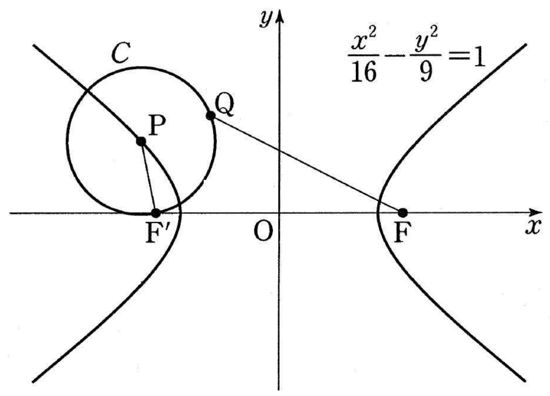
6월 모평

기출 분석

고지우 수학연구소

1. 기하와 벡터

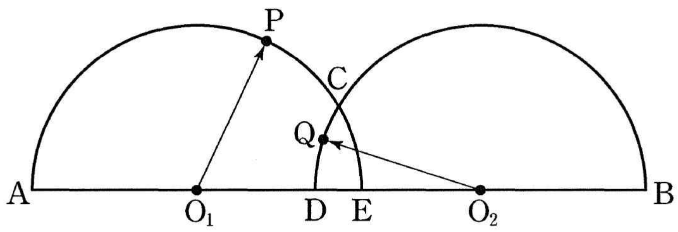
그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하고, 이 쌍곡선 위의 점 P를 중심으로 하고 선분 PF′을 반지름으로 하는 원을 C라 하자. 원 C위를 움직이는 점 Q에 대하여 선분 FQ의 길이의 최댓값이 14일 때, 점 C의 넓이는? (단, $\overline{\mathrm{PF}'}<\overline{\mathrm{PF}}$) [4점]



① 7π ② 8π ③ 9π ④ 10π ⑤ 11π

그림과 같이 선분 AB 위에 $\overline{AE}=\overline{DB}=2$인 두 점 D, E가 있다. 두 선분 AE, DB를 각각 지름으로 하는 두 반원의 호 AE, DB가 만나는 점을 C라 하고, 선분 AB위에 $\overline{O_1A}=\overline{O_2B}=1$인 두 점을 O_1, O_2라 하자.

호 AC위를 움직이는 점 P와 호 DC위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\left|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_2Q}\right|$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$일 때, 선분 AB의 길이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $1<\overline{O_1O_2}<2$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



좌표평면에서 중심이 O이고반지름의 길이가 1인 원 위의 한 점을 A, 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원 위의 한 점을B라 할 때, 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$
(나) $|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 = 20$

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$의 최솟값은 m이고 이 때 $|\overrightarrow{OP}| = k$이다. $m+k^2$의 값을 구하시오. [4점]

양의 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(t)$에 대하여 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 1)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$\begin{cases} x = 2\ln t \\ y = f(t) \end{cases}$$

이다. 점 P가 점 $(0,\ f(1))$로부터 움직인 거리가 s가 될 때, 시각 t는 $t = \dfrac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$이고, $t=2$일 때 점 P의 속도는 $\left(1,\ \dfrac{3}{4}\right)$이다. 시각 $t=2$일 때, 점 P의 가속도를 $\left(-\dfrac{1}{2},\ a\right)$라 할 때, $60a$의 값을 구하시오. [4점]

2. 확률과 통계

집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 2인 부분집합을 두 개 선택할 때, 선택한 두 집합이 서로 같지 않은 경우의 수를 구하시오. 〔4점〕

다음은 x에 대한 다항식 $(x+a^2)^n$과 $(x^2-2a)(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수가 같게 되는 두 자연수 a와 $n(n \geq 4)$의 값을 구하는 과정의 일부이다.

> $(x+a^2)^n$의 전새식에서 x^{n-1}의 계수는 a^2n이다.
> $(x^2-2a)(x+a)^n=x^2(x+a)^n-2a(x+a)^n$에서
> $x^2(x+a)^n$을 전개하면 x^{n-1}의 계수는 $\boxed{(가)}\times a^3$이고,
> $2a(x+a)^n$을 전개하면 x^{n-1}의 계수는 $2a^2n$이다.
> 따라서 $(x^2-2a)(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는
> $$\boxed{(가)}\times a^3-2a^2n$$
> 이다. 그러므로
> $$a^2n=\boxed{(가)}\times a^3-2a^2n$$
> 이고, 이 식을 정리하여 a를 n에 관한 식으로 나타내면
> $$a=\frac{18}{\boxed{(나)}}$$
> 이다. 여기서 a는 자연수이고 n은 4 이상의 자연수이므로
> $$n=\boxed{(다)}$$
> 이다.

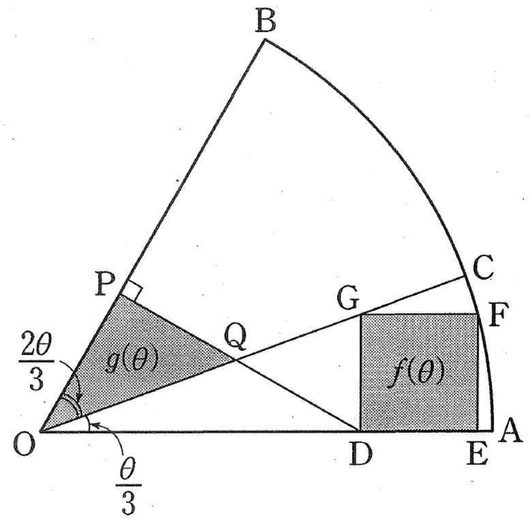
위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 k라 할 때, $f(k)+g(k)$의 값은? [4점]

① 10 ② 16 ③ 22 ④ 28 ⑤ 34

3. 미적분

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OAB에서 호 AB의 삼등분점 중 점 A에 가까운 점을 C라 하자. 변 DE가 선분 OA 위에 있고, 꼭지점 G, F가 각각 선분 OC, 호 AC 위에 있는 정사각형 DEFG의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. 점 D에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 P, 선분 DP와 선분 OC가 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 OQP의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta \times g(\theta)} = k$일 때, $60k$의 값을 구하시오.(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이고, $\overline{OD} < \overline{OE}$) [4점]



실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) \neq 1$
(나) $f(x)+f(-x)=0$
(다) $f'(x)=\{1+f(x)\}\{1+f(-x)\}$

〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \neq -1$이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 어떤 열린 구간에서 감소한다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$는 세 개의 변곡점을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

양수 a와 실수 b에 대하여 함수 $f(x)=ae^{3x}+be^{x}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? [4점]

(가) $x_1<\ln\frac{2}{3}<x_2$를 만족시키는 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f''(x_1)f''(x_2)<0$이다.

(나) 구간 $[k, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하도록 하는 실수 k의 최솟값을 m이라 할 때, $f(2m)=-\frac{80}{9}$이다.

① -15　② -12　③ -9　④ -6　⑤ -3

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여

$$F(x) = \ln|f(x)|$$

라 하고, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여

$$G(x) = \ln|g(x)\sin x|$$

라 하자.

$$\lim_{x \to 1}(x-1)F'(x) = 3, \quad \lim_{x \to 0}\frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{1}{4}$$

일 때, $f(3)+g(3)$의 값은? 〔4점〕

① 57 ② 55 ③ 53 ④ 51 ⑤ 49

주요 문항 분석

좌표평면에서 점 P는 시각 $t=0$일 때 $(0,\ -1)$에서 출발하여 시각 t에서의 속도가

$$\vec{v}=(2t,\ 2\pi\sin 2\pi t)$$

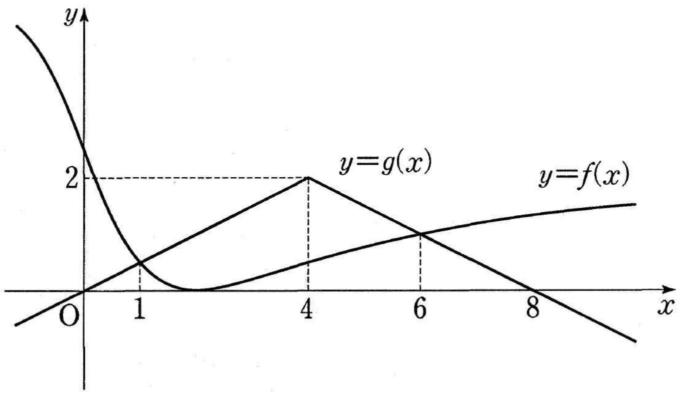
이고, 점 Q는 시각 $t=0$일 때 출발하여 시각 t에서의 위치가

$$\mathrm{Q}(4\sin 2\pi t,\ |\cos 2\pi t|)$$

이다. 출발한 후 두 점 P, Q가 만나는 횟수는? [4점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

함수 $f(x)=\frac{5}{2}-\frac{10x}{x^2+4}$ 와 함수 $g(x)=\frac{4-|x-4|}{2}$ 의 그래프가 그림과 같다.



$0 \le a \le 8$ 인 a 에 대하여 $\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$ 의 최솟값은? [4점]

① 14−5ln5 ② 15−5ln10 ③ 15−5ln5 ④ 16−5ln10 ⑤ 16−5ln5

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 상수 $a\ (0<a<2\pi)$와 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=f(-x)$
(나) $\displaystyle\int_x^{x+a} f(t)dt=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

닫힌 구간 $\left[0,\ \frac{a}{2}\right]$에서 두 실수 b, c에 대하여

$f(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)$일 때 $abc=-\frac{q}{p}\pi$이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 〔4점〕

실수 a와 함수 $f(x)=\ln(x^2+1)-c$ $\quad(c>0$ 인 상수$)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_a^x f(t)dt$$

라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 α_1, α_2, $\cdot\cdot\cdot$, α_m (m 은 자연수)이다.
$a=\alpha_1$일 때, 함수 $g(x)$ 와 상수 k 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
(나) $\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)dx=k\alpha_m\int_0^1|f(x)|dx$

$mk\times e^c$ 의 값을 구하시오. [4점]