# 자이고사 3회

## 수학 영역 (가형) 해설

1. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(4,3)$, $4+3=7$. ③

2. $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$, $\cos^2\theta = \dfrac{2}{3}$. ④

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}\times\frac{x}{\sin x} = \ln 2$. ④

4. $\mathrm{M}(3,3,4)$이므로 $3\times3\times4=36$. ②

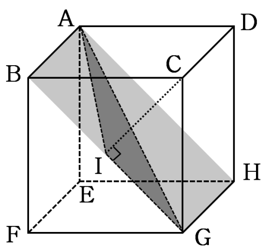
5. $\left[\dfrac{e}{e+1}x^{e+1}\right]_0^1 = \dfrac{e}{e+1}$. ②

6. $b^2-3=1$이므로 $2b=4$. ⑤

7. $\mathrm{P}(A^C)+\mathrm{P}(B^C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=1$이므로
   $\mathrm{P}(A)=3(1-\mathrm{P}(A))$, $\mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{4}$,
   $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{16}$. ①

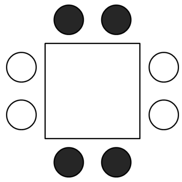
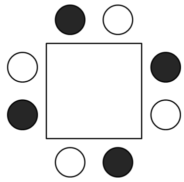
8. 직선의 방향벡터는 $(1,2,2)$, 평면의 법선벡터는 $(0,0,1)$이므로 $\sin\theta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$
   $=\dfrac{2}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\sqrt{1^2}} = \dfrac{2}{3}$. ③

9. 그림에서 $\overline{\mathrm{GI}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\overline{\mathrm{AB}}=1$ 이므로 $\triangle\mathrm{AIG}$의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. ③



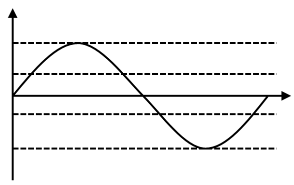

10. $f'(x)=-\ln|x|+\dfrac{1-x}{x} = -\ln|x|+\dfrac{1}{x}-1$,
    $f''(x)=-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{x+1}{x^2}$에서 변곡점은 $(-1,0)$이다. $f'(-1)=-2$이므로 접선의 방정식은 $y=-2(x+1)$, $a=-2$. ①

11. 여덟 개의 의자 중 세 개를 선택하는 경우의 수는 ${}_8\mathrm{C}_3=56$인데, 회전해서 일치하는 경우가 네 가지씩 있으므로 $\dfrac{56}{4}=14$. ④

> **＊참고** : 8개 중 4개를 고르는 경우였다면 $\dfrac{{}_8\mathrm{C}_4}{4}$를 하는 같은 방법으로 풀 수가 없다. 예를 들어 회전해서 <그림 1>과 같아지는 경우는 ${}_8\mathrm{C}_4$가지 중 2가지밖에 없고, 회전해서 <그림 2>와 같아지는 경우는 ${}_8\mathrm{C}_4$가지 중 1가지밖에 없으므로 이러한 경우는 따로 고려해 주어야 한다.
>
> 
>
> <그림 1>
>
> 
>
> <그림 2>

12. $y=x^3\sqrt{x^2+1}$은 $x>0$일 때 0보다 크고, $y=-x\sqrt{x^2+1}$은 $x>0$일 때 0보다 작다. 또 두 곡선은 모두 원점 대칭이다. 따라서
    $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(x^3+x)\sqrt{x^2+1}\,dx = 2\int_0^{\sqrt{3}}x(x^2+1)\sqrt{x^2+1}\,dx$
    $x^2+1=t$, $2xdx=dt$로 치환하면 $\displaystyle\int_1^4 t\sqrt{t}\,dt$
    $=\left[\dfrac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_1^4 = \dfrac{62}{5}$. ②

13. $|t|>1$일 때 $f(t)=0$, $t=1$일 때 $f(t)=\dfrac{\pi}{2}$, $0<t<1$일 때 $f(t)=\pi$, $-1<t<0$일 때 $f(t)=3\pi$, $t=-1$일 때 $f(t)=\dfrac{3\pi}{2}$이다. 따라서 $a$로 가능한 값의 합은 $\dfrac{1}{2}+1+3+\dfrac{3}{2}=6$. ⑤



14. 점 B에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 E라 하면 $\overline{\mathrm{BE}}=\sin\theta$, $\overline{\mathrm{DE}}=\dfrac{\sin\theta}{\tan 2\theta}$, $\overline{\mathrm{CE}}=\dfrac{\sin\theta}{\tan 3\theta}$,

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\tan 2\theta}+\frac{\sin\theta}{\tan 3\theta}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$. ⑤

15. P의 속도 $\vec{v}=\left(t+C_1,\, 2\sqrt{t+1}+C_2\right)$이고, P의 가속도가 $(1,1)$일 때는 $t=0$일 때이다. 이때 속도가 $(0,2)$이므로 $C_1=C_2=0$이다. P의 $x$좌표 $=\dfrac{1}{2}t^2+C_3$인데 $t=0$일 때 점 P의 위치가 $(1,2)$이므로 $C_3=1$이다. P의 $x$좌표가 1, 3일 때 $t$는 각각 0, 2이므로 P가 움직인 거리는

$\displaystyle\int_0^2\sqrt{t^2+4t+4}\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2+2t\right]_0^2=6$. ⑤

16. 풀이 1 : 두 경우로 나누기

2세대에서 불타입 '브케인'을 골랐다고 할 때, 나머지 여섯 세대에서 각각 한 마리를 고르는 경우의 수는 $3^6$이고, 이 중 '풀, 불타입'만 고르거나 '불, 물타입'만 고르는 경우를 빼고 '불타입'만 고르는 경우를 다시 더하면 $3^6-2\times 2^6+1=602$가지이다. 2세대에서 '리아코'를 고른 경우도 마찬가지이므로 구하는 경우의 수는

$602\times 2=1204$.

풀이 2 : $\dfrac{2}{3}$ 곱하기

우선 '치코리타'를 고르지 않는다는 조건을 무시하면 각 세대별로 3마리의 포켓몬 중 하나를 고르는 경우의 수는 $3^7$이고, 이 중 2가지 타입만 고르거나 1가지 타입만 고르는 경우를 빼면 $3^7-3\times(2^7-2)-3=1806$가지가 된다. 이때 2세대의 포켓몬 세 마리('치코리타', '브케인', '리아코') 각각을 고른 경우의 수는 모두 같을 것이므로, '치코리타'를 고르지 않는 경우의 수는

$1806\times\dfrac{2}{3}=1204$. ③

17. 풀이 1 : 해석적 풀이

점 P의 위치벡터를 $(x,y)$라고 하면 주어진 식에서 $(1,0)\cdot(1-x,\,-y)=\sqrt{x^2+y^2}$이고,

$x^2-2x+1=x^2+y^2$, $y^2=-2x+1$이다. $\mathrm{Q}(a,\,b)$라 하면 $b^2=-2a+1$이고, 음함수의 미분으로부터 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{y}$이므로 접선의 방정식은

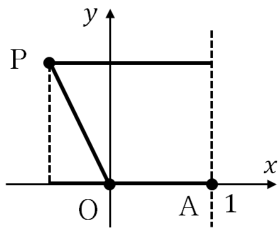
$y=-\dfrac{1}{b}(x-a)+b$이고, $y=0$을 대입하면

$x=b^2+a=-a+1=4$에서 $a=-3$, $b=\sqrt{7}$이다.

따라서 $\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|=\sqrt{16+7}=\sqrt{23}$.

풀이 2 : 기하적 풀이

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$는 크기가 1이고 방향이 $+x$ 방향이므로, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}$는 점 P에서 $x$축에 내린 수선의 발에서 점 A까지의 거리와 같다. (양수여야 하므로) 이 거리는 그림에서 보듯 점 P에서 직선 $x=1$에 내린 수선의 발의 길이와 같다. 따라서 조건을 만족하는 점 P는 O를 초점, $x=1$을 준선으로 하는 포물선 위의 점이다. 이후의 풀이는 동일하다. ④




18. $(x^2-1)^{2n}$에서 $x^{2n}$의 계수는 ${}_{2n}\mathrm{C}_n\times(-1)^n$인데 $n$이 짝수이므로 $f(n)={}_{2n}\mathrm{C}_n$.

$0\le k\le m$일 때 ${}_m\mathrm{C}_k={}_m\mathrm{C}_{m-k}$이므로

$${}_{2n}\mathrm{C}_0\times{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}-{}_{2n}\mathrm{C}_1\times{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}\times{}_{2n}\mathrm{C}_0$$

$$=\left({}_{2n}\mathrm{C}_0\right)^2-\left({}_{2n}\mathrm{C}_1\right)^2+\cdots+(-1)^n\times\left({}_{2n}\mathrm{C}_n\right)^2-\cdots$$
$$\cdots-\left({}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}\right)^2+\left({}_{2n}\mathrm{C}_{2n}\right)^2$$

$$=2\times\left\{\left({}_{2n}\mathrm{C}_0\right)^2-\left({}_{2n}\mathrm{C}_1\right)^2+\cdots-\left({}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}\right)^2\right\}$$
$$+(-1)^n\times\left({}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}\right)^2$$

이고 $n$이 짝수이므로 $g(n)=\left({}_{2n}\mathrm{C}_n\right)^2$.

${}_{2n}\mathrm{C}_n=2+2\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left({}_{2n}\mathrm{C}_k\right)^2(-1)^k+\left({}_{2n}\mathrm{C}_k\right)^2$에서

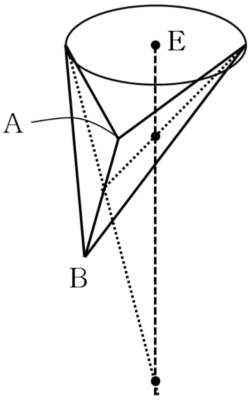
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left({}_{2n}\mathrm{C}_k\right)^2(-1)^k=-\frac{1}{2}\left({}_{2n}\mathrm{C}_k\right)^2+\frac{1}{2}\,{}_{2n}\mathrm{C}_n-1$이므로

$h(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x-1$.

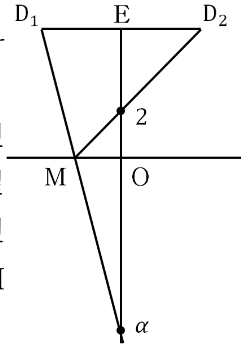
$f(4)+g(2)+h(5)={}_8\mathrm{C}_4+\left({}_4\mathrm{C}_2\right)^2-\dfrac{25}{2}+\dfrac{5}{2}-1$

$=95$. ③

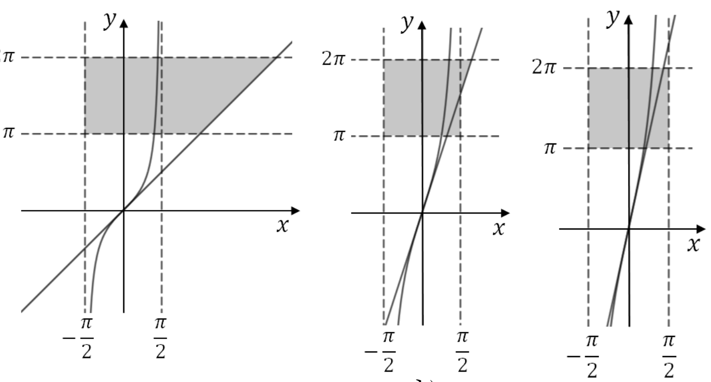
**19.** 세 삼각형 ABD, BCE, CAF가 합동이려면 삼각형 DEF도 정삼각형이어야 한다. 따라서 세 평면 ABD, BCE, CAF가 $xy$평면과 이루는 각은 모두 같고, 세 평면의 교점을 P라고 할 때 세 삼각형 ABP, BCP, CAP도 합동이다. 따라서 점 P는 $z$축 위의 점이다.




평면 ABD와 $z$축의 교점의 $z$ 좌표가 $k$인데, 오른쪽 그림과 같이 주어진 원의 중심을 E라 하면 선분 DE와 선분 AB가 수직일 때 $k=\alpha$ 또는 $k=\beta$가 된다. 원점을 O, 선분 AB의 중점을 M이라 할 때 $\overline{\mathrm{MO}}=\sqrt{3}$이므로 $\overline{\mathrm{MO}}:\overline{\mathrm{ED_2}}=1:2$에서 선분 OE를 $1:2$로 내분하는 점의 $z$좌표가 2이고, 선분 OE를 $1:2$로 외분하는 점의 $z$좌표가 $\alpha$이다. $2=\dfrac{t}{3}$, $\alpha=-t$에서 $t=6$, $\alpha=-6$, $6+6=12$. ①




**20.** 점 P가 나타내는 도형의 경계는 두 직선 $x=-\dfrac{\pi}{2}$, $x=\dfrac{\pi}{2}$와 함수 $f(x)$의 변곡점에서의 접선에 의해 결정된다. 함수 $f(x)$의 변곡점에서의 접선은 $y=kx$이다. $k$의 범위에 따른 $g(k)$의 값은 다음과 같다.




가) 나) 다)

1) $0<k<2$일 때

점 P가 나타내는 도형은 가)와 같고, 사다리꼴의 넓이는 $g(k)=\left(\dfrac{3\pi}{2k}+\dfrac{\pi}{2}\right)\pi=\dfrac{3\pi^2}{2k}+\dfrac{\pi^2}{2}$.

2) $2<k<4$일 때

점 P가 나타내는 도형은 (나)와 같고,

$$g(k)=\pi^2+\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{k}-\frac{\pi}{2}\right)\left(2\pi-\frac{\pi k}{2}\right)=\frac{2\pi^2}{k}+\frac{\pi^2 k}{8}.$$

3) $k>4$일 때

점 P가 나타내는 도형은 (다)와 같고, $g(k)=\pi^2$이다.

1), 2), 3)에서

$$g'(k)=\begin{cases}-\dfrac{3\pi^2}{2k^2} & (0<k<2)\\ -\dfrac{2\pi^2}{k^2}+\dfrac{\pi^2}{8} & (2<k<4)\\ 0 & (k>4)\end{cases}$$

이고, $\displaystyle\lim_{k\to2+}g'(k)=\lim_{k\to2-}g'(k)=-\frac{3\pi^2}{8}$,

$\displaystyle\lim_{k\to4+}g'(k)=\lim_{k\to4-}g'(k)=0$이므로 $g(x)$는 $x=2,4$에서 미분가능하다.

$g'(1)=-\dfrac{3\pi^2}{2}$, $g'(2)=-\dfrac{3\pi^2}{8}$, $g'(3)=-\dfrac{2\pi^2}{9}+\dfrac{\pi^2}{8}$,

$g'(4)=g'(5)=0$이므로

$\displaystyle\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{5}g'(k)=-\frac{3}{2}-\frac{3}{8}-\frac{2}{9}+\frac{1}{8}=-\frac{71}{36}$. ②

**21.** **(설명하는 말투로 해설합니다.)**

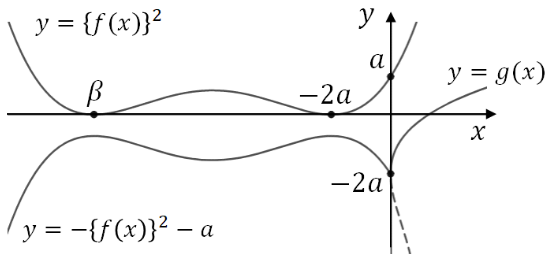
ㄱ. $h(x)$가 연속이므로 $g(0)=-\{f(0)\}^2-a$ $=-2a$, $g^{-1}(-2a)=0$이고, $\sqrt{g^{-1}(x)}=f(x)$에서 $f(-2a)=0$입니다. (참)

ㄴ. 먼저 주의해야 할 것은 $g^{-1}(x)$의 정의역에 0이 포함되는지 알 수 없기 때문에 $g^{-1}(0)=a$라고 해선 안 된다는 것입니다. 여기서는 차라리 역함수의 관계를 이용해야 합니다. $g^{-1}(x)$의 정의역에 포함되는 모든 $x$에 대해 $g^{-1}(x)=\{f(x)\}^2$이므로 $y=g(x)$의 역함수는 함수 $y=\{f(x)\}^2$의 일부입니다.

$f(x)$가 서로 다른 두 실근을 가지면 $\{f(x)\}^2$은 $x$축과 서로 다른 두 점에서 접하고, $f(x)$가 중근을 가지면 $\{f(x)\}^2$은 $x$축과 한 점에서 접합니

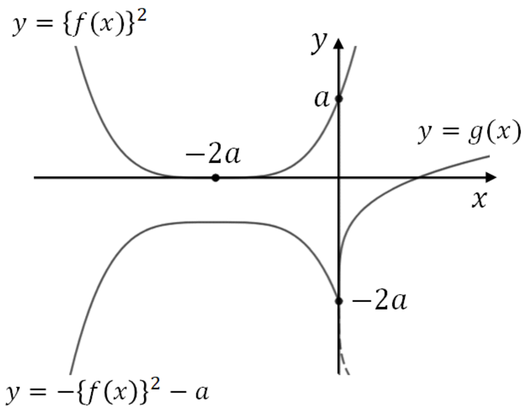
다. $\{f(x)\}^2 = \alpha(x+2a)^2(x-\beta)^2$이라 하면 $\beta$의 값에 따라 $g(x), h(x)$의 개형을 그릴 수 있습니다. $g(x)$를 그릴 때에는 $\{f(x)\}^2$을 $y=x$에 대해 대칭시킨 뒤 $x \geq 0$에서 연속함수가 되도록 그리면 됩니다.

1) $\beta < -2a$인 경우



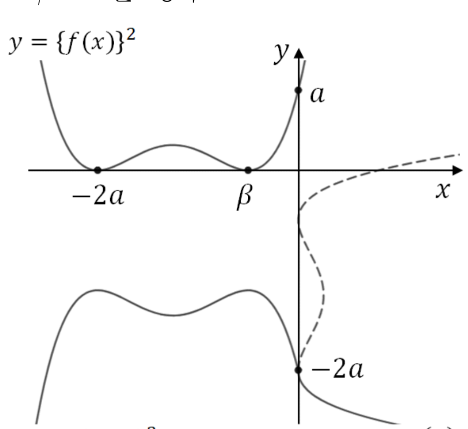

$g(x)$는 증가함수가 되고, $h(x)=k$의 서로 다른 실근은 최대 5개입니다.

2) $\beta = -2a$인 경우




$g(x)$는 증가함수가 될 수도 있고 감소함수가 될 수도 있지만, $h(x)=k$의 서로 다른 실근이 4개가 나올 수가 없습니다.

3) $-2a < \beta < 0$인 경우



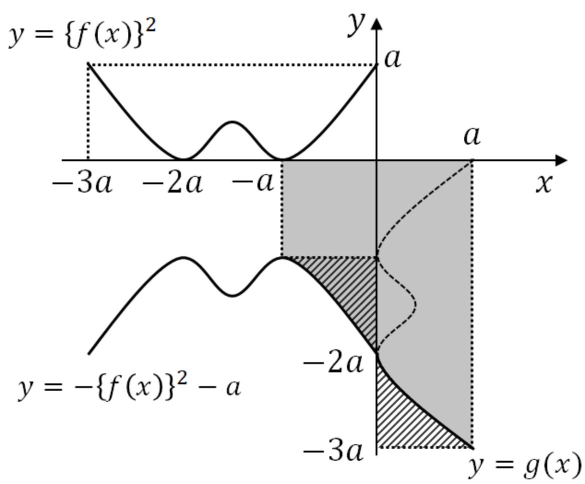

$g(x)$는 감소함수가 되고, $h(x)=k$의 서로 다른 실근은 최대 4개입니다. 따라서 문제의 조건에 맞는 함수 $g(x)$는 감소함수입니다. (거짓)

*참고 : $\beta > 0$인 경우, 같은 방법으로 그림을 그리면 $h(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 최대 4가 되고 $g(x)$가 감소함수가 되어 답을 맞히는 데에는 지장이 없습니다. 하지만 실제로는 $\beta > 0$인 경우가 불가능합니다.

$g^{-1}(x)$의 치역은 양수 전체의 집합을 포함하는데, $\sqrt{g^{-1}(x)} = f(x)$라는 조건에서 $f(x)$의 치역 역시 양수 전체의 집합을 포함해야 합니다.

그런데 $\beta > 0$인 경우 $f(x)$의 두 근이 각각 음수와 양수인데, $f(0) > 0$이므로 이 경우 $f(x)$의 최고차항의 계수는 음수가 되어 위의 조건을 만족시킬 수가 없습니다.

ㄷ. $-\{f(-a)\}^2 - a = -a$에서 $f(-a) = 0$입니다.




$\int_{-a}^{a} |h(x)| dx$는 그림에서 색칠한 부분의 넓이인데, 4차함수의 대칭성을 이용하면 $\int_{-3a}^{-2a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx$라는 것을 알 수 있고, 역함수의 대칭성을 이용하면 그림에서 빗금친 두 부분의 넓이가 같다는 것을 알 수 있습니다.

따라서 $\int_{-a}^{a} |h(x)| dx = a^2 + 3a^2 = 4a^2$입니다. (참)

답 ④

22. ${}_4H_2 + {}_2H_4 = {}_5C_2 + {}_5C_4 = 10 + 5 = 15.$

23. $f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{1}{4}}$, $f'(16) = 5.$

24. $\dfrac{3\times1+2\times2+\sqrt{3}\times\sqrt{3}+6}{\sqrt{3^2+2^2+(\sqrt{3})^2}}=\dfrac{16}{4}=4.$

25. $\left(\dfrac{\pi}{4},\,a\right)$를 대입하면 $\dfrac{1}{2}=\tan a$이고, 양변을 미분하면 $2\sin x\cos x=\sec^2 y\dfrac{dy}{dx}$이다.

$1+\tan^2 a=\sec^2 a$에서 $\sec^2 a=\dfrac{5}{4}$이므로 $\left(\dfrac{\pi}{4},\,a\right)$를 대입하면 $1=\dfrac{5}{4}\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4}{5}$. $5^2+4^2=41$.

26. 주어진 식의 확률변수를 표준화하면

$\dfrac{\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{6}{a}\right)}{\mathrm{P}\left(Z\ge-\dfrac{6}{a}\right)}=\dfrac{\mathrm{P}\left(Z\le-\dfrac{a}{9}\right)}{\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{a}{9}\right)}$에서

$\dfrac{\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{6}{a}\right)}{\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{6}{a}\right)}=\dfrac{\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{a}{9}\right)}{\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{a}{9}\right)}$이다.

$\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{6}{a}\right)=x$, $\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{a}{9}\right)=y$라 하면

$\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{1-y}{y}$, $x=y$이므로 $\dfrac{6}{a}=\dfrac{a}{9}$, $a^2=54$.

27. 직사각형 ABCD의 두 대각선의 교점이 $y$축 위에 있으려면 점 A, C의 $x$좌표가 서로 반대이고 점 B, D의 $x$좌표가 서로 반대여야 한다. 이때 쌍곡선의 대칭성에 의해 점 B, D의 $y$좌표는 같고, $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BF}}=3$이다.

**풀이 1 : 쌍곡선의 성질**

쌍곡선의 성질을 이용하면 쌍곡선 위의 점 B에 대해 $\overline{\mathrm{F'B}}=3+2a$이고, 쌍곡선의 대칭성을 이용하면 $\overline{\mathrm{F'D}}=3$, $\overline{\mathrm{FD}}=3+2a$이다. 이때 직각삼각형 CDF에서 $\overline{\mathrm{CF}}=6$이므로 $\overline{\mathrm{CD}}^2=(2a+3)^2-36$인데, 직각삼각형 ABF에서 $\overline{\mathrm{AF}}=6+a$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}^2=(a+6)^2-9$이다. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}$이므로 $(2a+3)^2-36=(a+6)^2-9$, $a^2=18$.

**풀이 2 : 좌표와 삼각형 닮음**

$\mathrm{A'}(a,0)$, $\mathrm{B}(b,c)$라고 하자. $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{A'B}}=\overline{\mathrm{BF}}$이므로 삼각형 A'BF는 이등변삼각형이고, $b=\dfrac{a+6}{2}$이다. 점 B에서 $x$축에 내린 수선의 발 H에 대해 $\overline{\mathrm{HF}}=3-\dfrac{a}{2}$이고, 삼각형 AFB와 BFH가 닮음이므로 $(6+a):3=3:\left(3-\dfrac{a}{2}\right)$, $a^2=18$.

28. 1) $x=1$인 경우

A, B, C, D가 각각 공을 2, 1, 1, 1개 가졌다고 가정하고, A가 누구를 선택하는지는 중요치 않으므로 B를 선택했다고 가정하자. A의 순서가 끝난 후에 공의 개수는 1, 2, 1, 1개이다.

ㄱ) B가 A를 선택할 확률은 $\dfrac{1}{3}$이다. 이때 여사건을 이용하면 게임이 끝난 뒤 모든 사람이 공을 가지고 있는 경우는 C가 D를 선택하고 D가 C를 선택하는 경우뿐이다.

ㄴ) B가 C나 D를 선택할 확률은 $\dfrac{2}{3}$이다. 이때 C를 선택했다고 가정하면 B의 순서가 끝난 후 공의 개수는 1, 1, 2, 1개이고, C가 D 외의 사람을 선택해야 게임이 끝난 뒤 D가 공을 가지고 있지 않게 된다.

ㄱ), ㄴ)에서 $f(1)=\dfrac{1}{3}\times\left(1-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{20}{27}$

2) $x=2$인 경우

A, B, C, D가 각각 공을 2, 2, 1, 1개 가졌다고 가정하자.

ㄱ) A가 B를 선택할 확률은 $\dfrac{1}{3}$이다. A의 순서가 끝난 후에 공의 개수는 1, 3, 1, 1개인데, 이때 B가 A를 선택할 경우, B가 C나 D를 선택할 경우를 나누면 각각의 상황이 1)-ㄱ), 1)-ㄴ)과 일치하므로 게임이 끝난 뒤 공을 가지고 있지 않은 사람이 존재할 확률은 $f(1)$과 같다.

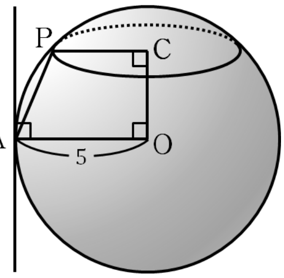
ㄴ) A가 C나 D를 선택할 확률은 $\dfrac{2}{3}$이다. 이때 C를 선택했다고 가정하면 A의 순서가 끝난 후 공의 개수는 1, 2, 2, 1개이고, B와 C가 모두 D 외의 사람을 선택해야 게임이 끝난 뒤 D가 공을 가지고 있지 않게 된다.

ㄱ), ㄴ)에서 $f(2)=\frac{1}{3}f(1)+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{44}{81}$

$\therefore f(1)+f(2)=\frac{104}{81}$, $81+104=185$.

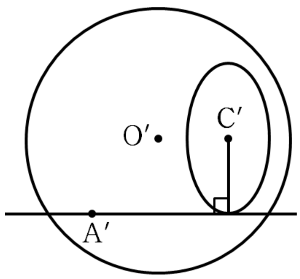
29. (설명하는 말투로 해설합니다.)

대략적인 그림을 그리는 것이 최우선인데, 점 A와 구의 중심을 이은 직선이 직선 $l$과 수직하다는 것, $C$의 중심과 구의 중심을 이은 직선이 직선 $l$과 평행하다는 것을 알 수 있습니다. 따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=2\sqrt{5}$라는 것을 이용해 길이 관계를 파악해 보겠습니다.




위와 같이 $C$의 중심을 C, $\overline{\mathrm{PC}}=r$라고 하면 $\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{25-r^2}$이고, 점 P에서 직선 AO에 내린 수선의 발을 P$'$라고 하면 $\overline{\mathrm{AP'}}=5-r$이므로 $(\overline{\mathrm{AP}})^2=(5-r)^2+25-r^2$, $r=3$.

다음은 원과 직선의 $xy$평면으로의 정사영에 관한 조건을 이용해야 하므로 정사영한 그림을 대략적으로 그리겠습니다.




A, O, C의 $xy$평면으로의 정사영을 A$'$, O$'$, C$'$, 직선 $l$의 $xy$평면으로의 정사영을 $l'$이라 하고 C$'$에서 $l'$에 내린 수선의 발을 D라 하겠습니다. 이때 점 P의 $xy$평면으로의 정사영을 D라고 할 수 없다는 것을 주의해야 합니다. $\overline{\mathrm{OC}}=4$이므로 $\overline{\mathrm{O'C'}}=2$이고, $\overline{\mathrm{C'D}}$는 원래 원의 반지름과 같기 때문에 3입니다. (원의 법선벡터를 정사영한 벡터의 방향과 수직하기 때문입니다.)

구해야 하는 것은 평면 APO와 $xy$평면이 이루는 각인데, 점 P의 $xy$평면으로의 정사영을 표시하기 곤란하기 때문에 그대로는 할 수가 없습니다. 이때 점 C가 평면 APO 위의 점인데, 삼각형 AOC와 A$'$O$'$C$'$의 넓이를 모두 알 수 있기 때문에 이를 이용하겠습니다. $\triangle\mathrm{AOC}=\frac{1}{2}\times5\times4=10$이고 $\triangle\mathrm{A'O'C'}=\frac{1}{2}\times2\times3=3$이므로 $\cos\theta=\frac{3}{10}$, $120\cos\theta=36$.

30. 먼저 (나)에 $k=0$과 $k=1$을 대입합니다.

$k=0$일 때 $\lim_{x\to f(0)}\frac{\ln g(x)}{x-f(0)}=-1$에서 (분자)$\to0$이므로 $g(f(0))=1$이고, $\ln g(x)=h(x)$라 할 때 $h'(f(0))=\frac{g'(f(0))}{g(f(0))}=-1$에서 $g'(f(0))=-1$입니다. 같은 방법으로 $k=1$일 때에는 $g(f(1))=1$, $g'(f(1))=1$입니다.

(가)에서 $f(x)$와 $g''(x)$가 역함수 관계라는 것을 알 수 있고, $f(x)$가 미분가능하므로 $f(x)$는 증가함수 또는 감소함수라는 것을 알 수 있습니다. 한편 식 $g''(f(x))=x$를 미분해서는 의미 있는 결과가 나오지 않고, (나)에서 $g'(f(x))$에 관한 정보가 나왔기 때문에 이 식을 적분해야 합니다. 이 상태로는 적분이 불가능하므로 양변에 $f'(x)$를 곱해줍니다.

$g''(f(x))f'(x)=xf'(x)$, 우변을 부분적분하면

$g'(f(x))=xf(x)-\int f(x)dx$

이때 $x$에 0과 1을 대입해야 하는데, 부정적분 꼴로는 불가능하므로 (정적분)+(적분상수) 꼴로 변형해야 합니다. 문제에서 $\int_0^1 f(x)dx$에 대한 정보를 제시했기 때문에, 아래끝이 0인 정적분으로 바꾸겠습니다.

$g'(f(x))=xf(x)-\int_0^x f(x)dx+C$

$x=0$일 때 $g'(f(0))=-1=C$

$x=1$일 때 $g'(f(1))=1=f(1)-4-1$, $f(1)=6$

다음은 $g(f(x))$에 관한 정보를 이용해야 하는데, 양변에 다시 $f'(x)$를 곱하고 부분적분을 하면 된다는 것을 알 수 있습니다. 부정적분은 역시 아래끝이 0인 정적분으로 바꾸겠습니다.

$$g'(f(x))f'(x) = xf(x)f'(x) - f'(x)\int_0^x f(x)dx - f'(x)$$

$$g(f(x)) = \frac{x}{2}\{f(x)\}^2 - \frac{1}{2}\int_0^x \{f(x)\}^2 dx - f(x)\int_0^x f(x)dx + \int_0^x \{f(x)\}^2 dx - f(x) + C'$$

$$= \frac{x}{2}\{f(x)\}^2 + \frac{1}{2}\int_0^x \{f(x)\}^2 dx - f(x)\int_0^x f(x)dx - f(x) + C'$$

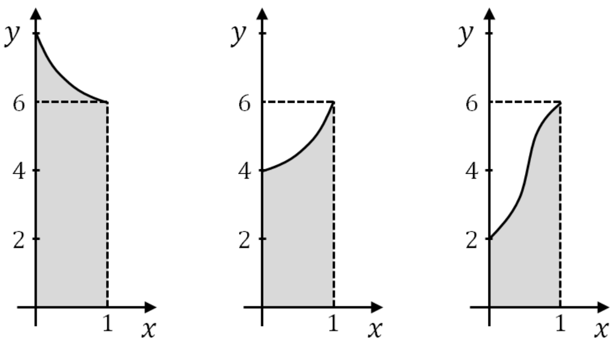
$x=0$일 때 $g(f(0)) = 1 = -f(0) + C'$

$x=1$일 때

$$g(f(1)) = 1 = \frac{6^2}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx - 6\times 4 - 6 + C'$$

두 식을 연립하면 $\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx = 24 - 2f(0)$

이제 (다)로 $f(0)$을 알아내야 하는데, $f(x)$에 관해 아직까지 이용하지 않은 것은 $f(x)$가 증가함수 또는 감소함수라는 것뿐입니다. 따라서 $f(x)$의 그래프를 대략적으로 그린 다음 여태까지의 정보를 써서 $f(0)$을 결정하겠습니다.




위 그림과 같이 $f(x)$가 증가함수이거나 감소함수이고 $f(1)=6$일 때, $f(0)>6$이거나 $f(0)=4$이면 무조건 $\int_0^1 f(x)dx > 4$라는 것을 알 수 있습니다. 따라서 0보다 큰 짝수로 가능한 $f(0)$의 값은 2밖에 없습니다.

$\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx = 24 - 4 = 20.$