# • 수학 영역 •

## 수학 ‘가’형 정답

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ③ | 2 | ⑤ | 3 | ② | 4 | ④ | 5 | ④ |
| 6 | ⑤ | 7 | ① | 8 | ② | 9 | ② | 10 | ⑤ |
| 11 | ① | 12 | ③ | 13 | ② | 14 | ① | 15 | ② |
| 16 | ④ | 17 | ① | 18 | ③ | 19 | ⑤ | 20 | ③ |
| 21 | ④ | 22 | 3 | 23 | 20 | 24 | 60 | 25 | 27 |
| 26 | 6 | 27 | 8 | 28 | 24 | 29 | 528 | 30 | 90 |

## 해 설

**1. [출제의도] $\pi+\theta$꼴의 삼각함수의 값을 계산한다.**

$\sin\frac{7}{6}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

**2. [출제의도] 조합의 수를 계산한다.**

${}_6\mathrm{C}_3=\frac{6!}{3!3!}=\frac{6\times5\times4}{3!}=20$

**3. [출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 계산한다.**

$f'(x)=2xe^{x^2-1}$이므로 $f'(1)=2$

**4. [출제의도] 정적분의 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 계산한다.**

$\ln x=t$로 놓고 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$

$x=1$이면 $t=0$이고, $x=e^2$이면 $t=2$

따라서 $\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^3}{x}dx=\int_0^2 t^3dt=\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^2=4$

**5. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이해하고 역함수를 이용하여 지수함수의 밑을 구한다.**

곡선 $y=a^x$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 곡선은 $y=\log_a x$이고 이 곡선이 점 $(2,3)$을 지나므로

$x=2$, $y=3$을 대입하면 $3=\log_a 2$

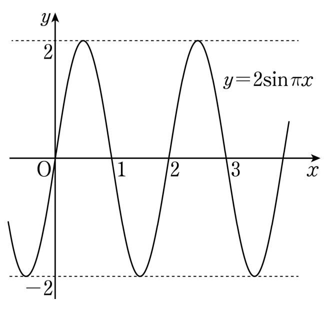
따라서 $a=\sqrt[3]{2}$

**[다른 풀이]**

직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 곡선은 $y=a^x$의 역함수의 그래프이므로 지수함수 $y=a^x$에 $x=3$, $y=2$를 대입하면 등식이 성립한다.

따라서 $2=a^3$에서 $a=\sqrt[3]{2}$

**6. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하고 미지수의 값을 구한다.**




함수 $y=a\sin\frac{\pi}{2b}x$의 그래프는 $y=\sin\frac{\pi}{2b}x$의 그래프를 $y$축의 방향으로 $a$배한 것이고 $a>0$이므로 최댓값은 $a$이고 최솟값은 $-a$이다.

그런데 함수 $y=a\sin\frac{\pi}{2b}x$의 최댓값이 2이므로 $a=2$

또한 $a\sin\frac{\pi}{2b}x=a\sin\left(\frac{\pi}{2b}x+2\pi\right)=a\sin\frac{\pi}{2b}(x+4b)$이므로

함수 $y=a\sin\frac{\pi}{2b}x$의 주기가 $4b$이다.

그러므로 $4b=2$, $b=\frac{1}{2}$

따라서 $a+b=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

**7. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이해하여 두 로그함수의 그래프가 만나는 점을 구한다.**

두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(2^n-x)$의 만나는 점의 $x$좌표는 $\log_2 x=\log_2(2^n-x)$에서 $x=2^n-x$

즉, $x=2^{n-1}$이므로 $a_n=2^{n-1}$

따라서 $\sum_{n=1}^{5}a_n=\sum_{n=1}^{5}2^{n-1}$

$=1+2+4+8+16=31$

**8. [출제의도] 변곡점을 이해하여 접선의 기울기를 구한다.**

$y=(\ln x)^2-x+1$에서

$y'=\frac{2\ln x}{x}-1$

$y''=\frac{2-2\ln x}{x^2}$

$2-2\ln x=0$에서 $x=e$이고

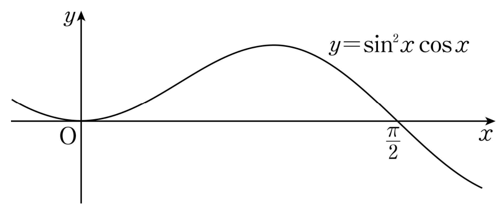
$x=e$의 좌우에서 $y''$의 부호가 바뀌므로

곡선 $y=(\ln x)^2-x+1$은 $x=e$에서 변곡점 $(e,2-e)$를 갖는다.

따라서 변곡점에서의 접선의 기울기는

$\frac{2\ln e}{e}-1=\frac{2}{e}-1$

**9. [출제의도] 정적분의 치환적분법을 이해하여 곡선과 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.**




$0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 $\sin^2x\cos x=0$의 해를 구하면

$x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$일 때 $\sin^2x\cos x\ge0$이므로 구하는 넓이는 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin^2x\cos x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cos x\,dx$

$\sin x=t$로 놓고 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\cos x=\frac{dt}{dx}$

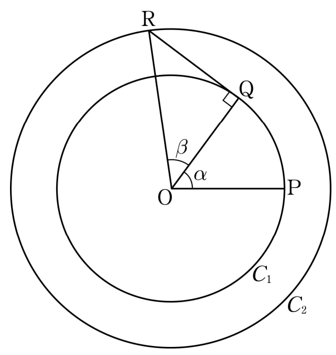
$x=0$이면 $t=0$이고, $x=\frac{\pi}{2}$이면 $t=1$

따라서 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cos x\,dx=\int_0^1 t^2dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1$

$=\frac{1}{3}$

**10. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이해하고 도형의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구한다.**




$\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$이고

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$

삼각형 ROQ에 대하여

$\overline{\mathrm{OR}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{OQ}}=1$, $\angle\mathrm{OQR}=\frac{\pi}{2}$이므로 $\beta=\frac{\pi}{4}$

그러므로 $\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=-\frac{\sqrt{2}}{10}$

**11. [출제의도] 로그함수의 그래프의 성질을 이해하여 선분의 길이를 구한다.**

$y=\log_a x$, $y=\log_b x$와 직선 $y=1$이 만나는 두 점의 $x$좌표를 각각 구하면

$\log_a x=1$에서 $x=a$, $\log_b x=1$에서 $x=b$

두 점 $\mathrm{A}_1$, $\mathrm{B}_1$의 좌표는 각각 $(a,1)$, $(b,1)$

$y=\log_a x$, $y=\log_b x$와 직선 $y=2$가 만나는 두 점의 $x$좌표를 각각 구하면

$\log_a x=2$에서 $x=a^2$, $\log_b x=2$에서 $x=b^2$

두 점 $\mathrm{A}_2$, $\mathrm{B}_2$의 좌표는 각각 $(a^2,2)$, $(b^2,2)$

$\overline{\mathrm{A_1B_1}}=1=b-a$

선분 $\mathrm{A_1B_1}$의 중점의 좌표가 $(2,1)$이므로

$\frac{a+b}{2}=2$, $a+b=4$

따라서 $\overline{\mathrm{A_2B_2}}=b^2-a^2=(b-a)(b+a)=1\times4=4$

**12. [출제의도] 조합의 성질을 이해하여 조건을 만족시키는 조합의 수를 구한다.**

(ⅰ) $a=5$일 때

$c<b<5$이므로 1부터 4까지의 자연수 중 2개를 뽑아 큰 수를 $b$, 작은 수를 $c$라 하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2=6$

(ⅱ) $a=6$일 때,

$c<b<6$이므로 1부터 5까지의 자연수 중 2개를 뽑아 큰 수를 $b$, 작은 수를 $c$라 하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_2=10$

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수의 개수는

$6+10=16$

**13. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 로그함수의 극한에 관한 문제를 해결한다.**

$\mathrm{A}(t,\ln t)$, $\mathrm{B}(t,-\ln t)$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=2\ln t$

선분 PQ의 길이가 $f(t)$이고 삼각형 AQB의 넓이가 1이므로 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{PQ}}=1$에서 $\frac{1}{2}\times2\ln t\times f(t)=1$

즉, $f(t)=\frac{1}{\ln t}$

$t-1=s$로 놓으면 $t=s+1$이고

$t\to1+$일 때 $s\to0+$

$\lim_{t\to1+}\{(t-1)f(t)\}=\lim_{t\to1+}\frac{t-1}{\ln t}$

$=\lim_{s\to0+}\frac{s}{\ln(s+1)}$

$=1$

**14. [출제의도] 극댓값과 극솟값의 정의를 이해하여 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구한다.**

$a=-1$일 때 구간 $[0,2)$에서 $f(x)=x+1$이므로

$x=0$에서 극댓값을 갖지 않는다.

이것은 모순이므로 $a\ne-1$

구간 $[0,2)$에서 $f(x)$가 극솟값을 갖도록 하는 $a$의 값의 범위를 구하면

$f(x)=\frac{(x-a)^2}{x+1}$에서 $f'(x)=\frac{(x-a)(x+2+a)}{(x+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=-a-2$

(ⅰ) $a<-a-2$일 때

$a<-a-2$에서 $a<-1$이고,

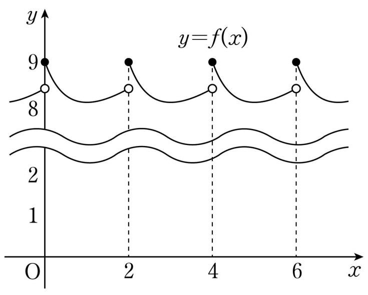
$x=-a-2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $x=-a-2$에서 $f(x)$는 극솟값을 갖는다. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지므로 구간 $(0,2)$에서 극솟값을 갖는다.
즉 $0<-a-2<2$, $-4<a<-2$
$a$는 정수이므로 $a=-3$

(ii) $a>-a-2$일 때
$a>-a-2$에서 $a>-1$이고,
$x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $x=a$에서 $f(x)$는 극솟값을 갖는다. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지므로 구간 $(0,2)$에서 극솟값을 갖는다.
즉 $0<a<2$
$a$는 정수이므로 $a=1$

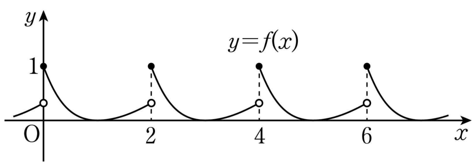
(i), (ii)에 의해서 조건을 만족하는 정수 $a$의 값은 $-3$ 또는 $1$
따라서 모든 정수 $a$의 값의 곱은 $(-3)\times1=-3$

**[보충 설명]**

(i) $a=-3$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 보면 다음과 같이 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.




(ii) $a=1$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 보면 다음과 같이 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.




**15. [출제의도] 순열의 성질과 원순열이 활용된 실생활 문제를 해결한다.**

여학생 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(3-1)!=2!$
각 경우에 대하여 여학생과 여학생 사이 세 곳에 앉는 남학생의 수는 모두 달라야 하므로 각각 1명, 2명, 3명이고 이를 정하는 경우의 수는 $3!$
남학생을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $6!$
그러므로 구하는 경우의 수는
$2!\times3!\times6!=12\times6!$
따라서 $n=12$

**[다른 풀이]**

여학생 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(3-1)!=2!$
각 경우에 대하여 여학생과 여학생 사이 세 곳에 앉는 남학생의 수는 모두 다르므로 남학생 6명이 3명, 2명, 1명의 세 조로 나뉘어 여학생과 여학생 사이에 앉아야 한다.
이와 같이 남학생을 세 조로 나누는 경우의 수는
${}_6C_3\times{}_3C_2\times{}_1C_1=\dfrac{6!}{3!2!}$
각 경우에 대하여 세 조를 여학생과 여학생 사이의 세 곳에 배열하는 경우의 수는 $3!$
각 경우에 대하여 남학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!\times2!\times1!$
이므로 구하는 경우의 수는
$2!\times\dfrac{6!}{3!2!}\times3!\times3!\times2!\times1!=12\times6!$
따라서 $n=12$

**16. [출제의도] 부분적분법을 이용하여 일반적인 함수의 정적분의 값을 추론한다.**

$\displaystyle\int_{-1}^{x}f(t)\,dt=F(x)$이므로 $F'(x)=f(x)$, $F(-1)=0$

$\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,dx=\int_0^{-1}xf(x)\,dx$이므로

$\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,dx-\int_0^{-1}xf(x)\,dx=0$

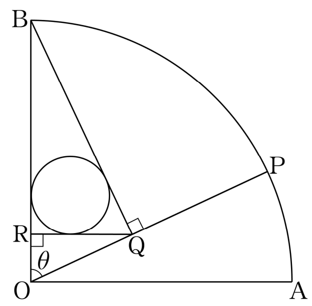
$\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,dx+\int_{-1}^{0}xf(x)\,dx=0$

$\displaystyle\int_{-1}^1 xf(x)\,dx=0$

정적분의 부분적분법에 의하여,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 F(x)\,dx&=\Big[xF(x)\Big]_{-1}^{1}-\int_{-1}^1 xf(x)\,dx\\&=F(1)+F(-1)-0\\&=F(1)+0\\&=\int_{-1}^1 f(x)\,dx=12\end{aligned}$$

**17. [출제의도] 도형의 성질과 삼각함수의 극한을 이용하여 문제를 해결한다.**




$\angle\mathrm{BOQ}=\theta$, $\overline{\mathrm{OB}}=1$이고 $\angle\mathrm{OQB}=\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{BQ}}=\sin\theta$

또, $\angle\mathrm{RQB}=\dfrac{\pi}{2}-\angle\mathrm{QBR}=\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\theta$,

$\overline{\mathrm{BQ}}=\sin\theta$이고 $\angle\mathrm{BRQ}=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{BR}}=\sin^2\theta$, $\overline{\mathrm{RQ}}=\sin\theta\cos\theta$

삼각형 BRQ의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BR}}\times\overline{\mathrm{RQ}}=\dfrac{1}{2}\times\sin^2\theta\times\sin\theta\cos\theta$ …… ㉠

삼각형 BRQ에 내접하는 원의 성질을 이용하여 삼각형의 넓이를 구하면

$\dfrac{1}{2}\times r(\theta)\times(\sin\theta+\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta)$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해서

$r(\theta)=\dfrac{\sin^2\theta\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$

따라서

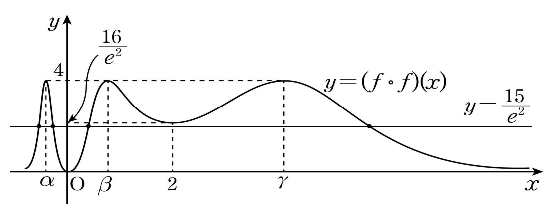
$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)}{\theta^2}&=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{\theta^2(1+\sin\theta+\cos\theta)}\\&=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}\\&=1\times\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

**18. [출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 그래프와 직선이 만나는 점의 개수를 추론한다.**

$f(x)=x^2e^{-x+2}$에서
$f'(x)=(-x^2+2x)e^{-x+2}$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$
$y=(f\circ f)(x)$에서 $\dfrac{dy}{dx}=f'(f(x))f'(x)$
$\dfrac{dy}{dx}=0$인 $x$의 값을 구하면
(i) $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$
(ii) $f'(f(x))=0$에서
$f(x)=0$일 때, $x=0$
$f(x)=2$일 때,
$x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ 또는 $x=\gamma$ $(\alpha<\beta<\gamma)$로 놓으면 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 증가와 감소를 나타낸 표는 다음과 같다.

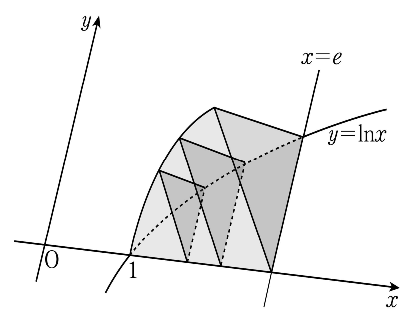
| $x$ | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\beta$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ | $\gamma$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f'(f(x))$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\dfrac{dy}{dx}$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $\dfrac{16}{e^2}$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ |

위의 표를 이용하여 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프를 나타내면 다음과 같다.




따라서 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{15}{e^2}$가 만나는 점의 개수는 4이다.

**19. [출제의도] 정적분을 활용하여 입체도형의 부피 구하는 문제를 해결한다.**




$y=e^x$의 역함수는 $y=\ln x$이므로
점 $(0,1)$은 점 $(1,0)$으로, 점 $(0,e)$는 점 $(e,0)$으로 이동한다.
그런데 $x=t\,(1\le t\le e)$일 때 정삼각형의 한 변의 길이는 $\ln t$이므로 정삼각형의 넓이를 $S(t)$라 하면
$S(t)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(\ln t)^2$
따라서 구하는 부피는

$$\begin{aligned}\int_1^e S(t)\,dt&=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^e(\ln t)^2dt\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\Big[t(\ln t)^2\Big]_1^e-\int_1^e t\left(2\times\frac{1}{t}\times\ln t\right)dt\right\}\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\Big[t(\ln t)^2\Big]_1^e-2\int_1^e\ln t\,dt\right\}\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\Big[t(\ln t)^2\Big]_1^e-2\Big[t\ln t-t\Big]_1^e\right\}\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}(e-2)\end{aligned}$$

**[다른 풀이]**

$\displaystyle\int\ln x\,dx=x\ln x-x+C$ (단, $C$는 적분상수)이므로

$$\begin{aligned}\int_1^e S(t)\,dt&=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^e(\ln t)^2dt\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\Big[\ln t\,(t\ln t-t)\Big]_1^e-\int_1^e(\ln t-1)\,dt\right\}\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\Big[\ln t\,(t\ln t-t)\Big]_1^e-\Big[t\ln t-2t\Big]_1^e\right\}\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}(e-2)\end{aligned}$$

**[다른 풀이]**

함수 $f(x)=e^x$의 역함수를 $f^{-1}(x)$라 하고, 입체도형의 부피를 $V$라 하면

$V=\displaystyle\int_1^e\frac{\sqrt{3}}{4}\{f^{-1}(y)\}^2dy$

이다. $y=f(x)$에서 $f^{-1}(y)=x$이고 $y=f(x)$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면 $\dfrac{dy}{dx}=f'(x)=e^x$이므로

$V=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\displaystyle\int_0^1 x^2f'(x)\,dx$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^1 x^2 e^x dx$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\left[x^2 e^x\right]_0^1 - 2\int_0^1 x e^x dx\right\}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\left[x^2 e^x\right]_0^1 - 2\left(\left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\, dx\right)\right\}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\left[x^2 e^x\right]_0^1 - 2\left(\left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1\right)\right\}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(e-2)$$

**20. [출제의도] 중복조합에 관한 증명 문제를 해결한다.**

(i) $k=0$일 때

둘째 줄에 있는 $n$개의 타일 중에서 검은색으로 칠할 타일 3개를 고르는 경우의 수는 다음과 같다.

검은색으로 칠할 타일 사이에는 검은색으로 칠하지 않을 타일이 각각 1개 이상씩 있어야 한다.

즉, 검은색으로 칠하지 않을 타일이 있을 수 있는 곳은 많아야 4곳이므로 타일의 개수를 결정하는 경우의 수는 $\boxed{{}_4\mathrm{H}_{n-5}}$이다.

(ii) $k=1$일 때

둘째 줄에 있는 $n$개의 타일 중에서 검은색으로 칠할 타일 2개를 고르는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_{n-3}$이다.

첫째 줄에서 검은색으로 칠할 타일 1개를 고르는 경우의 수는 둘째 줄에서 검은색으로 칠할 타일의 바로 위쪽에 있는 타일을 제외한 나머지 $n-2$개의 타일 중 1개의 타일을 고르는 경우의 수와 같으므로 $\boxed{{}_{n-2}\mathrm{C}_1}$이다. 그러므로 검은색으로 칠할 타일 3개를 고르는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_{n-3}\times\boxed{{}_{n-2}\mathrm{C}_1}$이다.

(가)에 알맞은 식은 ${}_4\mathrm{H}_{n-5}$이므로 $f(n)={}_4\mathrm{H}_{n-5}$

(나)에 알맞은 식은 ${}_{n-2}\mathrm{C}_1$이므로 $g(n)={}_{n-2}\mathrm{C}_1$

따라서 $f(10)+g(8)={}_4\mathrm{H}_5\times{}_6\mathrm{C}_1=56+6=62$

**21. [출제의도] 정적분의 적분법을 이용하여 정적분의 값을 추론한다.**

ㄱ. (가)의 $F(x)=f(x)-x$를 (나)의 $F(x)$에 대입하면

$$\int_0^1 F(x)\,dx = \int_0^1 \{f(x)-x\}\,dx$$
$$= \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 x\,dx$$
$$= \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{2}$$
$$= F(1) - \frac{1}{2}$$

이므로 $F(1)=e-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=e-2$ (거짓)

ㄴ. (가)의 $F(x)=f(x)-x$를 $\int_0^1 xF(x)dx$의 $F(x)$에 대입하면

$$\int_0^1 xF(x)dx = \int_0^1 x\{f(x)-x\}\,dx$$
$$= \int_0^1 \{xf(x)-x^2\}\,dx$$
$$= \int_0^1 xf(x)\,dx - \int_0^1 x^2\,dx$$
$$= \left[xF(x)\right]_0^1 - \int_0^1 F(x)\,dx - \frac{1}{3}$$
$$= F(1) - \left(e-\frac{5}{2}\right) - \frac{1}{3}$$
$$= e-2-e+\frac{5}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6} \text{ (참)}$$

ㄷ. $F(0)=\int_0^0 f(t)\,dt=0$이고, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면 $F'(x)=f(x)$

(가)에 의해서

$$\int_0^1 \{F(x)\}^2\,dx = \int_0^1 F(x)\{f(x)-x\}\,dx$$
$$= \int_0^1 F(x)f(x)\,dx - \int_0^1 xF(x)\,dx$$
$$= \int_0^1 F(x)F'(x)\,dx - \int_0^1 xF(x)\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}\{F(x)\}^2\right]_0^1 - \frac{1}{6}$$
$$= \frac{1}{2}\{F(1)\}^2 - \frac{1}{2}\{F(0)\}^2 - \frac{1}{6}$$
$$= \frac{1}{2}(e-2)^2 - \frac{1}{6}$$
$$= \frac{1}{2}e^2 - 2e + \frac{11}{6} \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**[다른 풀이]**

$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

조건 (가)의 $F(x)=f(x)-x$의 양변을 $x$에 대하여 두 번 미분하면 $f'(x)=f''(x)$

$\frac{f''(x)}{f'(x)}=1$이므로 양변을 $x$에 대하여 적분하면

$\ln|f'(x)|=x+C_1$ (단, $C_1$는 적분상수)

$f'(x)=C_2e^x$ (단, $C_2$는 상수)이므로 양변을 $x$에 대하여 적분하면 $f(x)=C_2e^x+C_3$ (단, $C_3$은 적분상수)

$0=F(0)=f(0)-0,\ f(0)=0$

$f(x)=f'(x)-1$이므로 $f'(0)=1$

$f'(x)=C_2e^x,\ f(x)=C_2e^x+C_3$에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)=C_2=1,\ f(0)=C_2+C_3=0,\ C_3=-1$

$f(x)=e^x-1$

이를 조건 (가)에 대입하면

$F(x)=e^x-x-1$

$$\int_0^1 F(x)\,dx = \int_0^1 (e^x-x-1)\,dx$$
$$= \left[e^x - \frac{1}{2}x^2 - x\right]_0^1$$
$$= (e-1) - \frac{1}{2} - 1$$
$$= e - \frac{5}{2}$$

이므로 함수 $F(x)=e^x-x-1$은 조건 (나)를 만족시킨다.

ㄱ. $F(1)=e^1-1-1=e-2$ (거짓)

ㄴ. $\int_0^1 xF(x)\,dx = \int_0^1 x(e^x-x-1)\,dx$

$$= \int_0^1 xe^x\,dx - \int_0^1 x^2\,dx - \int_0^1 x\,dx$$
$$= \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx - \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$= \left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 - \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$= e-(e-1)-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6} \text{ (참)}$$

ㄷ. $\int_0^1 \{F(x)\}^2\,dx = \int_0^1 (e^x-x-1)^2\,dx$

$$= \int_0^1 \{e^{2x}+x^2+1-2xe^x+2x-2e^x\}\,dx$$
$$= \int_0^1 e^{2x}\,dx + \int_0^1 x^2\,dx + \int_0^1 1\,dx$$
$$-2\int_0^1 xe^x\,dx + \int_0^1 2x\,dx - 2\int_0^1 e^x\,dx$$
$$= \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[x\right]_0^1$$
$$-2\left[xe^x\right]_0^1 + 2\left[e^x\right]_0^1 + \left[x^2\right]_0^1 - 2\left[e^x\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}(e^2-1) + \frac{1}{3} + 1 - 2\times1 + 1 - 2(e-1)$$
$$= \frac{1}{2}e^2 - 2e + \frac{11}{6} \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**22. [출제의도] 지수를 포함한 부등식의 근을 구하여 그 합을 계산한다.**

$3^{x-4}\le\frac{1}{9}$이므로 $3^{x-4}\le3^{-2}$

밑이 1보다 크므로

$x-4\le-2,\ x\le2$

그러므로 부등식 $3^{x-4}\le\frac{1}{9}$을 만족시키는 자연수 $x$는 1과 2뿐이다.

따라서 $1+2=3$

**23. [출제의도] 삼각함수의 극한값을 이해하여 주어진 식의 극한값을 구한다.**

$$f(\theta)=1-\frac{1}{1+2\sin\theta}$$
$$=\frac{1+2\sin\theta-1}{1+2\sin\theta}$$
$$=\frac{2\sin\theta}{1+2\sin\theta}$$

이므로

$$\lim_{\theta\to0}\frac{10f(\theta)}{\theta}=10\lim_{\theta\to0}\frac{\frac{2\sin\theta}{1+2\sin\theta}}{\theta}$$
$$=10\lim_{\theta\to0}\frac{2\sin\theta}{\theta(1+2\sin\theta)}$$
$$=10\times2=20$$

**24. [출제의도] 역함수의 미분법을 이해하여 주어진 함수의 미분계수를 구한다.**

$g(e)=a$라 하면, $f(a)=e$

$f(a)=ae^a+e=e$

그러므로 $a=0$

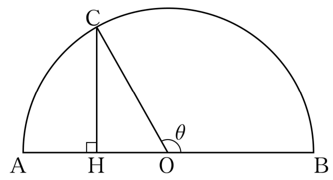
$f'(x)=(x+1)e^x$

$f'(0)=(0+1)e^0=1$

$g'(e)=\frac{1}{f'(g(e))}=\frac{1}{f'(0)}=1$

따라서 $60g'(e)=60\times1=60$

**25. [출제의도] 호도법을 이해하여 주어진 도형에서 선분의 길이를 구한다.**




반원의 중심을 O라 하면 반원의 지름의 길이가 12이므로 $\overline{\mathrm{OB}}=6$이다.

$\angle\mathrm{COB}=\theta$라 하면 호 BC의 길이가 $4\pi$이므로

$6\times\theta=4\pi,\ \theta=\frac{2}{3}\pi$

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle\mathrm{COH}=\pi-\theta=\frac{\pi}{3}$

삼각형 CHO는 직각삼각형이고 $\overline{\mathrm{OC}}=6$이므로

$\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{OC}}\times\sin\frac{\pi}{3}=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

따라서 $\overline{\mathrm{CH}}^2=(3\sqrt{3})^2=27$

**26. [출제의도] 같은 것이 있는 순열의 수를 이해하여 조건을 만족시키는 값을 구한다.**

네 자연수의 합이 6인 경우는 $1+1+1+3$ 또는 $1+1+2+2$의 두 가지이다.

(i) $1+1+1+3$인 경우

$1\times1\times1\times3=3$이므로 곱이 4의 배수가 아니다.

(ii) $1+1+2+2$인 경우

$1\times1\times2\times2=4$이므로 곱이 4의 배수이다.

(i), (ii)에 의해서 조건을 만족시키는 네 자연수는 1, 1, 2, 2이다.

따라서 가능한 순서쌍 $(a, b, c, d)$의 개수는 $\frac{4!}{2!2!}=6$

**27. [출제의도] 지수함수 그래프의 성질을 활용하여 두 점 사이의 거리를 구하는 문제를 해결한다.**

곡선 $y=2^x$을 $y$축에 대하여 대칭이동한 곡선은 $y=2^{-x}$이고 곡선 $y=2^{-x}$은 직선 $y=x+1$과 점 $(0,1)$에서 만난다.

곡선 $y=2^{-x}$을 $x$축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼, $y$축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼 평행이동한 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=2^{-x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}$과 일치한다. 직선 $y=x+1$은 $x$축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼, $y$축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼 평행 이동하여도 직선 $y=x+1$이 된다.

그러므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x+1$이 만나는 점 A는 $y=2^{-x}$과 직선 $y=x+1$이 만나는 점인 $(0,1)$이 $x$축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼, $y$축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼 평행이동한 점 $\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$이다.

따라서 $k=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{4}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로 $\frac{1}{k^2}=8$

**[다른 풀이]**

곡선 $y=2^x$을 $y$축에 대하여 대칭이동한 후, $x$축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼, $y$축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼 평행이동한 곡선은 $y=f(x)$이므로 $f(x)=2^{-x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}$이다.

그러므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x+1$이 만나는 점의 $x$좌표는

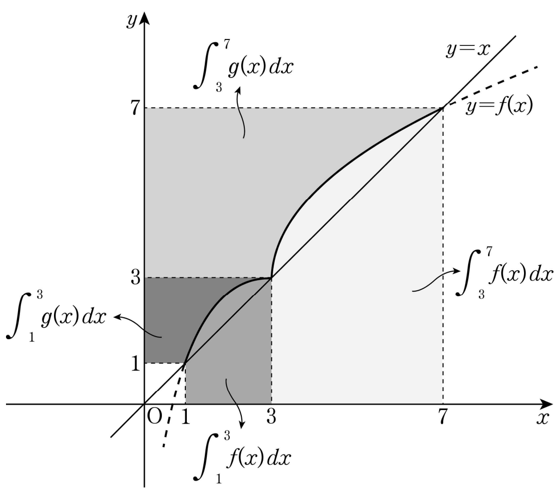
$x+1=2^{-x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}$

$2^{-x+\frac{1}{4}}=x+\frac{3}{4}$에서 $x=\frac{1}{4}$

즉, 점 A의 좌표는 $\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$이다.

따라서 $k=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{4}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로 $\frac{1}{k^2}=8$

**28. [출제의도] 이계도함수를 활용하여 주어진 정적분 문제를 해결한다.**




함수 $f(x)$가 $f(1)<f(3)$이고 일대일대응이므로 함수 $f(x)$는 구간 $[1,3]$에서 증가한다.

그러므로 $\int_1^3 f(x)\,dx=3\times3-1\times1-\int_1^3 g(x)\,dx$

조건 (다)에 의해서 $\int_1^3 g(x)\,dx=3$이므로

$\int_1^3 f(x)\,dx=8-3=5$

$\int_3^7 f(x)\,dx=\int_1^7 f(x)\,dx-\int_1^3 f(x)\,dx$

$=27-5=22$

조건 (나)에 의해서 함수 $f(x)$의 그래프는 구간 $(3,7)$에서 위로 볼록하다. 조건 (가)에 의해서 $f(3)=3$, $f(7)=7$이므로 구간 $[3,7]$에서 $f(x)-x\ge0$이다.

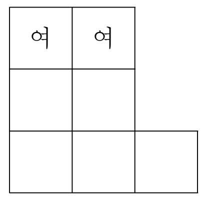
$12\int_3^7 |f(x)-x|\,dx=12\int_3^7 \{f(x)-x\}\,dx$

$=12\left\{\int_3^7 f(x)\,dx-\int_3^7 x\,dx\right\}$

$=12\times(22-20)=24$

**29. [출제의도] 경우를 나누어 학생들에게 사물함을 배정하는 실생활 문제를 해결한다.**

( i ) 2층 또는 3층 중 한 층의 사물함만을 여학생에게 배정하는 경우

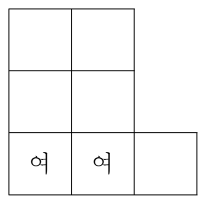



2층의 두 사물함을 두 여학생에게 배정하는 경우의 수는 $2!$이고 나머지 사물함을 남학생 3명에게 배정하는 경우의 수는 ${}_5P_3$이다. 3층의 두 사물함을 두 여학생에게 배정하는 경우의 수는 $2!$이고 나머지 사물함을 남학생 3명에게 배정하는 경우의 수는 ${}_5P_3$이다.

이와 같이 배정하는 경우의 수는

$2\times2!\times{}_5P_3=240$

( ii ) 1층의 사물함만을 여학생에게 배정하는 경우

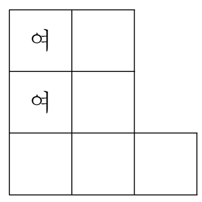



1층의 사물함만을 여학생에게 배정하는 경우의 수는 ${}_3P_2$이고 1층의 사물함을 남학생에게 배정할 수는 없으므로 나머지 사물함을 남학생 3명에게 배정하는 경우의 수는 ${}_4P_3$이다.

이와 같이 배정하는 경우의 수는

${}_3P_2\times{}_4P_3=144$

(iii) 2층, 3층의 사물함을 각각 1개씩 여학생에게 배정하는 경우

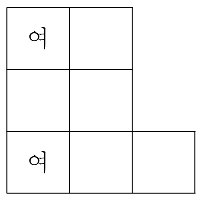



2층, 3층의 사물함을 각각 1개씩 선택하여 여학생에게 배정하는 경우의 수는 ${}_2C_1\times{}_2C_1\times2!$이고 2층과 3층의 사물함을 남학생에게 배정할 수는 없으므로 1층의 사물함만을 남학생 3명에게 배정해야 하고 그 경우의 수는 $3!$이다.

이와 같이 배정하는 경우의 수는

${}_2C_1\times{}_2C_1\times2!\times3!=48$

(iv) 1층의 사물함을 한 여학생에게 배정하고 2층 또는 3층의 사물함을 다른 여학생에게 배정하는 경우




1층의 가운데에 있는 사물함을 여학생에게 배정하면 3명의 남학생에게 사물함을 배정할 수 없다. 그러므로 1층의 사물함 중 가운데 사물함을 제외한 2개의 사물함 중 한 사물함을 여학생에게 배정한다. 1층의 사물함을 한 여학생에게 배정하고 2층 또는 3층의 사물함을 다른 여학생에게 배정하는 경우의 수는 ${}_2C_1\times{}_4C_1\times2!$이고 남학생에게 3개의 사물함을 배정하는 경우의 수는 $3!$이다.

이와 같이 배정하는 경우의 수는

${}_2C_1\times{}_4C_1\times2!\times3!=96$

따라서 ( i ), ( ii ), (iii), (iv)에 의해서 구하는 경우의 수는 $240+144+48+96=528$

**30. [출제의도] 몫의 미분법을 이용하여 두 접선과 한 선분으로 이루어진 도형 문제를 해결한다.**

$\mathrm{A}\left(\alpha, -\frac{2}{\alpha}\right)$, $\mathrm{B}\left(\beta, -\frac{2}{\beta}\right)$라 하자.

$y=-\frac{2}{x}$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면 $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{x^2}$

점 A를 지나는 접선의 방정식은 $y=\frac{2}{\alpha^2}(x-\alpha)-\frac{2}{\alpha}$

즉, $y=\frac{2}{\alpha^2}x-\frac{4}{\alpha}$ …… ㉠

같은 방법으로 점 B를 지나는 접선의 방정식은

$y=\frac{2}{\beta^2}x-\frac{4}{\beta}$ …… ㉡

㉠, ㉡이 모두 $\mathrm{P}(a, 2a)$를 지나므로

$2a=\frac{2a}{\alpha^2}-\frac{4}{\alpha}$, $2a=\frac{2a}{\beta^2}-\frac{4}{\beta}$

즉, $a\alpha^2+2\alpha-a=0$, $a\beta^2+2\beta-a=0$이므로

$\alpha$, $\beta$는 이차방정식 $ax^2+2x-a=0$의 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해서

$\alpha+\beta=-\frac{2}{a}$, $\alpha\beta=-1$

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2$

$=(a-\alpha)^2+\left(2a+\frac{2}{\alpha}\right)^2+(a-\beta)^2+\left(2a+\frac{2}{\beta}\right)^2$

$=10a^2-2a(\alpha+\beta)+(\alpha^2+\beta^2)+8a\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+4\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)$

$=10a^2+4+\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}$

$\quad+8a\times\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+4\times\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$

$=10a^2+\frac{20}{a^2}+30$,

$\overline{\mathrm{AB}}^2=(\alpha-\beta)^2+\left(-\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}\right)^2$

$=5(\alpha-\beta)^2$

$=5\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}$

$=5\left(\frac{4}{a^2}+4\right)$

$=\frac{20}{a^2}+20$

그러므로 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2=10a^2+\frac{40}{a^2}+50$

$a^2=t\,(t>0)$으로 놓고 $f(t)=10t+\frac{40}{t}+50$이라 하면

$f'(t)=10-\frac{40}{t^2}=\frac{10(t^2-4)}{t^2}$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 나타낸 표는 다음과 같다.

| $t$ | $(0)$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(t)$ | | ↘ | $90$ | ↗ |

함수 $f(t)$는 $t=2$에서 최솟값 90을 갖는다.

$a^2=2$이므로 $a=\sqrt{2}$에서 점 P의 좌표는 $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2$의 최솟값은 90이다.

**[다른 풀이]**

절대부등식을 이용하면

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2=10a^2+\frac{40}{a^2}+50$

$\ge2\sqrt{10a^2\times\frac{40}{a^2}}+50$

$=2\times20+50$

$=90$

(단, 등호는 $10a^2=\frac{40}{a^2}$ 즉, $a=\sqrt{2}$일 때 성립한다.)