법선벡터는 선분 AB_1과 수직이고, 평면 $B_1B_2B_3$는 선분 AB_1과 수직이기 때문에 선분 AB_1은 평면 $B_1B_2B_3$의 법선벡터가 되고, 그 관계는 다음 그림과 같이 나타낼 수 있다. 따라서 평면 α와 평면 $B_1B_2B_3$의 법선벡터는 서로 수직이다.



평면 α와 평면 $B_1B_2B_3$의 법선벡터가 수직인 상태에서 평면 α의 법선벡터가 $B_1B_2B_3$와 수직인 평면에 포함되는 원 위를 회전하고 있고, 평면 $B_1B_2B_3$와 평면 AB_2B_3의 법선벡터가 이루는 각은 일정하다. 때문에 각각의 법선벡터가 이루는 관계는 다음 그림과 같이 나타낼 수 있다.

평면 AB_2B_3와 평면 α의 법선벡터가 이루는 각도가 최소가 될 때는 평면 α의 법선벡터의 종점과 평면 AB_2B_3의 법선벡터의 종점과의 거리가 최소가 될 때이므로, 평면 α의 법선벡터가 AB_2B_3의 법선벡터의 원 위로의 정사영을 지날 때 두 벡터가 이루는 각이 최소가 된다. (이에 대한 자세한 내용은 포카칩의 <공간도형과 회전>을 참고하기 바람.)

이 때 α의 법선벡터, $B_1B_2B_3$의 법선벡터, AB_2B_3의 법선벡터는 한 평면 위에 있고, 평면 α와 평면 $B_1B_2B_3$의 법선벡터가 수직이므로 평면 α와 평면 AB_2B_3의 법선벡터가 이루는 각 θ에 대하여 평면 $B_1B_2B_3$와 평면 AB_2B_3의 법선벡터가 이루는 각은 $\dfrac{\pi}{2}-\theta$가 된다.



법선벡터가 이루는 각과 평면이 이루는 각은 서로 같기 때문에, 평면 $B_1B_2B_3$와 평면 AB_2B_3가 이루는 각 역시 $\dfrac{\pi}{2}-\theta$이다. 그러므로 우리는 평면 $B_1B_2B_3$와 평면 AB_2B_3가 이루는 각도를 구해 θ의 값을 구할 수 있다.

일단 선분 AB_1과 평면 $B_1B_2B_3$는 서로 수직이므로, 점 A에서 평면 $B_1B_2B_3$에 내린 정사영은 점 B_1이다. 점 B_1에서 선분 B_2B_3에 내린 수선의 발 H를 구하면, 이면각의 정의에 의해 선분 AH와 선분 B_1H가 이루는 각이 두 평면이 이루는 이면각과 같음을 알 수 있다.

$\overline{B_2B_3}=2\sqrt{2}$이고 선분 B_1H는 삼각형 $B_1B_2B_3$의 높이이므로, 선분 B_1H의 길이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{B_1B_2}\times\overline{M_1B_3}=\dfrac{1}{2}\times\overline{B_2B_3}\times\overline{B_1H}$를 통해 구할 수 있다.

$\dfrac{1}{2}\times 2\times\sqrt{7}=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\overline{B_1H}$이므로, $\overline{B_1H}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{\overline{AB_1}}{\overline{HB_1}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$이므로, $\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$,

$60\cos^2\theta=60\times\dfrac{8}{15}=32$가 성립한다.