제 2 교시

수학 영역(가형)

5지선다형

1. $8^{\frac{4}{3}} \times 2^{-2}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$2^4 \times 2^{-2} = 2^2$

④

2. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2 = 5$, $a_5 = 11$ 일 때, a_8 의 값은? [2점]

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

$d = 6 \div 3 = 2$

①

$11 + 2 \times 3 = 17$

3. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+2n+1} - \sqrt{4n^2-2n-1}\right)$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

①

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n+2}{\sqrt{4n^2+2n+1} + \sqrt{4n^2-2n-1}} = 1$$

4. 함수 $f(x) = x^3 - 2x^2$ 에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2)}{h}$ 의 값은? [3점]

$= 2f'(2)$

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x) = 3x^2 - 4x$

③

$f'(2) = 12 - 8 = 4$

5. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_n = 2n^2 - 3n$이다. $a_n > 100$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은? [3점]

① 25 ② 27 ③ 29 ④ 31 ⑤ 33

$S_1 = -1$

2

$a_n = 4n - 5$

$4n - 5 > 100$

$9 \overline{)105}$ 26

26.xx

$n > \frac{105}{4}$

6. 부등식 $\log_{18}(n^2 - 9n + 18) < 1$을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합은? [3점]

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

5 $n^2 - 9n + 18 > 0 \Rightarrow n > 6$ or $n < 3$

$n^2 - 9n + 18 < 18$

$\Downarrow$

$0 < n < 9$

$6 < n < 9$

or

$0 < n < 3$

$7 + 8 + 1 + 2 = 18$

7. 숫자 0, 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 네 개를 선택한 후, 일렬로 나열하여 만든 네 자리 자연수가 2100보다 작은 경우의 수는? [3점]

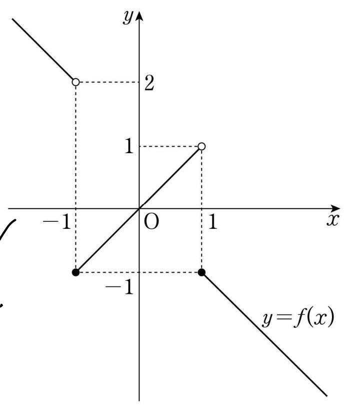
① 80 ② 85 ③ 90 ④ 95 ⑤ 100

1 _ _ _ $4^3 = 64$

2 0 _ _ $4^2 = 16$

1

8. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 0+} f(x-1) + \lim_{x \to 1+} f(f(x))$의 값은? [3점]

① −2 ② −1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

4

$f(-1+) + f(-1-) = -1 + 2 = 1$

9. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 7$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n + 3}{2} & (a_n\text{이 소수인 경우}) \\ a_n + n & (a_n\text{이 소수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. a_8의 값은? [3점]

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

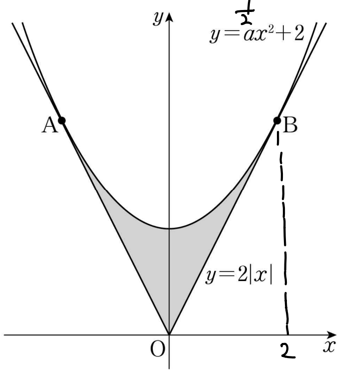
4

$a_1 = 7$ $a_2 = 5$ $a_3 = 4$

$a_4 = 7$ $a_5 = 5$ $a_6 = 4$

$a_7 = 10$ $a_8 = 17$

10. 그림과 같이 두 함수 $y = ax^2 + 2$와 $y = 2|x|$의 그래프가 두 점 A, B에서 각각 접한다. 두 함수 $y = ax^2 + 2$와 $y = 2|x|$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, a는 상수이다.) [3점]



① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{17}{6}$

$ax^2 - 2x + 2 = 0$

$1 - 2a = 0$

$a = \frac{1}{2}$

$2 \times \int_0^2 \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 \, dx$

4

$= 2\left[\frac{1}{6}x^3 - x^2 + 2x\right]_0^2$

$= 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

11. 흰 공 2개, 빨간 공 2개, 검은 공 4개를 일렬로 나열할 때, 흰 공은 서로 이웃하지 않게 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 색의 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 295 ② 300 ③ 305 ④ 310 ⑤ 315

↑ R ↑ R ↑ B ↑ B ↑ B ↑ B ↑

$\frac{6!}{2!4!} \times {}_7C_2 = 15 \times 21 = 315$

5

12. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & (x<1) \\ \dfrac{1}{2x+1} & (x \geq 1) \end{cases},$$

$$g(x)=2x^3+ax+b$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $b-a$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 10 ② 9 ③ 8 ④ 7 ⑤ 6

$f(1)g(1) = f(1+)g(1+) = \frac{1}{3}g(1)$ 1

$\lim_{x \to 1-} \frac{2x^3+ax+b}{x-1} = a+6$

$a+b+2=0 \quad 3(a+6)=0$

$a=-6 \quad b=4$

13. 공비가 1보다 큰 등비수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_3 \times a_5 \times a_7 = 125$
>
> (나) $\dfrac{a_4 + a_8}{a_6} = \dfrac{13}{6}$

$a_5^3 = 125 \quad a_5 = 5$

a_9의 값은? [3점]

① 10 ② $\frac{45}{4}$ ③ $\frac{25}{2}$ ④ $\frac{55}{4}$ ⑤ 15

②

$\dfrac{a_6\left(\frac{1}{r^2} + r^2\right)}{a_6} = \dfrac{13}{6}$

$r^2 + \dfrac{1}{r^2} = \dfrac{13}{6}$

$t + \dfrac{1}{t} = \dfrac{13}{6}$

$6t^2 + 6 = 13t$

$6t^2 - 13t + 6 = 0$

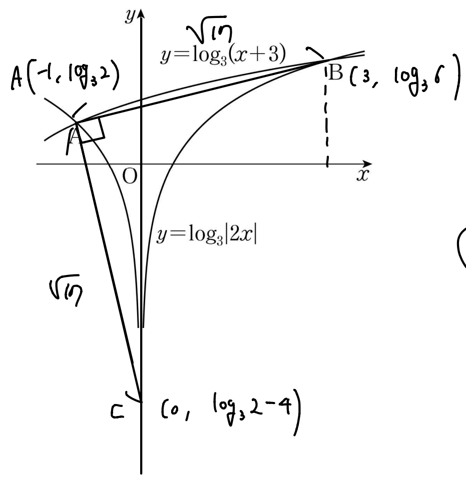
$(2t-3)(3t-2) = 0$

$r^2 = \dfrac{3}{2}$ or $r^2 = \dfrac{2}{3}$

$5 \times \dfrac{9}{4} = \dfrac{45}{4}$

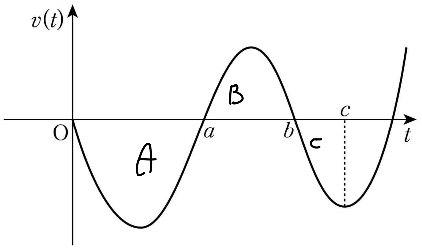
14. 함수 $y = \log_3|2x|$의 그래프와 함수 $y = \log_3(x+3)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 직선 AB와 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.) [4점]

① $\frac{13}{2}$ ② 7 ③ $\frac{15}{2}$ ④ 8 ⑤ $\frac{17}{2}$



⑤

15. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 그림과 같다.



점 P가 출발한 후 처음으로 운동 방향을 바꿀 때의 위치는 -8이고 점 P의 시각 $t=c$에서의 위치는 -6이다.

$\int_0^b v(t)dt = \int_b^c v(t)dt$일 때, 점 P가 $t=a$부터 $t=b$까지 움직인 거리는? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$-A+B=-C$

$A=8$ $-A+B-C=-6$

③ $C=3$

$B=5$ $A-B+C=6$

16. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) = x^3 - 4x\int_0^1 |f(t)|dt$$

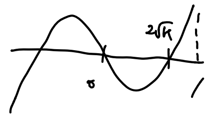
$f(x)=x^3-4kx$

를 만족시킨다. $f(1)>0$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

$f(2)=8-8k=7$

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

②



$\int_0^1 |f(t)|\,dt = k$

$k = -\int_0^{2\sqrt{k}} x^3-4kx\,dx + \int_{2\sqrt{k}}^1 x^3-4kx\,dx$

$= \left[-\frac{1}{4}x^4+2kx^2\right]_0^{2\sqrt{k}} + \left[\frac{1}{4}x^4-2kx^2\right]_{2\sqrt{k}}^1$

$= -4k^2+8k^2+\frac{1}{4}-2k-4k^2+8k^2$

$= 8k^2-2k+\frac{1}{4}$

$8k^2-3k+\frac{1}{4}=0$

$32k^2-12k+1=0$

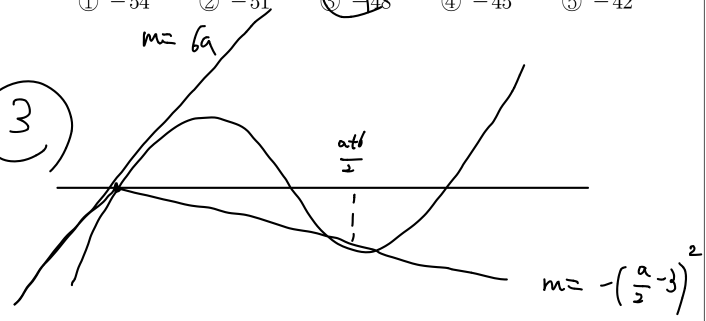
$(4k-1)(8k-1)=0$

$k=\frac{1}{8}$

17. $0<a<6$인 실수 a에 대하여 원점에서 곡선 $y=x(x-a)(x-6)$에 그은 두 접선의 기울기의 곱의 최솟값은? [4점]

① -54 ② -51 ③ -48 ④ -45 ⑤ -42

③



$y' = (x-a)(x-6) + x(x-6) + x(x-a)$

$y = f'(t)(x-t) + f(t)$ (0,0) 대입

$f(t) = t f'(t)$

$(t-a)(t-6) = (t-a)(t-6) + t(t-6) + t(t-a)$

$0 = t(t-6) + t(t-a)$

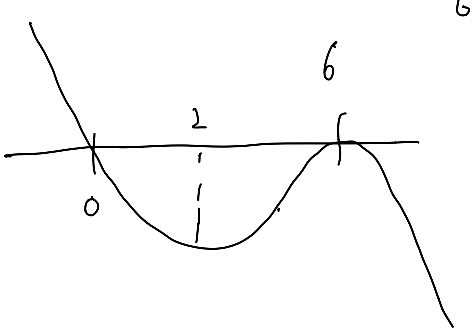
$0 = t(2t-a-6)$

$t = \frac{a+6}{2}$

$-6a\left(\frac{a}{2}-3\right)^2$

$-6\times 2\times(-2)^2$

$= -48$



18. 다음은 $1 \le |m| < n \le 10$을 만족시키는 두 정수 m, n에 대하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하는 과정이다.

(i) $m>0$인 경우

n의 값에 관계없이 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재한다. 그러므로 $m>0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 $\boxed{(가)}$이다.

10C2

(ii) $m<0$인 경우

n 홀수

n이 홀수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 항상 존재한다. 한편, n이 짝수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것은 존재하지 않는다. 그러므로 $m<0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 $\boxed{(나)}$이다.

20

n=3, 5, 7, 9

2 4 6 8

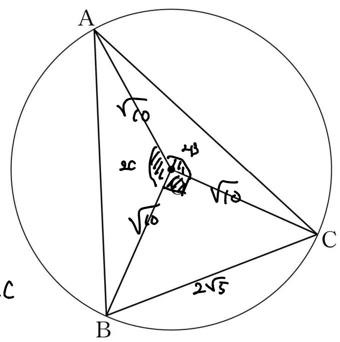
(i), (ii)에 의하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수는 $\boxed{(가)}+\boxed{(나)}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $p+q$의 값은? [4점]

① 70 ② 65 ③ 60 ④ 55 ⑤ 50

②

19. 그림과 같이 중심이 O 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 인 원에 내접하는 예각삼각형 ABC 에 대하여 두 삼각형 OAB, OCA 의 넓이를 각각 S_1, S_2 라 하자. $3S_1 = 4S_2$ 이고 $\overline{BC} = 2\sqrt{5}$ 일 때, 선분 AB 의 길이는? [4점]



$\sin 2B : \sin 2C = 3 : 4$

$B + C = \frac{3\pi}{4}$

$\overline{AB}^2 = 20 - 20\cos 2C$

① $2\sqrt{7}$ ② $\sqrt{30}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{34}$ ⑤ 6

$\frac{3\pi}{2} - 2C$

$20 + 20 \times \frac{3}{5}$

$= 32$

$3\sin 2C = 4\sin 2B$

$3\sin 2C = -4\cos 2C$

$\tan 2C = -\frac{4}{3}$

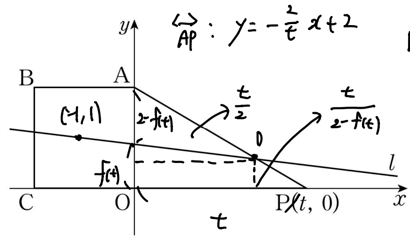
③

20. 그림과 같이 좌표평면 위의 네 점 O(0, 0), A(0, 2), B(−2, 2), C(−2, 0)과 점 P$(t, 0)$ $(t > 0)$에 대하여 직선 l이 정사각형 OABC 의 넓이와 직각삼각형 AOP 의 넓이를 각각 이등분한다. 양의 실수 t에 대하여 직선 l의 y절편을 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 0+} f(t)$의 값은? [4점]

$= K$

$\overleftrightarrow{AP}: y = -\frac{2}{t}x + 2$

$D\left(\frac{t}{2-f(t)}, -\frac{2}{2-f(t)} + 2\right)$



① $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ ② $2-\sqrt{2}$ ③ $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

④ 1 ⑤ $\frac{2+\sqrt{2}}{3}$

②

$l: y = (f(t)-1)x + f(t)$

$-\frac{2}{2-f(t)} + 2 = \frac{t(f(t)-1)}{2-f(t)} + f(t)$

$\lim_{t\to 0+}\{-2 + 2(2-f(t))\} = \lim_{t\to 0+}\{t(f(t)-1) + f(t)(2-f(t))\}$

$-2 + 2(2-K) = K(2-K)$

$(K-2)^2 = 2$ $K = 2-\sqrt{2}$

21. 0이 아닌 실수 m에 대하여 두 함수

$f'(x) = 6x^2 - 8$

$$f(x) = 2x^3 - 8x,$$ $2x(x^2-4)$

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{47}{m}x + \frac{4}{m^3} & (x<0) \\ 2mx + \frac{4}{m^3} & (x \ge 0) \end{cases}$$

$(1, -6)$ $47x - 4$ $-2x - 4$

이 있다. 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $g(x)$ 중 크지 않은 값을 $h(x)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

$x = -\frac{1}{6}$

$g(x) = \begin{cases} -\frac{47}{6}x + \frac{4}{6^3} & (x<0) \\ 12x + \frac{4}{6^3} & (x>0) \end{cases}$

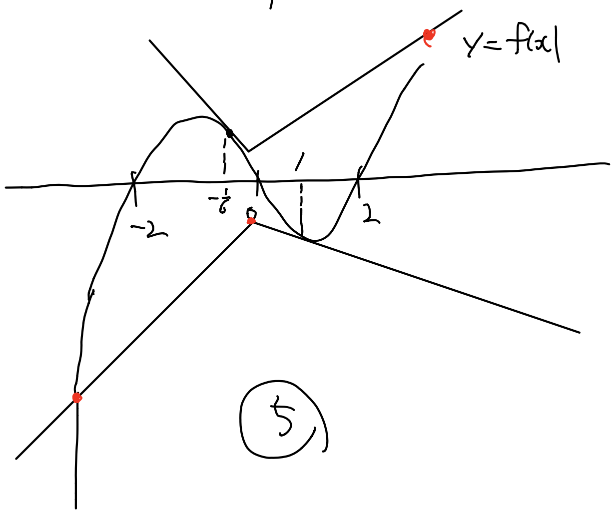
< 보 기 >

ㄱ. $m = -1$일 때, $h\left(\frac{1}{2}\right) = -5$이다. $\frac{47 \times 6^2 + 4}{6^3} = \frac{286}{6^3}$

ㄴ. $m = -1$일 때, 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 2이다.

ㄷ. 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수가 1인 양수 m의 최댓값은 6이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



5

단답형

22. 함수 $f(x) = (2x+3)(x^2+5)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

22

$f'(x) = 2(x^2+5) + 2x(2x+3)$

$f'(1) = 2 \times 6 + 2 \times 5 = 22$

23. 중심각의 크기가 1라디안이고 둘레의 길이가 24인 부채꼴의 넓이를 구하시오. [3점]

$r = 8$

32

$\frac{1}{2} \times 64 = 32$

24. $\int_1^3 (4x^3-6x+4)dx+\int_1^3 (6x-1)dx$ 의 값을 구하시오. [3점]

86

$$\int_1^3 4x^3+3 \quad dx$$

$$= \left[x^4+3x\right]_1^3$$

$$= 80+6=86$$

25. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이

$$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 3,\quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 5$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} n a_n (b_n+2n)$ 의 값을 구하시오. [3점]

21

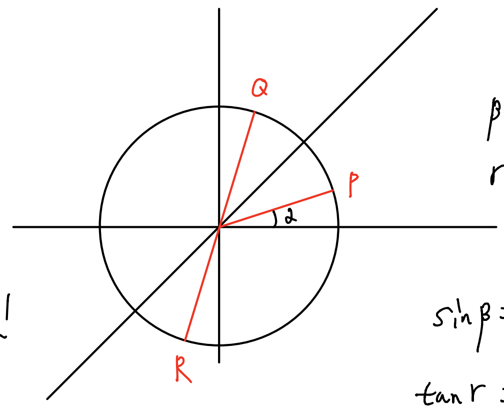
$$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n \times \frac{b_n+2n}{n}$$

$$= 3\times(5+2)=21$$

26. 좌표평면에서 제1사분면에 점 P 가 있다. 점 P 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 Q 라 하고, 점 Q 를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 R 라 할 때, 세 동경 OP, OQ, OR 가 나타내는 각을 각각 α, β, γ 라 하자.

$\sin\alpha = \frac{1}{3}$ 일 때, $9(\sin^2\beta + \tan^2\gamma)$ 의 값을 구하시오. (단, O 는 원점이고, 시초선은 x 축의 양의 방향이다.) [4점]

80



3, 1, $2\sqrt{2}$

$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$

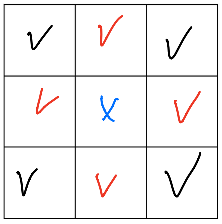
$\gamma = \frac{3}{2}\pi - \alpha$

$\sin\beta = \cos\alpha$

$\tan\gamma = \frac{1}{\tan\alpha}$

$$9\left(\frac{8}{9}+8\right) = 8+72=80$$

27. 그림과 같이 합동인 9개의 정사각형으로 이루어진 색칠판이 있다.

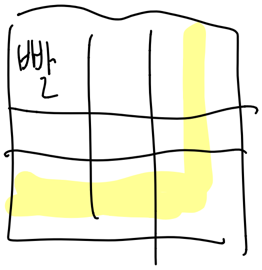


X 에는
빨, 파
배치 불가능

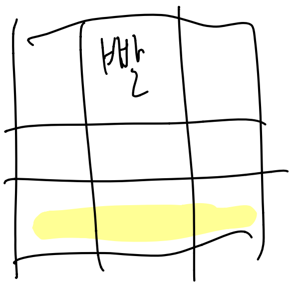
빨간색과 파란색을 포함하여 총 9가지의 서로 다른 색으로 이 색칠판을 다음 조건을 만족시키도록 칠하려고 한다.

> (가) 주어진 9가지의 색을 모두 사용하여 칠한다.
> (나) 한 정사각형에는 한 가지 색만을 칠한다.
> (다) 빨간색과 파란색이 칠해진 두 정사각형은 꼭짓점을 공유하지 않는다.

색칠판을 칠하는 경우의 수는 $k \times 7!$이다. k의 값을 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



5가지

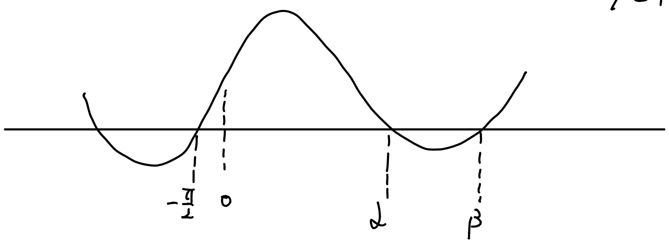


3가지

8

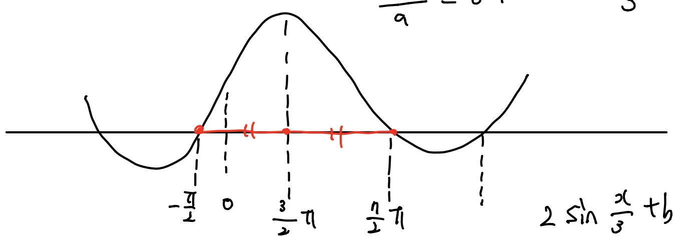
28. $0 < a < \frac{4}{7}$인 실수 a와 유리수 b에 대하여 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}\right]$에서 정의된 함수 $f(x) = 2\sin(ax) + b$가 있다. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{7}{2}\pi, 0\right)$을 지날 때, $30(a+b)$의 값을 구하시오. [4점]

$b<0$ $\qquad y=f(x)$



1) $\alpha = \frac{7}{2}\pi$ 일때

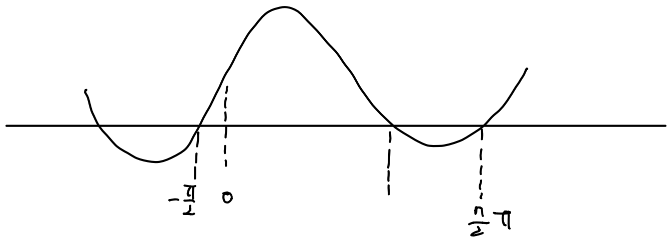
$\frac{2\pi}{a} = 6\pi \qquad a = \frac{1}{3}$



$2\sin\frac{x}{3} + b = f(x)$

$10+30=40$ $\qquad b=1 \qquad -2\times\frac{1}{2}+b=0$

2) $\beta = \frac{7}{2}\pi$ 일때



$\frac{2\pi}{a} = 4\pi \qquad a = \frac{1}{2}$

$f(x) = 2\sin\frac{x}{2} + b \qquad b=\sqrt{2} \Rightarrow$ 성립 X

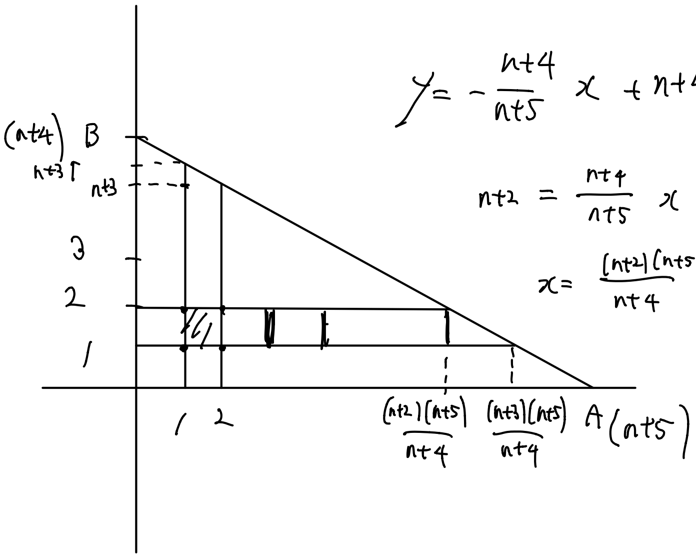
40

29. 자연수 n에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(0,\ n+5)$, $\mathrm{B}(n+4,\ 0)$과 원점 O를 꼭짓점으로 하는 삼각형 AOB가 있다. 삼각형 AOB의 내부에 포함된 정사각형 중 한 변의 길이가 1이고 꼭짓점의 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 정사각형의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{8} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

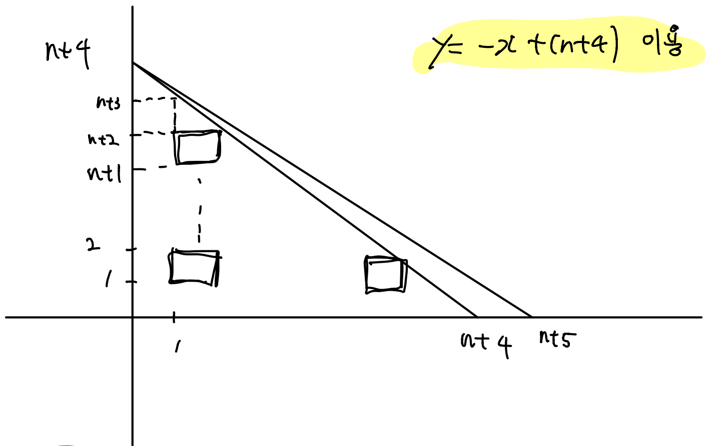
$y = -\frac{n+4}{n+5}x + n+4$

$n+2 = \frac{n+4}{n+5}x$

$x = \frac{(n+2)(n+5)}{n+4}$



$y = -x + (n+4)$ 이용



164

$a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{8}(n+1)(n+2)$

$= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{9}k(k+1)$ $\quad 2\overline{)330}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{9\cdot10\cdot11}{3} - 2\right) = 165 - 1 = 164$

30. 최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \int_t^x f(s)ds$$

$g'(x) = f(x)$ $\quad g(t) = 0$

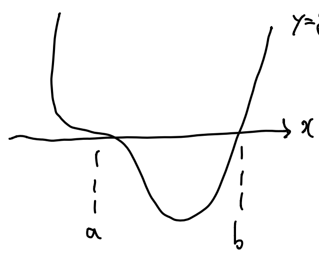
$g''(a) = 0$

라 하자. 상수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(a) = 0$
> (나) 함수 $|g(x) - g(a)|$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 1이다.

실수 t에 대하여 $g(a)$의 값을 $h(t)$라 할 때, $h(3) = 0$이고 함수 $h(t)$는 $t = 2$에서 최댓값 27을 가진다.

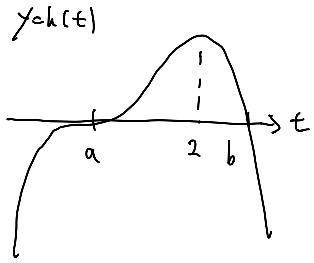
$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]



$g(x) = (x-a)^3(x-b) + g(a)$

$g(t) = 0$

$(t-a)^3(t-b) + g(a) = 0$



$h(t) = -(t-a)^3(t-b)$

$b = 3$

4차함수 비율관계

$3 : 1 = 2-a : b-2$

$2 - a = 3 \quad a = -1$

$g(x) = (x+1)^3(x-3) + g(-1)$

$g'(x) = f(x) = 3(x+1)^2(x-3) + (x+1)^3$

$f(5) = 3\times36\times2 + 216 = 432$

432

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.