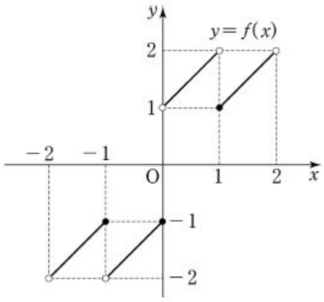
오르비스 옵티무스 난만한

8. 개구간 $(-2,\ 2)$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다.

먼저 풀어보세요

2008년도 수능문제입니다.



개구간 $(-2,\ 2)$에서 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+f(-x)$$

로 정의할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to 0} f(x)$가 존재한다.

ㄴ. $\lim_{x\to 0} g(x)$가 존재한다.

ㄷ. 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

부분 대칭성에 대하여,

이 기출문제에서 함수 $f(x)$는 언뜻 보기에 원점에 대하여 대칭인 함수, 즉 기함수로 보이지만 $(0,-1)$이라는 한 점 때문에 기함수가 되지 못합니다.

즉 $f(-x)=-f(x)$를 만족한다고 할 수 없는데, 만약 $x\neq 0$이라는 조건이 붙는다면 모든 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이라고 할 수 있습니다.

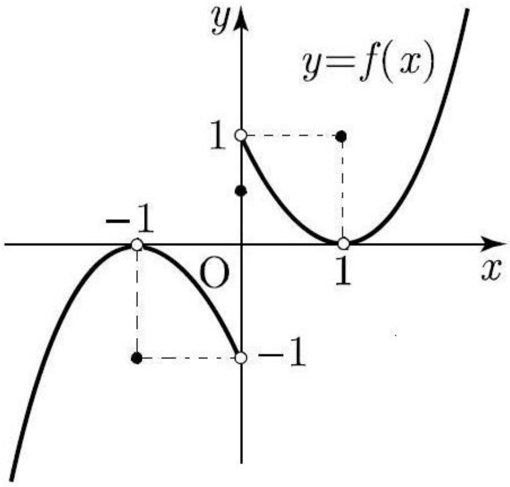
이러한 사실을 이용하면, $g(x)=f(x)+f(-x)=\begin{cases}(x\neq 0)\ f(x)-f(x)=0 \\ (x=0)\ 2f(0)=-2\end{cases}$라고 할 수 있습니다. 따라서 $g(x)=\begin{cases}(x\neq 0)\ 0 \\ (x=0)\ -2\end{cases}$라고 간단하게 정리할 수 있고, $g(x)$는 $x=0$을 제외하고는 상수함수 형태이므로 ㄴ,ㄷ이 모두 참임을 바로 파악할 수 있습니다.

(ㄱ은 당연히 거짓.. 이구요)

즉, 위의 함수 $f(x)$를 기함수라고 하면 틀렸지만, $x\neq 0$인 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이라고 하면 참인 명제가 됩니다. 즉 부분적으로는 기함수라고 할 수 있는 형태입니다. 아래는 제가 만든 간단한 변형문제입니다. 연습해보세요.

오르비스 옵티무스 난만한

1. 아래와 같이 $x \neq 0$인 모든 x에 대해 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족하는 함수 $y = f(x)$ 가 있을 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $\lim\limits_{x \to \infty} \left\{ f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(-\frac{1}{x}\right) \right\} = 0$

ㄴ. $x \neq 0$인 x에 대하여 $(f \circ f)(-x) = -(f \circ f)(x)$

ㄷ. 함수 $(f \circ f)(x)$의 불연속점 개수는 3개 이다.