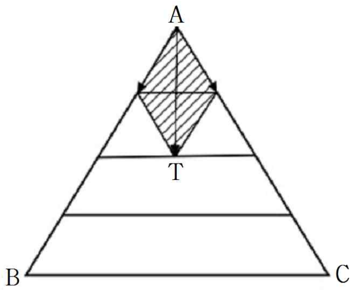
정답 및 해설

1. 정답 53

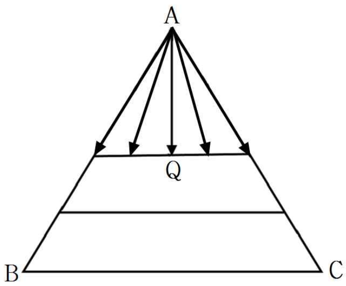
$\frac{1}{4}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR})=\overrightarrow{AT}$ 이라 하면

$\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{AT}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$ 이고

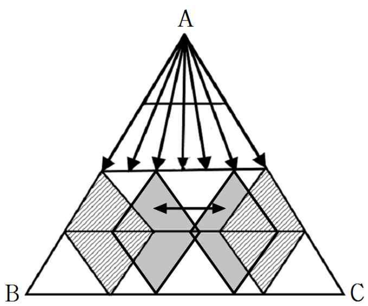
점 T 가 존재하는 영역은 아래 그림의 빗금친 영역과 같다.



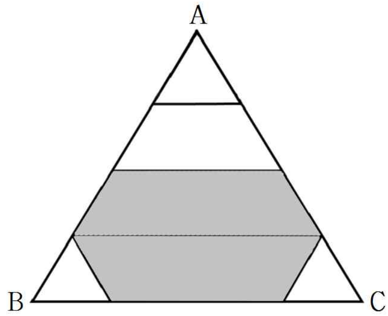
또, $\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$ 가 존재하는 위치는 아래의 직선과 같다.



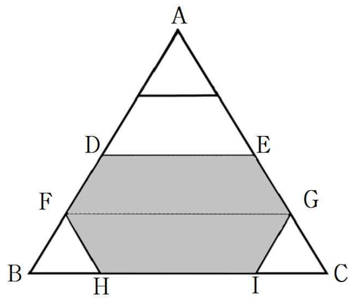
따라서 점 X가 존재하는 영역은 T 가 존재하는 영역을 $\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$ 만큼 평행이동하면 되므로 $\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$ 가 양끝인 선분 AB, AC 위에 놓일 경우는 아래의 그림과 같다.



따라서 X가 그리는 영역은 아래의 육각형 영역이다.



따라서 점 X가 나타내는 영역의 넓이를 S라 하면



$S=$(삼각형 ABC 의 넓이)$-$(삼각형 ADE 의 넓이)

-2(삼각형 FBH 의 넓이)

$=9-9\times\frac{1}{4}-9\times\frac{1}{16}\times 2$

$=\frac{45}{8}$

따라서 $p=8$, $q=45$ 이므로 $p+q=53$

2. 정답 12

평면 $z=1$ 위의 세 점 P_1, P_2, P_3의 좌표를 각각 $(a_1,\ b_1,\ 1)$, $(a_2,\ b_2,\ 1)$, $(a_3,\ b_3,\ 1)$이라 하자.

(ⅰ) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{OP_1}} = \dfrac{11}{3}$에서 $3a_1 + \dfrac{1}{2}b_1 + 2 = \dfrac{11}{3}$

$$\therefore\ 6a_1 + b_1 = \frac{10}{3}$$

즉 점 P_1에서 xy평면에 내린 수선의 발의 자취의 방정식을 l_1이라 하면

$$l_1\ :\ 6x + y = \frac{10}{3},\ \ z = 0$$

…… ㉠

(ⅱ) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{OP_2}} = 1$에서 $3a_2 + \dfrac{1}{2}b_2 + 2 = 1$

$$\therefore\ 6a_2 + b_2 = -2$$

즉 점 P_2에서 xy평면에 내린 수선의 발의 자취의 방정식을 l_2라 하면

$$l_2\ :\ 6x + y = -2,\ \ z = 0$$

…… ㉡

(ⅲ) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{OP_3}} = -\dfrac{7}{4}$에서 $3a_3 + \dfrac{1}{2}b_3 + 2 = -\dfrac{7}{4}$

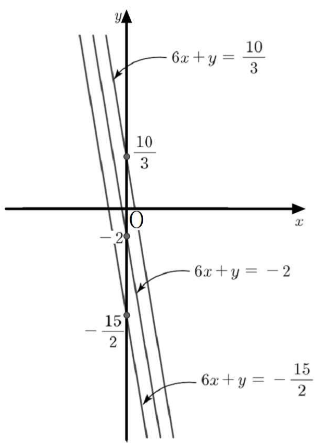
$$\therefore\ 6a_3 + b_3 = -\frac{15}{2}$$

즉 점 P_3에서 xy평면에 내린 수선의 발의 자취의 방정식을 l_3이라 하면

$$l_3\ :\ 6x + y = \frac{15}{2},\ \ z = 0$$

…… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 xy평면에 나타내면 다음 그림과 같다.



[그림1]

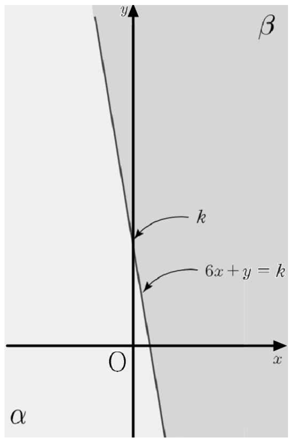
한편, 점 $(0,\ k,\ 0)$을 지나고 방향벡터가 $(1,\ -6,\ 0)$인 직선의 방정식은 $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-k}{-6}$, $z=0$ 즉,

$l\ :\ 6x + y = k,\ \ z = 0$이다.

직선 l에 의해 나누어지는 xy평면의 두 영역 α, β에서

l의 아랫부분에 있는 영역을 α,

l의 윗부분에 있는 영역을 β라고 하자.



[그림2]

따라서 [그림1]에 있는 l_1, l_2, l_3가 모두 [그림2]의 영역 α에만 포함되거나 모두 β에만 포함되도록 하는 k의 범위는

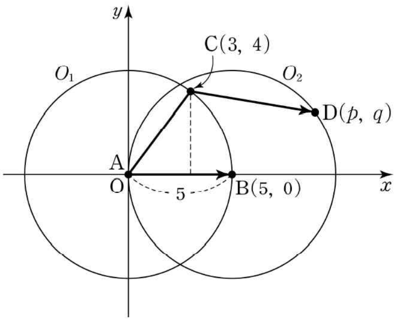
$$k < -\frac{15}{2}\ \text{ 또는 }\ k > \frac{10}{3}$$

따라서 조건을 만족시키는 양의 정수 k의 최솟값은 $m=4$

또, 음의 정수 k의 최댓값은 $M=-8$

$$\therefore\ m - M = 4 - (-8) = 12$$

3. **정답 31**



[그림 1]

[그림1]과 같이 점 A 를 원점으로 하는 좌표평면을 생각하자.

조건 (가)에 의해 점 C 의 좌표는 C$(3,\ 4)$가 된다.

점 D 를 D$(p,\ q)$라 하자

두 점 C, D 에서 x에 내린 수선을 발을 각각 C$'$, D$'$이라 하면

$$C'(3,\ 0),\ D'(p,\ 0)$$

그런데 조건 (나) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CD} = 30$ 에서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CD} &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|\cos\theta \\ &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{C'D'}| \\ &= 30\end{aligned}$$

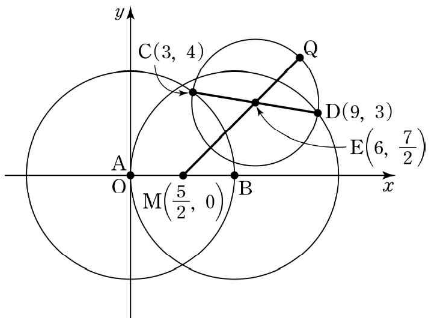
에서 $|\overrightarrow{AB}| = 5$ 이므로 $\overline{C'D'} = 6$

$$\therefore\ p = 9$$

그런데 원의 방정식이 $(x-5)^2 + y^2 = 5^2$ 이므로 ㉠을 대입하면

$$\therefore\ q = 3$$

따라서 점 D 의 좌표는 D$(9,\ 3)$



[그림 2]

[그림2[에서 선분 CD 의 중점을 E 이라 하면 점 P 는 점 E$\left(6,\ \frac{7}{2}\right)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{37}}{2}$ 인 원 위의 점이므로 점 P 좌표는

P$\left(6 + \frac{\sqrt{37}}{2}\cos\theta,\ \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2}\sin\theta\right)$라 놓으면

A$(0,\ 0)$, B$(5,\ 0)$이므로

$$\overrightarrow{PA} \bullet \overrightarrow{PB}$$

$$= \left(-\left(6 + \frac{\sqrt{37}}{2}\cos\theta\right),\ -\left(\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2}\sin\theta\right)\right)$$

$$\bullet \left(-\left(1 + \frac{\sqrt{37}}{2}\cos\theta\right),\ -\left(\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2}\sin\theta\right)\right)$$

$$= \left(6 + \frac{\sqrt{37}}{2}\cos\theta\right)\left(1 + \frac{\sqrt{37}}{2}\cos\theta\right) + \left(\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2}\sin\theta\right)^2$$

$$= \frac{55}{2} + \frac{7\sqrt{37}}{2}(\cos\theta + \sin\theta)$$

$$= \frac{55}{2} + \frac{7\sqrt{74}}{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\left(\because\ \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\le \frac{55}{2} + \frac{7\sqrt{74}}{2}\ \left(\because\ \left|\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right| \le 1\right)$$

따라서 $a = \frac{55}{2},\ b = \frac{7}{2}$

$$\therefore\ a + b = \frac{55}{2} + \frac{7}{2} = 31$$

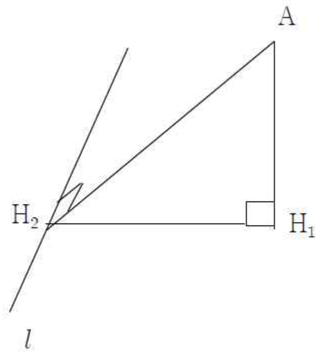
4. 정답 ⑤

ㄱ. 평면 α와 세 점 A, B, C를 지나는 평면의 교선을 l이라 하자.

점 A에서 평면 α와 교선 l에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하면

$\overline{\mathrm{AH_1}} \le \overline{\mathrm{AH_2}}$

즉, 점 A에서 평면 α에 이르는 거리는 평면 α와 세 점 A, B, C를 지나는 평면이 수직일 때 최대이다.



마찬가지로 두 점 B와 C에서 평면 α에 이르는 거리는 평면 α와 세 점 A, B, C를 지나는 평면이 수직일 때 최대이다.

따라서 평면 α 중에서 $d(\alpha)$가 최대가 되는 평면을 β라 하면 평면 β는 세 점 A, B, C를 지나는 평면과 수직일 때 최대이다. (참)

ㄴ. $\overline{\mathrm{BC}} \le \overline{\mathrm{AC}}$라 하자.

선분 BC의 중점을 M이라 하면 평면 α가 점 M을 지날 때 $d(\alpha)$는 최대이다.

즉, 평면 β는 선분 BC의 중점을 지난다.

마찬가지로 $\overline{\mathrm{AC}} \le \overline{\mathrm{BC}}$일 때에는 평면 β는 선분 AC의 중점을 지난다. (참)

ㄷ. $\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{(2-2)^2+(-1-3)^2+(0-0)^2} = 4$

$\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{(2-0)^2+(-1-1)^2+(0-0)^2} = 2\sqrt{2}$

이때, $\overline{\mathrm{BC}} \le \overline{\mathrm{AC}}$이므로

$d(\beta)$는 점 B와 평면 β 사이의 거리와 같다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

5. 정답 136

구 $x^2+y^2+z^2=6$의 중심을 O$(0,\ 0,\ 0)$이라 하고, 원 C의 중심을 C라 하면 원점 O에서 평면 $x+2z-5=0$에 내린 수선의 발이 점 C이다.

평면 $x+2z-5=0$이 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면

$\vec{n}=(1,\ 0,\ 2)$

이므로 원점 O를 지나고 평면 $x+2z-5=0$에 수직인 직선의 방정식은

$\dfrac{x}{1}=\dfrac{z}{2}$, $y=0$

$\dfrac{x}{1}=\dfrac{z}{2}=t$ (t는 실수)라 하면

$x=t$, $z=2t$

이므로 이를 $x+2z-5=0$에 대입하면

$t+4t-5=0$

에서 $t=1$이다.

따라서 점 C의 좌표는 $(1,\ 0,\ 2)$이다.

한편, 원점 O와 평면 $x+2z-5=0$ 사이의 거리를 d_1이라 하면

$d_1 = \dfrac{|-5|}{\sqrt{1^2+0^2+2^2}} = \sqrt{5}$

이므로 원 C의 반지름의 길이는

$\sqrt{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{5})^2}=1$

이므로 평면 $x+2z-5=0$은 y축과 평행하므로 원 C도 y축과 평행하다.

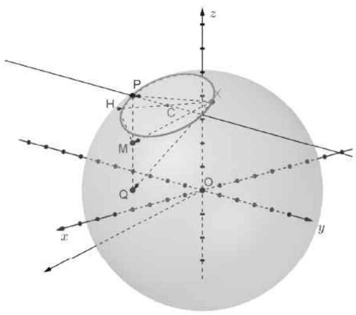
따라서 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선과 원 C가 만나는 두 점 정 y좌표가 작은 점이 점 P이다.

따라서 점 P의 좌표는 $(1,\ -1,\ 2)$이고, 점 Q의 좌표는 $(1,\ -1,\ 0)$이다.

한편, $|\overrightarrow{\mathrm{PX}}+\overrightarrow{\mathrm{QX}}|=|\overrightarrow{\mathrm{XP}}+\overrightarrow{\mathrm{XQ}}|$이므로 선분 PQ의 중점을 M이라 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{XP}}+\overrightarrow{\mathrm{XQ}}|=2|\overrightarrow{\mathrm{XM}}|$

이다.



점 M의 좌표는 $(1,\ -1,\ 1)$이다.
점 M과 평면 $x+2z-5=0$ 사이의 거리를 d_2라 하면

$$d_2=\frac{|1+2-5|}{\sqrt{1^2+0^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}}$$ 이다.

따라서 점 M에서 평면 $x+2z-5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{\mathrm{MH}}=d_2=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{HC}}&=\sqrt{\overline{\mathrm{MC}}^2-\overline{\mathrm{MH}}^2}\\&=\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}\\&=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

이때 원 C 위의 점 X에 대하여 $\overline{\mathrm{HX}}$의 최댓값은

$$\overline{\mathrm{HC}}+1=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}+1$$

이므로 $\overline{\mathrm{MX}}^2$의 최댓값은

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{MH}}^2+(\overline{\mathrm{HC}}+1)^2&=\frac{4}{5}+\frac{6}{5}+\frac{2\sqrt{30}}{5}+1\\&=3+\frac{2\sqrt{30}}{5}\end{aligned}$$

이다.
따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{XP}}+\overrightarrow{\mathrm{XQ}}|^2=4|\overrightarrow{\mathrm{XM}}|^2$의 최댓값은

$$4\left(3+\frac{2\sqrt{30}}{5}\right)=12+\frac{8\sqrt{30}}{5}$$

이므로

$$a=12,\ b=\frac{8}{5}$$

따라서

$$10(a+b)=120+16=136$$

이다.

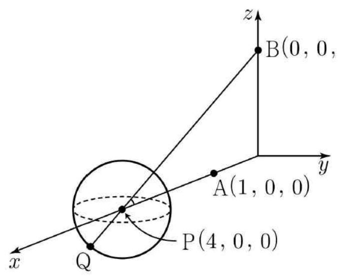
6. 정답 27

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$이므로 P는 xy평면 위의 점이다.
$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\le 4$이므로 P의 자취는 $x^2+y^2\le 4,\ z=0$
$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=1$이므로 Q는 $(x,\ y,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름이 1인 구 위의 점이다.
$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$가 이루는 각을 θ라 하면,

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cos\theta\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이므로 $\cos\theta\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

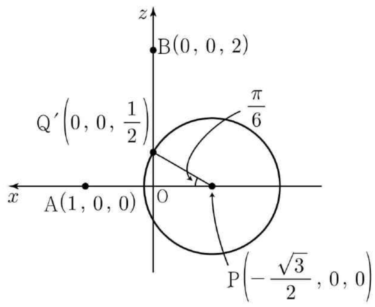
(i) $|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\le|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|+|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$
(단, 등호는 세 점 B, P, Q가 일직선에 있을 때 성립한다.)



이때 점 $\mathrm{P}(4,\ 0,\ 0)$이고 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$가 이루는 각을 θ_1이라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$가 이루는 각도 θ_1이므로
$\cos\theta_1=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$이므로 $\cos\theta\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2}$의 조건을 만족한다.

$\therefore$ 최댓값 $M=|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|+1=2\sqrt{5}+1$

(ii) 점 P가 xy평면 위의 점이고 $\cos\theta\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로
$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$가 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$가 이루는 각이 $\dfrac{\pi}{6}$ 이하여야 한다.
따라서 점 Q의 z좌표는 $\dfrac{1}{2}$ 이하이다.
점 B가 z축 위의 점이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|$를 최소로 하는 Q를 Q″이라 하면 Q″은 z축 위에 있으면서 z좌표가 $\dfrac{1}{2}$인 점이다.



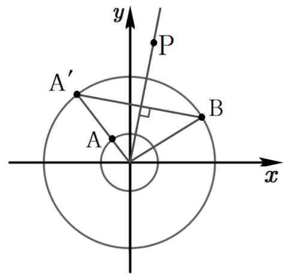
이 때 점 P$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ 0\right)$이고

$|\overrightarrow{\mathrm{BQ''}}| = \frac{3}{2}$ 이다.

$$\therefore\ M+m = 2\sqrt{5}+1+\frac{3}{2} = \frac{5}{2}+2\sqrt{5}$$

따라서 $a=\frac{5}{2}$, $b=2$이므로 $6(a+b)=6\times\frac{9}{2}=27$

7. 정답 7



조건 (가)에서

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$=3\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

$(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-3\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$

여기서 $3\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ 인 점 A′ 을 잡으면

$\overrightarrow{\mathrm{A'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$ 이므로 P 는 선분 A′B 의 중점을 지나고 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{A'B}}$ 에 수직인 직선 위의 점이다. 즉 점 P는 $\angle$ AOB이등분선 위의 점이다.

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t(3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\ (\text{단, } t\text{는 실수})$$

조건 (나)에서

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2=20$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=20$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})=20$$
$$10+2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})=20$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})=5$$

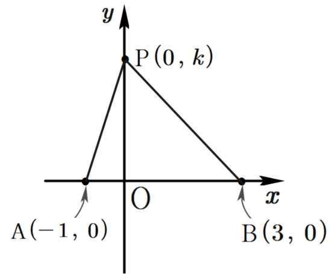
한편 θ를 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ 와 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ 가 이루는 각의 크기라고 할 때

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+5$$
$$=3\cos\theta+5$$

이므로 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ 가 최소가 될 때는 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ 와 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ 가 서로 반대방향일 때 즉, $\theta=\pi$일 때 최소가 된다.

따라서 최솟값 $m=3\cos\pi+5=2$

아래 그림과 같이 점 A, B를 나타내면

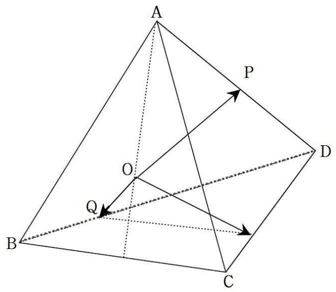


$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2=20$에서

$(1+k^2)+(9+k^2)=20$

$\therefore\ k^2=5 \qquad \therefore\ m+k^2=7$

8. 정답 19



점 Q는 삼각형 BCD의 경계를 포함한 내부의 점이고,

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$을 만족시키는 점이다.

그런데 $|\overrightarrow{PQ}|$가 최대이려면 점 Q는 선분 DB 또는 선분 DC 위에 있어야 한다.

선분 DB 위의 점을 Q라 하자.

$\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$라 하면 $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\vec{a}$이고

$\overrightarrow{DQ} = k\vec{b}$ $(0 < k < 1)$이다.

또, $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 = 16$이고,

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 8$이다.

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$$

$$= (\overrightarrow{DP} - \overrightarrow{DO}) \cdot (\overrightarrow{DQ} - \overrightarrow{DO})$$

$$= \left(\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right) \cdot \left(k\vec{b} - \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}\right) \cdot \left\{-\frac{1}{3}\vec{a} + \left(k - \frac{1}{3}\right)\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}\right\}$$

$$= -\frac{5}{6}k + \frac{2}{3}$$

$-\frac{5}{6}k + \frac{2}{3} = 0$에서 $k = \frac{4}{5}$

따라서 $|\overrightarrow{PQ}|$의 최댓값은

$$|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}|$$

$$= \left|\left(-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{7}{15}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}\right) - \left(\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}\right)\right|$$

$$= \left|-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b}\right|$$

이때,

$$\left|-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b}\right|^2$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b}\right)$$

$$= \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 - \frac{4}{5}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{16}{25}|\vec{b}|^2$$

$$= \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 - \frac{4}{5}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{16}{25}|\vec{b}|^2$$

$$= \frac{1}{4} \times 16 - \frac{4}{5} \times 8 + \frac{16}{25} \times 16$$

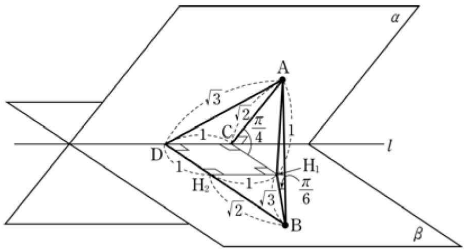
$$= \frac{4 \times 49}{25} = \left(\frac{14}{5}\right)^2$$

이므로 구하는 최댓값은 $\frac{14}{5}$

즉 $p + q = 5 + 14 = 19$

9. 정답 12

아래 그림과 같이 점 A 에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H 라 하자.



이때, $\overline{\mathrm{AB}}=2$이고 직선 AB와 평면 β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AB}}\sin\frac{\pi}{6}=2\times\frac{1}{2}=1$$

$\cdots\cdots$ ㉠

또, $\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{AB}}\cos\frac{\pi}{6}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

한편, $\overline{\mathrm{AH}}\perp\beta$이고 $\overline{\mathrm{AC}}\perp l$이므로 삼수선의 정리에 의해

$$\overline{\mathrm{HC}}\perp l$$

이때, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\angle\mathrm{ACH}=\frac{\pi}{4}$$

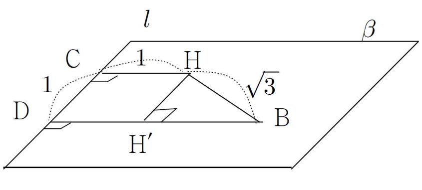
그러므로 직각삼각형 ACD 에서 $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{3}$ 이므로

$$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AD}}^2-\overline{\mathrm{AC}}^2}=\sqrt{3-2}=1$$

$\cdots\cdots$ ㉡

한편, 평면 β위의 점 H 에서 선분 BD 에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 $\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{CH}}=1$, $\overline{\mathrm{CD}}=1$이므로 다음 그림

과 같다.



이때, $\overline{\mathrm{HH'}}=1$이므로 직각삼각형 HH′B 에서

$$\overline{\mathrm{BH'}}=\sqrt{\overline{\mathrm{BH}}^2-\overline{\mathrm{HH'}}^2}$$

$$=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$$

그러므로

$$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{BH'}}+\overline{\mathrm{H'D}}=\sqrt{2}+1$$

$\cdots\cdots$ ㉢

따라서 사면체 ABCD 의 부피는 ㉠, ㉡, ㉢에 의해

$$\frac{1}{3}\times\overline{\mathrm{AH}}\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\overline{\mathrm{BD}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\times1\times\left\{\frac{1}{2}\times1\times(1+\sqrt{2})\right\}$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{2}$$

이므로 $36(a+b)=36\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)=12$

10. 정답 15

$\frac{dx}{dt}=\frac{2}{t}$, $\frac{dy}{dt}=f'(t)$ 이므로 주어진 조건에 의하여

$$\int_1^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt = \int_1^t \sqrt{\frac{4}{t^2}+\{f'(t)\}^2}dt = s$$

또한, $t=\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$ 에서 $t^2-st-1=0$ 이므로

$$s=\frac{t^2-1}{t}$$

즉, $\int_1^t \sqrt{\frac{4}{t^2}+(f'(t))^2}\,dt=\frac{t^2-1}{t}$ 이므로

양변을 t에 대하여 미분하면 $\sqrt{\frac{4}{t^2}+(f'(t))^2}=\frac{t^2+1}{t^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$$\{f'(t)\}^2=\frac{(t^2-1)^2}{t^4}$$

$t=2$일 때 점 P의 속도가 $\left(1,\ \frac{3}{4}\right)$이므로

$$f'(t)=\frac{t^2-1}{t^2}=1-\frac{1}{t^2}\text{ 이다.}$$

그러므로 $f''(t)=\frac{2}{t^3}$

또한, $t=2$일 때 점 P의 가속도가 $\left(-\frac{1}{2},a\right)$이므로

$$a=f''(2)=\frac{1}{4}$$

따라서 $60a=60\times\frac{1}{4}=15$ 이다.

[다른 풀이]

$x=2\ln t$, $y=f(t)$ 이므로

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2}{t}\ ,\ \frac{dy}{dt}=f'(t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{2}{t^2}\ ,\ \frac{d^2y}{dt^2}=f''(t)$$

$\vec{v}=\left(\frac{2}{t},f'(t)\right)$ 에 $t=2$ 를 대입하면

$\vec{v}=(1,f'(2))=\left(1,\frac{3}{4}\right)$이므로

$$\therefore f'(2)=\frac{3}{4}$$

$\vec{a}=\left(-\frac{2}{t^2},f''(t)\right)$ 에 $t=2$를 대입하면

$$\vec{a}=\left(-\frac{1}{2},f''(2)\right)=\left(-\frac{1}{2},a\right)$$

$$\therefore a=f''(2)$$

$$s=\int_1^{\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}}\sqrt{\left(\frac{2}{t}\right)^2+\{f'(t)\}^2}\,dt$$

에서 $g(s)=\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$ 라 하자

$$s=\int_1^{g(s)}\sqrt{\left(\frac{2}{t}\right)^2+\{f'(t)\}^2}\,dt$$

양변을 s에 대하여 미분하면

$$1=\sqrt{\left(\frac{2}{g(s)}\right)^2+\{f'(g(s))\}^2}\cdot(g'(s))$$

양변을 제곱하면

$$\left[\left(\frac{2}{g(s)}\right)^2+\{f'(g(s))\}^2\right]\cdot(g'(s))^2=1$$

$\cdots\cdots$ ㉠

위의 식을 미분하면

$$\left[2\left(\frac{2}{g(s)}\right)\cdot\left(-\frac{2}{\{g(s)\}^2}\right)\cdot g'(s)+2\{f'(g(s))\}\cdot f''(g(s))\cdot g'(s)\right]$$

$(g'(s))^2$

$$+\left[\left(\frac{2}{g(s)}\right)^2+\{f'(g(s))\}^2\right]\cdot 2g'(s)\cdot g''(s)=0$$

$\cdots\cdots$ ㉡

한편,

$$g'(s)=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{2s}{2\sqrt{s^2+4}}\right)=\frac{1}{2}+\frac{s}{2\sqrt{s^2+4}}$$

$$g''(s)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{s^2+4}-s\cdot\frac{2s}{2\sqrt{s^2+4}}}{s^2+4}=\frac{2}{(s^2+4)\sqrt{s^2+4}}$$

$g(s)=\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}=2$ 를 정리하면 $s=\frac{3}{2}$

$g\left(\frac{3}{2}\right)=2$, $g'\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{4}{5}$, $g''\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{16}{125}$

㉠에 $s=\frac{3}{2}$ 를 대입하면

$$\left[\left(\frac{2}{g\left(\frac{3}{2}\right)}\right)^2+\left\{f'\left(g\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right\}^2\right]\cdot\left(g'\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2=1$$

$$\left[\left(\frac{2}{2}\right)^2+\{f'(2)\}^2\right]\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$$

$$f'(2)=\frac{3}{4}$$

ㄴ에 $s=\frac{3}{2}$를 대입하면

$$\left[2\left(\frac{2}{g\left(\frac{3}{2}\right)}\right)\cdot\left(-\frac{2}{\left\{g\left(\frac{3}{2}\right)\right\}^2}\right)\cdot g'\left(\frac{3}{2}\right)\right.$$

$$\left.+2\left\{f'\left(g\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right\}\cdot f''\left(g\left(\frac{3}{2}\right)\right)\cdot g'\left(\frac{3}{2}\right)\right]\cdot\left(g'\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2$$

$$+\left[\left(\frac{2}{g\left(\frac{3}{2}\right)}\right)^2+\left\{f'\left(g\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right\}^2\right]\cdot 2g'\left(\frac{3}{2}\right)\cdot g''\left(\frac{3}{2}\right)=0$$

$$\left[2\left(\frac{2}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{\{2\}^2}\right)\cdot\frac{4}{5}+2\{f'(2)\}\cdot f''(2)\cdot\frac{4}{5}\right]\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$+\left[\left(\frac{2}{2}\right)^2+\{f'(2)\}^2\right]\cdot 2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{16}{125}=0$$

$\therefore a=f''(2)=\frac{1}{4}$

$\therefore 60a=15$

11. 정답 50

벡터 $\overrightarrow{AP}$를 시점이 원점이 되도록 옮겼을 때, 종점을 P'이라 하자.

이때,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}\bullet\overrightarrow{AQ}&=\overrightarrow{OP'}\bullet\overrightarrow{AQ}\\&=\overrightarrow{OP'}\bullet(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA})\\&=\overrightarrow{OP'}\bullet\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP'}\bullet\overrightarrow{OA}\end{aligned}$$

이때, 점 Q가 점 P'이 되도록 잡으면 최댓값을 가지므로

$\overrightarrow{OP'}\bullet\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP'}\bullet\overrightarrow{OA}$

$\le\overrightarrow{OP'}\bullet\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OP'}\bullet\overrightarrow{OA}$

$=1-\overrightarrow{OP'}\bullet\overrightarrow{OA}$ …… ㄱ

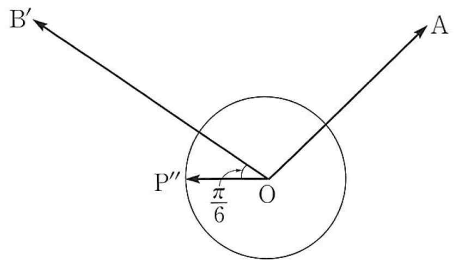
한편,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=(1,\ -\sqrt{2},\ 2\sqrt{3})-(2,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3})\\&=(-1,\ -2\sqrt{2},\ \sqrt{3})\end{aligned}$$

이고 점 B'을 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB'}$이라 하자.

벡터 $\overrightarrow{AP}$와 벡터 $\overrightarrow{AB}$가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$이므로

그림과 같이 점 P'이 세 점 O, A, B'에 의하여 결정된 평면 위에 그림과 같이 P''에 있을 때, $\overrightarrow{OP'}\bullet\overrightarrow{OA}$는 최솟값을 갖는다.



이때, 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'}$이 이루는 각의 크기를 α라 하면

$$\begin{aligned}&\cos\alpha\\&=\frac{(2,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3})\bullet(-1,\ -2\sqrt{2},\ \sqrt{3})}{\sqrt{4+2+3}\sqrt{1+8+3}}\\&=\frac{(-2)+(-4)+3}{6\sqrt{3}}\\&=-\frac{1}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

이때, 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OP''}$이 이루는 각의 크기는

$\alpha+\dfrac{\pi}{6}$ 이고

$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{6}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}$$
$$=-\frac{\sqrt{3}}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{33}}{6}\times\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{33}}{12}$$

그러므로

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}''}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}''}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=1\times\sqrt{4+2+3}\times\left(-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{33}}{6}\right)$$
$$=-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{33}}{4}$$

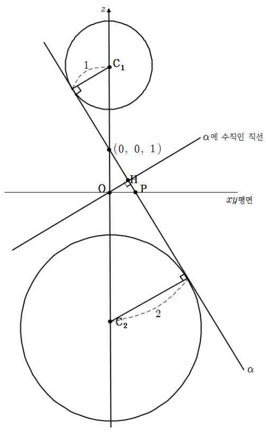
그러므로 ㉠에서

$$1-\overrightarrow{\mathrm{OP}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\le 1-\overrightarrow{\mathrm{OP}''}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$=\frac{7}{4}+\frac{\sqrt{33}}{4}$$

따라서 최댓값은 $\dfrac{7}{4}+\dfrac{\sqrt{33}}{4}$ 이므로

$$a=\frac{7}{4},\ b=\frac{1}{4}$$
$$\therefore\ 16\left(a^2+b^2\right)=50$$

12. 정답 40



두 구 S_1 과 S_2 의 중심을 각각 C_1, C_2 라 하자.
두 구의 중심 C_1, C_2와 점 P 를 지나는 평면으로 자른 단면을 그려보면 평면 α 는 반드시 점$(0,\ 0,\ 1)$을 지남을 알 수 있다.
원점 O 에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H 라 하면 H 는 점 $(0,\ 0,\ 1)$와 점 P를 $3:1$ 로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 1\right)=\frac{1}{8}(3,\ \sqrt{3},\ 2)$$

$/\!/\ (3,\ \sqrt{3},\ 2)$ 이다.
따라서 평면 α의 법선벡터 $(\vec{n})$를 $\vec{n}=(3,\ \sqrt{3},\ 2)$ 로 잡을 수있고 평면 α의 방정식을
$3x+\sqrt{3}y+2z+d=0$로 설정할 수 있다.
여기에 평면 α 위의 점$(0,\ 0,\ 1)$을 대입하면
$d=-2$ 임을 알 수 있다.
평면 α의 방정식은 $3x+\sqrt{3}y+2z-2=0$ 이다.
한편 $\mathrm{Q}(k,\ -\sqrt{3},\ 2)$가 평면 α 위의 점이므로
대입하면 $k=\dfrac{1}{3}$ 이고 $120k=40$ 이다.

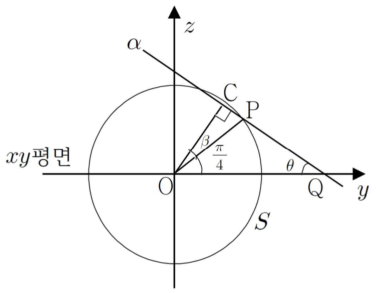
13. 정답 9

원 C를 포함하는 평면을 α라 하고 xy평면과 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ $\left(0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면 (나)에서 원 C의 넓이는 1이므로 정사영의 넓이는

$\pi \times \cos\theta$

이다.

따라서 정사영의 넓이가 최대가 되려면 θ가 최소가 되어야 한다.



원 C의 중심을 C라 하고 직선 CP가 xy평면과 만나는 점을 Q라 하자.

이때 $\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{5}$, $\angle\mathrm{OCQ} = \dfrac{\pi}{2}$이고 (나)에서 $\overline{\mathrm{CP}} = 1$이므로

$$\overline{\mathrm{OC}} = \sqrt{50-1} = 7$$

따라서 $\angle\mathrm{COP} = \beta$라 하면

$$\cos\beta = \frac{7}{\sqrt{50}},\ \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{50}}$$

이때 이면각의 크기 θ가 최초가 되려면 점 C의 z좌표가 최대이어야 하고, 이때 두 점 C, P의 y좌표가 서로 같아야 한다.

따라서 θ가 최소가 되는 경우는 그림과 같이 점 Q가 y축 위에 있을 때이다. 이때 직선 OP와 y축이 이루는 예각의 크기는 $\dfrac{\pi}{4}$이므로 직각삼각형 OCQ에서

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)$$

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{4}\cos\beta + \cos\frac{\pi}{4}\sin\beta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{7}{\sqrt{50}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{50}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{100}} = \frac{4}{5}$$

따라서 원 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은

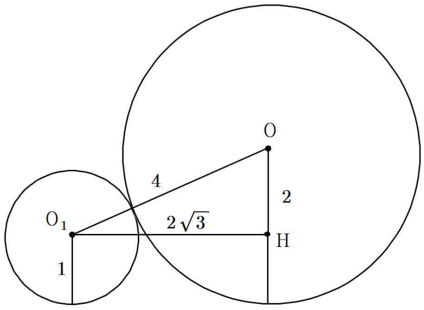
$\pi \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{4}{5}\pi$

이다.

$\therefore p + q = 5 + 4 = 9$

14. 정답 11

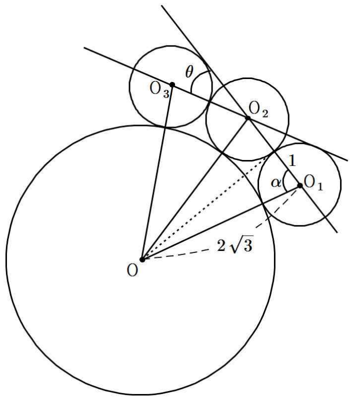
평면과 평면이 이루는 각을 단면화 시켜서 관찰하기 위하여 우선 도형을 옆에서 관찰하면 다음과 같다.



S 의 중심을 O 라 하면

$\overline{\mathrm{OO_1}}=4$, $\overline{\mathrm{OH}}=2$ 이고 $\therefore\ \overline{\mathrm{O_1H}}=2\sqrt{3}$

위에서 이 도형의 이면각 θ를 표현하기 위해 단면화 시키면 다음과 같다.



이때, $\angle \mathrm{OO_1O_2}$를 α라 하면 $\angle \mathrm{O_1OO_2}=\pi-2\alpha$

두 평면이 이루는 각도 $\pi-2\alpha=\theta$이고

$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

$$\cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

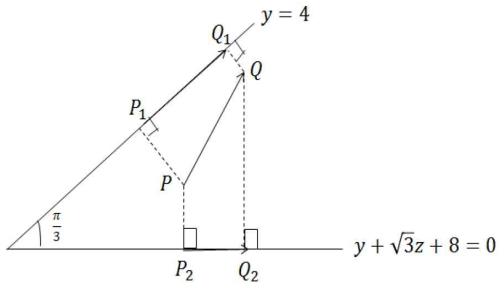
$$=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

도형 D 의 단면의 넓이는 π이므로

따라서 정사영의 넓이는 $\pi\times\dfrac{5}{6}$이다

$\therefore\ p+q=11$

15. 정답 24



두 평면 $y=4$와 $y+\sqrt{3}z+8=0$의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{h_1}$, $\overrightarrow{h_2}$라 하면 두 평면이 이루는 예각의 크기 γ는

$\cos\gamma=\dfrac{\left|\overrightarrow{h_1}\cdot\overrightarrow{h_2}\right|}{\left|\overrightarrow{h_1}\right|\left|\overrightarrow{h_2}\right|}=\dfrac{1}{2}$에서 $\gamma=\dfrac{\pi}{3}$

따라서 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$와 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}$이 이루는 예각의 크기를 α, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$와 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}$이 이루는 예각의 크기를 β라 하면 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $\alpha+\beta=\dfrac{2\pi}{3}$ 이다. 그러므로

$2\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}\right|^2$

$=\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}\right|^2\right)+\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}\right|^2\right)$

$=\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)$

…… ㉠

$=\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2 1-\dfrac{1}{2}(\cos2\alpha+\cos2\beta)$

주어진 식은 $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|$의 값이 최대이고 $\cos2\alpha+\cos2\beta$의 값이 최소일 때 최댓값을 갖는다.

$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$ 인 경우에

$$\cos2\alpha+\cos2\beta$$
$$=\cos2\alpha+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2\alpha\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cos2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\alpha=\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$$

이므로 주어진 식은 $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|=4$이고 $\cos2\alpha+\cos2\beta=-1$일 때 최댓값 24를 갖는다.

$\alpha+\beta=\dfrac{2\pi}{3}$ 인 경우도 마찬가지이다.

그러므로 최댓값은 24이다.

[다른 풀이]

㉠에 이어

$|\overrightarrow{PQ}|^2\cos^2\theta_1 = \left(\frac{1}{2}b+\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2$,

$|\overrightarrow{PQ}|^2 \cdot \cos^2\theta_2 = b^2$ 이므로

$|\overrightarrow{PQ}|^2(\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2) = \left(\frac{1}{2}b+\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2+b^2$

그런데,

$\frac{1}{4}(5b^2+3c^2+2\sqrt{3}bc)$

$=\frac{1}{4}\{6(b^2+c^2)-(b^2+2\sqrt{3}bc+3c^2)\}$

$=\frac{1}{4}\{6(b^2+c^2)-(b+\sqrt{3}c)^2\} \le \frac{6}{4}\cdot(b^2+c^2)$

(단, 등호는 $b=-\sqrt{3}c$ 일 때) $\le \frac{6}{4}(a^2+b^2+c^2)$

(단, 등호는 $a=0$ 일 때) $=\frac{6}{4}\times 16 = 24$

$\therefore$ $a=0$, $b=\pm 2\sqrt{3}$, $c=\mp 2$ 일 때 최댓값 24를 가진다.

16. 정답 14

원점이 아닌 점 A 의 좌표를 다음과 같이 잡는다.

$$\mathrm{A}\left(\frac{t^2}{16},\ t\right)\ (t\ne 0)$$

A 에서의 접선의 방정식은

$$ty = 16\times\frac{\frac{t^2}{16}+x}{2}$$

$\left(\because\ y^2=4px\right.$ 의 $(x_1,\ y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$\left. y_1y=4p\frac{x_1+x}{2}\right)$

$$ty=\frac{t^2+16x}{2}$$

y 절편 (x 가 0 일 때의 y 값)은 $\frac{t}{2}$ 이다.

따라서 점 B는 $(0,\ 0)$, $\left(\frac{t^2}{16},\ t\right)$, $\left(0,\ \frac{t}{2}\right)$ 의 무게 중심이므로

$$\left(\frac{t^2}{48},\ \frac{t}{2}\right)=(x',\ y'),$$

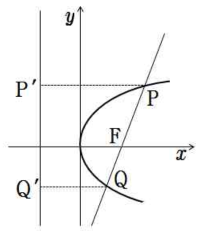
y 좌표를 비교하면 $t=2y'$

x 좌표에서 $x'=\frac{t^2}{48}$ 를 대입

$$x'=\frac{(2y')^2}{48} \qquad \therefore\ y^2=12x$$

곡선 C 의 자취의 방정식은 $y^2=12x\ (x\ne 0)$

초점이 $(3,\ 0)$ 이므로 직선과 곡선 C 를 그리면 다음과 같다.



$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PP'}}=(\mathrm{P}$ 의 x 좌표$)+3$

$\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{QQ'}}=(\mathrm{Q}$ 의 x 좌표$)+3$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}}$

$(\mathrm{P}$ 의 x 좌표$)+(\mathrm{Q}$ 의 x 좌표$)=14$

17. 정답 ②

평면 $2x-y+z=4$ 의 법선벡터는 이고 평면
$x+y+z=3$ 의 $(2,\ -1,\ 1)$ 법선벡터는
$(1,\ 1,\ 1)$이므로 두 평면이 이루는 이면각의 크기를 θ 라
하면

$$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{6}\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

무게중심 $(1,\ 1,\ 3)$에서 $x+y+z=3$ 까지의 거리는

$$\frac{|1+1+3-3|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

그러므로 꼭지점 D 에서 밑면까지의 거리는 $\dfrac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\cos\theta}=\sqrt{6}$

정사면체의 한 변의 길이를 x 라고 놓으면 밑면의
정사각형의 높이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

그러므로 $x^2-\left(\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2=(\sqrt{6})^2$

$\therefore\ \dfrac{2}{3}x^2=6$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\therefore\ x=3$

18. 정답 8

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\right)=\cos\frac{2}{3}\pi$$

$$\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}-\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}|^2=-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{A_0A_2}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\right)=\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A_0A_2}}-\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}|^2=1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\right)=1$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}|=2$$

이때, ㉠, ㉡에 대입하면

$$\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}=1,\ \overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A_0A_2}}=3$$

이고 $\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}$과 $\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}$이 이루는 각의 크기를 θ_1,
$\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}$과 $\overrightarrow{\mathrm{A_0A_2}}$가 이루는 각의 크기를 θ_2라 하면

$$\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}=2|\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}|\cos\theta_1=1$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}|\cos\theta_1=\frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A_0A_2}}=4\cos\theta_2=3$$

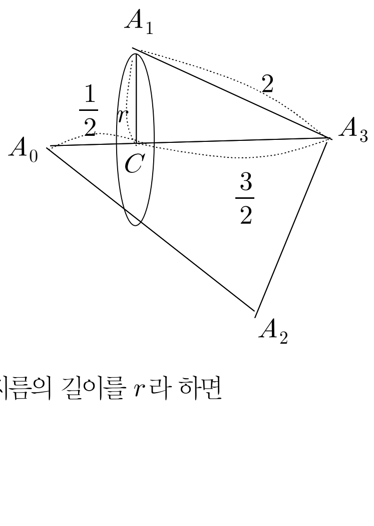
$$\therefore\ \cos\theta_2=\frac{3}{4}$$

이때,

$$|\overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}}|^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\frac{3}{4}=2$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}}|=\sqrt{2}$$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{A_1A_3}}|=2$이고 $|\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}|\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ 이므로 점
$\mathrm{A_1}$이 나타내는 도형은 선분 $\mathrm{A_0A_3}$을 1 : 3으로 내분하는
점을 C라 할 때, 점 C를 중심으로 하는 원이다.

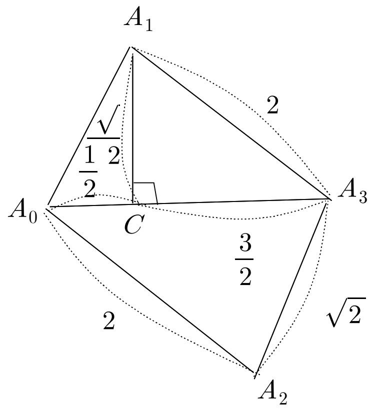


따라서 반지름의 길이를 r라 하면

$$r^2 = 2^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}$$

$$\therefore\ r = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

이때, $|\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}|$가 최대가 되려면 즉, 선분 $\overline{\mathrm{A_1A_2}}$가 가장 긴 경우는 점 $\mathrm{A_1}$이 평면 $\mathrm{A_0A_2A_3}$과 같은 평면에 있을 때이다.



그런데, $\overline{\mathrm{A_0A_1}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$이므로 두 삼각형 $\mathrm{A_0A_1A_3}$, $\mathrm{A_0A_2A_3}$은 합동이므로

$\angle \mathrm{A_1A_0A_3} = \theta_3$이라 하면

$$M^2 = 2^2 + (\sqrt{2})^2 - 2\times 2\times\sqrt{2}\cos(\theta_2+\theta_3)$$

$$= 6 - 4\sqrt{2}(\cos\theta_2\cos\theta_3 - \sin\theta_2\sin\theta_3)$$

$$= 6 - 4\sqrt{2}\left(\frac{3}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}\times\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$$

$$= 6 - \left(\frac{3}{2} - \frac{7}{2}\right) = 8$$

19. 정답 ①

$\triangle$ABC의 법선단위벡터를 $\vec{h}$라 하면 $\vec{h} = (a,\ b,\ c)$, $a^2+b^2+c^2=1$.

yz평면의 법선단위벡터는 $\vec{h} = (1,\ 0,\ 0)$이다.

$\therefore\ b^2 + c^2 = \frac{3}{4},\ a = \pm\frac{1}{2}$

$\triangle$ABC와 평면 $x-2y+2z=1$ 사이의 예각을 α라 하면

$$\cos\alpha = \frac{1\cdot a - 2b + 2c}{3\cdot 1} = \frac{1}{3}((a - 2(b-c)) \ \cdots\cdots\ ㉠$$

$-2b+2c = k$라 하면 $c = b + \frac{k}{2}$

이것을 $b^2 + c^2 - \frac{3}{4} = 0$에 대입하면

$$2b^2 + kb + \frac{k^2}{4} - \frac{3}{4} = 0$$

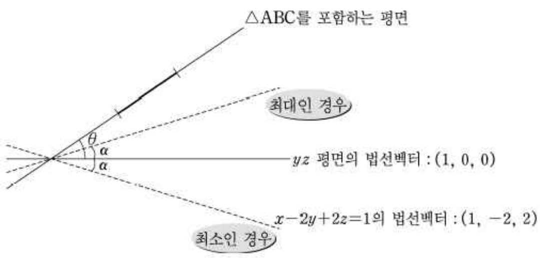
$$D = k^2 - 8\left(\frac{k^2}{4} - \frac{3}{4}\right) = -k^2 + 6 \ge 0$$

$$\therefore\ -\sqrt{6} \le k \le \sqrt{6}$$

$$|\cos\alpha| \le \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{6}}{3} = \frac{1+2\sqrt{6}}{6}$$

$\therefore$ (넓이)$= 6|\cos\alpha| \le 1 + 2\sqrt{6}$

[다른 풀이1]



yz평면과 $x-2y+2z=1$이 이루는 각을 α라 하면,

$$\cos\alpha = \frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{3}$$

$\therefore$ 최댓값은 $6\cdot\cos(\theta-\alpha) = 6\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$

$$=6\left\{\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right\}$$

$$= 6\left(\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = 1 + 2\sqrt{6}$$

[다른 풀이2]

㉠ 이후로 코시-슈바르츠 부등식에서

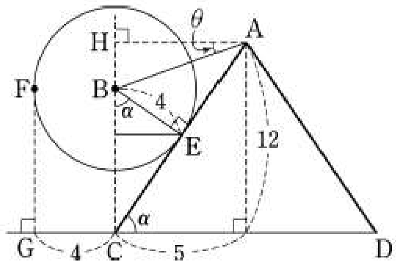
$$(b^2+c^2)(1^2+(-1)^2) \ge (b-c)^2$$

$\therefore\ (b-c)^2 \le \dfrac{3}{2}$

$\therefore\ \cos\alpha \le \dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{1}{2}+2\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)\right\}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\therefore\ 6\cos\alpha$의 최댓값은 $6\cdot\left(\dfrac{1}{6}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)=1+2\sqrt{6}$

20. 정답 32



조건 (나)에서 구와 원기둥의 접점 F, 원뿔과 원기둥의
접점 D, A, B는 한 평면 위에 있다.
또, $2\times7-2\times5=4$에서, B에서 α에 내린 수선의 발은
원기둥의 밑면 원주 위에 있다.
A, B, D를 지나는 평면으로 자른 단면을 그려보면,

$\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$이므로 $\overline{BC}=\dfrac{4}{\cos\alpha}=\dfrac{52}{5}$

$\therefore\ \tan\theta=\dfrac{\overline{BH}}{\overline{AH}}$

$=\dfrac{12-\dfrac{52}{5}}{5}=\dfrac{\dfrac{8}{5}}{5}=\dfrac{8}{25}$

$\therefore\ 100\tan\theta=32$

21. 정답 45

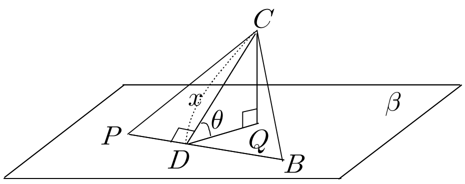
점 P가 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점이고, 점 C에서 평면 α에 이르는 거리가 3이므로 점 P에서 평면 α에 이르는 거리는 1이다.

따라서, 직선 PB는 평면 α와 평행하다.

삼각형 ABC와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ라고 하자.

평면 α에 평행하고 직선 PB를 포함하는 평면을 β라고 하면

삼각형 PBC와 평면 β가 이루는 각의 크기도 θ이다.



점 C에서 직선 PB에 내린 수선의 발을 D라 하고, 점 C에서 평면 β에 내린 수선의 발을 Q라 하자.

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{DQ} \perp \overline{PB}$이므로

$\angle CDQ = \theta$이다.

$\overline{CQ} = 3 - 1 = 2$이므로

$\overline{CD} = x$라 하면 $\sin\theta = \dfrac{2}{x}$이다.

삼각형 ABC의 넓이가 9이므로

삼각형 PBC의 넓이는 $9 \times \dfrac{2}{3} = 6$

따라서, $\dfrac{1}{2} \times \overline{PB} \times x = 6$에서

$\dfrac{1}{2} \times 4 \times x = 6$, $x = 3$

$\therefore \sin\theta = \dfrac{2}{3}$

$\therefore \cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - \dfrac{4}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

따라서, 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이 S는

$S = 9\cos\theta = 9 \times \dfrac{\sqrt{5}}{3} = 3\sqrt{5}$

$\therefore S^2 = 45$

22. 정답 8

삼각형의 높이는 3이므로

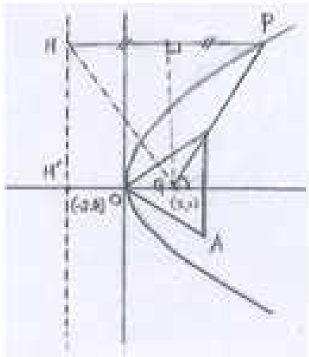
$\overline{OG} = 2$ 준선의 방정식은 $x = -2$

P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{GP}$와 x축이 이루는 각이 60° 이므로 $\angle HPG = 60^\circ$

$\overline{PH} = \overline{PG}$이므로 삼각형 APH는 정삼각형이다

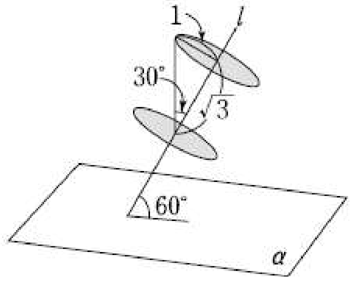
준선과 x축이 만나는 점을 H'이라하면 초점과 준선간의 거리 $\overline{GH'} = 4$

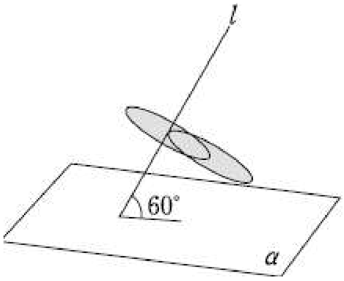
$\overline{GP} = \overline{PH} = 2 \times \overline{GH'} = 2 \times 4 = 8$



23. 정답 ⑤

그림의 원판을 태양광선 방향으로 평행이동하여 만나게 하면 윗 원판이 아래 원판의 중심을 지난다.





겹친 원판의 넓이 S는 아래 그림의 빗금친 부분의 넓이를 S_1이라 하면

$S = 2\times\pi\times 1^2 - 2S_1$ 이다.

S_1은 중심각이 $\frac{2}{3}\pi$인 활꼴이므로

$S_1 = \frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\times 1^2\times\sin\frac{2}{3}\pi$

$= \frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\therefore\ S = 2\pi - \frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$

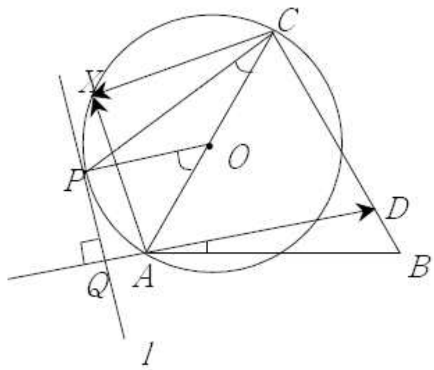
그런데 구하는 그림자의 넓이 S'은 평면과 이루는 각이

$\frac{\pi}{6}$인 정사영이므로

$S' = \left(\frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\cos\frac{\pi}{6}$

$= \left(\frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi + \frac{3}{4}$

24. 정답 17



$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AX} - \overrightarrow{AC})$

$= \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AX} - \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$ …… ㉠

세 점 A, C, D는 고정된 점이므로 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$는 상수이다.

따라서, ㉠에서 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}$의 값이 최소가 되려면 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AX}$의 값이 최소가 되어야 한다.

두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AX}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AX} = |\overrightarrow{AD}|\,|\overrightarrow{AX}|\cos\theta$이고, $|\overrightarrow{AD}|$의 값은 상수이므로

$|\overrightarrow{AX}|\cos\theta$의 값이 최소이어야 한다.

그림과 같이 직선 AD와 수직인 직선이 원과 접할 때의 접점을 P라 하면

$|\overrightarrow{AX}|\cos\theta \ \geq\ |\overrightarrow{AP}|\cos\theta = -|\overrightarrow{AQ}|$

이 때, $\angle POA = \angle OAD = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{15} = \frac{4}{15}\pi$이므로

$2\angle ACP = \angle AOP$에서

$\angle ACP = \frac{1}{2}\times\frac{4}{15}\pi = \frac{2}{15}\pi$

$\therefore p + q = 15 + 2 = 17$

25. 정답 ⑤

ㄱ. $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}|=|\overrightarrow{PB}|=\overline{PB}$ 이므로

선분 PB 의 길이는 점 P 가 점 A 와 일치할 때 최소이다.

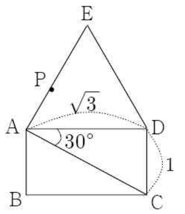
따라서, 최솟값은 $\overline{AB}=1$ 이다. (참)

ㄴ. $\triangle ACD$ 에서 $\overline{AD}=\sqrt{3}$, $\overline{DC}=1$ 이므로

$\angle CAD=30°$

$\triangle EAD$ 가 정삼각형이므로 $\angle EAD=60°$

$\therefore\ \angle EAC=\angle PAC=90°$



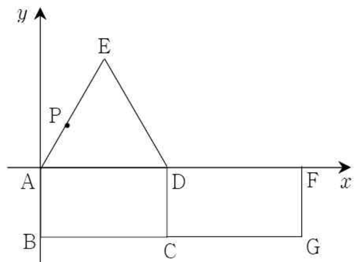
$\therefore\ \overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{AP}$

$\therefore\ \overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}\bullet(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP})$

$=\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{AP}$

$=|\overrightarrow{CA}|^2+0\ =2^2=4$ (참)

ㄷ. 점 A 를 원점, 직선 AD를 x 축으로 하는 좌표평면에 주어진 도형을 나타내면 그림과 같다.



$\overline{AD}=\overline{DF}$ 인 x 축 위의 점을 F 라 하고

직사각형 DCGF 를 그리면

$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{GP}$

이므로 $|\overrightarrow{GP}|$ 의 최솟값은

점 $G(2\sqrt{3},\ -1)$ 에서 직선 AE 에 이르는 거리와 같다.

직선 AE 의 방정식은

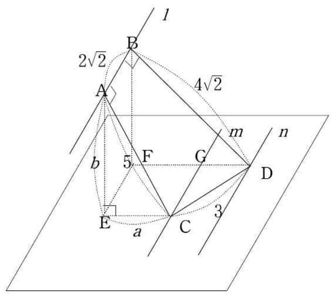
$y=\sqrt{3}x$ 즉, $\sqrt{3}x-y=0$ 이므로

구하는 최솟값은

$$\frac{|\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}-(-1)|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{7}{2}\ \text{(참)}$$

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

26. 정답 30



두 직선 m, n 을 포함하는 평면을 α 라 하자.

$l\mathbin{/\!/}m,\ l\mathbin{/\!/}n$ 이므로 $l\mathbin{/\!/}\alpha$ 이다. 직선 l 위의 두 점 A, B 에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 각각 E, F 라 하고, 선분 FD 와 직선 m 의 교점을 G 라 하자. $\overline{AB}\mathbin{/\!/}\overline{EF}$, $\overline{EF}\mathbin{/\!/}\overline{CG}$ 이고, $\overline{EF}=\overline{CG}=2\sqrt{2}$

이므로 직각삼각형 DGC 에서

$\overline{GD}=\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}=1$

직각삼각형 ABD 에서

$\overline{AD}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{10}$

삼각형 ACD 에서

$\cos(\angle ACD)=\dfrac{5^2+3^2-(2\sqrt{10})^2}{2\cdot 5\cdot 3}=-\dfrac{1}{5}$ 이므로

$\sin(\angle ACD)=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

따라서 삼각형 ACD 의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times5\times3\times\dfrac{2\sqrt{6}}{5}=3\sqrt{6}$ 이다.

$\overline{EC}=a$, $\overline{AE}=\overline{BF}=b$ 라 하면

$\overline{FD}=a+1$ 이고,

삼각형 AEC 에서 $a^2+b^2=25$ ⋯ ㉠

삼각형 BFD 에서 $(a+1)^2+b^2=32$ ⋯ ㉡

㉡-㉠에서 $2a+1=7$, $a=3$

삼각형 ACD 의 평면 α 위로의 정사영은 삼각형 ECD 이고, 삼각형 ECD 의 넓이는

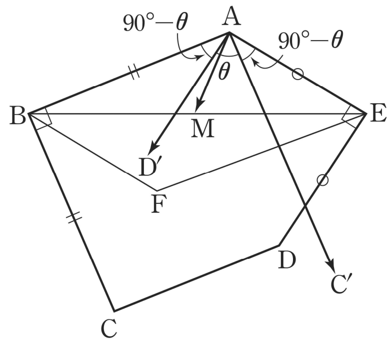
$\dfrac{1}{2}\times\overline{EC}\times\overline{CG}=\dfrac{1}{2}\times3\times2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

따라서, $3\sqrt{6}\times\cos\theta=3\sqrt{2}$ 에서 $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ \tan^2\theta=\sec^2\theta-1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}-1=3-1=2$

$\therefore\ 15\tan^2\theta=30$

27. 정답 ⑤



ㄱ. (참) $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{AE}}$를 이웃하는 두 변으로 하는 평행사변형 ABFE에서 $\overline{\mathrm{AF}}$와 $\overline{\mathrm{BE}}$의 교점이 M이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}})$

ㄴ. (참) 그림에서 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}'\,/\!\!/\,\overrightarrow{\mathrm{ED}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}'\,/\!\!/\,\overrightarrow{\mathrm{BC}}$일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{ED}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}'$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}'$이 이루는 각의 크기도 θ이다. 또, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$가 이루는 각의 크기는

$(90^\circ-\theta)+\theta+(90^\circ-\theta)=180^\circ-\theta$, 즉,

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AE}}|\cos(180°-\theta)$

$=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AE}}|(-\cos\theta)$

$=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}||\overrightarrow{\mathrm{ED}}|(-\cos\theta)$ ($\because$ $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{ED}}$)

$=-\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ED}}$

ㄷ. (참) $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{ED}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2+2\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ED}}+|\overrightarrow{\mathrm{ED}}|^2$

$|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$

$=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2-2\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$

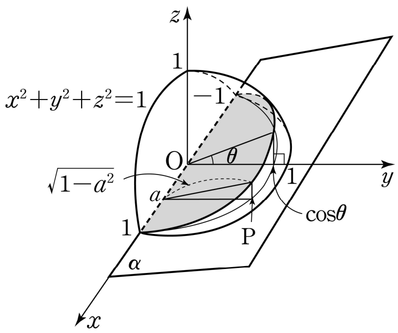
이때, $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$, $|\overrightarrow{\mathrm{ED}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2$이고

ㄴ에서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=-\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ED}}$이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{ED}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|^2$

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

28. 정답 20



그림에서 평면 α가 구 $x^2+y^2+z^2=1$과 만나서 생기는 도형의 xy 평면 위로의 정사영 위의 임의의 한 점의 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ \sqrt{1-a^2}\cos\theta,\ 0)$이라 하면

$a+3\sqrt{1-a^2}\cos\theta-2\le 0$이어야 하므로

$3\sqrt{1-a^2}\cos\theta\le 2-a$

양변을 제곱하여 정리하면

$(1+9\cos^2\theta)a^2-4a+4-9\cos^2\theta\ge 0$

$-1\le a\le 1$에서 항상 성립해야 하므로

방정식 $(1+9\cos^2\theta)a^2-4a+4-9\cos^2\theta=0$의 판별식을 D라 하면

$D/4=4-(1+9\cos^2\theta)(4-9\cos^2\theta)\le 0$

$81\cos^4\theta-27\cos^2\theta\le 0$

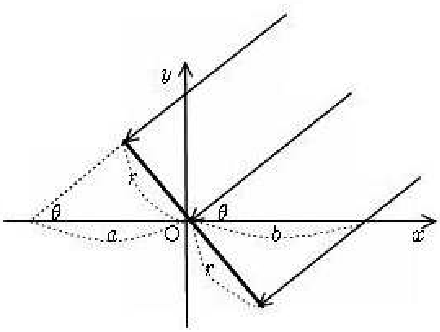
$\therefore\ \cos^2\theta\le\frac{1}{3}$

$\therefore\ 60M^2=60\cdot\frac{1}{3}=20$

29. 정답 ③

ㄱ. 구의 지름 중 구의 중심을 지나고, 교선 l과 평행한 지름의 정사영의 길이는 변치 않으므로 그림자와 교선 l의 공통부분의 길이는 $2r$ 이다 (참)

또, 구의 중심을 교선l 위에 오도록 평행이동하고, 구면 위의 원 중에서 태양광선에 수직인 원의 지름을 xy 평면에서 생각하면 그림과 같다



이때 $a\cos\theta = r$, $b\sin\theta = r$ 이므로

ㄴ. $a\cos60^\circ = b\sin60^\circ$ 에서 $a = \sqrt{3}b$

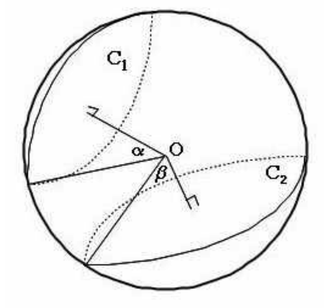
즉 $a > b$ (거짓)

ㄷ. $\cos\theta = \dfrac{r}{a}$, $\sin\theta = \dfrac{r}{b}$ 이므로

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 에 대입하면 $\dfrac{r^2}{a^2} + \dfrac{r^2}{b^2} = 1$

즉 $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{r^2}$ (참)

30. 정답 40



원C_1과 중심에서 원C_1에 그은 벡터$\overrightarrow{OP}$와 평면 α의 법선 벡터가 이루는 각$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$

원C_2과 중심에서 원C_2에 그은 벡터$\overrightarrow{OQ}$와 평면 β의 법선 벡터가 이루는 각$\cos\beta = \dfrac{1}{2}$, $\beta = \dfrac{\pi}{3}$

$\therefore \alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$

평면 α의 법선 벡터와 평면 β의 법선 벡터가 이루는 각 θ는

$\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$ (둔각)

따라서 최단거리를 나타내는 벡터$\overrightarrow{OP}$와 벡터$\overrightarrow{OQ}$가 이루는 각은

$\cos(\theta - \dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{3}{5}$ 이다.

$\overline{PQ}^2 = |\overrightarrow{PQ}|^2 = |\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}|^2 = (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP})$

를 정리하면

최소값은 40이다.

31. 정답 30

$\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}$ 라 놓으면

$\overrightarrow{OM}=\frac{2}{3}(3,\ 3,\ 3)+\frac{1}{3}(x,\ y,\ z)=\frac{1}{3}(6+x,\ 6+y,\ 6+z)$

$|\overrightarrow{OM}|=\frac{1}{3}\sqrt{(6+x)^2+(6+y)^2+6+z)^2}$

$=\frac{1}{3}\sqrt{108+12(x+y+z)+x^2+y^2+z^2}$

$=\frac{1}{3}\sqrt{108+12(x+y+z)+9}$

$=\frac{1}{3}\sqrt{12x+12y+12z+117}$

여기에서 $x^2+y^2+z^2=9$ ⋯⋯ ①

$12x+12y+12z+117=k$ ⋯⋯ ② 라 놓고

①, ②를 동시에 만족하는 실수 $x,\ y,\ z$ 가 존재하도록 하는 k 의 범위를 먼저 구한다. 즉, 이 평면과 구가 만나는 조건은 구의 중심에서 이 평면까지의 거리가 구의 반지름 이하가 되는 것이다.

$\frac{|-k+117|}{\sqrt{12^2+12^2+12^2}}\le 3 \Leftrightarrow |k-117|\le 36\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 117-36\sqrt{3}\le k\le 117+36\sqrt{3}$

$|\overrightarrow{OM}|\le\frac{1}{3}\sqrt{117+36\sqrt{3}}=\sqrt{13+4\sqrt{3}}$

$=\sqrt{(1+2\sqrt{3})^2}=1+2\sqrt{3}$

$\therefore\ a=1,\ b=2$

$\therefore\ 10(a+b)=10\times 3=30$

[다른 풀이]

벡터 $\overrightarrow{OA}$ 와 $\overrightarrow{OP}$ 가 이루는 각을 θ 라 하면

$\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right|^2$

$=\frac{4}{9}|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{1}{9}|\overrightarrow{OP}|^2+\frac{2}{9}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$

$=\frac{4}{9}\times 27+\frac{1}{9}\times 9+\frac{4}{9}\times 3\sqrt{3}\times 3\times\cos\theta$

$=13+4\sqrt{3}\cos\theta\le 13+4\sqrt{3}$

$\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right|\le\sqrt{13+4\sqrt{3}}$

$=\sqrt{(1+2\sqrt{3})^2}=1+2\sqrt{3}$

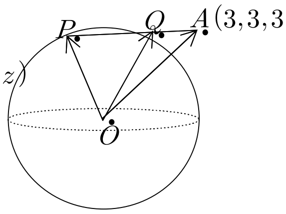
$\therefore\ a=1,\ b=2$

$\therefore\ 10(a+b)=10\times 3=30$

[다른 풀이]

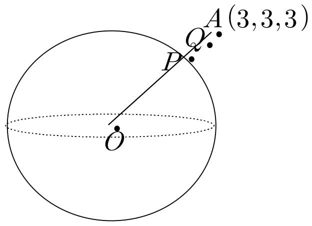
선분 AP 를 1 : 2 로 내분하는 점을 Q 라고 할 때,

$\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}$ 이다.



$|\overrightarrow{OP}|=3$, $|\overrightarrow{OA}|=3\sqrt{3}$ 로 일정하므로

$|\overrightarrow{OQ}|$의 값이 최대가 되는 것은 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OA}$ 의 방향이 같을 때이다.



$\overline{PQ}=\frac{2}{3}\overline{PA}=\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-3)=2\sqrt{3}-2$ 이므로

$|\overrightarrow{OQ}|=3+(2\sqrt{3}-2)=1+2\sqrt{3}$

$\therefore\ a=1,\ b=2$

$\therefore\ 10(a+b)=10(1+2)=30$

[다른 풀이]

점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하면

$\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}(3,\ 3,\ 3)+\frac{1}{3}(x,\ y,\ z)$

$=\frac{1}{3}(x+6,\ y+6,\ z+6)$이므로

$\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}\right|=\left|\frac{1}{3}(x+6,\ y+6,\ z+6)\right|$

$=\frac{1}{3}\sqrt{(x+6)^2+(y+6)^2+(z+6)^2}$

$\sqrt{(x+6)^2+(y+6)^2+(z+6)^2}$ 는 구면 위의 점 $P(x,\ y,\ z)$와 점 $Q(-6,\ -6,\ -6)$ 사이의 거리이므로 $\overline{PQ}$ 의 최댓값은

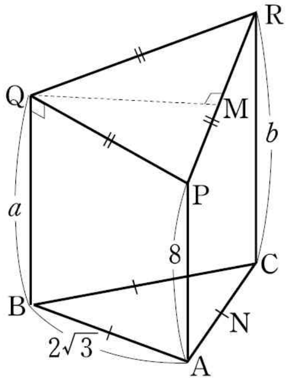
$\overline{OQ}+3=\sqrt{6^2+6^2+6^2}+3=6\sqrt{3}+3$ 이다.

따라서, $\frac{1}{3}\sqrt{(x+6)^2+(y+6)^2+(z+6)^2}$ 의 최댓값은

$\frac{1}{3}(6\sqrt{3}+3)=2\sqrt{3}+1$ 이므로 $a=1,\ b=2$이다.

$\therefore\ 10(a+b)=10(1+2)=30$

32. 정답 25



세 점 P, Q, R에서 α에 내린 수선의 발을 각각 A, B, C라 하면 $\triangle$ABC는 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형이다.

$\overline{\mathrm{AP}}=8$, $\overline{\mathrm{BQ}}=a$, $\overline{\mathrm{CR}}=b$라 하면

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{12+(a-8)^2}$, $\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{12+(b-a)^2}$,

$\overline{\mathrm{RP}}=\sqrt{12+(b-8)^2}$ 이고

$(b-8)^2>(b-a)^2$, $(b-8)^2>(a-8)^2$ 이므로

$\overline{\mathrm{RP}}>\overline{\mathrm{PQ}}$, $\overline{\mathrm{RP}}>\overline{\mathrm{QR}}$

$\therefore$ $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}$ 이고 $a-8=b-a$ …… ㉠

$a=8+t$, $b=8+2t$라 하면 $(t>0)$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{12+t^2}$,

$\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{12+4t^2}=2\sqrt{t^2+3}$ 이므로

$\overline{\mathrm{PR}}$의 중점을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{QM}}\perp\overline{\mathrm{PR}}$이므로

$\overline{\mathrm{QM}}=\sqrt{12+t^2-(t^2+3)}=3$

$\therefore$ $\triangle\mathrm{PQR}=3\sqrt{t^2+3}$

$\triangle\mathrm{PQR}\times\cos 60^\circ=\triangle\mathrm{ABC}$에서

$\frac{3}{2}\sqrt{t^2+3}=3\sqrt{3}$

따라서 $a=11$, $b=14$이고 $a+b=25$

[다른 풀이]

$\overline{PR}$ 이 최대이므로 $\triangle PQR$ 이 이등변삼각형이 되려면 $\overline{PQ}=\overline{QR}$

$a-8=c$ 라 놓으면 $\overline{PQ}=\overline{QR}=\sqrt{12+c^2}$

그리고 $b-8=2c$ 이므로 $\overline{PR}=\sqrt{12+4c^2}$

$\triangle P'Q'R'=\triangle PQR\cos 60^\circ$ 이므로

$$\triangle PQR=\frac{\triangle P'Q'R'}{\cos 60^\circ}=2\triangle P'Q'R'$$

$$=2\times\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{3})^2=6\sqrt{3}$$

$\angle PQR=\theta$ 라 놓으면

$$\triangle PQR=\frac{1}{2}\overline{PQ}\,\overline{QR}\sin\theta=\frac{1}{2}(12+c^2)\sin\theta=6\sqrt{3}$$

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{12\sqrt{3}}{12+c^2}$$

또 $\triangle PQR$ 에서

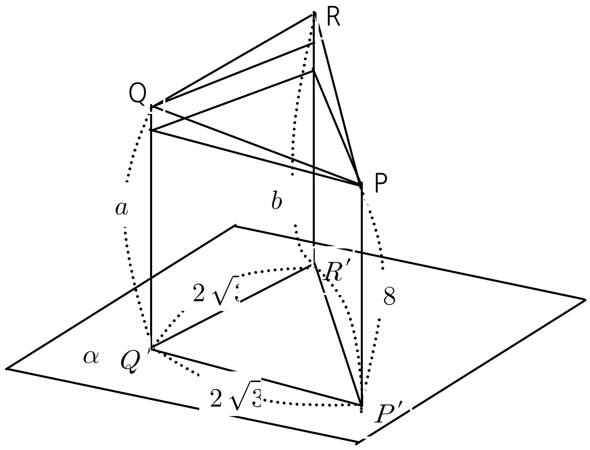
$$\cos\theta=\frac{\overline{PQ}^2+\overline{QR}^2-\overline{PR}^2}{2\,\overline{PR}\,\overline{QR}}$$

$$=\frac{12+c^2+12+c^2-12-4c^2}{2(12+c^2)}=\frac{6-c^2}{12+c^2}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 을 이용하면

$$\frac{432}{(12+c^2)^2}+\frac{(6-c^2)^2}{(12+c^2)^2}=1$$

$$432+36-12c^2+c^4=144+24c^2+c^4$$

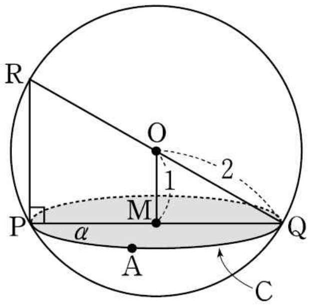


$\therefore\ c^2=9 \iff c=3$

$\therefore\ a-8=3,\ b-8=6 \iff a=11,\ b=14$

$\therefore\ a+b=25$

33. 정답 15



구의 중심 O$(0,\ 0,\ 0)$에서 평면

$\alpha\ :\ y-\sqrt{3}z=2$까지의 거리는 $\dfrac{2}{\sqrt{1+3}}=1$이고

C의 중심을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{OM}}=1$

P, Q가 원 C의 지름의 양 끝점이므로, P, Q의 중점이 C의 중심 M이다.

따라서 원 C의 반지름 $\overline{\mathrm{MQ}}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}$이므로 $\overline{\mathrm{AQ}}=\sqrt{6}$

구의 중심 O가 선분 $\overline{\mathrm{RQ}}$ 위에 존재하므로

$\angle\mathrm{QAR}=90^\circ$

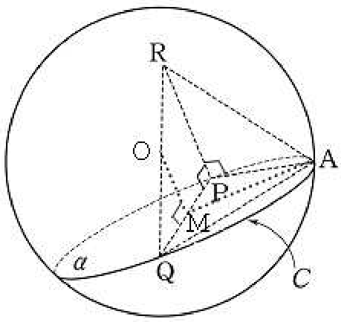
$\overline{\mathrm{AQ}}^2+\overline{\mathrm{AR}}^2=\overline{\mathrm{RQ}}^2$이므로

$\overline{\mathrm{AR}}=\sqrt{4^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{10}$

$\therefore\ S=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\sqrt{6}=\sqrt{15}$

$\therefore\ S^2=15$

[다른 풀이]



평면 PQR은 원 C의 지름 PQ를 지나고 평면 α에 수직이므로 구를 이등분한다. 그러므로 평면 PQR과 구의 교선은 구의 중심O를 중심으로 하는 대원이다.

그런데 $\angle\mathrm{QPR}=90^\circ$이므로 선분 QR은 이 대원의 지름 즉, 구의 지름이다.

선분 OM의 길이는 점 O에서 평면 $y-\sqrt{3}z-2=0$까지의 거리이므로

$\overline{\mathrm{OM}}=\dfrac{|-2|}{\sqrt{0^2+1^2+(-\sqrt{3})^2}}=1$

$\overline{\mathrm{QM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OQ}}^2-\overline{\mathrm{OM}}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

$\triangle\mathrm{APQ}$는 직각이등변 삼각형이므로

$\overline{\mathrm{PM}}=\overline{\mathrm{QM}}=\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}=\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{6}$

그리고 $\overline{\mathrm{RP}}=2\overline{\mathrm{OM}}=2$

직선 RP$\perp\alpha$이므로 $\overline{\mathrm{RP}}\perp\overline{\mathrm{AP}}$

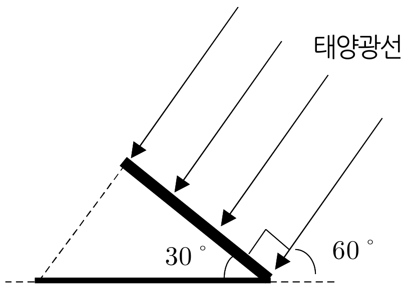
$\therefore\ \overline{\mathrm{AR}}=\sqrt{\overline{\mathrm{RP}}^2+\overline{\mathrm{AP}}^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{6})^2}=\sqrt{10}$

$\overline{\mathrm{AQ}}^2+\overline{\mathrm{AR}}^2=\overline{\mathrm{QR}}^2$이므로 $\angle\mathrm{QAR}=90^\circ$

$\therefore\ s=\triangle\mathrm{AQR}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{AR}}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{10}=\sqrt{15}$

$\therefore\ s^2=15$

34. 정답 30



태양광선이 위의 그림처럼 판에 수직으로 비춰질 때 즉, 지면과 판이 이루는 각의 크기가 30° 이면 그림자의 넓이 S가 최대가 된다.

판의 넓이는 $4^2-\pi=16-\pi$이므로

$S=\dfrac{16-\pi}{\cos30^\circ}=\dfrac{16-\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}(32-2\pi)}{3}$

$\therefore\ a=32,\ b=-2$

$\therefore\ a+b=32-2=30$

35. 정답 ①

구$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$ 의 반지름의

길이가 3이므로 $|\overrightarrow{CP}|=|\overrightarrow{CQ}|=3$

두 벡터 $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{CQ}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CQ}=|\overrightarrow{CP}||\overrightarrow{CQ}|\cos\theta=9\cos\theta$ 이므로

$\cos\theta$ 의 값이 최소일 때, $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CQ}$ 의 값도 최솟값을

갖는다.

또한, $0 \le \theta < \pi$ 일 때 θ 의 값이 클수록 $\cos\theta$ 의 값이

작아지므로 구와 평면의 교선인 원 S 위의 점 P, Q가

지름의 양 끝점일 때 $\cos\theta$ 는 최솟값을 갖는다.

구의 중심 $C(1,\ 1,\ 1)$ 에서 평면$x+y+z=6$ 에 이르는

거리는 $\dfrac{|1+1+1-6|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\sqrt{3}$

이고, 구의 반지름의 길이가 3이므로 원 S의 반지름의

길이를 r 라 하면

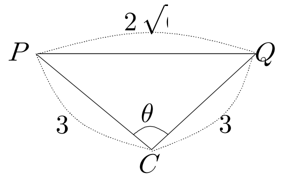
$r=\sqrt{3^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}$

삼각형 CPQ 에서 제이코사인법칙에 의하여

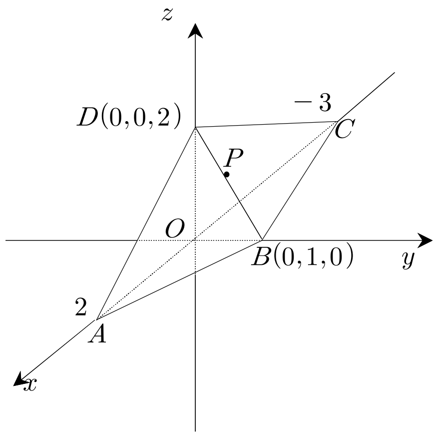
$\cos\theta=\dfrac{3^2+3^2+(2\sqrt{6})^2}{2 \cdot 3 \cdot 3}=-\dfrac{1}{3}$ 이므로

구하는 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CQ}$ 의 최솟값은

$9\cos\theta=9 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right)=-3$



36. 정답 11



직선 BD 의 방정식은 $\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$, $x=0$ 이고, 직선

위의 임의의 점 P 의 좌표를 $(0,\ t,\ -2t+2)$로 놓으면

$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=2^2+(-t)^2+(2t-2)^2$

$+(-3)^2+(-t)^2+(2t-2)^2$

$=10t^2-16t+21=10\left(t-\dfrac{4}{5}\right)^2+\dfrac{73}{5}$

$t=\dfrac{4}{5}$ 일 때, $\overline{PA}^2+\overline{PC}^2$ 의 값은 최소이고,

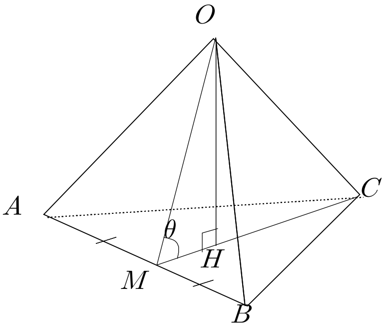
점 P 의 좌표는 $\left(0,\ \dfrac{4}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$ 이므로 점 P 는 선분 BD

위에 있다.

$\therefore a+b+c=0+\dfrac{4}{5}+\dfrac{2}{5}=\dfrac{6}{5}$

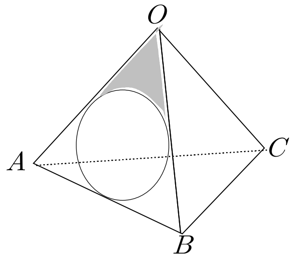
$\therefore p+q=5+6=11$

37. 정답 27



두 평면 $OAB,\ ABC$가 이루는 각을 θ 라 하면

$$\cos\theta = \frac{\overline{MH}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{MH}}{\overline{CM}} = \frac{1}{3}$$



위의 그림과 같이 $\triangle OAB$ 에서 어두운 부분을 평면 ABC 위로 정사영시키고, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$ 에서도 같은 방법으로 정사영시키면 이들은 서로 겹치지 않고 $S_1,\ S_2,\ S_3$ 로 둘러싸인 부분과 일치한다.

$\triangle OAB$ 에서 내접원의 반지름의 길이를 r 라고 하면

$$\frac{1}{2}r(6+6+6) = \frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2$$

$\therefore r = \sqrt{3}$

따라서, 어두운 부분의 넓이는

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2 - 3\pi\right) = 3\sqrt{3} - \pi \text{ 이므로}$$

구하는 넓이 S 는

$$S = (3\sqrt{3}-\pi)\times\cos\theta\times 3 = (3\sqrt{3}-\pi)\times\frac{1}{3}\times 3$$

$$= 3\sqrt{3} - \pi$$

$\therefore (S+\pi)^2 = (3\sqrt{3})^2 = 27$

38. 정답 11

원C 위의 점 P 를 $(x_1,\ y_1,\ 0)$이라 하면 $x_1^{\,2} + y_1^{\,2} = 1$

직선 AP 의 방정식을 구해보면

$\dfrac{x}{x_1} = \dfrac{y}{y_1} = \dfrac{z-3}{-3}$ 이고, 직선 위의 점은

$Q(x_1t,\ y_1t,\ -3t+3)$으로 나타낼 수 있다.

이 직선과 구의 교점을 구하면

$$(x_1t)^2 + (y_1t)^2 + (-3t+1)^2$$

$$= (x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + 9)t^2 - 6t + 1 = 1$$

정리하면 $10t^2 - 6t = 0$ $\quad\therefore\ t = 0$ 또는 $t = \dfrac{3}{5}$

$t = 0$ 이면 조건에 맞지 않고

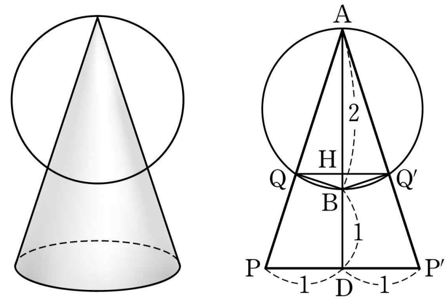
$t = \dfrac{3}{5}$ 이면 $Q\left(\dfrac{3}{5}\mathrm{x}_1, \dfrac{3}{5}\mathrm{y}_1, \dfrac{6}{5}\right)$

$\therefore$ Q 의 자취는 $x^2 + y^2 = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2,\ z = \dfrac{6}{5}$

$\therefore$ 자취의 길이는 $2\pi\times\dfrac{3}{5} = \dfrac{6}{5}\pi$ $, a+b = 11$

[다른 풀이]

점 A 와 원C 위의 점 P 를 이은 선분의 자취는 그림 ①과 같이 원뿔이 된다. 따라서 구하는 점은 원뿔과 구의 교점의 집합이다.



z 축을 포함하는 평면으로 그림 ②와 같이 잘라보면 Q 는 H 로부터 거리가 일정하고 $\overline{QQ'} \perp \overline{AH}$ 이므로 자취는 원이 된다. $\overline{AP} = \sqrt{10}$ 이므로

$$\overline{AQ} = 2\times\cos(\angle QAB) = 2\times\cos(\angle PAD)$$

$$= \frac{6}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore\ \overline{QH} = \overline{AQ}\cdot\sin(\angle PAD) = \frac{6}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{3}{5}$$

따라서, 반지름 $\dfrac{3}{5}$ 인 원이므로 자취의 길이는 $\dfrac{6}{5}\pi$ 이다.

$\therefore\ a+b = 11$

39. 정답 15

반구에 나타나는 단면인 원의 반지름은

$\sqrt{36-(2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36-12} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

오른쪽 그림에서 어두운 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{6})^2 \times \frac{3}{2}\pi + \frac{1}{2}(2\sqrt{6})^2$

$= 12\left(\frac{3}{2}\pi + 1\right) = 12 + 18\pi$

단면의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는

$(12+18\pi)\cos 45 = \sqrt{2}(6+9\pi)$

$\therefore\ a+b = 15$

40. 정답 216

사면체 PQRS 의 부피는

$V = \frac{1}{3}\times \triangle \mathrm{PRS} \times \overline{\mathrm{PQ}} = \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times y \times x\right)\times z$

한편, $\overline{\mathrm{QR}} = \overline{\mathrm{QS}}$ 이므로 $x^2+z^2 = y^2+z^2 \quad \therefore\ x = y$

$\therefore\ V = \frac{1}{6}x^2 z = \frac{1}{12}x^2(54-3x)$

$(\because\ x+2y+2z=54) = \frac{1}{4}x^2(18-x)$

$V' = \frac{3}{4}x(12-x) = 0$ 에서

$x = 12$ 일 때, 극대이자 최대가 된다.

따라서, 부피의 최댓값은 $\frac{1}{4}\times 12^2 \times 6 = 216$

41. 정답 43

A를 원점, $\overline{\mathrm{AB}}$ 가 x축, α를 xy평면, $\overline{\mathrm{AD}}$를 z축으로 하는 좌표축을 도입하면 A$(0,\ 0,\ 0)$, B$(3,\ 0,\ 0)$, C$\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\sqrt{3},\ 0\right)$, D$(0,\ 0,\ 4)$

$\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{DC}}|^2$

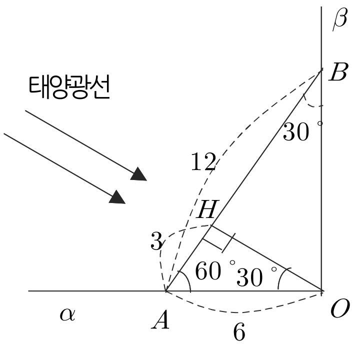
$= \left|(3,\ 0,\ 0) + \left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\sqrt{3},\ -4\right)\right|^2$

$= \left|\left(-\frac{9}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2},\ -4\right)\right|^2$

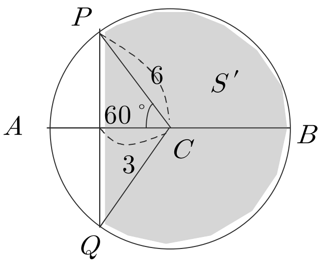
$= \frac{81}{4} + \frac{27}{4} + 16 = 27 + 16 = 43$

42. 정답 34

반지름의 길이가 6 인 원판이 평면 α , β 와 맞닿는 점을 각각 A, B 라 하고, 두 점 A, B 에서 교선 l 에 내린 수선의 발을 O 라 하고, 점 O 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 주어진 상황의 단면을 다음 그림과 같이 나타낼 수 있다.



그림자가 S 부분에 해당되는 영역 S' 은 원판에서 다음과 같다.



$S' = 6^2\pi - \{$(부채꼴PQC의 넓이)$-$(삼각형 PQC의 넓이)$\}$

$$= 36\pi - \left(\frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= 36\pi - (12\pi - 9\sqrt{3})$$

$$= 24\pi + 9\sqrt{3}$$

이 때, $S = \dfrac{S'}{\cos 30^\circ}$ 이므로

$$S = \frac{24\pi + 9\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 18 + 16\sqrt{3}\pi$$

$\therefore a = 18,\ b = 16$

$\therefore a + b = 34$

43. 정답 84

$x^2 + y^2 + z^2 = 81$ $\cdots\cdots$ ㉠

$x^2 + (y-5)^2 + z^2 = 56$ $\cdots\cdots$ ㉡에서

㉠ $-$ ㉡을 계산하여 정리하면 $y = 5$

따라서 두 구가 만나는 원은 평면 $y = 5$ 위에 있다.

구의 방정식 ㉠에 $y = 5$를 대입하면

$x^2 + z^2 = 56$ $\cdots\cdots$ ㉢

따라서 두 구가 만나서 생기는 원의 방정식은

$x^2 + z^2 = 56,\ y = 5$

이 원 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ 0,\ z)$의 xy평면 위로의 정사영은 $\mathrm{P}'(x,\ 5,\ 0)$이고, 두 점 Q, R 의 좌표는 각각 $(0,\ 9,\ 0)$, $(0,\ -9,\ 0)$ 이므로 삼각형 $QP'R$ 의 넓이 S는

$$S = \frac{1}{2} \cdot \overline{QR} \cdot |x| = 9|x|$$

이 때, 사면체 $PQP'R$의 높이는 $|z|$이므로

이 사면체의 부피 V는 $V = \dfrac{1}{3} \cdot S|z| = 3|xz|$

그런데, 산술평균과 기하평균의 대소 관계에 의해

$x^2 + z^2 = 56 \geq 2\sqrt{x^2 z^2} = 2|xz|$이므로 $|xz| \leq 28$

$\therefore\ V = 3|xz| \leq 3 \cdot 28 = 84$

따라서 구하는 사면체의 부피의 최댓값은 84 이다.

44. 정답 27

구의 방정식 $x^2+y^2+z^2=4$에 $z=-1$을 대입하면

$x^2+y^2=3$이므로 원 C는 중심이 $(0,\ 0,\ -1)$,

반지름의 길이가 $\sqrt{3}$이고 평면 $z=-1$에 놓인 원이다.

이 때, x축을 포함하고 이 원과 오직 한 점에서 만나는 평면 α는 두 점 $O(0,\ 0,\ 0)$, $A(0,\ \sqrt{3},\ -1)$ (또는 $(0,\ -\sqrt{3},\ 0)$)을 지나야 한다.

따라서 평면 α는 x축과 직선 OA (또는 OB)를 포함한다.

이 때, x축의 방향벡터는 $\vec{x}=(1,\ 0,\ 0)$이고 직선 OA의 방향벡터 (또는 직선 OB의 방향벡터)는

$\vec{a}=(0,\sqrt{3},-1)$ (또는 $\vec{b}=(0,-\sqrt{3},-1)$) 이므로

평면 α의 법선벡터 $\vec{n}$은 벡터 $\vec{x}$와 벡터 $\vec{a}$ (또는 $\vec{b}$)와 각각 수직이어야 한다.

그런데 한 법선벡터가 $\vec{n}=(a,\ 3,\ b)$이므로

$\vec{n}\cdot\vec{x}=(a,\ 3,\ b)\cdot(1,\ 0,\ 0)=0$에서 $a=0$이고,

$\vec{n}\cdot\vec{a}=(a,\ 3,\ b)\cdot(0,\ \sqrt{3},\ -1)=0$에서

$3\sqrt{3}-b=0$

$\therefore\ b=3\sqrt{3}$

$\therefore\ a^2+b^2=0+27=27$

[참고]

$\vec{n}\cdot\vec{b}=(a,\ 3,\ b)\cdot(0,\ -\sqrt{3},\ -1)=0$일 경우에도

$3\sqrt{3}+b=0$이므로 $b=-3\sqrt{3}$이다.

$\therefore\ a^2+b^2=0+27=27$

45. 정답 12

두 직각삼각형 $\mathrm{PCO_1}$, $\mathrm{PCO_2}$는 합동이므로

$\angle\mathrm{PCO_1}=\angle\mathrm{PCO_2}=60^\circ$ 이다.

따라서 두 원 위의 임의의 두 점 A, B에 대하여

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=4$이다.

이 때, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$

$=32+2|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|\cos\theta=32+32\cos\theta$

$\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=4\sqrt{2+2\cos\theta}$

이 때, $\cos\theta$의 값은 두 점 A, B가 점 C와 일치할 때

$\cos\theta=\cos0=1$로 최대이고,

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$의 최대값은 $M=8$이다.

또, $\cos\theta$의 값은 두 점 A, B가 각각 두 반직선 $\mathrm{CO_1}$, $\mathrm{CO_2}$와 두 원 S_1, S_2와 점 C가 아닌 점에서 만나는 점일 때,

$\cos\theta=\cos(\angle\mathrm{APB})=\cos(\angle\mathrm{APC}+\angle\mathrm{BPC})$

$=\cos(2\cdot\angle\mathrm{CPO_1}+\angle\mathrm{CPO_2})=$

$\cos(4\cdot\angle CPO_1)=\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$로 최소이고,

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$의 최소값은 $m=4$이다.

$\therefore\ M+m=12$

(다른 풀이)

두 점 A, B가 점 C와 모두 일치할 때

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$는 최대이고$\overline{\mathrm{PC}}=4$이므로

최대값은 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=|2\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=8$이다.

또, 두 점 A, B가 각각 두 반직선 $\overrightarrow{\mathrm{CO_1}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CO_2}}$ 와 두 원 S_1, S_2와 점 C가 아닌 점에서 만나는 점일 때,

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$는 최소이다.

이 때, 이 두 교점을 각각 M,N이라

하면$\overline{\mathrm{PM}}=\overline{\mathrm{PN}}=4$이고

$\angle\mathrm{MPN}=\frac{2}{3}\pi$이므로 평행사변형법에 의해 최소값은

$2\times4\times\cos\frac{1}{3}\pi=4$이다.

46. 정답 ②

물의 부피는 항상 일정하므로

$\int_0^u \frac{y}{3}dy + \int_0^v \left(y - \frac{y}{3}\right)dy = k$ (상수)에서

$\frac{u^2}{6} + \frac{v^2}{3} = k$

양변을 u 에 대하여 미분하면 $\frac{u}{3} + \frac{2}{3}v \cdot \frac{dv}{du} = 0$

$u = 2v$ 이므로 $\frac{dv}{du} = -1$

47. 정답 ②

$v = \sqrt{20y}$ 를 t 에 관하여 미분하면

$\frac{dv}{dt} = \frac{10}{\sqrt{20y}} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{10}{v} \cdot \frac{dy}{dt}$ …… (1)

한편, 물탱크에 있는 물의 양의 순간 변화율은

$120\frac{dy}{dt}$ 이고, 빠져나가는 순간의 물의 양은 $\frac{1}{5} \times v$ 이다.

이 때, 두 물의 양은 부호만 다르므로

$120\frac{dy}{dt} = -\frac{v}{5}$ …… (2)

(2)식에서 얻은 $\frac{dy}{dt}$ 를 (1)식에 대입하여 정리하면

$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{60}$

이 때, $y = 5$ 일 때 $v = 10$, $y = \frac{5}{4}$ 일 때, $v = 5$ 이므로

$5 = 10 + \int_0^t -\frac{1}{60}dt$

$-5 = -\frac{1}{60}t$

$\therefore t = 300$

따라서, 구하는 시간은 300 (초)이다.

48. 정답 ⑤

$\overrightarrow{OA}$ 와 $\overrightarrow{OB}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라고 하면

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta \leqq 0$ 이므로 $\cos\theta \leqq 0$

$\therefore \frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{3}{2}\pi$

한편, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 가 x 축과 이루는 각을 각각 α, β 라

하면 $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{4}$

(i) $\alpha = 0$ 일 때, $\frac{\pi}{2} \leqq \beta \leqq \frac{3}{2}\pi \left(\because \frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{3}{2}\pi\right)$

(ii) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 일 때,

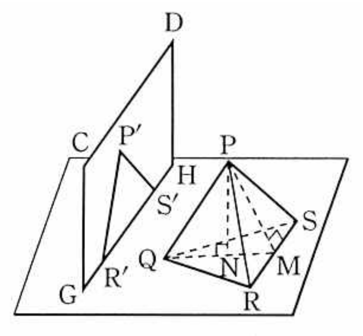
$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \leqq \beta \leqq \frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{4} \left(\because \frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{3}{2}\pi\right)$

(i), (ii)의 공통 부분은 $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \leqq \beta \leqq \frac{3}{2}\pi$ 이므로

점B의 영역은 ⑤ 의 어두운 부분과 같다.

49. 정답 ③

△PRS의 평면 CGHD 위로의 정사영을△ P′R′S′ 이라 하자. P에서 △QRS에 수선 PN를 내리면 △PQN≡△PRN≡△PSN 이므로 점 N은 정삼각형 QRS의 무게중심이다.



직선 QN과 직선 RS의 교점을 M이라 하면

$\overline{RM}=\overline{SM}$, $\overline{QN}=\overline{NM}=2:1$

$\therefore \overline{\mathrm{QM}}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\overline{\mathrm{PM}}$

$\therefore \overline{\mathrm{NM}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{QM}}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

$\therefore \overline{\mathrm{PN}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PM}}^2-\overline{\mathrm{NM}}^2}$

$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\therefore \cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{PN}}}{\overline{\mathrm{PM}}}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

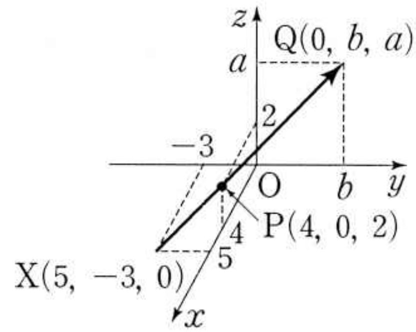
$\therefore \triangle \mathrm{P'R'S'}=\triangle \mathrm{PRS}\cdot\cos\theta$

$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$=\frac{\sqrt{6}}{6}$

50. 정답 ④

경계선 l 과 지면이 만나는 점을 원점 O라 하고 원점 O를 기준으로 X, P, Q 를 공간좌표를 이용하여 나타내면 다음과 같다.



따라서, 점 Q(0, b, a)는 두 점 X, P를 지나는 직선 위의 점이다.

X(5, −3, 0)과 P(4, 0, 2)를 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x-5}{4-5}=\frac{y-(-3)}{0-(-3)}=\frac{z-0}{2-0}$

즉, $\frac{x-5}{-1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{2}$ ………………………………… ㉠

이 직선이 (0, b, a)를 지나므로 ㉠에 대입하면

$\frac{-5}{-1}=\frac{b+3}{3}=\frac{a}{2}$ 에서 $a=10$, $b=12$

$\therefore a+b=22$