기·출·의 파·급·효·과

수학2 (하)

수학2 (하)

기출의 파급효과

orbi.kr

수학2 (하)

저자의 말

1. 수학Ⅱ 기출을 푸는 데 필수적인 태도와 도구만을 모두 정리했습니다.

1년 동안 열심히 공부한 학생이 현장에서 평가원 문제를 틀리는 이유는 개념이 부족해서가 아니라, 조건이 필연적으로 요구하는 태도와 도구가 없기 때문입니다. 따라서 각 Chapter를 교과서 목차를 따르지 않고 기출을 푸는데 필요한 태도와 도구를 바탕으로 작성했습니다.

2. 분권의 이유

'미적분도 아니고 수학Ⅱ 수준에서 분권이 필요할 정도의 분량이 나올 수 있나?' 하는 의문이 들 수도 있습니다. 분권에는 크게 두 가지 이유가 존재하는데,

(1) 필수적이지만 교과서에는 없는 Chapter의 존재

〈Chapter 3. 다양한 정리와 함수의 극값〉, 〈Chapter 4. 다항함수〉, 〈Chapter 6. 함수의 방정식vs항등식vs부등식〉, 〈Chapter 9. 합성함수와 역함수〉, 〈Chapter 10. 복합적 개념이 포함된 킬러 문항〉 다섯 개의 챕터는 교과서에 없지만 중요한 태도와 도구를 정리한 챕터입니다.

특히 〈Chapter 6. 함수의 방정식vs항등식vs부등식〉, 〈Chapter 9. 합성함수와 역함수〉는 저학년 과정에서 모두 배우는 내용이지만 방정식, 항등식, 부등식, 합성함수, 역함수의 대강의 '느낌'만 가진 채 실제 문제에서 '어떻게' 처리해야 하는지 모르는 학생이 많아 독립된 챕터를 구성했습니다. 따라서 실제 수학Ⅱ 교육과정에서 직접적으로 다루는 내용보다 훨씬 많은 내용을 다룹니다.

(2) 자세한 해설

기출 해설을 정말 자세히 썼습니다.

어떤 조건부터 적용해야 하는지,
이 조건을 보고 왜 이러한 생각을 할 수밖에 없는지,
이 조건을 보고 왜 이러한 생각을 하면 안 되는지,
여기서 왜 식으로 풀어야 하는지,
여기서 왜 그래프로 풀어야 하는지에 관한 내용을 다 담았습니다.

'딱딱하고', '불친절하게' 해설하면 분량은 많이 줄일 수 있겠으나, 그 경우 '기출의 파급효과'를 선택하는 의미가 퇴색되죠. 진정한 기출 분석은 위와 같은 질문에 모두 답할 수 있게끔 공부하는 것이기에 최대한 해설을 자세하게 썼습니다.

따라서 위의 두 가지 이유로 불가피하게 분권하게 되었습니다. 추천하는 것은 상하권을 순차적으로 학습하는 것이지만 본인이 어느 한 권에 해당하는 내용에는 자신이 있으면 다른 한 권만 공부하셔도 됩니다.

3. 칼럼에서 배운 태도와 도구를 바로 활용할 수 있도록 준킬러 이상급의 기출을 칼럼 예시로 들었습니다.

칼럼 속 태도와 도구가 킬러, 준킬러에서 어떻게 보편적으로 이용되는지 직접 확인한다면 태도와 도구들이 더욱 와닿을 것입니다. 어떠한 한 문제에만 적용되는 특수한 스킬 같은 것이 아닙니다.

4. 선별 문항

선별한 문항은 모두 중요합니다. 그중에서도 특히 중요한 문항은 예제로 넣었고, 나머지 문항은 유제로 넣었습니다. 유제들도 단순 단원별로 분리된 것이 아니라 각 Chapter 별 태도와 도구를 기준으로 분리되었습니다.

최근 평가원 문항뿐만 아니라 옛 평가원 문항, 교육청, 사관학교, 그리고 일부 경찰대 문항도 중요한 기출들입니다. 하지만 교육청, 사관학교, 경찰대 문제들까지 모두 풀자니 양이 너무 많습니다. 따라서 핵심적인 평가원, 교육청, 사관학교, 경찰대 문항을 필요한 만큼만 선별했습니다. 그러나

(1) 단순 유형의 반복에 해당하는 문제들은 그 유형을 대표하는 몇 문제만 넣었습니다.

(2) 지나치게 쉬운 개념 확인 수준의 2, 3점 문항은 거의 넣지 않았습니다. 개념 공부만 제대로 했다면 별다른 태도와 도구가 전혀 필요하지 않은 문항들이므로 이 책에서 불필요하게 학습할 필요는 없습니다.

(3) 교육청, 사관, 경찰대 문항은 필요한 만큼만 선별했습니다. 따라서 이 책에서 수록한 문항만 완벽하게 풀 수 있다면, 적어도 수능을 대비하기 위해서는 다른 '평가원 외 기출 문제'를 푸실 필요가 없습니다. 즉, 책에서 배우는 내용만 꼭꼭 씹어 소화하시면 됩니다.

    물론 올해 출제된 교육청, 평가원, 사관 문항은 직접 풀고 난 다음 책에서 배운 태도와 도구를 바탕으로 분석해야 합니다.

수학 1등급, 아직 늦지 않았습니다. 마지막으로 한 번쯤 봐야 할 기출, 기출의 파급효과와 함께 합시다.

기출의 파급효과	기대 N제	기대 모의고사
기출에 대한 일관적인 도구와 태도를 지향하는 교재입니다. 도구와 태도 체화를 위해 준킬러 이상의 기출을 주로 다루며, 고득점에 필요한 도구와 태도의 빠른 체화를 돕는 교재입니다.	파급효과와 기출 다회독을 통해 다진 도구와 태도를 신유형, 고난도 문제에 적용해보는 교재입니다. 킬러문제 뿐만 아니라 시험마다 체감되는 '나한테만 낯선 문제'들까지 대비하는 교재입니다.	기대 N제가 교훈성에 중점을 둔 교재라면 기대 모의고사는 철저하게 최근 수능과 당해 평가원의 출제 기조에 기반한 경향성에 중점을 둔 교재입니다. 당해 평가원의 출제경향과 EBS 변형 Point를 예측하여 최고의 실전감을 선물합니다.
- 수학 1 - 수학 2 (상) (하) 미적분 (상) (하) 확률과 통계	수학1+확통 (4월 출판 예정) 수학2 (5월 출판 예정) 미적분 (5월 출판 예정)	- 가형 (7월 출판 예정) - 나형 (8월 출판 예정)

CHAPTER

00 수학Ⅱ의 필수 태도와 도구

◆ 필수 태도 : 식 ↔ 그래프

(ⅰ) 식과 그래프 관점의 유연함

수능 수학을 정복하고 싶다면 **식과 그래프의 관점을 자유자재로 활용**할 수 있어야 한다. **고난도 문제 중에서 어느 하나의 관점으로만 풀리는 문제는 거의 없다.** 대부분의 고난도 문항이 식과 그래프의 관점을 번갈아 사용해야 하며, 어느 시점에 특정 관점을 사용해야 하는가에 대한 일관된 기준도 없다.

따라서 많은 경험을 하면서 식과 그래프의 관점을 자유자재로 활용하는 연습을 해야 하는데, 문제를 풀면서 막힐 때마다 두 관점 모두 적용해 보는 것이 가장 좋은 방법이다.

(ⅱ) 의식적으로 그래프 그리기

하위권으로 갈수록 식을 무조건적으로 선호하는 경향이 있는데, 이는 수학Ⅱ의 두 가지 기둥 중 하나를 빼버리는 태도다. 수학Ⅱ를 정복하기 위해서는 **의식적으로 그래프를 그리는** 습관을 들여야 한다.

설령 그래프를 그릴 수 없는 문제나 그래프를 그릴 수 있지만 굳이 그릴 필요가 없는 문제를 풀더라도 일단은 그래프를 그리려고 시도하는 것 자체가 중요하다.

이러한 점에서 이 책은 상당히 많은 도움을 줄 것이다. **다양한 파트에서 식과 그래프 두 가지 관점을 적용**하고, 그래프로 접근할 수 없는 문제는 왜 접근할 수 없는지를 알려주며 독자에게 끊임없이 식과 그래프의 유연한 활용을 부추긴다.

(ⅲ) 실전 TIP

문제 자체에 그래프가 포함되어 있으면 그래프에 기반한 사고는 필수적이다. **그래프를 그려줬다는 말에는 '그래프를 그리지 않을 수 있음에도 불구하고'라는 수식어가 생략돼 있다.** 함수식만 제시하면 될 것을 구태여 그래프를 그려줬다는 것은 제발 그래프를 활용하라는 소리이다.
(물론 문제에서 그래프를 제시하지 않더라도 본인이 스스로 그리려는 시도를 해야 한다.)

◆ 필수 도구 : 방정식의 실근 $\leftrightarrow$ 함수의 그래프 간 교점의 x좌표

수Ⅱ에서 가장 중요한 태도가 **식과 그래프 관점의 전환**이라면,
두 번째로 중요한 태도는 **방정식의 실근과 그래프 교점의 변환**이다.

함수 $f(x)$, $g(x)$에 대해
방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

이는 곧 식의 관점, 그래프의 관점과 대응되는데, 방정식이 주어졌을 때
식의 관점을 선택한다면 **인수분해를 통해 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근**을 구하면 된다.
그래프의 관점을 선택한다면 $y=f(x)$**와** $y=g(x)$**의 그래프를 그려 두 그래프의 교점**을 관찰하면 된다.

방정식의 형태와 문제 속 다른 조건을 고려하여 '방정식의 실근'과 '그래프 간 교점의 x좌표'를 자유자재로 전환하면 된다. 〈Chapter 6〉의 방정식 파트에서 한 번 더 강조될 것이다.

CHAPTER 06 함수의 방정식 vs 항등식 vs 부등식

방정식, 항등식, 부등식은 수능 수학의 거의 모든 문항에서 나오므로 각각의 정의, 특징, 주의점을 정확히 공부해야 한다. 또한, 세 가지 식을 정확히 구분할 수도 있어야 하는데 **방정식과 항등식의 구분이 핵심**이다.

방정식과 항등식의 느낌만 대충 갖고 있을 뿐 그 둘의 정확한 정의와 차이가 무엇인지 제대로 대답하지 못하는 경우가 많고 복잡한 문제 속에서 이 둘을 혼동하는 경우도 많다. 이번 챕터를 공부한 뒤에는 이 셋을 정확히 구분할 수 있길 바란다.

방정식

정의 : 변수를 포함하는 등식에서, 변수의 값에 따라 참 또는 거짓이 되는 식이다. 등식이 참이 되게 하는 변수의 값을 근 또는 해라고 한다. 방정식의 근을 구하는 것을 방정식을 푼다고 한다.

중요 개념 : '함수 $f(x)$, $g(x)$에 대해 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.'

방정식에서 딱 하나만 기억해야 한다면 이걸 꼽고 싶다. 수능 수학에서 빠질 수 없는 개념이다. 수II 킬러 문제에서 이 개념이 사용되지 않는 문제는 거의 없다고 보면 된다. 또한, 이후 등장할 〈방정식을 푸는 두 가지 관점〉과도 연결되는 개념이다.

1. 다항 방정식

(다항 방정식이 포함한 항들의 계수는 모두 실수라고 하자.)

수II에서 등장하는 대부분의 방정식은 다항 방정식이다. 방정식이 미지수(일반적으로 x)에 대한 다항식으로 이루어져 있는 경우 다항 방정식이라 하고, 최고차항의 차수가 n이면 n차 방정식이라 부른다.

중학교와 고등학교 저학년 과정에서 주로 배운 일차방정식, 이차방정식, 삼차방정식이 모두 다항 방정식의 대표적인 예다.

n차 방정식을 다음과 같이 이해해도 좋다. 'n차 다항함수 $f(x)$에 대해 $f(x)=0$인 방정식'

다항 방정식은 다음과 같은 성질을 갖는다.

① n**차 방정식은 복소수 범위에서** n**개의 근을 갖는다.**

※ 여기서 복소수란?
실수 a, b에 대하여 $a+bi$꼴로 표현할 수 있는 수를 말한다. 고교 과정에서 다루는 수는 모두 복소수이며 수능에서는 대부분 $b=0$일 때, 즉 실수일 때를 다룬다.

'복소수 범위에서 n개의 근을 갖는다'를 정확하게 받아들이자. 근은 '허수'일 수도 있으며, '중근'일 수도 있다. 특히 근의 개수를 묻는 문제에서 허근와 중근을 배제하지 않으면 문제를 내기 굉장히 까다로워지므로 실제 수능 문제에서는 '서로 다른 실근의 개수'라는 표현이 가장 많이 등장한다.

② **다항 방정식이 허근을 가질 때, 허근은 켤레복소수의 형태로 존재한다. 따라서 허근의 개수는 '짝수'이다.**
구체적인 이유까지는 알 필요 없으나 내용 자체는 암기하자. 다항 방정식이 허근 $a+bi$를 가진다면, 켤레복소수인 $a-bi$도 근으로 갖는다. 따라서 다항 방정식의 허근의 개수는 홀수일 수 없다.

③ n**이 짝수일 때** n**차 방정식은 실근을 갖지 않을 수도 있지만,** n**이 홀수일 때** n**차 방정식은 적어도 하나의 실근을 갖는다.**

홀수차 다항함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수일 때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$이다.
따라서 $y=f(x)$의 그래프와 x축은 적어도 한 점에서 만날 수밖에 없다. (최고차항의 계수가 음수일 때도 똑같은 논리이다.) 일차함수의 그래프와 삼차함수의 그래프를 그려보면 쉽게 이해할 수 있다.

예제(1) 2011학년도 6월 평가원 가형 12번

서로 다른 두 실수 α, β가 사차방정식 $f(x)=0$의 근일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $f'(\alpha)=0$ 이면 다항식 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$으로 나누어떨어진다.
ㄴ. $f'(\alpha)f'(\beta)=0$ 이면 방정식 $f(x)=0$은 허근을 갖지 않는다.
ㄷ. $f'(\alpha)f'(\beta)>0$ 이면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

서로 다른 두 실수 α, β가 사차방정식 $f(x)=0$의 근이다. 이것만 가지고 할 수 있는 것은 없으므로 보기로 바로 들어가자.

1. $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$이므로 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$을 인수로 갖는다. (O)

※ **$f(\alpha)=f'(\alpha)=0$일 때 $f(x)$가 $(x-\alpha)^2$을 인수로 갖는 이유**

$f(x)=(x-\alpha)P(x)$($P(x)$는 다항식)으로 설정하고 양변을 x에 대해 미분하면
$f'(x)=P(x)+(x-\alpha)P'(x)$

$f'(\alpha)=P(\alpha)=0$이므로 $P(x)$는 $(x-\alpha)$를 인수로 갖는다. $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$
$\therefore f(x)=(x-\alpha)^2Q(x)$

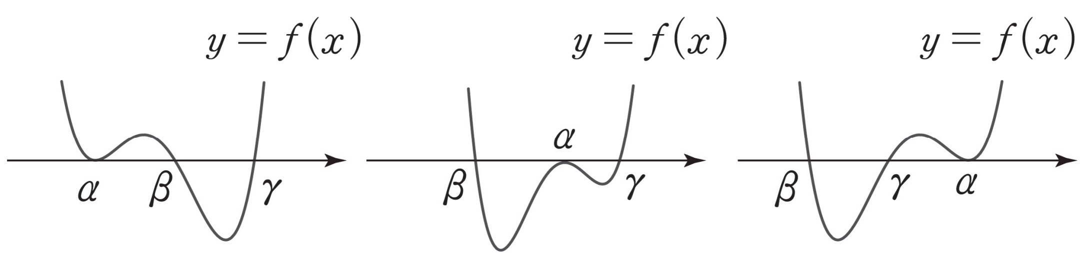
2. $f'(\alpha)f'(\beta)=0$이므로 $f'(\alpha)=0$ 또는 $f'(\beta)=0$이다. 케이스를 분류하자.

(1) $f'(\alpha)=0$이고 $f'(\beta)\neq 0$일 때

$f(x)$는 $(x-\alpha)^2(x-\beta)$을 인수로 가지므로 방정식 $f(x)=0$은 허근을 갖지 않는다.
$f(x)$를 식으로 표현하면 다음과 같다. $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)(ax+b)$

주의 : $f(x)$는 $(x-\alpha)^2(x-\beta)$를 인수로 가지는데, 나머지 인수에서 허근이 나올 수는 없나?
그럴 수 없다. 다항 방정식이 허근을 가지는 경우, 허근은 항상 켤레복소수의 형태($a\pm bi$)로 쌍을 이뤄 존재한다. **방정식의 허근의 개수는 항상 짝수이다.** (단, 짝수$=0, 2, 4\cdots$)

$(x-\alpha)^2(x-\beta)$를 인수로 갖는 최고차항의 계수가 양수인 사차함수의 그래프를 그려봐도 $f(x)$는 허근을 갖지 않음을 알 수 있다. (최고차항의 계수가 음수일 때의 그래프는 아래의 그래프들을 x축을 기준으로 대칭 시키면 된다.)

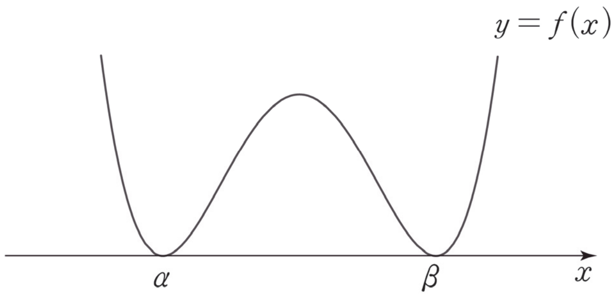


(2) $f'(\alpha) \neq 0$**이고** $f'(\beta) = 0$**일 때**

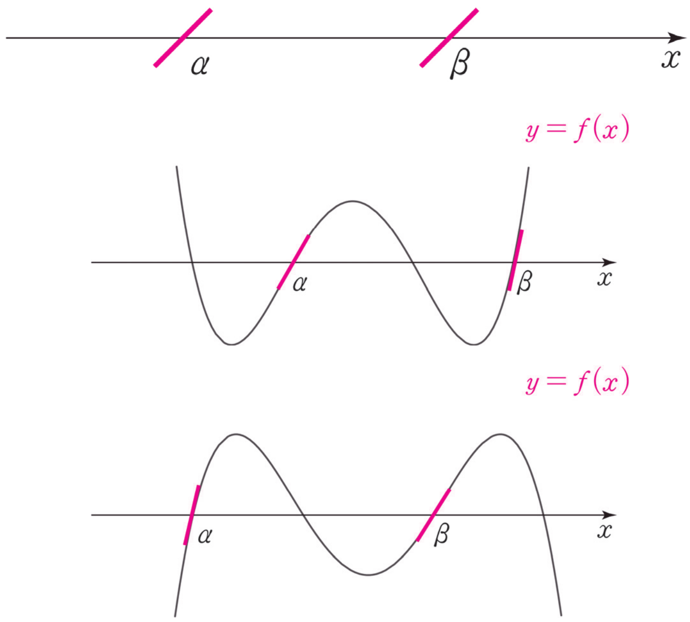
$f'(\alpha) = 0$이고 $f'(\beta) \neq 0$일 때와 똑같으므로 생략한다.

(3) $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$**일 때**

$f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$, $f(\beta) = f'(\beta) = 0$이므로 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$을 인수로 가진다. 방정식 $f(x) = 0$이 중근 두 개를 가지므로 허근은 존재하지 않는다. (O)



3. 가장 쉬운 방법은 그래프를 그려보는 것이다.



$f'(\alpha)f'(\beta) > 0$ 이면 방정식 $f(x) = 0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다. (O)

ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳으므로 답은 ⑤!!

(ㄷ) 선지 보충 : 실전에서는 위와 같이 그래프로 판단하는 것이 제일 효율적이다. 이러한 그래프 풀이도 사차함수의 개형을 고려하는 논리적인 풀이이고 그 자체로 충분하다. 하지만 무언가 논리적으로 풀지 않은 듯한 느낌을 받을 학생을 위해 수식적으로도 증명해주겠다. 어떤 방법일지 스스로 고민해보고, 다음 페이지를 보자.

※ **"$f'(\alpha)f'(\beta)>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다"의 수식적 증명**

1. 서로 다른 두 실수 α, β가 사차방정식 $f(x)=0$의 근이므로 $f(x)$의 식을 다음과 같이 설정하자.
$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)g(x)$

$(x-\alpha)(x-\beta)$를 제외하면 $f(x)$는 이차식 인수를 가지는데, 이를 ax^2+bx+c로 설정하면 계산이 불필요하게 복잡해진다. 깔끔하게 이차식 $g(x)$를 인수로 가진다고 설정하는 게 좋다.

2. **$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)g(x)$과 $f'(\alpha)f'(\beta)>0$만 가지고 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 네 실근을 갖는 것을 증명해야 한다.**
$f'(x)=(x-\beta)g(x)+(x-\alpha)g(x)+(x-\alpha)(x-\beta)g'(x)$이므로
$f'(\alpha)f'(\beta)=-(\alpha-\beta)^2g(\alpha)g(\beta)>0$

부등식의 양변을 0이 아닌 수로 나눌 수 있으므로 양변을 $-(\alpha-\beta)^2$으로 나누자.
음수로 나누게 되므로 부등호 방향을 바꿔줘야 함에 주의하자.
$-(\alpha-\beta)^2g(\alpha)g(\beta)>0$, $g(\alpha)g(\beta)<0$

3. 할 수 있는 것은 다 했다. $g(\alpha)g(\beta)<0$만 가지고 증명을 끝내야 한다. 우리는 방정식 $f(x)=0$이 $x=\alpha$, $x=\beta$가 아닌 서로 다른 두 실근을 가짐을 보여야 한다.
즉, 실근의 존재성을 보여야 하므로 사잇값 정리와 평균값 정리를 떠올리자.

$g(\alpha)g(\beta)<0$이므로 사잇값 정리를 적용하자. $g(x)$는 이차함수이므로 닫힌 구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속이다. 따라서 방정식 $g(x)=0$은 열린 구간 (α, β)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

이로써 방정식 **$f(x)=0$의 서로 다른 세 실근**을 밝혀냈다. (ㄴ)을 풀 때 사차방정식이 한 개의 허근을 가질 수 없음을 보였으므로 **나머지 하나의 근도 실근일 수밖에 없다.**

주의 : 서로 다른 네 실근이라고 했으므로 나머지 하나의 실근이 다른 세 실근과 다름을 확인해줘야 한다.
$f(x)=0$이 중근 k와 서로 다른 두 실근을 가진다고 가정하면 $f'(k)=0$이다. 그런데, $f'(\alpha)f'(\beta)>0$이므로 $k\neq\alpha, \beta$이다. 따라서 $f(x)$는 $x=k$에서 x축과 접하고, $x=\alpha$, $x=\beta$에서 x축과 만난다. 이 경우 $f(x)$의 그래프를 직접 그려보면 $f'(\alpha)f'(\beta)<0$이므로 조건을 만족시키지 못한다. 따라서 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 가진다.

comment

이런 증명도 충분히 소화해야 하나?
'실전'에서는 이렇게까지 증명할 필요가 없다. 그래프로만 확인하고 넘어가면 된다. 평가원도 이 문항의 이의제기에 대해 '본 문항의 목적은 사차함수의 그래프를 이용하여 사차방정식의 근의 성질을 알 수 있는지를 평가하는 것이라 답하였다.
그러나 이런 증명도 소화하고 넘어갔으면 한다. 단지 이 문제를 맞히기 위함이 아니라 이 증명 속에 들어있는 개념, 정리, 논리는 다른 킬러 문항을 풀 때도 도움이 많이 될 것이다.

2. 방정식의 변형

방정식은 절대로 **마음대로 변형해선 안 된다.** 방정식의 **근에 영향**을 줄 수 있기 때문이다. 방정식에 아무런 제약 없이 쓸 수 있는 건 (양변에 동일한 수를 더하거나 빼기), (0이 아닌 수를 곱하거나 나누기) 정도밖에 없다. 이외의 처리를 하고 싶다면 반드시 **근이 영향받을 수 있음을 고려해줘야 한다.**

(1) 동일한 문자로 나누기

방정식 $x^3+2x^2-3x=0$에서 양변을 x로 나눈다면 이 방정식의 근 중 $x=0$이 있음을 고려하고 나눠줘야 한다. 적잖은 학생들이 x를 함부로(실수로) 나눈 뒤에 답이 안 나와서 헤매는 경우가 많기에 이는 정확히 암기하고, 방정식을 식으로 다룰 때 항상 의식하자.

(2) 미분

방정식은 아무런 목적 없이 미분 (혹은 적분)해선 안 된다. **방정식에서 그래프의 관점을 적용하여 함수의 그래프를 그리는 경우에는 방정식의 양변에 있는 식을 각각 미분할 수 있겠으나** 이러한 목적 없는 미분 (혹은 적분)은 금물이다.

예를 들어, 방정식 $f(x)=g(x)$에서 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프를 그리기 위해 $f'(x)$와 $g'(x)$를 각각 관찰할 수는 있으나, 방정식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)=g'(x)$를 도출하는 것은 오류이다.

(3) 제곱

자주 나오는 주제는 아니지만 '방정식에 어떠한 처리를 하고 싶다면 근이 영향받을 수 있음을 고려해야 한다'를 심층적으로 이해하기 위해 공부해보자.

방정식 $f(x)=g(x)$를 풀기 위해 양변을 제곱한 $\{f(x)\}^2=\{g(x)\}^2$을 관찰한다고 하자. 이때, **방정식 $\{f(x)\}^2=\{g(x)\}^2$의 근이 방정식 $f(x)=g(x)$의 근과 같다고 생각하면 안 된다.** 이는 인수분해를 통해 쉽게 증명할 수 있다. $\{f(x)\}^2=\{g(x)\}^2$에서 $\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=0$, $\{f(x)+g(x)\}\{f(x)-g(x)\}=0$이므로
방정식 $\{f(x)\}^2=\{g(x)\}^2$의 근은 $f(x)=g(x)$ 또는 $f(x)=-g(x)$를 만족시키는 x이다.

따라서 **방정식의 양변을 제곱할 때에도 방정식의 근이 영향을 받을 수 있음을 고려**해야 하고, 대표적인 예로 **'무리방정식'**이 있다. 예를 들어 **방정식 $\sqrt{7-2x}=x-2$의 근을 구하기 위해 양변을 제곱**할 때 기존 방정식의 근에 영향을 주지 않으려면 방정식의 옆에 $7-2x\geq 0$, $x-2\geq 0$을 써놓아야 한다.

즉, 양변을 제곱한 방정식의 근 중에서 $2\leq x\leq \frac{7}{2}$를 만족시키는 근이 방정식 $\sqrt{7-2x}=x-2$의 근이 된다.

$\sqrt{7-2x}=x-2$의 양변을 제곱하면 $7-2x=x^2-4x+4$, $x^2-2x-3=0$, $(x-3)(x+1)=0$

$2\leq x\leq \frac{7}{2}$이므로 $x=3$이다. 혹은 제곱을 하여 나온 근을 $\sqrt{7-2x}=x-2$에 대입하여 성립하는 것만을 고를 수도 있다.

$\sqrt{7-2x}=x-2$에 $x=-1$을 대입하면 $\sqrt{9}=-3$이므로 등식이 성립하지 않지만, $x=3$을 대입하면 $1=1$이므로 등식이 성립한다.

◆ 3. 합성

※ 애초에 방정식에서 합성을 취하는 것을 한 번도 생각해본 적이 없을 확률이 높고, 방정식에 직접 합성을 취하는 게 명확한 출제 의도로 나온 적도 없다. 그러나 이 내용을 설명하는 것은 다음의 두 가지 이유 때문이다.

① 오개념의 가능성
② 합성함수 주제에 대한 더욱 깊은 사고

따라서 지금부터 설명할 내용을 이해만 해도 좋다. 암기한 다음에 '방정식에서 합성을 취하는 행위'를 실전에서 적극적으로 활용할 필요도 없고, 오히려 더욱 복잡해질 수도 있다.

결론부터 말하고 들어가겠다.
방정식 $f(x)=g(x)$의 양변에 $p(x)$를 합성하려면, $f(x)$의 치역의 원소와 $g(x)$의 치역의 원소를 모두 포함하는 집합을 정의역으로 갖는 함수 $p(x)$가 일대일함수이어야 한다. ($f(x), g(x)$ 각각의 공역은 각각의 치역과 같다고 하자.)

말이 어렵다. 예시를 통해 천천히 이해해보자. '정의역', '치역', '일대일함수'의 개념은 당연히 알고 있어야겠다.

※ **일대일함수**
함수 $f: X \to Y$에서 정의역 X의 원소 x_1, x_2에 대하여
'$x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$' (혹은 그 대우 '$f(x_1) = f(x_2)$이면 $x_1 = x_2$')
가 성립할 때, 함수 f를 일대일함수라고 한다. 일대일대응은 일대일함수에서 치역과 공역이 일치하는 경우를 말한다.

방정식을 다룰 때는 방정식의 근을 훼손하지 않는 것이 핵심이다.
따라서 방정식 $f(x)=g(x)$을 풀기 위해 **방정식의 양변에 함수** $p(x)$를 **합성하려면**

① **방정식** $f(x)=g(x)$, ② **방정식** $p(f(x))=p(g(x))$

①, ②**의 근이 정확히 일치해야 한다는 보장**이 있어야 한다. ①, ②의 근이 일치하지 않으면 기존 방정식(①)의 근을 훼손했다는 말이 되기 때문이다.

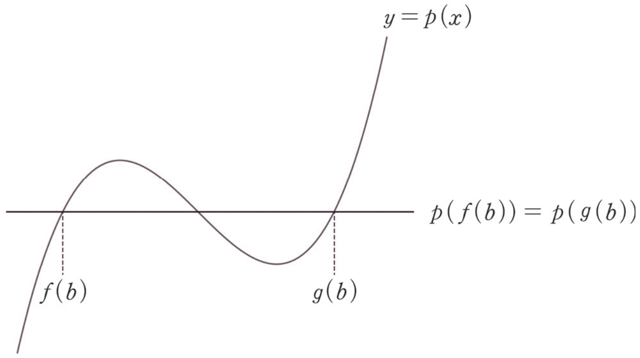
이제 ①, ②의 근이 일치하기 위한 조건이 '**{$f(x)$의 치역의 원소와 $g(x)$의 치역의 원소를 모두 포함하는 집합}을 정의역으로 갖는 함수 $p(x)$가 일대일함수**'인 이유를 알아보자.

우선, '**{$f(x)$의 치역의 원소와 $g(x)$의 치역의 원소를 모두 포함하는 집합}을 정의역으로 갖는**'은 합성함수 $p(f(x))$와 $p(g(x))$가 정의될 조건이다. 만약 함수 f의 치역의 한 원소 a가 함수 p의 정의역에 없다면 a를 p에 대입할 수가 없다. 즉, 합성함수가 정의되지 않는다.

그런데 정의역은 대부분 실수 전체의 집합이므로 이 조건은 크게 신경쓰지 않아도 좋다. 중요한 건 다음 조건이다.

다음으로, **'함수 $p(x)$가 일대일함수'**인 이유를 알아보자. 실수 b가 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근이 아니라고 하면 $f(b)=c,\ g(b)=d\ (c\neq d)$이다. ($b$는 방정식의 근이 아니므로 $f(b)\neq g(b)$이어야 한다.)

그런데 만약 $p(x)$가 일대일함수가 아니라면 $p(c)=p(d)$일 가능성이 존재하므로
방정식 $p(f(x))=p(g(x))$에 $x=b$를 대입했을 때 $p(f(b))=p(g(b))\Leftrightarrow p(c)=p(d)$가 되어 **방정식 $p(f(x))=p(g(x))$의 근에 b도 포함될 수 있다.**



위의 그림에서 일대일함수가 아닌 $y=p(x)$에 대해, 방정식 $f(x)=g(x)$의 근에는 b가 없었으나 방정식 $p(f(x))=p(g(x))$의 근에는 b가 포함되었다. 즉, 기존의 방정식의 근을 훼손한 셈이다.

이처럼 방정식의 새로운 근이 생기지 않으려면 함수 $p: X\rightarrow Y$에서 정의역 X의 원소 x_1, x_2에 대하여 '$x_1\neq x_2$이면 $p(x_1)\neq p(x_2)$'를 만족시켜야 하므로 함수 $p(x)$가 일대일함수이어야 한다. (일대일대응이면 당연히 일대일함수이므로 $p(x)$는 일대일대응이어도 된다.)

한편, 방정식에서 합성을 이용하는 대표적인 경우가 로그방정식이다.

예시 14학년도 6월 평가원 A형 27번

방정식 $x^{\log_2 x}=8x^2$의 두 실근을 α, β라 할 때, $\alpha\beta$의 값을 구하시오. [4점]

1. 수학 I 을 제대로 공부한 학생이라면 방정식의 양변에 밑이 2인 로그를 취해야겠다는 생각이 들 것이다. $\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2 8x^2$, $(\log_2 x)^2=3+2\log_2 x$
$\log_2 x=t$로 치환하면 $t^2-2t-3=0$, $(t-3)(t+1)=0\quad \therefore\ t=-1$ 또는 $t=3$

2. 따라서 $\log_2 x=-1$에서 $x=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$, $\log_2 x=3$에서 $x=2^3=8$이므로 $\alpha\beta=\dfrac{1}{2}\times 8=4$이다.

comment

해설처럼 **방정식의 양변에 밑이 2인 로그를 취할 수 있는 이유는 $y=\log_2 x$가 일대일대응이므로 방정식의 근에 영향을 주지 않기 때문이다.**

예제(2) 2009학년도 6월 평가원 가형 10번

서로 다른 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수

$$y=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ g(x) & (x \geq a) \end{cases}$$

가 모든 실수에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 개수를 $N(f, g)$라 하자. <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $f(x)=x^2$, $g(x)=x+1$이면 $N(f, g)=2$이다.
ㄴ. $N(f, g)=N(g, f)$
ㄷ. $h(x)=x^3$이면 $N(f, g)=N(h \circ f, h \circ g)$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

함수 $y=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ g(x) & (x \geq a) \end{cases}$**가 실수 전체의 집합에서 연속일 조건 :** $f(a)=g(a)$

따라서 $N(f,\, g)$은 '방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수'를 의미한다.

1. 방정식 $x^2=x+1$의 실근의 개수는 2개이다. $\therefore N(f,\, g)=2$(O)

   이차방정식이므로 판별식을 이용해도 되고, $y=x^2$과 $y=x+1$의 그래프를 그린 다음에 교점의 개수를 파악해도 된다.

2. 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수는 당연히 방정식 $g(x)=f(x)$의 실근의 개수와 같다. (O)

3. 이 문항을 예제로 넣은 핵심 이유가 되는 보기이다. 이 보기는 방정식 $f(x)^3=g(x)^3$과 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수가 동일한지를 묻고 있다.

   본문에서 공부했던 대로, $h(x)=x^3$은 일대일 대응이므로 방정식 $f(x)=g(x)$의 양변에 $h(x)$를 합성해도 합성 후의 방정식의 근은 원래 방정식의 근과 동일하다.

   따라서 방정식 $f(x)^3=g(x)^3$와 방정식 $f(x)=g(x)$의 당연히 실근의 개수는 동일하다. (O)

ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳으므로 답은 ⑤!!

◆ 3. 방정식을 푸는 두 가지 도구 : 인수분해 vs 그래프

방정식의 하이라이트다. 세뇌당할 정도로 머리에 집어넣자. **방정식은 '인수분해'로 풀거나 '그래프'로 푼다.**

수Ⅱ의 대부분 주제에서 식의 관점과 그래프의 관점 두 가지가 쓰이는데, 여기서도 인수분해는 식의 관점이고, 그래프는 그래프의 관점에 포함된다.

(1) 인수분해

말 그대로 인수분해를 말한다. **이차, 삼차, 사차방정식**이 나오면 주로 사용한다. 인수분해를 하는 방법은 여러 가지가 있으나 이는 고등학교 저학년 수준에서 다루므로 생략하겠다. 숙지가 안 된 학생들은 고등학교 1학년 수학 교과서를 공부하자. (인수분해를 다루는 대표적인 도구는 완전제곱식, 이차방정식의 인수분해법, 조립제법, 치환이 있다.)

인수분해에서 주의해야 할 점은 **방정식이 변수가 아닌 미지수를 포함할 때**이다. 방정식에 미지수가 포함되면 인수분해가 불가능하다고 단정하고선 인수분해를 시도조차 하지 않는 경향이 많은데, 매우 안 좋은 습관이다. 두 가지 예시를 보자.

e.g. 자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식 $x^2-nx+4(n-4)=0$ (20학년도 6월 평가원 13번)
n이 자연수일 때, x에 대한 이차방정식 $x^2-(2n-1)x+n(n-1)=0$(20학년도 9월 평가원 26번)

→ 변수가 아닌 미지수 n을 포함했으므로 인수분해를 할 수 없을까? 아니다.
$x^2-nx+4(n-4)=(x-n+4)(x-4)=0$,
$x^2-(2n-1)x+n(n-1)=(x-n)(x-n+1)=0$으로 두 방정식 모두 인수분해가 가능하다.

태도 : 어떤 조건이 미지수를 포함해도 확실한 정보를 캐낼 수 있을 때가 많다.

참고로 이차방정식을 볼 때는 근과 계수와의 관계가 아닌 인수분해를 먼저 떠올려야 한다. 인수분해가 불가능한 상황일 때 근과 계수와의 관계나 근의 공식 등 다른 도구를 적용해야 한다.
- 〈Chapter 4. 다항함수〉

또한, **다항함수 $f(x)$의 그래프 개형을 알아내야 할 때 인수분해**가 많이 쓰인다.
방정식 $f(x)=0$에서 바로 인수분해를 통해 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점을 파악할 수도 있고,
방정식 $f'(x)=0$에서 인수분해를 통해 미분계수가 0인 x좌표를 알아낼 수도 있다.

e.g. 함수 $f(x)=x^3-3ax^2+3(a^2-1)x$의 극댓값이 4 $\cdots$ (20학년도 9월 평가원 17번)

→ $f(x)=x^3-3ax^2+3(a^2-1)x$은 인수분해하기 힘들지만 $f'(x)=3x^2-6ax+3(a^2-1)$은 예쁘게 인수분해된다.

(2) 그래프

다음으로 방정식을 푸는 두 가지 도구 중 그래프의 관점을 살펴보자.
방정식 $f(x)=g(x)$를 그래프로 접근한다는 것은 $y=f(x)$와 $y=g(x)$ 그래프의 교점 관찰을 의미한다.
방정식의 실근은 그래프의 교점의 x좌표와 같기 때문이다.

이때, 어떤 그래프를 관찰할지는 스스로 선택하면 된다. 예를 들어 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근을 구해야 할 때,

① $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프 각각을 따로 그려 관찰하는 게 편하다면 두 함수의 교점을 찾으면 되고,

② 두 함수의 그래프를 따로 그려 관찰하는 게 어렵다면 $h(x)=f(x)-g(x)$로 치환하여 $y=h(x)$의 그래프와 x축의 교점을 관찰하면 된다.

③ 혹은 관찰하기 편하도록 방정식 양변의 항들을 적절히 이항하여 $p(x)=k$ 등과 같은 꼴로 만들 수도 있다.

※ 경우가 많긴 하지만 어떤 그래프로 관찰해야 하는지가 출제 의도로서 정해진 경우가 대부분이다. 기출 분석은 이러한 출제 의도를 알아보는 공부이기도 하다.

comment

지금까지 방정식을 푸는 두 가지 관점, 인수분해와 그래프를 살펴보았지만 상당 부분 이미 알고 있던 내용이었을 것이다. 몰랐다면 정말 중요한 내용이므로 100% 소화하자.

그러나 방정식을 볼 때 중요한 것은 그러한 세부적인 내용보다도 이 두 가지 관점을 의식적으로 생각하고 상황에 맞는 관점을 꺼내 적용할 수 있어야 한다는 점이다.
태도 : 방정식을 본다면 인수분해와 그래프 두 가지 관점을 떠올리자.

그리고 **두 관점의 사용은 유기적이어야 한다.** 인수분해가 불가능하다면 그래프를 사용할 수 있어야 하고, 그래프를 그릴 수 없다면 인수분해를 사용할 수 있어야 한다.

예제(3) 2019학년도 6월 평가원 21번

상수 a, b에 대하여 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-1)>-1$ (나) $f(1)-f(-1)>8$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄴ. $-1<x<1$일 때, $f'(x)\geq 0$이다.
ㄷ. 방정식 $f(x)-f'(k)x=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 개수는 4이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

대부분의 평가원 문항에서 **제시된 조건 자체를 그대로 식에 대입하는 것은 좋지 못한 행동**이다. **우선은 식과 조건을 관찰하고 그 의미를 파악하는 과정이 선행**되어야 한다. 그러나 이 문제에서는 $f(x)$ 식과 조건에서 큰 의미를 발견할 수 없다. 게다가 $f(x)$ 식 또한 특이하다.

〈평소의 평가원이었을 경우 $f(x)$에 대하여 사용했을 조건〉

$f(x)$는 최고차항 계수가 1인 삼차함수이며 $f(0)=0$

〈이 문제에서 $f(x)$에 대하여 사용한 표현〉

$f(x)=x^3+ax^2+bx$

평가원은 $f(x)$의 식을 미지수를 포함한 채로 굳이 써줬다. 이는 (가), (나) 조건을 단순히 $f(x)$의 식에 대입하면 된다는 평가원의 메시지로도 해석할 수 있다. 즉, **단순 대입이 출제 의도**이다.

$f(-1)=-1+a-b>-1,\ a>b$

$f(1)-f(-1)=(1+a+b)-(-1+a-b)=2+2b>8,\ b>3$

$\therefore a>b>3$

(가), (나) 조건을 종합하여 부등식 $a>b>3$을 얻었다. 이 이상 제시된 조건으로 할 수 있는 것은 없으므로 보기로 들어가자.

1. $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 방정식 $f'(x)=0$의 실근의 존재성을 파악하기 위해서 판별식을 따져보면 된다. $\frac{D}{4}=a^2-3b>ab-3b=b(a-3)>0$이므로 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (O)

2. 계속해서 $f'(x)$에 집중하자. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$인지 물었다면 판별식만 따져보면 되지만 (ㄴ) 선지는 정의역을 제한했다. **$f'(x)$의 꼭짓점(대칭축)과 $f'(-1)$, $f'(1)$의 값 등을 종합적으로 따져봐야 한다.**

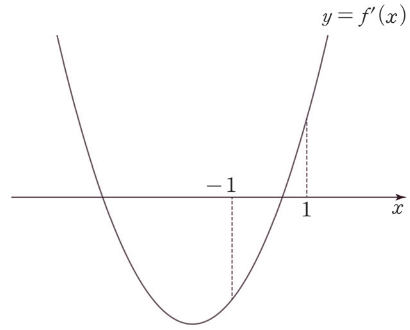
① $f'(x)=3x^2+2ax+b=3\left(x+\frac{a}{3}\right)^2-\frac{a^2}{3}+b$

꼭짓점의 x좌표 $-\frac{a}{3}$는 -1보다 작다. 즉, 이차함수의 대칭축은 $x=-1$보다 왼쪽에 위치한다.

② $f'(-1)=3-2a+b<0$

③ $f'(1)=3+2a+b>0$

위 정보를 바탕으로 $y=f'(x)$의 그래프와 x축의 위치 관계를 표현하자.



$-1<x<1$ 일 때, $f'(x)<0$ 인 구간이 존재한다. (X)

3. 방정식 $f(x)-f'(k)x=0$의 실근의 개수를 따져야 한다.
본문에서 배운 대로 방정식을 푸는 **두 가지 관점, 인수분해와 그래프**를 떠올리자.

$f(x)$의 식이 미지수 $a,\ b$를 포함했으므로 인수분해 관점은 후 순위로 미루고 그래프 관점부터 적용하자.

방정식 $f(x)-f'(k)x=0$ 의 서로 다른 실근의 개수
$\Leftrightarrow$ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f'(k)x$의 그래프의 서로 다른 교점의 개수

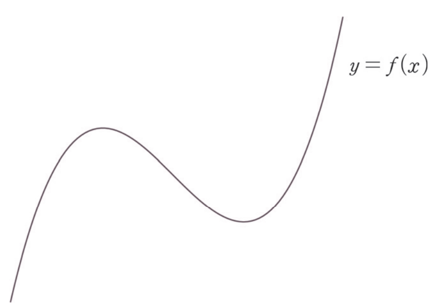
$y=f'(k)x$의 그래프부터 살펴보면 $y=f'(k)x$는 $f'(k)$를 기울기로 갖고 항상 $(0,\ 0)$을 지나는 일차함수이다. 다시 말해 $x=k$에서의 $f(x)$의 미분계수를 그대로 기울기로 가지면서 $(0,\ 0)$을 지난다.

다음으로 $y=f(x)$의 그래프를 살펴보자.

ㄱㄴㄷ 합답형 문항에서 ㄱ, ㄴ 보기는 ㄷ 보기를 풀기 위한 힌트이자 기초 작업이다.
이 문항의 ㄱ, ㄴ 보기에서 쏟은 노력은 $y=f(x)$의 그래프를 그리는 데에 큰 도움을 준다.

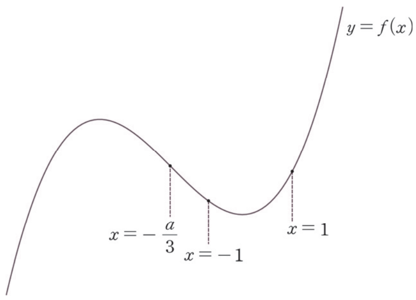
ㄱ. **방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다.**
ㄴ. $f'(1)>0,\ f'(-1)<0$, **이차함수 $f'(x)$의 대칭축은 $x=-1$보다 왼쪽에 위치한다.**

방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가지므로 $y=f(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다.



$f'(1) > 0$, $f'(-1) < 0$이고 이차함수 $f'(x)$의 대칭축, 즉 $f(x)$의 변곡점은 $x=-1$보다 왼쪽에 위치하므로 $x=-1$과 $x=1$의 위치는 다음과 같다.

※ 변곡점은 **'삼차함수의 점대칭 점'의 의미로만 받아들이자.** 그리고 삼차함수의 점대칭 점(변곡점)의 x좌표는 삼차함수의 도함수인 이차함수의 꼭짓점의 x좌표와 같다. 매번 삼차함수의 점대칭 점으로 서술하기는 귀찮으니 변곡점이라는 표현을 도입한다는 느낌이다. - 〈Chapter 4. 다항함수〉

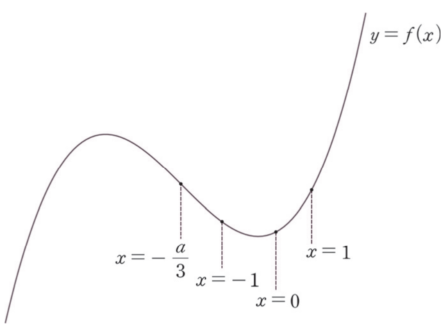


마지막으로 중요한 요소가 하나 남았다. 바로 $x=0$의 위치이다.

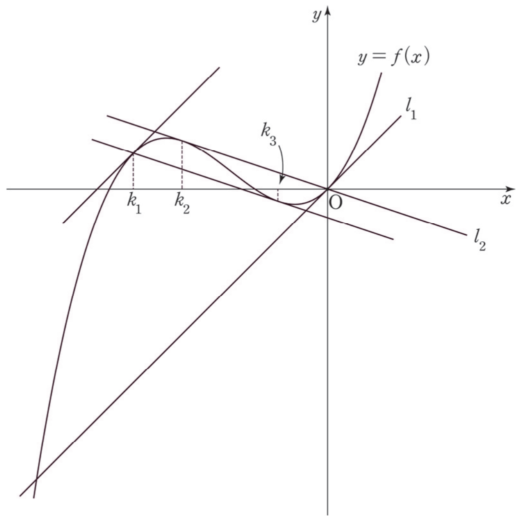
※ 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f'(k)x$가 모두 점 $(0,\ 0)$을 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f'(k)x$의 그래프는 이미 하나의 교점을 가진다. 그래프를 통해 교점을 따지는 상황에서 $x=0$에서 이미 하나의 교점을 형성한다는 것은 매우 중요한 정보이다.

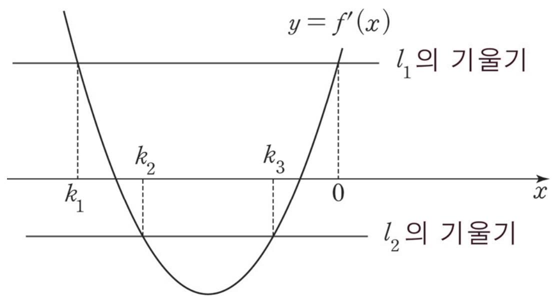
따라서 $y=f(x)$의 그래프를 그릴 때 $x=0$의 위치를 최대한 정확히 잡아주는 것은 필수적인 절차라고 볼 수 있다.

$f'(0)=b>0$**이고** $0>-\frac{a}{3}$**이므로** $x=0$**은** $f(x)$**의 극솟점의 오른쪽에 위치한다.**



직선 $y=f'(k)x$와 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 서로 다른 두 개의 교점을 가지는 상황을 그래프로 표현하자. **삼차함수의 그래프와 직선이 서로 다른 두 개의 교점을 형성하려면 접할 수밖에 없다.**





구하는 것을 헷갈리면 안 된다. 우리는 두 그래프의 교점이 2개가 되도록 하는 k의 개수를 구해야 한다.

$y=f'(k)x$**가** l_1**인 경우 :** l_1**의 기울기와 동일한 미분계수를 갖는** k**의 값은** 0, k_1
$y=f'(k)x$**가** l_2**인 경우 :** l_2**의 기울기와 동일한 미분계수를 갖는** k**의 값은** k_2, k_3

$0 \neq k_1 \neq k_2 \neq k_3$이므로 조건을 만족시키는 실수 k의 개수는 4이다. (O)
ㄱ, ㄷ만 옳으므로 답은 ③!!

※ (ㄷ) 선지 - 인수분해 풀이

방정식을 다루는 인수분해 관점을 적용하여 풀어보자.

방정식 $f(x)-f'(k)x=0$

$\Leftrightarrow x^3+ax^2+bx-(3k^2+2ak+b)x=0$

$\Leftrightarrow x^3+ax^2-(3k^2+2ak)x=0$

$\Leftrightarrow x\{x^2+ax-(3k^2+2ak)\}=0$

삼차방정식 $x\{x^2+ax-(3k^2+2ak)\}=0$은 이미 $x=0$을 하나의 실근으로 가진다.
따라서 삼차방정식이 서로 다른 2개의 실근을 갖기 위해서는 다음의 두 가지 경우가 가능하다.

①**이차방정식 $x^2+ax-(3k^2+2ak)=0$이 0이 아닌 중근을 가질 때**
②**이차방정식 $x^2+ax-(3k^2+2ak)=0$이 서로 다른 두 근 $0, \alpha\,(\alpha\neq 0)$를 가질 때**

①**이차방정식이 중근을 가질 조건 : 판별식** $D=0$

$D=a^2-4(-3k^2-2ak)=0$

$a^2+8ak+12k^2=0,\ (a+2k)(a+6k)=0$

$k=-\dfrac{a}{2}$ 또는 $k=-\dfrac{a}{6}$

선불리 끝내면 안 된다. k가 위의 두 값을 가질 때 방정식 $x^2+ax-(3k^2+2ak)=0$이 $x=0$이 아닌 중근을 갖는지를 끝까지 확인해줘야 한다.

$k=-\dfrac{a}{2}$ 또는 $k=-\dfrac{a}{6}$일 때, 방정식 $x^2+ax-(3k^2+2ak)=0$

$\Leftrightarrow$ 방정식 $\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2=0$

방정식은 중근 $x=-\dfrac{a}{2}$를 가진다. $a>b>3$에서 $a\neq 0$이므로 중근은 0이 아니다.

②이차방정식이 서로 다른 두 근 $0, \alpha\,(\alpha \neq 0)$를 가지므로 이차방정식에 $x=0$을 대입하자.

$-(3k^2+2ak)=0$

$k=0$또는 $k=-\dfrac{2a}{3}$

마찬가지로 k가 두 값을 가질 때 방정식 $x^2+ax-(3k^2+2ak)=0$이 서로 다른 두 근 $0, \alpha\,(\alpha \neq 0)$를 가지는지 확인해야 한다.

$k=0$ 또는 $k=-\dfrac{2a}{3}$일 때,

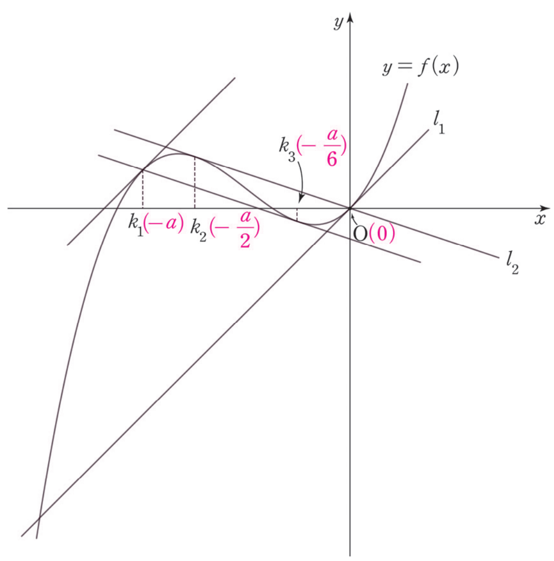
방정식 $x^2+ax-(3k^2+2ak)=0$

$\Leftrightarrow$ 방정식 $x(x+a)=0$

$a \neq 0$이므로 방정식은 서로 다른 두 근 $0, \alpha\,(\alpha \neq 0)$를 가진다.

따라서 조건을 만족시키는 k의 값은 $-\dfrac{a}{2},\ -\dfrac{a}{6},\ 0,\ -a$로 4개이다. (O)

인수분해 관점에서 나온 4개의 k의 값을 그래프에 대응하면 다음과 같다.



◆ 항등식

정의 : 등식이 변수의 값에 상관없이 항상 참인 경우를 항등식이라고 한다.
특징 : 방정식은 근을 훼손할 가능성이 있기에 함부로 건드릴 수 없다. 이와 달리,

① 항등식은 대부분의 변형이 가능하다.

즉, 더하기 빼기, 곱하기 나누기 미분, 적분, 합성 등이 자유롭게 가능하다. 애초에 모든 변수의 값에 대해 성립하기 때문에 근이라는 개념을 신경 쓸 필요 없기 때문이다. 단, 나누기에서 나누는 수나 변수는 0이 아니어야 하고, 적분 시에는 적분상수를 유의해야 한다.

② 별도의 처리 or 제시된 형태 자체에서 의미 파악

항등식은 방정식과 달리 제약이 거의 없으므로 정해진 해결방법도 존재하지 않는다. 단지 상황에 따라 **그에 맞는 처리**를 해주면 된다.

그런데 별도의 처리를 하지 않고도 **항등식의 제시된 형태 자체에서 그 의미를 파악**하는 것이 출제 의도인 경우도 존재한다.

따라서 **'별도의 처리'와 '형태 자체의 의미 파악' 중 어느 것이 출제 의도인지는 알아서 파악해야 한다.**
식을 잘 관찰하고 다양한 문제를 풀어보며 경험을 많이 쌓아 두자.

③ 항등식이 정의된 집합 주의

제시된 항등식이 정의된 집합이 (실수 전체의 집합)인지, (특정 집합을 제외한 실수 전체의 집합)인지, (특정 집합)에서만 정의되었는지 잘 관찰해야 한다.

e.g. $f(x)=g(x)$가 모든 실수 x에 대해 정의되었다. → (실수 전체의 집합)에서 정의된 항등식
$f(x)=g(x)$가 $x \neq 1$, $x \neq 2$인 모든 실수 x에 대해 정의되었다. → (특정 집합을 제외한 실수 전체의 집합)에서 정의된 항등식

$f(x)=g(x)$가 모든 정수 x에 대해 정의되었다. → (특정 집합)에서 정의된 항등식
$f(x)=g(x)$가 $-1 \leq x < 1$인 모든 실수 x에 대해 정의되었다. → (특정 집합)에서 정의된 항등식

기출에 나온 항등식의 예시를 보자. (ⅲ), (ⅳ)는 쉽게 해결할 수 있는 문항으로 해설도 바로 적었다. 여기서 다루지 않는 문항은 이후에 다룰 것이므로 걱정하지 않아도 된다.

(ⅰ) 17학년도 수능 20번 조건 (나)

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=k$에서 극솟값을 가진다. (단, k는 상수이다.)

(나) 1보다 큰 모든 실수 t에 대하여 $\int_0^t |f'(x)|dx = f(t)+f(0)$이다.

comment

정의된 집합 : 실수 전체의 집합이 아닌, 1보다 큰 모든 실수 t의 집합임을 주의하자.

처리 : **정적분으로 정의된 함수의 기본형** $\int_0^t |f'(x)|dx$가 제시되었으므로 다음의 두 가지의 처리가 요구된다. (정적분으로 정의된 함수와 관련된 내용은 〈Chapter 7. 부정적분과 정적분〉의 정적분으로 정의된 함수 파트에서 자세히 다룬다.)

① **위끝과 아래끝을 같게 만드는 수 ($t=0$) 대입**. 단, 이 문제에서 항등식은 1보다 큰 모든 실수 t에 대해 정의되었으므로 $t=0$을 대입할 수 없다.

② **미분** : $\int_0^t |f'(x)|dx$에서 $|f'(t)|$가 연속이므로 항등식의 양변을 t에 대하여 미분가능하다.
단, 양변을 t에 대하여 미분한 $|f'(t)|=f'(t)$은 $t>1$인 t에서 성립한다.

(ⅱ) 08년 10월 교육청 가형 20번

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

(가) $f(x)g(x)=x^3+3x^2-x-3$

comment

정의된 집합 : 모든 실수

처리 : (가)에서 (우변)이 $x^2(x+3)-(x+3)=(x^2-1)(x+3)=(x+1)(x-1)(x+3)$**으로 인수분해된다.**

(ⅲ) 19학년도 6월 평가원 17번

함수 $f(x)=ax^2+b$가 모든 실수 x에 대하여 $4f(x)=\{f'(x)\}^2+x^2+4$를 만족시킨다.
$f(2)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

comment

정의된 집합 : 모든 실수
처리 : 함수 $f(x)$의 식이 주어졌으므로 항등식에 대입한 뒤 계수 비교법을 사용하면 된다.

$$4ax^2+4b=(2ax)^2+x^2+4=(4a^2+1)x^2+4$$

$4a=4a^2+1$, $4b=4$

$(2a-1)^2=0$, $b=1$ $\quad\therefore\ a=\dfrac{1}{2}$, $b=1$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+1$이므로 $f(2)=3$이다. **답은 ①!!**

(ⅳ) 19학년도 수능 14번

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $\displaystyle\int_1^x\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=x^3+ax^2-2$를 만족시킬 때,
$f'(a)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

comment

정의된 집합 : 모든 실수
처리 : 정적분으로 정의된 함수의 기본형이 제시되었으므로 두 가지의 처리가 요구된다.
① **위끝과 아래끝을 같게 만드는 수 ($x=1$) 대입**
② **미분** (피적분함수인 $\dfrac{d}{dx}f(x)=f'(x)$가 연속이므로 양변을 x에 대하여 미분가능)

※ 정적분으로 정의된 함수와 관련된 내용은 〈Chapter 7. 부정적분과 정적분〉의 정적분으로 정의된 함수 파트에서 자세히 다룬다.

항등식의 양변에 $x=1$을 **대입**하면 $0=1+a-2$ $\quad\therefore\ a=1$

항등식의 양변을 x에 대하여 **미분**하면 $\dfrac{d}{dx}f(x)=3x^2+2ax$

$f'(x)=3x^2+2ax=3x^2+2x$
$\therefore\ f'(a)=f'(1)=5$, **답은 ⑤!!**

예제(4) 20학년도 수능 28번

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\int_{1}^{x} f(t)\,dt = \frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$이다.

(나) $\int_{0}^{2} f(x)\,dx = 5\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx$

$f(0)=1$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

조건 (가)에서 **모든 실수 x에 대하여 성립하는 항등식**이 제시되었다.

$$\int_1^x f(t)dt = \frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$$

이 항등식의 경우 **식의 제시된 형태 자체에서 의미를 파악**해서 풀거나 **별도의 처리**를 통해 풀 수도 있다. 하나씩 살펴보자.

1. 식의 제시된 형태 자체에서 의미 파악

아직 정적분 파트를 들어가기 전이지만, 이 문제에서 정적분은 그다지 중요한 요소는 아니다.

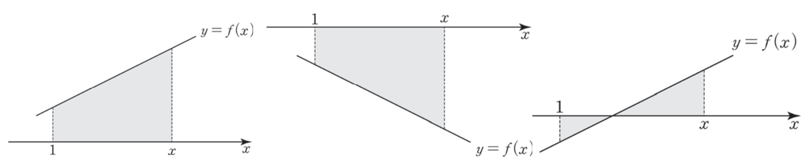
$\int_1^x f(t)dt = \frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$에서

(좌변) : $\int_1^x f(t)dt$ → 함수 $y=f(x)$의 1부터 x까지의 정적분을 의미한다.

(우변) : $\frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$ → 좌변과 달리, 우변은 보자마자 의미를 파악하기가 힘들다. 별도의 처리를 해야 하는 건 아닌가 싶기도 하다. 그러나 항상 '관찰'이 우선이다. 우변을 잘 관찰하면 좌변의 적분 구간과 겹치는 1, x가 많이 등장하는데, 이는 절대로 우연의 일치가 아니다.

태도 : '공통부분'은 반드시 출제 의도와 연결된다.

표현이 정확하지는 않지만, **우변은 바로 '사다리꼴' 모양의 정적분을 표현한 식이고, $y=f(x)$는 직선이다.**
'일차함수'가 아닌 '직선'인 이유는 $f(x)=c$인 상수함수일 때도 (가) 조건을 만족시키기 때문이다.



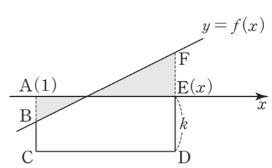
첫 번째와 두 번째 그림의 경우 $\int_1^x f(t)dt = \frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$의 좌, 우변이 모두 사다리꼴의 '정적분'을 표현한 식임을 쉽게 이해할 수 있다. 그렇다면 세 번째 그림에서는 어떻게
$\int_1^x f(t)dt = \frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$가 성립할 수 있을까?

오른쪽과 같이 사다리꼴 모양을 직접 만들어주면 된다.

$\int_1^x f(t)dt =$(사다리꼴 BCDF의 넓이) − (사각형 ACDE의 넓이)

$= \frac{x-1}{2}[\{k+f(1)\}+\{k+f(x)\}]-k(x-1)$

$= (x-1)\left\{\frac{f(x)+f(1)}{2}\right\}$



2. 따라서 $f(x)$는 직선이다. $f(0)=1$이므로 $f(x)=ax+1$로 식을 세울 수 있다.
아직 쓰지 않은 (나) 조건을 이용하여 a의 값을 구하자.

(나) $\int_0^2 f(x)dx = 5\int_{-1}^1 xf(x)dx$

$\Leftrightarrow \int_0^2 (ax+1)dx = 5\int_{-1}^1 x(ax+1)dx$

$\int_{-1}^1 x(ax+1)dx$의 적분 구간 위끝과 아래끝은 $x=0$에 대해 대칭이고, $y=ax^2$은 우함수,

$y=x$는 기함수이므로 $\int_{-1}^1 ax^2dx = 2\int_0^1 ax^2dx$, $\int_{-1}^1 xdx = 0$

따라서 $5\int_{-1}^1 x(ax+1)dx = 10a\int_0^1 x^2\,dx$이다.

※ 이 내용은 〈Chapter 8. 정적분의 활용〉에서 자세히 배운다.

$\int_0^2 (ax+1)dx = 5\int_{-1}^1 x(ax+1)dx$

$\Leftrightarrow \int_0^2 (ax+1)dx = 10a\int_0^1 x^2dx$

$\Leftrightarrow \left[\frac{a}{2}x^2+x\right]_0^2 = 10a\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$

$\Leftrightarrow 2a+2 = \frac{10}{3}a$

$a=\frac{3}{2}$이므로 $f(x)=\frac{3}{2}x+1$ $\quad \therefore f(4)=7$

답은 7!!

comment

항등식의 의미를 파악하는 풀이를 보면서 당혹스러운 학생들도 많을 것 같다. 필연적인 풀이를 강조하는 이 책의 특성과는 맞지 않는다는 느낌이 강하게 들 것이기 때문이다. **항등식의 우변 $\frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$이 사다리꼴을 의미하는 식임을 현장에서 발견하기는 대단히 어렵다.** 이것이 사다리꼴을 나타내는 식임을 알 수 있는 힌트조차 제시되지 않았다. 그래서 평가원은 이 문제를 ‘EBS 연계 문제’로 출제했다.

20학년도 수능특강 수학영역 수학II&미적분I 中

다항함수 $f(x)$가 임의의 두 실수 a, b에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\{f(a)+f(b)\}$

(나) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 4a$

(다) $f(2)=8$

$f(4)$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

보다시피 ebs에 수록된 문항과 수능 28번 문항의 아이디어가 완전히 동일함을 알 수 있다.

Q) 그렇다면 EBS 문항을 다 외우거나, 최소한 풀어보는 것이 필수적일까?

A) 그렇지 않다. 사다리꼴 풀이가 이 문항의 유일한 풀이라면 EBS를 외우는 게 무조건 유리했을 것이다. 하지만 평가원은 발상적인 풀이가 문제의 유일한 풀이법이 되도록 문제를 설계하지 않는다. 별도의 처리를 통해서도 이 문제를 풀 수 있는데, 어떤 풀이일지 고민해보고 다음 페이지를 보자.

※ 항등식에 별도의 처리를 적용하는 풀이

다항함수 $f(x)$를 포함한 항등식이 있을 때, $f(x)$의 차수와 최고차항의 계수를 알 수 없다면 최고차항을 설정하자.

$f(x)$의 (최고차항)$=ax^n$ (단, a는 0이 아닌 상수, n은 음이 아닌 정수)

($f(x)$가 확정되는 경우가 많아 a, n이 상수인 경우가 대부분이다.)

※ 다항함수는 상수함수도 포함하므로 $n=0$일 수도 있다! 위와 같이 최고차항을 설정하면 모든 다항함수를 표현할 수 있지만, $f(x)=0$인 한 가지 경우를 빼먹게 된다.
사실 다항함수 $f(x)$가 $f(x)=0$이 되게끔 문제를 설계할 확률은 거의 없지만, 모든 케이스를 따져야 하므로, $f(x)=0$인 경우도 따로 대입해서 확인해주자.

$f(x)$의 최고차항을 설정하여 항등식에 대입한 후 **계수 비교법을 통해 a, n의 값**을 알아낼 수 있는 경우가 많다. 이렇게 a, n의 값을 알아낸 다음, $f(x)$의 전체 식을 알 수 있는 다른 방법이 없다면 **$f(x)$의 전체 식을 항등식에 대입**할 수도 있다. 단, 이 경우에는 출제자가 $f(x)$의 차수를 1 또는 2로 설계할 것이다.

- 〈Chapter 4. 다항함수〉

이 문제에서도 다항함수 $f(x)$가 포함된 항등식 $\int_1^x f(t)dt=\frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$이 제시되었지만,

차수와 최고차항의 계수에 관한 정보는 주어지지 않았다. 위의 도구를 적용해 보자.

($f(x)$의 최고차항)$=ax^n$ (a는 0이 아닌 상수, n은 음이 아닌 정수)

$n=0$일 때와 $n\neq0$일 때로 CASE를 나누자. $n=0$일 때는 $f(1)$도 $f(x)$의 최고차항이 되기 때문이다. 또한, $f(x)=0$도 (가)를 만족시킨다.

(i) $n=0$일 때 ($f(x)=a$)

(항등식의 좌변의 최고차항)$=ax$, (항등식의 우변의 최고차항)$=\frac{x}{2}(a+a)=ax$

(ii) $n\neq0$일 때

(항등식의 좌변의 최고차항)$=\frac{a}{n+1}x^{n+1}$, (항등식의 우변의 최고차항)$=\frac{a}{2}x^{n+1}$

좌변과 우변의 최고차항이 일치하므로 계수 비교법을 이용하면 $\frac{a}{n+1}=\frac{a}{2}$이다. $a\neq0$이므로 $n=1$이다.

따라서 (i), (ii)에 의하여 $f(x)$는 '직선'이다. (상수함수 또는 일차함수) 이후의 풀이과정은 앞선 풀이와 동일하다.

comment

1. 식의 제시된 형태 자체에서 사다리꼴 넓이를 파악한 후 $f(x)$가 일차함수임을 추론하지 못하더라도 필연적으로 풀 수 있는 길이 존재한다.
2. **다항함수에서 가장 중요한 것은 '최고차항의 계수'와 '차수'**이므로 다항함수를 보면 두 가지 정보는 반드시 따지자. 이러한 점에서 **최고차항 설정 도구는 반드시 숙지**하자.

◈ 미지수 특정, 함수 특정

미지수 k 혹은 함수식이 정해지지 않은 $f(x)$에 대해,
문제 속 조건을 모두 만족하는 k의 값 혹은 $f(x)$의 식(그래프)이 무한히 많다면, 그러한 미지수의 값들 혹은 $f(x)$의 후보 중에서 계산에 편한 값과 함수를 특정해도 좋다.

조건을 모두 만족하는 값이 무한히 많다는 것은, 어떠한 값을 대입해도 답이 똑같이 나온다는 말이므로, 문제를 푸는 입장에서는 계산에 편한 값을 대입하여 풀면 된다.

e.g. 19학년도 수능 17번 (아래의 조건이 전부)

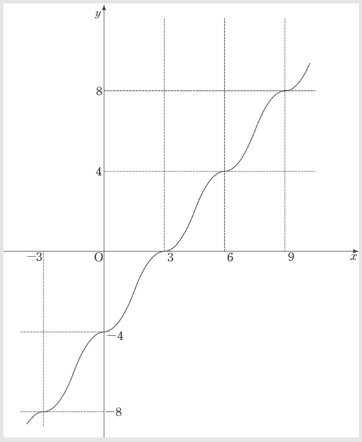
실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

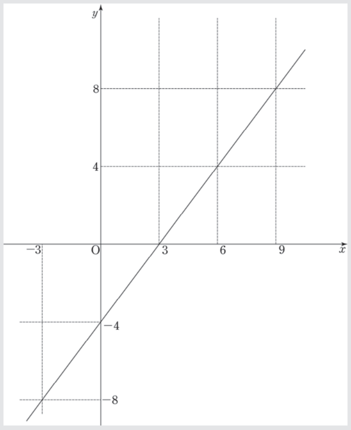
(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x-3)+4$이다.
(나) $\displaystyle\int_0^6 f(x)dx=0$

comment

조건 (가)의 항등식
정의된 집합 : 모든 실수
의미 : 함수의 주기성과 평행이동 (주기함수에 해당하는 건 아니지만, 그래프 형태가 반복된다.)

이때, $f(x)$를 특정할 수도 있다. 실수 전체의 집합에서 증가하는 동시에 연속이고, (가), (나) 조건을 모두 만족하는 $f(x)$는 수 없이 많다. 그중에서 어떠한 함수를 택하는 답은 똑같이 나오므로 가장 간단한 일차함수를 택하면 된다. 이 문항은 **<Chapter 8. 정적분의 활용>**에서 한 번 더 등장한다.





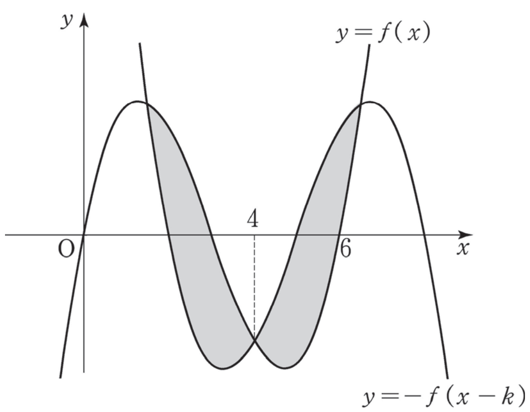
e.g. 06학년도 9월 평가원 가형 20번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=f(6)=0$

(나) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=-f(x-k)$의 그래프가 서로 다른 세 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$, $(\beta,\ f(\beta))$, $(\gamma,\ f(\gamma))$ (단, $\alpha<\beta<\gamma$)에서 만나면 k의 값에 관계없이 $\int_{\alpha}^{\gamma}\{f(x)+f(x-k)\}dx=0$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=-f(x-k)$의 그래프가 다음 그림과 같이 서로 다른 세 점에서 만나고 가운데 교점의 x 좌표의 값이 4일 때, $\int_{0}^{k}f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]



comment

$\int_{\alpha}^{\gamma}\{f(x)+f(x-k)\}dx=0$은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=-f(x-k)$의 그래프가 서로 다른 세 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$, $(\beta,\ f(\beta))$, $(\gamma,\ f(\gamma))$ (단, $\alpha<\beta<\gamma$)에서 **만날 때의 k의 집합**에서 정의된 **항등식**이다.

따라서 **미지수 특정**도 가능하다. 두 곡선이 서로 다른 세 점에서 만날 때의 k의 값 중, 계산이 가장 편한 $k=0$을 골라 $\int_{\alpha}^{\gamma}\{f(x)+f(x-k)\}dx=0$을 계산할 수 있다.

이 문제는 〈Chapter 8〉 유제 47번에서 풀어볼 문항이지만 정적분 개념을 모두 알고 있다면 지금 당장 풀어봐도 좋다. 해설은 유제 해설지를 참고하면 된다.

예제(5) 02학년도 수능 7번

5차 이하의 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a + f(0)b + f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a$$

를 성립시키는 상수 a, b가 있다. a, b를 순서대로 나열한 것은? [3점]

① $\frac{4}{9}$, $\frac{10}{9}$ ② $\frac{5}{9}$, $\frac{8}{9}$ ③ $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{7}{9}$, $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{8}{9}$, $\frac{2}{9}$

항등식의 특징을 이용한 두 가지의 풀이가 존재한다. 하나씩 살펴보자.

〈첫 번째 풀이〉

1. 5차 이하의 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 주어진 등식을 성립시킨다.

⇔ 5차 이하의 어떤 다항함수 $f(x)$를 대입하더라도 주어진 등식이 성립한다.

즉, 계산에 편한 5차 이하의 다항함수로 $f(x)$를 특정시켜 대입하면 된다. **함수 특정**이다.

(1) 가장 차수가 낮은 상수함수부터 대입하자.

$f(x)=0$인 경우 $0=0$, $f(x)=1$인 경우 $2=2a+b$, $f(x)=2$인 경우 $4=4a+2b$

다른 상수함수를 넣어도 동일한 결론인 $2=2a+b$가 나온다.

(2) 일차함수를 살펴보자.

$f(x)=x$인 경우 $\int_{-1}^{1} xdx=-\sqrt{\frac{3}{5}}a+0+\sqrt{\frac{3}{5}}a$

$0=0$

$f(x)=x+1$인 경우 $\int_{-1}^{1}(x+1)dx=\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}+1\right)a+b+\left(\sqrt{\frac{3}{5}}+1\right)a$

$2=2a+b$

여기서 눈치를 채야 한다. **일차함수를 넣어도 얻을 수 있는 결론은 결국 상수함수의 결론과 같은 $0=0$ 또는 $2=2a+b$**이다. 그 이유를 알아보자.

$f(x)=cx+d\ (c\neq 0)$일 때, $\int_{-1}^{1}(cx+d)dx=2d$

$f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a+f(0)b+f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a=2ad+bd$

즉, $2d=2ad+bd$이므로 $d=0$일 때 $0=0$이 되고, $d\neq 0$일 때 $2=2a+b$이 된다.

결국 $f(x)$가 상수함수일 때와 똑같은 결론이다. 왜냐하면 $f(x)$의 일차항인 cx는

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a+f(0)b+f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a$에서 아무런 영향도 줄 수 없기 때문이다.

이를 확장 시켜 생각하면 **$f(x)$의 홀수차항은 아무런 영향을 주지 못한다.**

$f(x)=x^n$(n은 홀수)일 때 $f(x)$는 기함수이므로 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=0$이 되고 (Chapter 8 참고)

$f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a+f(0)b+f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a$도 계산해보면 0이 되기 때문이다.

2. 따라서 a, b에 관한 새로운 관계식을 얻기 위해 $f(x)$가 **이차함수인 경우를 대입**하자.

가장 간단한 $f(x)=x^2$을 항등식에 대입하면,

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{3}{5}a + 0 + \frac{3}{5}a$$

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{5}a,\ a = \frac{5}{9}$$

$2 = 2a + b$이므로 $b = \frac{8}{9}$이다. **답은 ②!!**

〈두 번째 풀이〉

1. **항등식의 특징 + 대칭성을 이용하여 풀어보자.**

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a + f(0)b + f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a$$

(좌변) $\int_{-1}^{1} f(x)dx$에서 적분 구간의 양 끝이 $x=0$에 대해 대칭이다.

(우변) $f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a + f(0)b + f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a$에서도 $-\sqrt{\frac{3}{5}}$과 $\sqrt{\frac{3}{5}}$은 $x=0$에 대해 대칭이다.

우연의 일치가 아니다. **대칭성을 띈 숫자를 두 개나 제시했다.** $f(x)$에 관해 주어진 것은 아무것도 없는 상황에서 대칭성을 어떻게 활용할까? 직접 5차 이하의 **다항함수 $f(x)$의 일반식**을 세워 보자.

$f(x) = cx^5 + dx^4 + ex^3 + gx^2 + hx + i$ (단, 다항함수 $f(x)$의 차수는 0부터 5까지 모두 가능하므로 각 항의 계수 c, d, e, g, h, i는 0일 수 있다.)

$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a + f(0)b + f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a$는 5차 이하의 모든 다항함수 $f(x)$에 대해 성립하므로 **c, d, e, g, h, i의 값과 상관없이 성립한다.**

2. $f(x)$의 식을 적고 나면 대칭성의 의미가 보여야 한다. $f(x) = cx^5 + dx^4 + ex^3 + gx^2 + hx + i$을 항등식에 대입하자.

(좌변) $= \int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\int_{0}^{1}(dx^4 + gx^2 + i)dx = 2\left(\frac{1}{5}d + \frac{1}{3}g + i\right)$

적분 구간 양 끝이 $x=0$에 대해 대칭이므로 $f(x)$의 홀수차항은 모두 날라가고, 짝수차항은 적분 구간을 반으로 줄인 다음 두 배를 해주면 된다.

(우변) $= f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a + f(0)b + f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a = 2\left\{d\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^4 + g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 + i\right\}a + ib$

적분기호를 사용하지 않았는데도 마치 적분기호를 사용한 것처럼 전개가 되었다.

(홀수차항에 $x = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ 를 대입하고 a를 곱한 것)과 ($x = \sqrt{\frac{3}{5}}$ 를 대입하고 a를 곱한 것)의 값은 서로 부호만 다르고 절댓값은 같다. 따라서 더하면 사라지게 된다.

(짝수차항에 $x = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ 를 대입하고 a를 곱한 것)과 ($x = \sqrt{\frac{3}{5}}$ 를 대입하고 a를 곱한 것)의 값은 서로 같다. 따라서 더하면 두 배가 된다.

3. $2\left(\frac{1}{5}d + \frac{1}{3}g + i\right) = 2\left\{d\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^4 + g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 + i\right\}a + ib$가 **$d$, g, i의 값과 상관없이 항상 성립하도록 하는 a, b의 값을 구하자.** 양변에서 **d, g, i를 계수로 하는 항끼리 서로 같아야 한다.**

(d가 포함된 항) $\frac{2}{5}d = \frac{18}{25}ad \rightarrow a = \frac{5}{9}$

(g가 포함된 항) $\frac{2}{3}g = \frac{6}{5}ag \rightarrow a = \frac{5}{9}$

(i가 포함된 항) $2i = (2a+b)i \rightarrow 2a + b = 2$

$a = \frac{5}{9}$, $2a + b = 2$이어야 하므로 $a = \frac{5}{9}$, $b = \frac{8}{9}$이다. **답은 ②!!**

comment

1. 두 번째 풀이를 바탕으로 첫 번째 풀이에서 $f(x)$의 홀수차항이 $\int_{-1}^{1} f(x)dx = f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a + f(0)b + f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a$에서 아무런 영향을 주지 못한다고 한 것을 자세히 이해할 수 있다.

2. 실전에서는 첫 번째 풀이처럼 $f(x)$를 특정하여 대입하는 것이 훨씬 효율적이다. 두 번째 풀이를 선보인 이유는 한 문제를 다양한 방식으로 풀고, 이 문제의 구조를 심층적으로 이해하기 위함이다. 두 풀이 모두 소화하자.

3. 정적분 내용이 좀 어렵다면 〈Chapter 7〉, 〈Chapter 8〉을 공부하고 다시 오자. 까먹을 수 있으므로 index를 설정하는 것도 좋다.

◆ 부등식

정의 : 두 수 또는 두 식의 관계를 부등호로 나타낸 것을 말한다.

◆ 1. 놓치기 쉬운 부등식 처리 도구 : 부등식의 양변을 ‘변수’로 나누기

0이 아닌 상수 a에 대해, x에 관한 부등식 $ax^3+ax^2+ax\geq 0$의 양변을 a로 나누는 것을 자연스레 받아들이는 것처럼 양변을 변수 x로도 나눌 수 있다. **그러나 x의 범위를 주의해야 한다.**

(i) $x>0$일 때

$ax^3+ax^2+ax\geq 0$

$\Leftrightarrow\ ax^2+ax+a\geq 0$

양변을 ‘양수’로 나눴기 때문에 부등호 방향에 변화가 없다.

(ii) $x<0$일 때

$ax^3+ax^2+ax\geq 0$

$\Leftrightarrow\ ax^2+ax+a\leq 0$

양변을 ‘음수’로 나눴기 때문에 부등호 방향을 바꿔줘야 한다.

단, $x=0$일 때는 부등식의 양변을 x로 나눌 수 없으므로 부등식에 $x=0$을 대입하여 직접 $x=0$이 부등식의 해에 포함되는지 확인해야 한다. $ax^3+ax^2+ax\geq 0$의 경우 $x=0$은 부등식의 해에 속한다.

◆ 2. 주의할 점

① 부등식을 만족시키는 변수의 범위 주의

항등식에서 항등식이 정의된 집합을 주의하라고 했듯이, 부등식을 만족시키는 변수의 범위를 주의해야 한다.

e.g. $\underline{x\geq -1\text{인 모든 실수 } x}$에 대하여 $f(x)\geq f'(x)$이다. (15학년도 수능 21번)

$\underline{\text{모든 양의 실수 } x}$에 대하여 $6x-6\leq f(x)\leq 2x^3-2$이다. (15학년도 9월 평가원 21번)

② 미분, 부정적분 금지

대부분 학생은 잘 하고 있지만, 간혹 오류를 저지르는 학생이 있다.

Q) 미분가능한 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대해 원함수 $f(x)$, $g(x)$가 $f(x)\geq g(x)$를 만족시키면 도함수 $f'(x)$, $g'(x)$도 $f'(x)\geq g'(x)$를 만족시키나요?

A) 아니다. (직선)과 (직선 위에 존재하는 이차함수의 그래프)를 그려봐도 틀렸음을 알 수 있다. **원함수끼리의 대소관계와 도함수끼리의 대소관계는 독립적이다!!** 단, 부등식의 양변에 정적분을 씌우는 것은 가능하다. 닫힌 구간 $[a,b]$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 연속일 때, $f(x)\geq g(x)$이면

$\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$이다. – 〈Chapter 7. 부정적분과 정적분〉

3. 함수 간의 부등식

부등식에서 가장 중요한 파트이다. 집중하자. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$에 대해, 특정한 실수 x의 범위에서 $f(x) \geq g(x)$일 조건을 구한다고 하자.

이때, 일반적으로 **함수 간의 부등식은 그래프로 해결한다.** $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프를 보면서 $f(x) \geq g(x)$일 조건을 찾는 것이다.

이때, 가장 중요한 순간은 등호가 성립할 때, 즉 $f(x)=g(x)$일 때이다. $f(x) \geq g(x)$인 상황을 고려할 때는 반드시 $f(x) < g(x)$인 상황도 고려할 수밖에 없다. 따라서 두 상황의 '경계'인 $f(x)=g(x)$인 순간에 대한 고려는 필수적이다.

> ※ 여기서 말하는 $f(x)=g(x)$일 때는 $f(x)=g(x)$인 모든 x를 말하는 것이 아니다. $f(x) \geq g(x)$와 $f(x) < g(x)$의 경계일 때의 $f(x)=g(x)$이므로 오해하지 말자. $f(x) \geq g(x)$와 $f(x) < g(x)$의 경계일 때의 $f(x)=g(x)$를 파악하려면 당연히 두 함수의 그래프를 관찰할 수밖에 없다.

이때, $f(x)=g(x)$인 경우는 두 가지이다.

① **접할 때**
② **접하지 않고 만날 때**

이 중에서도 압도적으로 답인 경우로 출제되는 것이 **접할 때**이다.

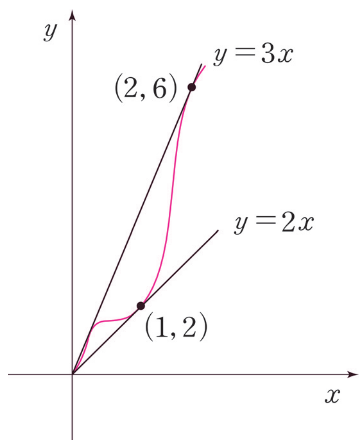
예시 2014학년도 예비평가 18번

$x>0$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하고 $2x \le f(x) \le 3x$이다. $f(1)=2$이고 $f(2)=6$일 때, $f'(1)+f'(2)$의 값은? [4점]

① 8 ② 7 ③ 6 ④ 5 ⑤ 4

1. $f(1)=2$ → $y=f(x)$의 그래프가 $y=2x$의 그래프와 점 $(1, 2)$에서 만난다.
$f(2)=6$ → $y=f(x)$의 그래프가 $y=3x$의 그래프와 점 $(2, 6)$에서 만난다.

그런데 $f'(1)+f'(2)$는 어떻게 따질까?
→ **함수 간의 부등식은 그래프로 따진다.**



2. 직선 $y=2x$, $y=3x$와 곡선 $y=f(x)$를 그려보면 $y=f(x)$는 점 $(1, 2)$에서 $y=2x$에 접하고, 점 $(2, 6)$에서 $y=3x$에 접한다. 따라서 $f'(1)=2$, $f'(2)=3$이므로 **답은 ④!!**

comment

이 문제는 함수 간의 부등식의 본질을 알려주고 있으므로 다른 함수 간의 부등식 문제를 풀 때도 이 본질을 잊지 말자.

함수 간의 부등식에서 중요한 한 가지 도구가 남았다.

③ 차이함수

함수 간의 부등식에서 **두 함수의 그래프를 따로 놓고 관찰하기 어려운 경우**도 당연히 존재한다.
이럴 때는 차이함수를 떠올리자.

예를 들어, 부등식 $f(x) \geq g(x)$에서 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프를 따로 놓고 비교하기 까다롭다면, $h(x)=f(x)-g(x)$로 차이함수를 설정하여 $h(x) \geq 0$을 관찰하면 된다.

이렇게 되면 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 관계를
$y=h(x)$와 x축의 관계로 치환해서 보는 것이므로 한결 편해진다.

한편, 문제에 따라 $f(x) \geq g(x)$에서 $g(x)$의 일부 식을 이항하여 $p(x) \geq c$를 만든 다음 $y=p(x)$와 $y=c$를 관찰하거나, $q(x) \geq ax+b$를 만든 다음 $y=q(x)$와 $y=ax+b$를 관찰할 수도 있다. 방정식에서 살펴본 것과 다르지 않다.

예제(6) 2015학년도 수능 21번

다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 최솟값은? [4점]

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
(나) $f(0)=f'(0)$
(다) $x \geq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq f'(x)$이다.

① 28 ② 33 ③ 38 ④ 43 ⑤ 48

1. (다) 조건에서 함수 간의 부등식이 제시되었다. 그런데 $y=f(x)$와 $y=f'(x)$의 그래프를 알 수 없고, $x=-1$이 어디인지도 알 수 없다. 즉, 두 함수를 따로 놓고 비교하기 힘들다. **차이함수를 통해** $f(x)\geq f'(x)$를 $h(x)=f(x)-f'(x)\geq 0$**으로 변형하자.**

차이함수를 통해 $y=f(x)$와 $y=f'(x)$의 관계를
$y=h(x)$와 x축의 관계로 치환하였다.

함수 간의 부등식은 그래프로 판단해야 하므로 $y=h(x)$의 그래프를 그려야 하는데, $h(x)$의 완전한 식을 알 수 없으므로 바로 그래프를 그릴 수는 없다. 일단 식부터 알아내자.

(가), (나) 에서 $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이고 $f(0)=f'(0)$이므로
$f(x)=x^3+ax^2+bx+b,\ f'(x)=3x^2+2ax+b$

$\therefore\ h(x)=f(x)-f'(x)=x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x$

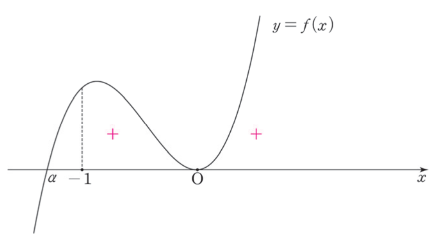
2. $h(x)$의 식을 얻었으니 이를 통해 그래프를 그린 다음 x축과의 관계를 살펴야 한다. 이때, 필연적으로 **식의 인수 x에 눈길이 가야 한다. 함수 간의 부등식의 핵심은 두 함수가 만날 때이기 때문이다. (이때는 $y=h(x)$와 x축이 만날 때이다.)**

$x\geq -1$인 모든 실수 x에서 $h(x)\geq 0$을 만족할 때, 삼차함수 $y=h(x)$는 점 $(0,\ 0)$을 지난다. 만약 곡선 $y=h(x)$가 $(0,\ 0)$에서 x축에 접하지 않는다면 삼차함수는 $x=0$에서 x축을 뚫고 지나가 부등식을 위배할 것이다. 따라서 **함수** $h(x)=x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x$**는** x^2**을 인수로 가져야 하므로** $b=2a$**이다.**
$\therefore\ h(x)=x^3+(a-3)x^2$

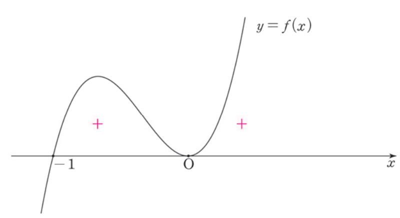
3. 여기서 끝이 아니다. **곡선 $y=h(x)$는 $x\geq -1$인 모든 x에서 $h(x)\geq 0$**이어야 한다.
곡선 $y=h(x)$와 x축의 교점 중 $x=0$이 아닌 교점이 이를 결정한다.

방정식 $h(x)=x^2(x+a-3)=0$의 0이 아닌 실근 $3-a=\alpha$라고 할 때, 직관적으로 α가 $\alpha\leq -1$이어야 한다고 생각할 수 있다. 결과적으로는 맞지만 엄밀한 검증을 거쳐야 한다. $x=\alpha$의 위치를 $x=-1$**과** $x=0$**을 경계로 하여 다섯 가지 CASE로** 나누자.

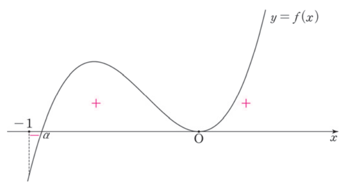
① $\alpha<-1$



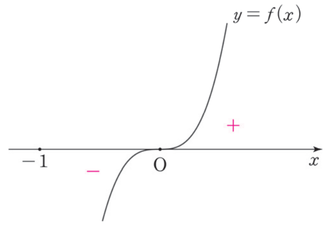
② $\alpha=-1$



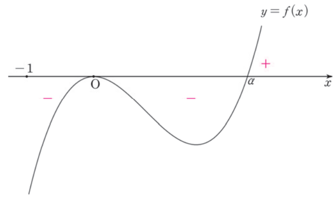
③ $-1<\alpha<0$



④ $\alpha=0$



⑤ $\alpha>0$



※ 이렇게까지 귀찮은 작업을 굳이 해야 하냐고 생각할 수 있지만, 이런 사소한 부분에서도 단계적, 논리적으로 따지는 사고만이 수능 날 유일하게 발휘되는 능력임을 잊지 말자.

$\alpha\le-1$일 때만 부등식을 만족하므로 $\alpha=3-a\le-1\;\therefore\;a\ge4$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+b$
$=x^3+ax^2+2ax+2a$
$f(2)=8+10a\ge48$

답은 ⑤!!

※다른 풀이 : 부등식의 양변을 '변수'로 나누기 (단, 변수의 범위 주의)

$x\ge-1$인 모든 실수 x에서 $x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x\ge0$을 만족한다.
→ 이 부등식을 부등식의 양변을 변수로 나누는 도구를 통해서도 풀 수 있을까?

부등식 $x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x\ge0$의 양변을 x로 나눠보자. (단, $x=0$일 때는 따로 생각해주자. 양변을 0으로 나눌 수는 없다.) 이때, **부등호 방향과 관련해 실수**를 많이 할 것이다. 정의역이 $x\ge-1$인 모든 실수이므로, 음수 구간과 양수 구간을 나눠줘야 한다.

(ⅰ) $(-1\le x<0)$일 때

$x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x\ge0$
양변을 x로 나눈다면 음수(−)로 나누는 셈이므로 부등호 방향은 변한다.
$x^2+(a-3)x+b-2a\le0$

(ⅱ) $(x=0)$일 때

$x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x\ge0$에 $x=0$을 대입하면 $0\ge0$이 되어 부등식이 성립한다.

(ⅲ) $(x>0)$일 때

$x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x\ge0$
양변을 x로 나눈다면 양수(+)로 나누는 셈이므로 부등호 방향은 그대로다.
$x^2+(a-3)x+b-2a\ge0$

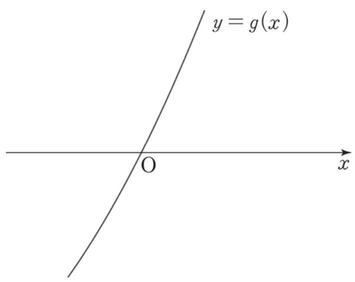
(i) $(-1 \le x < 0)$**일 때**

$x^2+(a-3)x+b-2a \le 0$

(iii) $(x>0)$**일 때**

$x^2+(a-3)x+b-2a \ge 0$

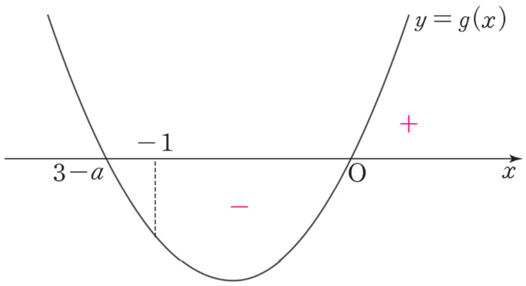
$g(x)=x^2+(a-3)x+b-2a$라 할 때, (i), (iii)에 의해 $x=0$ 좌우에서 $g(x)$의 부호는 음(−)에서 양(+)으로 바뀐다. $g(x)$는 연속함수이므로 이를 만족하기 위해 곡선 $y=g(x)$는 아래 그림과 같이 점 $(0,0)$을 지나야 한다.



$g(0)=0$이므로 $g(0)=b-2a=0$

$g(x)=x^2+(a-3)x=x(x+a-3)$

따라서 방정식 $g(x)=0$의 실근은 $x=0$ 또는 $x=3-a$이다. 마지막으로 $-1 \le x < 0$에서 $g(x) \le 0$이 되려면 $3-a \le -1$이어야 한다. $\therefore 4 \le a$



a의 범위와 a, b의 관계식을 모두 구했으므로 $f(x)$로 돌아와서 $f(2)$의 최솟값을 구하자.

$f(x)=x^3+ax^2+bx+b$

$b=2a$를 대입하면 $f(x)=x^3+ax^2+2ax+2a$

$\therefore\ f(2)=8+10a \ge 48$, **답은 ⑤!!**

comment

본 풀이와 다른 풀이 모두 소화하고 넘어가자. 함수 간의 부등식과 관련하여 아주 표준적인 문항이므로 정확히 풀 수 있어야 한다.

예제(7) 2015학년도 9월 평가원 21번

최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [4점]

(가) $f(0)=-3$
(나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $6x-6 \le f(x) \le 2x^3-2$이다.

① 36 ② 38 ③ 40 ④ 42 ⑤ 44

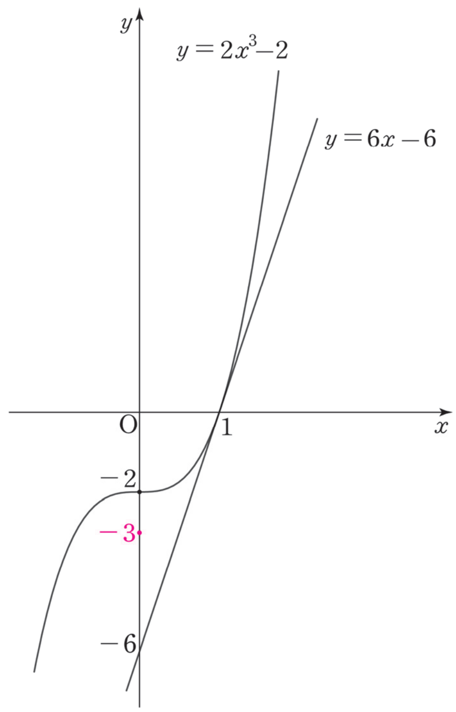
1. **(가)** $f(0)=-3$

(나) 모든 양의 실수 x**에 대하여** $6x-6 \le f(x) \le 2x^3-2$

제시된 3가지 정보

$y=6x-6$, $y=2x^3-2$, $f(0)=-3$

를 좌표평면에 나타내자.

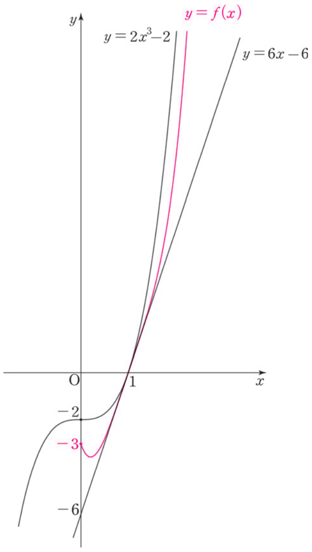


$y=6x-6$, $y=2x^3-2$가 모두 점 $(1, 0)$을 지나고 $x=1$일 때의 미분계수가 6으로 같다.

따라서 두 함수의 그래프는 $x=1$에서 접한다.

※ 함수 각각의 그래프를 그린 것만으로는 미분계수를 알 수 없으므로 접한다는 사실을 알 수 없다. 그러나 **함수의 대소관계를 따지기 위해 두 함수의 그래프가 교점에서 서로 접하는지**도 필수적으로 따져봐야 한다.

2. **모든 양의 실수 x에 대하여 $y=f(x)$는 $6x-6 \le f(x) \le 2x^3-2$를 만족해야 한다.**
('모든 양의 실수'와 같은 조건은 절대 까먹지 말자.)



두 함수 $y=6x-6$, $y=2x^3-2$의 그래프가 점 $(1,\ 0)$에서 서로 접하므로, $y=f(x)$ 또한 점 $(1,\ 0)$에서 두 함수의 그래프에 접해야 한다.

$\therefore\ f(1)=0,\ f'(1)=6$

그런데 문제가 생겼다. 다항함수 $f(x)$의 차수가 제시되지 않았다.
태도 : 다항함수가 제시되면 차수와 최고차항 계수를 반드시 따지자.

차수를 알 수 있는 추가조건이 없으므로 CASE 분류가 요구된다.
이때, **〈다항함수의 차수와 함숫값의 증가 속도의 관계〉**를 필수적으로 고려해야 한다. 모든 양의 실수 x에서 $f(x)$가 최고차항의 계수가 양수인 직선과 최고차항의 계수가 양수인 삼차곡선의 사이에 존재하기 위해서는 **$f(x)$의 차수가 $1,\ 2,\ 3$ 중 하나**여야만 한다.

만약 $f(x)$의 차수가 4 이상이 되어버리면 $x=1$ 부근에서는 $f(x)$의 그래프가 두 함수의 사이에 존재하는 것 같이 보여도, 언젠가는 삼차함수의 그래프를 뚫고 올라가 버리기 때문이다.

- 〈Chapter 4. 다항함수〉

3. CASE 분류

1) $f(x)$가 일차함수인 경우

$f(0)=-3$, $f(1)=0$이므로 $f(x)=3x-3$이다. 그러나 이 경우 $f(x)$는 $x>1$에서 직선 $y=6x-6$보다 아래에 존재할 뿐만 아니라 $f'(1)\neq 6$이다.

2) $f(x)$가 이차함수인 경우

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로 $f(x)=x^2+ax+b$로 일반식을 작성한 다음 $f(0)=-3$, $f(1)=0$을 대입하여 a, b를 구하면 된다.

그러나 **접하는 상황**이 제시되었으므로 **차이함수**를 활용하면 효율적으로 식을 작성할 수 있다.
도구 : 두 함수의 그래프가 서로 접하는 상황에서 차이함수를 이용하면 간단하게 함수식을 작성할 수 있다.

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=6x-6$이 $x=1$에서 서로 접하므로 $f(x)-6x+6=(x-1)^2$이다. 하지만 이 경우 $f(0)=-5$이므로 '조건 $f(0)=-3$'을 위배한다.

3) $f(x)$가 삼차함수인 경우

2)와 같이 차이함수를 작성하자. $f(x)-6x+6=(x-1)^2(x+a)$
$f(0)=-3$을 적용해주면 $a=3$ $\therefore\ f(3)=36$ **답은 ①!!**

예제(8) 11학년도 6월 평가원 15번

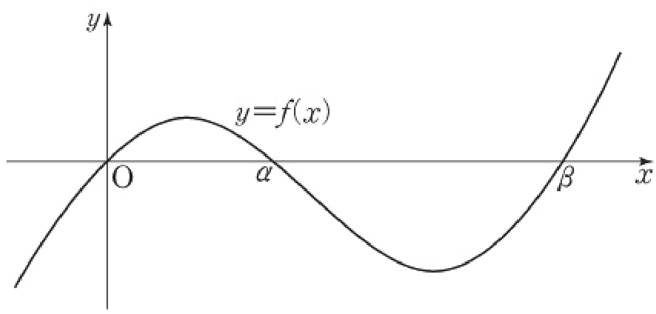
삼차함수 $f(x)=x(x-\alpha)(x-\beta)\ (0<\alpha<\beta)$와 두 실수 a, b에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(a)+(b-a)f'(x) \text{ 라고 하자.}$$

$a<0$, $\alpha<b<\beta$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. x에 대한 방정식 $g(x)=f(a)$는 실근을 갖는다.
ㄴ. $g(b)>f(a)$
ㄷ. $g(a)>f(b)$



① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1. $g(x)=f(a)$

$\Leftrightarrow f(a)+(b-a)f'(x)=f(a)$

$\Leftrightarrow (b-a)f'(x)=0$

삼차함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 가지므로 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다. 따라서 x에 대한 방정식 $g(x)=f(a)$는 실근을 갖는다. (O)

2. $g(b)>f(a)$

$g(b)>f(a)$

$f(a)+(b-a)f'(b)>f(a)$

$(b-a)f'(b)>0$

$b-a>0$이므로 부등식의 양변을 $(b-a)$로 나누면 $f'(b)>0$

$\alpha<b<\beta$를 만족하는 b에 대해 $f'(b)$는 음수, 0, 양수 모든 값을 가질 수 있다. (X)

3. $g(a)>f(b)$

$g(a)>f(b)$

$f(a)+(b-a)f'(a)>f(b)$

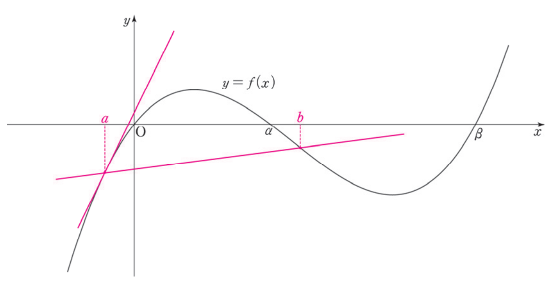
$f(x)$의 $x=a$부터 $x=b$까지의 평균변화율 공식이 눈에 들어와야 한다.

$(b-a)f'(a)>f(b)-f(a)$

$b-a>0$이므로 **부등식의 양변을 $(b-a)$로 나누면**

$$f'(a)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$y=f(x)$의 그래프를 관찰하면 $x=a$에서의 $y=f(x)$의 미분계수는 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나가는 직선의 기울기보다 항상 크다. (O)



옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. **답은 ④!!**

CHAPTER

06 유제

01 18학년도 경찰대 15번

방정식 $|x^2-2x-6|=|x-k|+2$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

02 19년 7월 교육청 20번

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)=ax^4+bx^2+c$ (a, b, c는 상수)가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근이 α, β, γ이다. (단, $\alpha<\beta<\gamma$)
(나) $f(1)=-\dfrac{3}{4}$, $f'(-1)=1$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $f(0)=0$

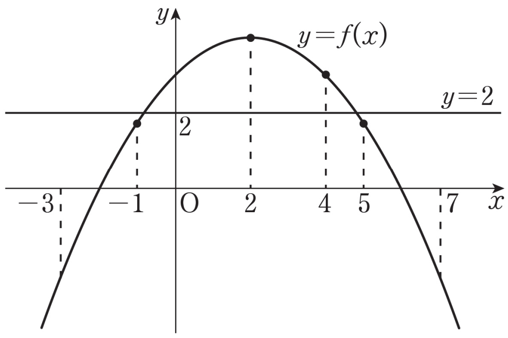
ㄴ. $f'(\alpha)=-4$

ㄷ. 방정식 $|f(x)|=k(x-\alpha)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 양수 k의 범위는 $\dfrac{8}{27}<k<4$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 19년 10월 교육청 12번

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2$가 그림과 같다.



열린 구간 $(-3, 7)$에서 부등식 $f'(x)\{f(x)-2\} \leq 0$을 만족시키는 정수 x의 개수는? (단, $f'(2)=0$) [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

04 18학년도 수능 29번

두 실수 a와 k에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x \leq a) \\ (x-1)^2(2x+1) & (x > a) \end{cases}, \quad g(x)=\begin{cases} 0 & (x \leq k) \\ 12(x-k) & (x > k) \end{cases}$$

이고, 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq g(x)$이다.

k의 최솟값이 $\dfrac{q}{p}$일 때, $a+p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

CHAPTER

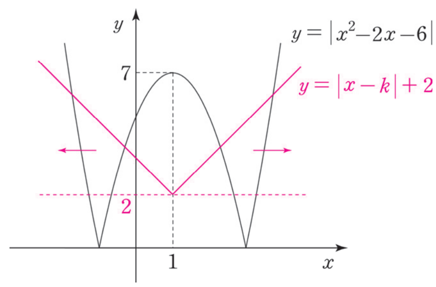
06 해설

01 18학년도 경찰대 15번

답 : ②

1. 방정식은 인수분해 또는 그래프로 해결한다. 방정식 $|x^2-2x-6|=|x-k|+2$은 절댓값과 미지수 k를 포함하여 인수분해하기는 어려워 보인다. 그래프로 해결하자.

방정식 $|x^2-2x-6|=|x-k|+2$의 실근은 함수 $y=|x^2-2x-6|$의 그래프와 함수 $y=|x-k|+2$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다. 두 함수의 그래프를 그려 세 개의 교점을 갖도록 하는 k의 값의 합을 구하자.

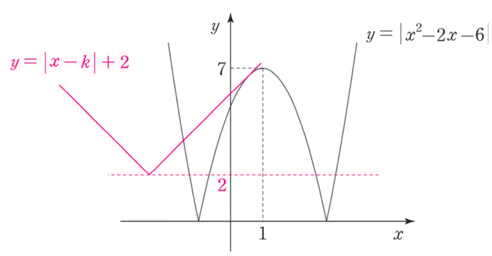


$y=|x-k|+2$의 그래프는 점 $(k,2)$에서 뾰족점을 갖는 V자 모양이다. $y=|x-k|+2$의 뾰족점 $(k,2)$는 항상 직선 $y=2$ 위에 존재하므로 직선 $y=2$ 위에서 점 $(k,2)$를 이동시키면서 두 함수의 그래프의 교점의 개수를 관찰하면 된다. 이런 테크닉이 실전에서 중요하다.

2. 교점을 관찰해보면, 함수 $y=|x^2-2x-6|$의 그래프와 함수 $y=|x-k|+2$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나려면 **두 함수의 그래프가 서로 접해야 하며 이를 만족하는 k의 값은 두 가지가 존재한다.**

(ⅰ) $k<1$인 경우

곡선 $y=-x^2+2x+6$와 직선 $y=x-k+2$가 접해야 한다. 접하는 상황을 다루는 여러 가지 도구가 존재하는데, 그중 **'중근을 갖는 방정식'**을 이용하자. (※ 참고)



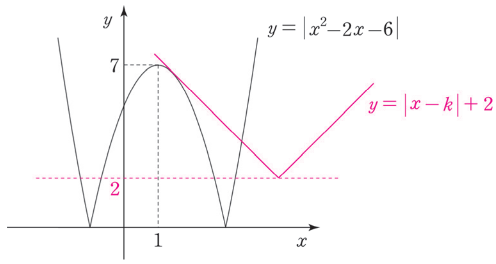
곡선 $y=-x^2+2x+6$와 직선 $y=x-k+2$가 서로 접하므로 **방정식 $-x^2+2x+6=x-k+2$가 중근**을 가져야 한다.

방정식 $x^2-x-k-4=0$의 판별식 $D=(-1)^2-4(-k-4)=4k+17=0$

$\therefore k=-\dfrac{17}{4}$

(ii) $k>1$인 경우

곡선 $y=-x^2+2x+6$와 직선 $y=-x+k+2$가 접해야 한다. (i)과 마찬가지로 **'중근을 갖는 방정식'**을 이용하자.



곡선 $y=-x^2+2x+6$와 직선 $y=-x+k+2$가 접하므로

방정식 $-x^2+2x+6=-x+k+2$가 중근을 가져야 한다.

방정식 $x^2-3x+k-4=0$의 판별식 $D=(-3)^2-4(k-4)=-4k+25=0$

$\therefore k=\dfrac{25}{4}$

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은 $-\dfrac{17}{4}+\dfrac{25}{4}=\dfrac{8}{4}=2$이다.

※ 접선을 다루는 도구 - 〈Chapter 5〉 中

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 $x=a$에서 접하는 것을 수식적으로 표현한다면 $f(a)=g(a)$, $f'(a)=g'(a)$이다. 따라서 **접선을 다룰 때도 기본적으로 $f(a)=g(a)$, $f'(a)=g'(a)$를 이용**하면 된다. 하지만 이 방법만 가지고 항상 미지수의 값을 구할 수 있는 것은 아니다.
접선을 다루는 특수한 도구 3가지를 알아보자.

(1) (두 점을 지나는) 직선의 기울기=미분계수

접선이 등장하는 상황에서 가장 쉽고 빠르게 적용할 수 있는 도구는 '직선의 기울기=미분계수'이다. 예를 들어 점 (a,b)에서 $f(x)$에 그은 접선과 $f(x)$의 접점의 좌표가 $(t,f(t))$일 때 $\dfrac{f(t)-b}{t-a}=f'(t)$이다.

(2) 접선의 방정식

접선의 방정식을 구한 다음, 해당 접선이 지나가는 또 다른 점의 좌표를 대입한다. 함수의 **바깥의 한 점에서 함수에 그은 접선**이 있는 경우에 주로 사용한다.

예를 들어 점 (a,b)에서 $f(x)$에 그은 접선이 $f(x)$와 점 $(t,f(t))$에서 만날 때, 접선의 방정식 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$을 작성한 다음 (a,b)를 대입하면 $b=f'(t)(a-t)+f(t)$이다.

한편, **접선이 두 함수의 공통접선**인 경우 두 접선의 방정식이 서로 같아야 하므로 **계수 비교법**을 통해 미지수를 알아낼 수 있다. 예를 들어 $f(x)$의 위의 점 $(a,f(a))$에서의 접선과 $g(x)$ 위의 점 $(b,g(b))$에서의 접선이 공통접선인 경우, $y=f'(a)(x-a)+f(a)$와 $y=g'(b)(x-b)+g(b)$가 서로 같아야 하므로 $f'(a)=g'(b)$, $f(a)-af'(a)=g(b)-bg'(b)$이어야 한다.

(3) 중근을 갖는 방정식

$f(x)$의 그래프와 직선 $g(x)$가 $x=t$에서 접할 때, 방정식 $f(x)=g(x)$는 t를 중근으로 갖는다. **이 방법은 주로 이차함수의 그래프와 직선이 접하는 경우**에 사용한다. 이차방정식이 중근을 가질 조건은 $D=0$으로 굉장히 간단하기 때문이다. (혹은 완전제곱식의 꼴로 만들어준다고 생각해도 좋다.)

만약 삼차함수와 접선이 있는 경우, 방정식을 풀었을 때 '중근과 하나의 실근' 또는 '삼중근'이 나오게끔 하면 된다.

도구 적용의 우선순위

상황에 따라 다르겠으나 **(1), (2), (3)의 순으로 적용하자**. 대개 이 순으로 식 설정이 깔끔하고 계산이 적은 경향을 보인다.

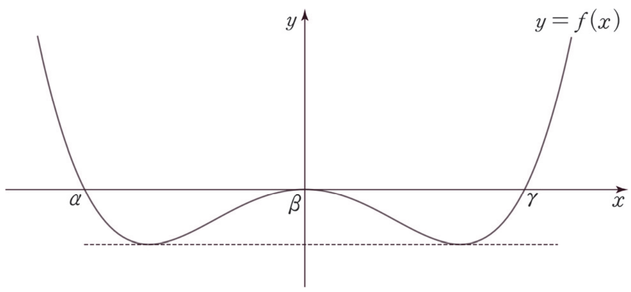
02 19년 7월 교육청 20번

답 : ⑤

사차함수 $f(x)$의 식이 짝수차항만으로 이루어져 있으므로 $f(x)$는 우함수다.

- 〈Chapter 4〉, 〈Chapter 8〉

최고차항의 계수가 양수이면서 우함수인 사차함수 $f(x)$에 대해 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근이 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$이므로 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



1. $f(x)$는 $x=0$에서 x축에 접한다. $f(0)=0$ (O)

2. $f(x)$의 $x=\alpha$에서의 미분계수를 묻고 있다. $f'(x)$와 α의 값을 구해야 하므로 조건 (나)를 이용하여 $f(x)$의 식부터 알아내자.

   $f(0)=0$이므로 $f(x)=ax^4+bx^2$이다. (단, a, b는 상수, $a\neq 0$)

   (나) 조건을 $f(x)$의 식에 대입하면 $f(1)=a+b=-\frac{3}{4}$, $f'(-1)=-4a-2b=1$

   a, b에 관한 두 방정식을 연립하면 $a=\frac{1}{4}$, $b=-1$이다.

   $\therefore f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2$, $f'(x)=x^3-2x$

   α의 값을 구하기 위해 방정식 $f(x)=0$을 풀자.

$\frac{1}{4}x^4 - x^2 = 0$
$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2(x^2-4) = 0$
$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2(x+2)(x-2) = 0$

$\alpha < \beta < \gamma$이므로 $\alpha = -2$
$\therefore f'(\alpha) = f'(-2) = -4$ (O)

※ **위의 풀이는 $f(x)$의 대칭성을 전혀 이용하지 않은 풀이이다. 대칭성을 이용해서도 풀어보자.**
태도 측면에서는 대칭성을 이용한 풀이를 추천하지만, 결과적으로 계산은 비슷한 수준이다.

$f(x)$는 $x=0$에서 x축과 접하고 방정식 $f(x)=0$의 0이 아닌 두 근 α, β는 $x=0$에 대해 대칭이므로 다음과 같이 식을 세울 수 있다.

$f(x) = kx^2(x-\alpha)(x+\alpha) = kx^2(x^2-\alpha^2)$
$f'(x) = 2kx(x^2-\alpha^2) + kx^2(2x)$

$f'(\alpha) = 2k\alpha^3$

조건 (나)를 $f(x)$, $f'(x)$의 식에 대입하여 k, α의 값을 구하자.

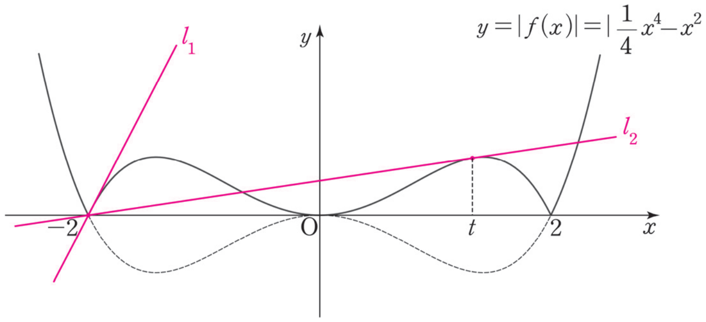
$f(1) = k(1-\alpha^2) = -\frac{3}{4}$
$f'(-1) = -2k(1-\alpha^2) - 2k = 1$

두 방정식을 연립하면 $k = \frac{1}{4}$, $\alpha = -2$
$\therefore f'(\alpha) = 2k\alpha^3 = 2 \times \frac{1}{4} \times (-2)^3 = -4$

3. **방정식이 제시되었으므로 인수분해와 그래프 두 가지 관점을 떠올리자.** 방정식이 절댓값 함수 $|f(x)|$를 포함한 관계로 인수분해는 곤란하다. 그래프 관점을 적용하자.

방정식 $|f(x)| = k(x-\alpha)$의 서로 다른 실근의 개수가 3
⇔ 함수 $y = |f(x)|$의 그래프와 함수 $y = k(x-\alpha)$의 그래프의 서로 다른 교점의 개수가 3

$\alpha = -2$이므로 $y = k(x-\alpha)$는 곧 $y = k(x+2)$이며,
$y = k(x+2)$는 항상 점 $(-2, 0)$을 지나고 기울기가 k인 직선이다.



함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=k(x-\alpha)$의 서로 다른 교점의 개수가 3이 되기 위해 **직선의 기울기 k는 직선 l_1의 기울기보다 작고 직선 l_2의 기울기보다 커야 한다.** 지금부터 직선 l_1과 직선 l_2의 기울기를 구해보자.

ⅰ) 직선 l_1의 기울기

쉽게 구할 수 있다. 직선 l_1은 함수 $y=-f(x)$의 $x=-2$에서의 접선이므로 기울기는 $-f'(-2)$와 같다.

$-f'(-2)=-(-4)=4$

ⅱ) 직선 l_2의 기울기

l_1보다는 까다롭다.

접선을 다루는 도구 중 '직선의 기울기=미분계수'를 적용하자. $y=-f(x)$와 직선 l_2의 접점의 좌표를 $\left(t,\ -\frac{1}{4}t^4+t^2\right)$로 설정하면 (위의 그림을 보자)

점 $(-2, 0)$과 점 $\left(t,\ -\frac{1}{4}t^4+t^2\right)$을 지나는 **(직선의 기울기)**: $\dfrac{-\frac{1}{4}t^4+t^2}{t+2}$

$x=t$에서 $y=-f(x)$의 **(미분계수)**: $-t^3+2t$

두 값이 서로 같으므로 방정식 $\dfrac{-\frac{1}{4}t^4+t^2}{t+2}=-t^3+2t$을 풀어주자.

$3t^4+8t^3-4t^2-16t=0$, $t(3t^3+8t^2-4t-16)=0$ 조립제법을 적용하여 인수분해하면

$t(t+2)^2(3t-4)=0 \quad \therefore t=\frac{4}{3}$ ($\because$ 그래프를 보면 $t\neq 0$, $t\neq -2$)

구해야 할 것은 **직선 l_2의 기울기**다,

(직선 l_2의 기울기)=($x=t$에서의 $y=-f(x)$의 미분계수)$=-\left(\frac{4}{3}\right)^3+2\times\frac{4}{3}=\frac{8}{27}$

따라서 방정식 $|f(x)|=k(x-\alpha)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 양수 k의 범위는 $\frac{8}{27}<k<4$이다. (O)

ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

comment

1. 예제에서 풀어본 2019학년도 6월 평가원 21번 문항의 선지 (ㄷ)과 발문 형태, 풀이과정이 매우 유사하다. 세부요소만 달리할 뿐 기출 소재와 핵심 태도와 도구는 항상 반복된다.

2. 선지 (ㄷ)에서 직선 l_2의 기울기를 구할 때, 센스를 발휘한다면 접선을 지나는 방정식을 설정한 다음 한 점을 대입할 수도 있다.

   (ㄷ)에서 $\frac{8}{27}$이라는 숫자가 나왔으므로 곡선 $y=-f(x)$의 $x=\frac{8}{27}$에서의 접선이 점 $(-2, 0)$을 지나는지 확인해보면 된다. 접선이 점 $(-2, 0)$을 지난다면 (ㄷ)은 옳고, 안 지난다면 (ㄷ)은 틀렸다. 직접 계산을 해보면 접선이 점 $(-2, 0)$을 지나는 것을 확인할 수 있다.

03 19년 10월 교육청 12번

답 : ②

부등식 $f'(x)\{f(x)-2\} \leq 0$에서 **두 가지 항** $f'(x)$, $\{f(x)-2\}$**를 복합적으로 고려하지 말고 하나씩 따지자.** $f'(x)$의 부호를 기준으로 케이스를 분류하면 된다. 열린 구간 $(-3, 7)$에서 $f'(x)$는 $x=2$에서 부호가 변하므로 $f'(x)<0$일 때, $f'(x)=0$일 때, $f'(x)>0$일 때의 3가지 CASE를 관찰하자.

단, 정수 x의 개수를 셀 때 항상 **문제의 기본 조건인 열린 구간** $(-3, 7)$**을 고려하자.**

(i) $f'(x)<0$일 때
$x>2$인 구간이다. $f'(x)\{f(x)-2\} \leq 0$의 양변을 $f'(x)$로 나누면 $f(x)-2 \geq 0$
$2<x<7$에서 $f(x) \geq 2$를 만족하는 정수 x는 $3, 4$이다.

(ii) $f'(x)=0$일 때
$x=2$이다. $f'(2)\{f(x)-2\}=0$이므로 주어진 부등식을 만족한다.

(iii) $f'(x)>0$일 때
$x<2$인 구간이다. $f'(x)\{f(x)-2\} \leq 0$의 양변을 $f'(x)$로 나누면 $f(x)-2 \leq 0$
$-3<x<2$에서 $f(x) \leq 2$를 만족하는 정수 x는 -2, -1이다.

따라서 조건을 만족시키는 정수 x의 개수는 5이다.

04 18학년도 수능 29번

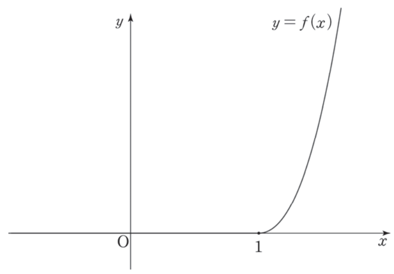
답 : 32

1. 구간에 따라 정의된 함수 $f(x)$는 각각의 구간 내에서 미분가능하므로, **구간의 경계인** $x=a$**에서만 미분가능하도록 만들어주면 된다.** 미분가능성은 연속성을 내포하므로, 당연히 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이기도 해야 한다.

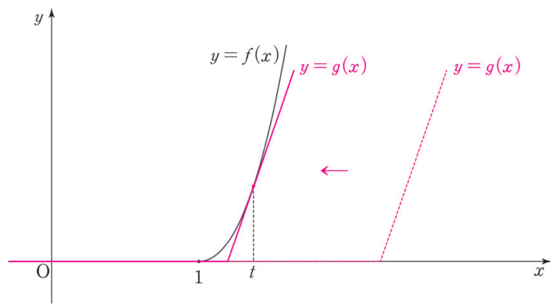
   $f(x)$의 $x=a$에서의 좌극한과 좌미분계수가 모두 0이므로 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하려면 $f(x)$의 $x=a$에서의 우극한과 우미분계수도 모두 0이어야 한다. $f(x)$의 $x=a$에서의 우극한과 우미분계수는 각각 $f(a), f'(a)$와 같으므로 $f(a)=f'(a)=0$를 만족시키는 a의 값은 1이다.

   ※ 엄밀히 말하면, $f(a)=0$을 만족시키는 a 중에서 $f'(a)=0$까지 만족시키는 a의 값을 찾으면 된다. $f(x)$가 $x=a$에서 연속이지 않으면, $f(x)$의 $x=a$에서의 우미분계수는 존재하지 않기 때문이다. – 〈Chapter 1〉

   이를 바탕으로 $y=f(x)$의 그래프를 그려주면 오른쪽 그림과 같다.



2. $y=g(x)$도 마찬가지로 k를 경계로 하는 구간에 따라 정의된 함수이다. 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq g(x)$이고, k를 이동하면서 관찰해보면 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 **접하는 순간에** k**는 최솟값**을 갖는다.



   ※ 어떤 변수의 최솟값 또는 최댓값을 구할 때는 아무렇게나 관찰하는 것보다, $(+\infty)$ 또는 $(-\infty)$에서 출발하여 일정한 방향으로 변수의 값을 증가 또는 감소시키면서 관찰하는 것이 좋다.

   $f(x)$와 직선 $g(x)$가 $x=t$에서 접한다고 할 때 $f'(t)=12$이다.

   $f'(x)=(2x-2)(2x+1)+2(x-1)^2$
   $=2(x-1)(2x+1+x-1)$
   $=6x(x-1)$ (단, $x>1$)

   $f'(t)=6t(t-1)=12$, $\therefore\ t=2$ $(\because\ t>1)$

   $f(x)$와 $g(x)$가 접하는 순간에 직선 $y=12(x-k)$는 $(2,\ 5)$를 지나므로 $k=\dfrac{19}{12}$

   따라서 $a+p+q=1+12+19=32$이다.