smart is sexy

Orbi.kr

수리논술 전문가 서지현의
올바른 수리논술 사용방법

확률과 통계 편

수리논술 사용법

서지현 지음

Move, or Die.

확률과 통계 편

수리논술사용법 - 확률과 통계편

서술하는 방법을 몰라서 답안지 작성을 시작하지 못한다는 이유로

접근하는 방법을 몰라서 논제에 접근조차 할 수 없다는 이유로 인해

수리논술을 포기하는 친구들이 너무나 안타까웠습니다.

이러한 고충을 겪는 모든 수험생에게 수리논술에 대한 모든 것을 알려드리고자

수리논술사용법을 출간하게 되었습니다.

저자

서지현

서울대학교 수리과학부 졸업
오르비학원 수리논술 강사
송원학원 재수종합반 수리논술 강사

수리논술사용법 자문

최지요

서울대학교 자유전공학부 졸업
경북대학교 치의예과

편현주

서울대학교 지구환경과학부 / (복수) 기계항공공학부 졸업

수리논술사용법 검토진

서정태 선생님

한국 대학교육협의회 프로그램 전문위원
대구광역시 진학지도협의회 프로그램 팀장
경희대학교 입학사정관 자문위원
경북대학교 입학전형 자문위원

배준범 연세대학교 생화학과

박승재 서울대학교 수리과학부 졸업
동대학원 석박사 통합과정

홍준기 경북대학교 수학교육과 졸업

Contents

경우의 수

1

1 경우의 수

경우의 수 단원에서 출제되는 논제의 채점기준은

주어진 사건들과 그 관계를 파악할 수 있는지

파악한 내용을 적절하게 설명할 수 있는지

설명된 내용을 근거로 경우의 수를 도출할 수 있는지에 초점이 맞춰져 있다.

따라서 이번 단원에서는

사건을 파악하고 설명하는 방법들을 알아보고

사건의 설명을 토대로 경우의 수를 도출하는 연습을 해보고자 한다.

논제는 다음과 같은 형태로 출제된다.

경우의 수 단원의 논제형태

$\boxed{\text{논제의 사건}}$이 일어날 때, 경우의 수(또는 개수)를 구하시오.

이 단원에서 출제되는 **[논제의 결론]** 은 위의 논제형태와 같이

경우의 수를 구해야 하는 형태로 출제된다.

경우의 수를 구할 때는

i) $\boxed{\text{논제의 사건}}$을 구성하는 사건들과 그 관계를 파악하고,

ii) 각각의 사건에 대해 설명한 뒤 각 사건의 경우의 수를 이용하여

논제에서 주어진 사건의 경우의 수를 구하면 된다.

i) 논제의 사건 을 구성하는 사건들과 그 관계를 파악할 때

논제의 사건은
단일 사건일 수도 있고
몇 개의 사건들로 이루어진 **복합 사건**일 수도 있다.

복합 사건은 다시
몇 개의 사건이 동시에 일어나는 **곱사건**과
여러 개의 단일 사건들과 곱사건들로 이루어진
경우를 나눠 풀어야 하는 사건으로 나누어진다.

따라서 **논제의 사건을 파악할 때**는
논제의 사건이 **단일 사건**인지,
몇 개의 사건들로 이루어진 **복합 사건**인지 확인해보고

복합 사건이면
그 사건들이 동시에 일어나는 **곱사건**인지
경우를 나눠 풀어야 하는 사건인지를 파악하면 된다.

다음 예들을 통해 논제의 사건을 구성하는 사건들과 그 관계를 파악해 보자.

논제 1 **2014학년도 성균관대학교 수시논술 변형**

방정식 $x+y+z=2$의 음이 아닌 정수해의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수를 구하시오.

논제 1 의 사건은
방정식 $x+y+z=2$을 만족하는 음이 아닌 정수해의 순서쌍을 찾는 사건이고

하나의 사건으로 이루어진 **단일 사건**이다.

두 번째 논제를 살펴보자.

논제 2 2017학년도 부산대학교 자연계열 수시논술

n (단, $n \geq 6$)명의 학생이 있는 어떤 학급에서 동아리 학생을 선발하려고 한다. 한 학생이 여러 동아리에 중복하여 선발될 수 있으며 학생을 선발하는 순서는 생각하지 않는다. 이 학급의 학생들 중에서 수학 동아리와 과학 동아리 학생을 각각 3명씩 선발하려고 한다. 수학 동아리와 과학 동아리에 중복하여 선발되는 학생이 1명만 되도록 동아리 학생을 선발하는 경우의 수를 구하시오.

논제 2 의 사건은

수학 동아리와 과학 동아리에 중복하여 선발되는 학생 1명을 뽑는 사건,

수학 동아리에만 선발되는 학생 2명을 뽑는 사건,

과학 동아리에만 선발되는 학생 2명을 뽑는 사건,

이 세 개의 사건이 동시에 일어나는 **곱사건**이다.

세 번째 논제를 살펴보자.

논제 3 2019학년도 경북대학교 자연 I 모의논술

0을 한 개 이하 사용하여 만든 세 자리 자연수 중에서 각 자리의 수의 합이 3인 자연수는 111, 120, 210, 102, 201이다. 0을 한 개 이하 사용하여 만든 여섯 자리 자연수 중에서 각 자리의 수의 합이 6인 자연수의 개수를 구하시오.

논제 3 의 사건은

1을 6개 사용하여 여섯 자리 자연수를 만드는 사건과

2는 1개, 1은 4개, 0은 1개를 사용하여 여섯 자리 자연수를 만드는 사건,

이 두 개의 사건으로 이루어진

경우를 나눠 풀어야 하는 사건이다.

ii) 각각의 사건에 대해 설명하고 각 사건의 경우의 수를 이용할 때

단일 사건을 설명할 때는 다음 두 가지 방법 중 하나를 이용하면 된다.

a) 사건의 모든 경우를 나열하여 설명하는 방법
b) 사건을 순열 또는 조합의 사건으로 설명하는 방법

위의 방법을 이용하여 사건을 설명한 뒤
사건의 설명을 토대로 경우의 수를 구하면 된다.

a) 사건의 모든 경우를 나열하여 설명하는 방법

사건을 설명할 때 그 사건의 모든 경우를 나열하여
나열된 경우의 개수를 세어 사건의 경우의 수를 구하면 된다.

서술은 다음과 같이 하면 된다.

서술예시

논제의 사건이 일어나는 경우를 모두 나열하면

$$\left.\begin{array}{l}\text{(사건 } A_1\text{이 일어나는 경우)}\\ \text{(사건 } A_2\text{가 일어나는 경우)}\\ \quad\vdots\\ \text{(사건 } A_n\text{이 일어나는 경우)}\end{array}\right]\ n\text{개}$$

이므로 사건이 일어나는 경우의 수는 n이다.

b) 사건을 순열 또는 조합의 사건으로 설명하는 방법

사건을 설명할 때 그 사건이 순열 사건 또는 조합 사건과 같음을 설명하고 순열 사건 또는 조합 사건의 경우의 수를 셀 때 쓰는 **기호** ${}_nP_k$, ${}_nC_k$, ${}_n\Pi_k$, ${}_nH_k$ **또는 공식들을 이용**하여 사건의 경우의 수를 구하면 된다.

서술은 다음과 같이 하면 된다.

서술예시

논제의 사건은 서로 다른 n개에서 k개를 뽑는 사건과 같으므로 경우의 수는

$${}_nC_k$$

이다.

서술예시

논제의 사건은 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열 사건과 같으므로 경우의 수는

$$(n-1)!$$

이다.

서술예시

논제의 사건은 같은 것이 각각 p개, q개, r개 있는 순열 사건과 같으므로 경우의 수는

$$\frac{n!}{p!\,q!\,r!} \quad (\text{단, } n=p+q+r)$$

이다.

복합 사건 중 몇 개의 사건이 동시에 일어나는 **곱사건을 설명할 때는**

각 사건이 어떤 사건인지

다음 두 가지 방법을 적절히 이용하여 사건들을 설명하고

a) 사건의 모든 경우를 나열하여 설명하는 방법

b) 사건을 순열 또는 조합의 사건으로 설명하는 방법

사건의 설명을 토대로 **곱사건**의 경우의 수를 구하면 된다.

서술은 다음과 같이 하면 된다.

서술예시

사건 A_1이 **일어나는 경우를 모두 나열하면**

$$\left.\begin{array}{l}(a_1\text{이 일어나는 경우})\\(a_2\text{가 일어나는 경우})\\\quad\vdots\\(a_n\text{이 일어나는 경우})\end{array}\right]n\text{개}$$

이다.

사건 A_2는 **서로 다른 n개에서 k개를 뽑는 사건**과 같고

사건 A_3은 **서로 다른 m개를 원형으로 배열하는 사건**이다.

따라서 논제의 사건($=A_1$, A_2, A_3이 동시에 일어나는 사건)의 경우의 수는

$$n\times{}_n\mathrm{C}_k\times(m-1)!$$

이다.

복합 사건 중 **경우를 나눠 풀어야 하는 사건을 설명할 때는**
먼저 논제의 사건을 어떤 사건들로 나누어
경우의 수를 구할 것인지 설명하자.

만약 논제의 사건을 사건 B, C, $\cdots$, N으로 나누었는데
사건 C가 또 경우를 나눠야 하는 사건이라면

사건 C를 설명할 때 다시 경우를 C_1, C_2, $\cdots$, C_k로 나눈 다음
각각의 사건을 설명하면 된다.

이렇게 나누어진 사건들이 어떤 사건인지
앞에서 배운 서술방법을 이용하여 각 사건을 설명하고
그 설명들을 토대로 각 사건의 경우의 수를 구한 뒤
종합하여 논제의 사건의 경우의 수를 구하면 된다.

서술은 다음과 같이 하면 된다.

서술예시

논제의 사건은 ① 사건 B와 ② 사건 C에서 ③ 사건 D를 제외한 사건이다.
각 사건의 경우의 수를 구하자.

① 사건 B는 $\cdots$ (중략) $\cdots$ 경우의 수는 b이다.
② 사건 C는 $\cdots$ (중략) $\cdots$ 경우의 수는 c이다.
③ 사건 D가 $\cdots$ (중략) $\cdots$ 경우의 수는 d이다.

따라서 논제의 사건의 경우의 수는

$$b+c-d$$

이다.

교과서 개념체크

1 합의 법칙

두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이면, 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.

2 곱의 법칙

두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고,
그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때,
두 사건 A, B가 동시에 혹은 잇달아 일어나는 경우의 수는 $m \times n$이다.

3 순열

서로 다른 n개에서 $r\,(0<r \le n)$개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 **순열**이라 하고, 이 순열의 수를 기호로 ${}_n\mathrm{P}_r$와 같이 나타낸다.

${}_n\mathrm{P}_r$는 곱의 법칙을 이용하면

$$\begin{aligned} {}_n\mathrm{P}_r &= \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{개}} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

이다. (단, ${}_n\mathrm{P}_0=1$)

4 원순열

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 다음과 같다.

$$\frac{n!}{n}=(n-1)!$$

5 중복순열

서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하여 일렬로 배열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 **중복순열**이라 하고, 이 **중복순열**의 수를 기호로 ${}_n\Pi_r$와 같이 나타낸다.

${}_n\Pi_r$는 곱의 법칙을 이용하면

$$ {}_n\Pi_r = n^r $$

이다.

$\boxed{6}$ 같은 것이 있는 순열

n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때,

n개를 일렬로 배열하는 순열의 수는 다음과 같다.

$$\frac{n!}{p!\,q!\,\cdots\,r!} \quad (\text{단, } p+q+\ \cdots\ +r=n)$$

$\boxed{7}$ 조합

서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 $r\,(0 \le r \le n)$개를 택하는 것을

n개에서 r개를 택하는 **조합**이라 하고, 이 조합의 수를 기호로 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$와 같이

나타낸다.

${}_{n}\mathrm{C}_{r}$를 계승으로 나타내면

$${}_{n}\mathrm{C}_{r} = \frac{{}_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \quad (\text{단, } 0 \le r \le n)$$

이다. (단, ${}_{n}\mathrm{C}_{0} = 1$)

$\boxed{8}$ 중복조합

서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 조합을 **중복조합**이라 하고,

이 중복조합의 수를 기호로 ${}_{n}\mathrm{H}_{r}$와 같이 나타낸다.

일반적으로 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수 ${}_{n}\mathrm{H}_{r}$는

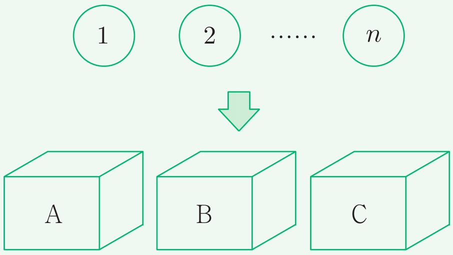
서로 다른 $(n+r-1)$개에서 r개를 택하는 조합의 수 ${}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$

$${}_{n}\mathrm{H}_{r} = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$$

이다.

논제 4 **2020학년도 성균관대학교 모의논술 변형**

아래 그림과 같이 1부터 n까지의 숫자가 각각 적힌 n개의 공을 A, B, C라고 각각 적힌 세 개의 상자에 담으려고 할 때, 가능한 모든 경우의 수를 $S(n)$이라고 한다. (단, n은 자연수)



(1) 제시문에서 $n=7$일 때, $S(7)$의 값을 십진법 표기로 구하고, 그 이유를 논하시오. 예를 들어, 2^7-2^4는 112로 표기한다.

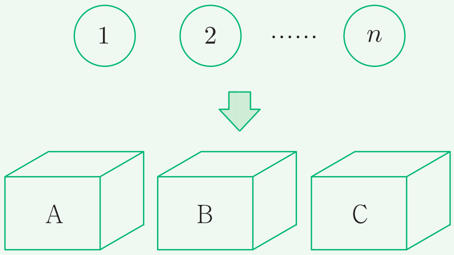
(2) 제시문에서 $n=7$일 때, A, B, C 세 개의 상자 모두 적어도 한 개의 공을 가지고 있을 경우의 수를 십진법 표기로 구하고, 그 이유를 논하시오.

논리적인 답안작성을 위해 먼저

논제 안에서 **[논제조건]** 과 **[논제의 결론]** 을 파악하면 다음과 같다.

논제 4 2020학년도 성균관대학교 모의논술 변형

[논제조건] 아래 그림과 같이 1부터 n까지의 숫자가 각각 적힌 n개의 공을 A, B, C라고 각각 적힌 세 개의 상자에 담으려고 할 때, 가능한 모든 경우의 수를 $S(n)$이라고 한다. (단, n은 자연수)



(1) **[논제의 결론]** 제시문에서 $n=7$일 때, $S(7)$의 값을 십진법 표기로 구하고, 그 이유를 논하시오. 예를 들어, 2^7-2^4는 112로 표기한다.

(2) **[논제의 결론]** 제시문에서 $n=7$일 때, A, B, C 세 개의 상자 모두 적어도 한 개의 공을 가지고 있을 경우의 수를 십진법 표기로 구하고, 그 이유를 논하시오.

논제 (1)의 경우 **[논제의 결론]** 이 경우의 수를 구하는 것이므로

논제의 사건을 구성하는 사건들과 그 관계를 먼저 파악하자.

논제의 사건은 1부터 7까지의 숫자가 각각 적힌 7개의 공을

세 개의 상자 A, B, C에 담는 사건이고

하나의 사건으로 이루어진 **단일 사건**이다.

따라서 다음 두 가지 방법 중 하나를 이용하여
사건을 설명하고 논제의 사건의 경우의 수를 구하면 된다.

a) 사건의 모든 경우를 나열하여 설명하는 방법
b) 사건을 순열 또는 조합의 사건으로 설명하는 방법

논제 (2)의 경우 **[논제의 결론]** 이 경우의 수를 구하는 것이므로
논제의 사건을 구성하는 사건들과 그 관계를 먼저 파악하자.

논제의 사건은 서로 다른 7개의 공을 세 개의 상자 A, B, C에 담을 때
세 개의 상자 모두 적어도 한 개의 공을 가지는 사건이고

서로 다른 7개의 공을 세 개의 상자 A, B, C에 담는 전체 사건에서
세 개의 상자 중 한 개의 상자에만 공을 담는 사건과
세 개의 상자 중 두 개의 상자에만 공을 담는 사건을 제외한 사건이고,
위 세 개의 사건으로 이루어진 **경우를 나눠 풀어야 하는 사건**이다.

따라서 논제의 사건을 위 세 개의 사건으로 나눠
경우의 수를 구할 것을 먼저 설명하자.

이렇게 나누어진 사건들이 어떤 사건인지
앞에서 배운 서술방법을 이용하여 각 사건을 설명하고
그 설명들을 토대로 각 사건의 경우의 수를 구한 뒤
종합하여 논제의 사건의 경우의 수를 구하면 된다.

해설은 다음과 같다.

(1) 1부터 7까지의 숫자가 각각 적힌 7개의 공을
A, B, C라고 각각 적힌 세 개의 상자에 담는 사건은
세 개의 상자 A, B, C에서 중복을 허용하여 7개를 뽑아
나열하는 사건과 같으므로 경우의 수는

$$\begin{aligned} {}_{3}\Pi_{7} &= 3^7 \\ &= 2187 \end{aligned}$$

이다.

(2) 논제의 사건은
① 1부터 7까지의 숫자가 각각 적힌 7개의 공을
A, B, C라고 각각 적힌 세 개의 상자에 담는 전체 사건에서
② 세 개의 상자 중 한 개의 상자에만 공을 담는 사건과
③ 세 개의 상자 중 두 개의 상자에만 공을 담는 사건을 제외한 사건이다.

각 사건의 경우의 수를 구하자.

① 의 경우의 수는 논제 (1)에 의해 2187이다.
② 는 세 개의 상자 A, B, C 중 하나를 선택하여
7개의 공을 모두 담는 사건이므로 경우의 수는

$${}_{3}C_{1} = 3$$

이다.
③ 은 세 개의 상자 A, B, C 중 두 개를 선택한 뒤,
그 두 개의 상자에 7개의 공을 담는 사건에서
그 두 개의 상자 중 한 개의 상자에만 모두 담는 사건을
제외한 사건이므로 경우의 수는

$${}_{3}C_{2} \times \left({}_{2}\Pi_{7} - {}_{2}C_{1}\right) = 378$$

이다.

따라서 논제의 사건의 경우의 수는 $2187 - 3 - 378 = 1806$이다.

논제 5 2019학년도 경북대학교 자연 I, II 수시논술

학생 A가 수영 강습을 받기 위해, 다음 조건

$$m_2 - m_1 \geq 3,\ m_3 - m_2 \geq 3$$

을 만족시키도록 2019년도의 열두 달 중 세 달 m_1월, m_2월, m_3월을 선택할 수 있는 모든 순서쌍 $(m_1,\ m_2,\ m_3)$의 개수를 구하시오.

논리적인 답안작성을 위해 먼저

논제 안에서 **[논제조건]** 과 **[논제의 결론]** 을 파악하면 다음과 같다.

논제 5 2019학년도 경북대학교 자연 I, II 수시논술

학생 A가 수영 강습을 받기 위해, 다음 조건

[논제조건] $m_2 - m_1 \geq 3$, $m_3 - m_2 \geq 3$

을 만족시키도록 2019년도의 열두 달 중 세 달 m_1월, m_2월, m_3월을 선택할 수 있는

[논제의 결론] 모든 순서쌍 (m_1, m_2, m_3)의 개수를 구하시오.

[논제의 결론] 이 순서쌍 (m_1, m_2, m_3)의 개수를 구하는 것이므로

논제의 사건을 구성하는 사건들과 그 관계를 먼저 파악하자.

논제의 사건은 $7 \leq m_1 + 6 \leq m_2 + 3 \leq m_3 \leq 12$를 만족하는

m_1, m_2, m_3을 선택하는 사건이고

하나의 사건으로 이루어진 **단일 사건**이다.

따라서 다음 두 가지 방법 중 하나를 이용하여

사건을 설명하고 논제의 사건의 경우의 수를 구하면 된다.

a) 사건의 모든 경우를 나열하여 설명하는 방법

b) 사건을 순열 또는 조합의 사건으로 설명하는 방법

해설은 다음과 같다.

논제의 사건은 $7 \le m_1+6 \le m_2+3 \le m_3 \le 12$를 만족하는

m_1, m_2, m_3을 선택하는 사건이고

이는 자연수 7 이상 12 이하의 6개의 자연수 중에서 중복을 허용하여

3개의 숫자 m_1+6, m_2+3, m_3을 선택하는 사건과 같으므로

순서쌍 $(m_1,\ m_2,\ m_3)$의 개수는

$$\begin{aligned} {}_6\mathrm{H}_3 &= {}_8\mathrm{C}_3 \\ &= 56 \end{aligned}$$

개다.

논제 6 : 실전논제 30min

2020학년도 부산대학교 자연계열 수시논술

(가) 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r (단, $0 \le r \le n$)개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 조합이라고 하며, 이 조합의 수는

$${}_{n}\mathrm{C}_{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!} \quad (\text{단, } 0! = 1)$$

이다.

(나) 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 중복조합의 수는

$${}_{n}\mathrm{H}_{r} = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$$

이다.

(다) 함수 $f : X \to Y$에서 정의역 X의 임의의 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \ne x_2$이면 $f(x_1) \ne f(x_2)$일 때, 함수 f를 X에서 Y로의 일대일함수라고 한다.

※ 답은 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$, ${}_{n}\mathrm{H}_{r}$, $n!$ 등의 기호를 사용하지 않고 간단한 식으로 나타내시오.

(예: $\dfrac{{}_{n}\mathrm{C}_{1}}{{}_{n}\mathrm{H}_{2} + 2!}$은 $\dfrac{2n}{n^2 + n + 4}$으로 적는다.)

두 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$, $B = \{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$에 대하여 함수 f는 정의역을 A, 공역을 B로 갖는다. n이 자연수일 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 집합 A의 임의의 원소 a에 대하여 $f(a) - a \ge n$을 만족하는 일대일 함수 f의 개수를 $g(n)$이라 할 때, $g(n)$을 n에 관한 식으로 나타내시오. (단, $n \le 7$)

(2) $f(x+1) - f(x) \ge n - 1$ (단, $x = 1,\ 2$)을 만족하는 함수 f의 개수를 $h(n)$이라 하자. $h(1)$의 값을 구하고, $2 \le n \le 5$일 때 $h(n)$을 n에 관한 다항식으로 나타내시오.

논제 7

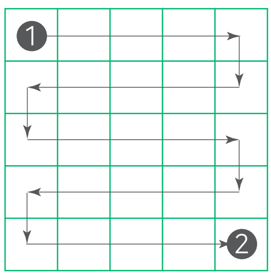
2018학년도 부산대학교 자연계열 수시논술 변형

(가) 두 사건 A, B에 대하여 사건 A와 사건 B가 일어나는 경우의 수를 각각 m, n이라고 하면 두 사건 A, B가 잇달아 일어나는 경우의 수는 $m \times n$이다.

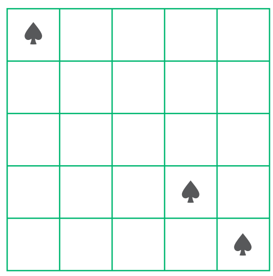
(나) n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p, q, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 일렬로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p! \times q! \times \cdots \times r!} \text{ (단, } p+q+\cdots+r=n\text{)}$$

<그림1>과 같이 한 변의 길이가 5인 정사각형을 가로, 세로로 각각 5등분하여 한 변의 길이가 1인 25개의 정사각형을 만든 뒤, ❶ 에서 ❷ 까지 화살표 방향으로 25개의 정사각형에 각각 한 변의 길이가 1인 정사각형 모양의 흰색 또는 검은색 타일을 붙이려고 한다. 흰색 타일은 연속해서 붙일 수 없고, 검은색 타일은 연속해서 2개까지는 붙일 수 있다.



<그림1>


<그림2>

<그림2>와 같이 ♠가 표시된 3개의 위치에는 반드시 검은색 타일을 붙이는 경우의 수를 구하시오.

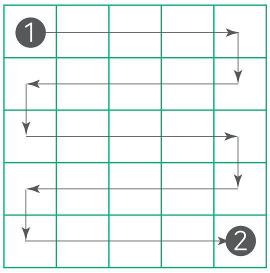
논리적인 답안작성을 위해 먼저

논제 안에서 **[논제조건]** 과 **[논제의 결론]** 을 파악하면 다음과 같다.

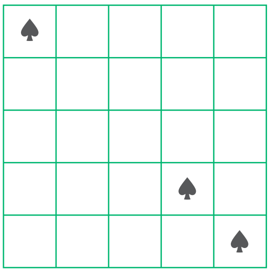
논제 7 2018학년도 부산대학교 자연계열 수시논술 변형

(제시문 생략)

[논제조건] <그림1>과 같이 한 변의 길이가 5인 정사각형을 가로, 세로로 각각 5등분하여 한 변의 길이가 1인 25개의 정사각형을 만든 뒤, ❶ 에서 ❷ 까지 화살표 방향으로 25개의 정사각형에 각각 한 변의 길이가 1인 정사각형 모양의 흰색 또는 검은색 타일을 붙이려고 한다. 흰색 타일은 연속해서 붙일 수 없고, 검은색 타일은 연속해서 2개까지는 붙일 수 있다.



<그림1>



<그림2>

[논제의 결론] <그림2>와 같이 ♠가 표시된 3개의 위치에는 반드시 검은색 타일을 붙이는 경우의 수를 구하시오.

[논제의 결론] 이 경우의 수를 구하는 것이므로

논제의 사건을 구성하는 사건들과 그 관계를 먼저 파악하자.

논제의 사건은 흰색 타일은 연속해서 붙일 수 없고,
검은색 타일은 연속해서 2개까지는 붙일 수 있으므로
검-흰 또는 검-검-흰 순으로 타일을 붙일 수 있다.

이때 첫 번째 ♠지점에서 시작하여 두 번째 ♠지점까지 붙인
검-흰 타일과 검-검-흰 타일 개수의 조합에 따라
두 번째 ♠지점부터 세 번째 ♠지점까지 붙이는 타일의 경우가 달라지므로

첫 번째 ♠지점에서 시작하여 두 번째 ♠지점까지 붙인
검-흰 타일의 개수와 검-검-흰 타일의 개수에 따라
경우를 나눠 풀어야 하는 사건이다.

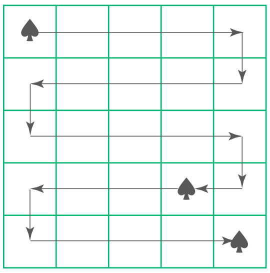
따라서 검-흰 타일을 A타일, 검-검-흰 타일을 B라 두고
① A타일이 8개, B타일이 0개인 사건
② A타일이 6개, B타일이 1개인 사건
③ A타일이 5개, B타일이 2개인 사건
④ A타일이 3개, B타일이 3개인 사건
⑤ A타일이 2개, B타일이 4개인 사건
⑥ A타일이 0개, B타일이 5개인 사건
으로 나눠 경우의 수를 구할 것을 먼저 설명하자.

이렇게 나누어진 사건들이 어떤 사건인지
앞에서 배운 서술방법을 이용하여 각 사건을 설명하고
그 설명들을 토대로 각 사건의 경우의 수를 구한 뒤
종합하여 논제의 사건의 경우의 수를 구하면 된다.

해설은 다음과 같다.

흰색 타일은 연속해서 붙일 수 없고, 검은색 타일은 연속해서 2개까지는 붙일 수 있으므로 검-흰 또는 검-검-흰 순으로 타일을 붙일 수 있다.
검-흰 타일을 A타일, 검-검-흰 타일을 B타일이라 하자.

첫 번째 ♠지점에서 시작하여 두 번째 ♠지점까지 붙인 A타일의 개수를 a, B타일의 개수를 b라 할 때



① $(8, 0)$인 사건 ② $(6, 1)$인 사건
③ $(5, 2)$인 사건 ④ $(3, 3)$인 사건
⑤ $(2, 4)$인 사건 ⑥ $(0, 5)$인 사건

으로 경우를 나눠 각각의 경우의 수를 구하자.

① $(8, 0)$인 사건

첫 번째 ♠지점에서 시작하여 A타일 8개를 붙여
총 16개의 정사각형을 먼저 채운 뒤,
두 번째 ♠지점에서 시작하여 세 번째 ♠지점까지
타일을 붙이는 경우를 모두 나열하면

AAAA, BAA, ABA, AAB, BBA, BAB, ABB

이다. 남은 정사각형에는 검은색 타일을 붙이면 되므로
①의 경우의 수는 $\frac{8!}{8!}\times 7=7$이다.

② $(6, 1)$인 사건

첫 번째 ♠지점에서 시작하여 A타일 6개 B타일 1개를 붙여
총 15개의 정사각형을 먼저 채운 뒤,
15번째 정사각형이 흰색 타일이므로 16번째 정사각형은 검은색 타일을 붙이고
17번째 정사각형인 두 번째 ♠지점은 검은색 타일을 붙인다.
따라서 18번째 정사각형은 흰색 타일이다.
19번째 정사각형에서 시작하여 세 번째 ♠지점까지
타일을 붙이는 경우를 모두 나열하면

AAA, BA, AB, BB

이고 남은 정사각형에는 검은색 타일을 붙이면 되므로

②의 경우의 수는 $\frac{7!}{6!1!}\times 4=28$이다.

③ $(5,\ 2)$인 사건

첫 번째 ♠지점에서 시작하여 A타일 5개 B타일 2개를 붙여

총 16개의 정사각형을 먼저 채운 뒤,

두 번째 ♠지점에서 시작하여 세 번째 ♠지점까지 타일을 붙이는 경우는

①의 경우와 동일하다. 따라서 ③의 경우의 수는 $\frac{7!}{5!2!}\times 7=147$이다.

④ $(3,\ 3)$인 사건

첫 번째 ♠지점에서 시작하여 A타일 3개 B타일 3개를 붙여

총 15개의 정사각형을 먼저 채운 뒤,

16번째의 정사각형부터 세 번째 ♠지점까지 타일을 붙이는 경우는

②의 경우와 동일하다. 따라서 ④의 경우의 수는 $\frac{6!}{3!3!}\times 4=80$이다.

⑤ $(2,\ 4)$인 사건

첫 번째 ♠지점에서 시작하여 A타일 2개 B타일 4개를 붙여

총 16개의 정사각형을 먼저 채운 뒤,

두 번째 ♠지점에서 시작하여 세 번째 ♠지점까지 타일을 붙이는 경우는

①의 경우와 동일하다. 따라서 ⑤의 경우의 수는 $\frac{6!}{2!4!}\times 7=105$이다.

⑥ $(0,\ 5)$인 사건

첫 번째 ♠지점에서 시작하여 A타일 0개 B타일 5개를 붙여

총 15개의 정사각형을 먼저 채운 뒤,

16번째의 정사각형부터 세 번째 ♠지점까지 타일을 붙이는 경우는

②의 경우와 동일하다. 따라서 ⑥의 경우의 수는 $\frac{5!}{5!}\times 4=4$이다.

이를 종합하여 논제의 사건의 경우의 수를 구하면

$$7+28+147+80+105+4=371$$

이다.

논제 8 : 실전논제 40min

2018학년도 연세대학교 수시논술

김연세는 정육면체 모양의 주사위를 던져서 나오는 수에 따라
1층부터 10층 사이를 이동하는 놀이를 한다.
첫 번째 시행에서는 주사위를 던져서 나온 눈의 수와 같은 층으로 간다.
두 번째부터는 다음 규칙에 따라서 놀이가 끝날 때까지 주사위 던지기를 반복 시행한다.

[규칙] 김연세가 n층에 있을 때, 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 m이라고 하자.

i) $n+m<10$이면 $n+m$층으로 간다.

ii) $n+m>10$이면 $10-(n+m-10)$층으로 간다.

iii) $n+m=10$이면 놀이가 끝난다.

(1) 주사위를 세 번 이하로 던져서 놀이가 끝나는 경우의 수를 구하시오.

(2) 주사위를 네 번 던져서 놀이가 끝났다고 하자. 놀이가 끝나기 전까지 **[규칙]** i)만 적용된 경우의 수를 구하시오.

(3) 주사위를 네 번 던져서 놀이가 끝나는 경우의 수를 구하시오.

예시답안

서지현선생님의

※ 본 예시답안은 대학에서 제공한 모범답안이 아닌, 서지현선생님이 직접 작성한 답안입니다.

■ 논제 1 – 2014학년도 성균관대학교 수시논술 변형

음이 아닌 정수해의 순서쌍은

$$(2,\ 0,\ 0),\ (0,\ 2,\ 0),\ (0,\ 0,\ 2),\ (1,\ 1,\ 0),\ (1,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ 1)$$

이다.

따라서 $a_2=6$이다.

■ 논제 2 – 2017학년도 부산대학교 자연계열 수시논술

n명의 학생 중 수학 동아리 선발되는 학생 3명을 뽑고,

3명 중 수학 동아리와 과학 동아리에 중복하여 선발되는 1명을 뽑고,

아직 선발되지 않은 학생 $(n-3)$명 중 과학 동아리에 선발되는 2명을 뽑으면 되므로,

구하고자 하는 경우의 수는

$$\begin{aligned} {}_n\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_{n-3}\mathrm{C}_2 &= \frac{n!}{3!(n-3)!}\times\frac{3!}{1!2!}\times\frac{(n-3)!}{2!(n-5)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4} \end{aligned}$$

이다.

■ 논제 3 – 2019학년도 경북대학교 자연 I 모의논술

0을 한 개 이하 사용하여 만든 여섯 자리 자연수 중 각 자리의 수의 합이 6인 자연수는

 i) 0을 사용하지 않고 만든 여섯 자리 자연수 중 각 자리의 수의 합이 6인 자연수가 되는 사건

 ii) 0을 한 개 사용하여 만든 여섯 자리 자연수 중 각 자리의 수의 합이 6인 자연수가 되는 사건

으로 나눌 수 있다.

 i) 의 경우, 6개의 1을 일렬로 나열하는 사건이므로 경우의 수는 1개다.

 ii) 의 경우, $2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0$을 일렬로 나열하는 사건에서

0을 맨 앞자리에 배열하고 남은 $2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1$을 일렬로 나열하는 사건을

제외하면 되므로 경우의 수는

$$\frac{6!}{1!\times4!\times1!}-\frac{5!}{1!\times4!}=25$$

개다.

따라서 구하고자 하는 개수는 i) + ii) $=26$개다.

■ **논제 4 - 2020학년도 성균관대학교 모의논술 변형**

(1) 1부터 7까지의 숫자가 각각 적힌 7개의 공을

각각 A, B, C라고 적혀있는 세 개의 상자에 담는 사건은

세 개의 상자 A, B, C 중에서 각각의 공이 들어갈 상자를

중복을 허용하여 7개를 뽑아 나열하는 사건과 같으므로 경우의 수는

$$\begin{aligned} {}_3\Pi_7 &= 3^7 \\ &= 2187 \end{aligned}$$

이다.

(2) 논제의 사건은

i) 1부터 7까지의 숫자가 각각 적힌 7개의 공을

A, B, C라고 각각 적힌 세 개의 상자에 담는 전체 사건에서

ii) 세 개의 상자 중 한 개의 상자에만 공을 담는 사건과

iii) 세 개의 상자 중 두 개의 상자에만 공을 담는 사건을 제외한 사건이다.

각 사건의 경우의 수를 구하자.

i) 의 경우의 수는 논제 (1)에 의해 2187이다.

ii) 는 세 개의 상자 A, B, C 중 하나를 선택하여

7개의 공을 모두 담는 사건이므로 경우의 수는

$${}_3\mathrm{C}_1 = 3$$

이다.

iii) 은 세 개의 상자 A, B, C 중 두 개를 선택한 뒤,

그 두 개의 상자에 7개의 공을 담는 사건에서

그 두 개의 상자 중 한 개의 상자에만 모두 담는 사건을

제외한 사건이므로 경우의 수는

$${}_3\mathrm{C}_2 \times \left({}_2\Pi_7 - {}_2\mathrm{C}_1\right) = 378$$

이다.

따라서 논제의 사건의 경우의 수는 $2187 - 3 - 378 = 1806$이다.

■ **논제 5 - 2019학년도 경북대학교 자연 I, II 수시논술**

논제의 사건은 $7 \leq m_1+6 \leq m_2+3 \leq m_3 \leq 12$를 만족하는 m_1, m_2, m_3을 선택하는 사건이고

이는 7 이상 12 이하의 6개의 자연수 중에서 중복을 허용하여

3개의 숫자 m_1+6, m_2+3, m_3을 선택하는 사건과 같으므로

순서쌍 $(m_1,\ m_2,\ m_3)$의 개수는

$$
\begin{aligned}
{}_6\mathrm{H}_3 &= {}_8\mathrm{C}_3 \\
&= 56
\end{aligned}
$$

개다.

■ **논제 6 – 2020학년도 부산대학교 자연계열 수시논술**

(1) 집합 A의 임의의 원소 a에 대하여 $f(a)-a \geq n$을 만족하는 일대일 함수 f는

$f(1) \geq n+1$, $f(2) \geq n+2$, $f(3) \geq n+3$을 만족하는 일대일 함수이다.

따라서 $f(3)$은 $n+3$, $n+4$, $\cdots$, 10 중 하나이고

$f(2)$는 $n+2$, $n+3$, $\cdots$, 10 에서 $f(3)$을 제외한 값 중 하나이고

$f(1)$은 $n+1$, $n+2$, $\cdots$, 10 중 $f(3)$과 $f(2)$를 제외한 하나다.

따라서 일대일 함수 f의 개수는 $(8-n)^3$개다.

(2) $n=1$일 때 $f(x+1)-f(x) \geq 0$을 만족하는 함수 f는

$1 \leq f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq 10$을 만족하는 함수이므로

1 이상 10 이하의 10개의 자연수 중에서 중복을 허락하여

3개의 숫자 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$을 선택하는 사건과 같다.

따라서 구하고자 하는 함수 f의 개수 $h(1)$은

$$\begin{aligned} h(1) &= {}_{10}\mathrm{H}_3 \\ &= {}_{12}\mathrm{C}_3 \\ &= 220 \end{aligned}$$

이다.

한편 $2 \leq n \leq 5$일 때 $f(x+1)-f(x) \geq n-1$을 만족하는 사건은

$2n-1 \leq f(1)+2n-2 \leq f(2)+n-1 \leq f(3) \leq 10$을 만족하는

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$을 선택하는 사건이고

이는 $2n-1$ 이상 10 이하의 $12-2n$개의 자연수 중에서 중복을 허락하여

3개의 숫자 $f(1)+2n-2$, $f(2)+n-1$, $f(3)$을 선택하는 사건과 같다.

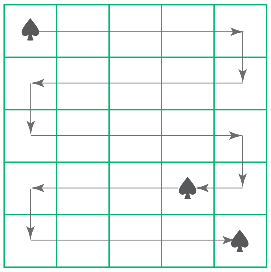
따라서 구하고자 하는 함수 f의 개수 $h(n)$은

$$\begin{aligned} h(n) &= {}_{12-2n}\mathrm{H}_3 \\ &= {}_{14-2n}\mathrm{C}_3 \\ &= \frac{(14-2n)(13-2n)(12-2n)}{6} \\ &= \frac{(14-2n)(13-2n)(6-n)}{3} \end{aligned}$$

이다.

■ **논제 7 – 2018학년도 부산대학교 자연계열 수시논술 변형**

흰색 타일은 연속해서 붙일 수 없고, 검은색 타일은 연속해서 2개까지는 붙일 수 있으므로 검-흰 또는 검-검-흰 순으로 타일을 붙일 수 있다.
검-흰 타일을 A타일, 검-검-흰 타일을 B타일이라 하자.



첫 번째 ♠지점에서 시작하여 두 번째 ♠지점까지 붙인 A타일의 개수를 a, B타일의 개수를 b라 할 때

① $(8,\ 0)$인 사건 ② $(6,\ 1)$인 사건
③ $(5,\ 2)$인 사건 ④ $(3,\ 3)$인 사건
⑤ $(2,\ 4)$인 사건 ⑥ $(0,\ 5)$인 사건

으로 경우를 나눠 각각의 경우의 수를 구하자.

① $(8,\ 0)$인 사건
첫 번째 ♠지점에서 시작하여 A타일 8개를 붙여 총 16개의 정사각형을 먼저 채운 뒤,
두 번째 ♠지점에서 시작하여 세 번째 ♠지점까지 타일을 붙이는 경우를 모두 나열하면

AAAA, BAA, ABA, AAB, BBA, BAB, ABB

이다. 남은 정사각형에는 검은색 타일을 붙이면 되므로

① 의 경우의 수는 $\dfrac{8!}{8!}\times 7=7$이다.

② $(6,\ 1)$인 사건
첫 번째 ♠지점에서 시작하여 A타일 6개 B타일 1개를 붙여 총 15개의 정사각형을 먼저 채운 뒤,
15번째 정사각형이 흰색 타일이므로 16번째 정사각형은 검은색 타일을 붙이고
17번째 정사각형인 두 번째 ♠지점은 검은색 타일을 붙인다.
따라서 18번째 정사각형은 흰색 타일이다.
19번째 정사각형에서 시작하여 세 번째 ♠지점까지 타일을 붙이는 경우를 모두 나열하면

AAA, BA, AB, BB

이고 남은 정사각형에는 검은색 타일을 붙이면 되므로

②의 경우의 수는 $\dfrac{7!}{6!1!}\times 4=28$이다.

③ $(5,\ 2)$인 사건

첫 번째 ♠지점에서 시작하여 A타일 5개 B타일 2개를 붙여 총 16개의 정사각형을 먼저 채운 뒤, 두 번째 ♠지점에서 시작하여 세 번째 ♠지점까지 타일을 붙이는 경우는 ①의 경우와 동일하다.

따라서 ③의 경우의 수는 $\frac{7!}{5!2!}\times 7=147$이다.

④ $(3,\ 3)$인 사건

첫 번째 ♠지점에서 시작하여 A타일 3개 B타일 3개를 붙여 총 15개의 정사각형을 먼저 채운 뒤, 16번째의 정사각형부터 세 번째 ♠지점까지 타일을 붙이는 경우는 ②의 경우와 동일하다.

따라서 ④의 경우의 수는 $\frac{6!}{3!3!}\times 4=80$이다.

⑤ $(2,\ 4)$인 사건

첫 번째 ♠지점에서 시작하여 A타일 2개 B타일 4개를 붙여 총 16개의 정사각형을 먼저 채운 뒤, 두 번째 ♠지점에서 시작하여 세 번째 ♠지점까지 타일을 붙이는 경우는 ①의 경우와 동일하다.

따라서 ⑤의 경우의 수는 $\frac{6!}{2!4!}\times 7=105$이다.

⑥ $(0,\ 5)$인 사건

첫 번째 ♠지점에서 시작하여 A타일 0개 B타일 5개를 붙여 총 15개의 정사각형을 먼저 채운 뒤, 16번째의 정사각형부터 세 번째 ♠지점까지 타일을 붙이는 경우는 ②의 경우와 동일하다.

따라서 ⑥의 경우의 수는 $\frac{5!}{5!}\times 4=4$이다.

이를 종합하여 논제의 사건의 경우의 수를 구하면

$$7+28+147+80+105+4=371$$

이다.

■ 논제 8 – 2018학년도 연세대학교 수시논술

(1) 논제의 사건은

i) 두 번째 시행에서 놀이가 끝나는 사건

ii) 세 번째 시행에서 놀이가 끝나는 사건

으로 나눌 수 있다.

i) 두 번의 시행에서 나온 주사위의 눈을 차례로 a, b라 둘 때,

두 번째 시행에서 놀이가 끝나려면

$a+b=10$

$1 \le a \le 6$

$1 \le b \le 6$

을 모두 만족해야 한다.

위 세 개의 식을 모두 만족하는 $(a,\ b)$를 나열하면

$(4,\ 6)$, $(5,\ 5)$, $(6,\ 4)$

이므로 총 3가지이다.

ii) 세 번의 시행에서 나온 주사위의 눈을 차례로 a, b, c라 두면

$a+b<10$인 경우와 $a+b>10$인 경우로 나눠 생각할 수 있다.

① $a+b<10$인 경우

$a+b+c=10$

$1 \le a \le 6$

$1 \le b \le 6$

$1 \le c \le 6$

을 모두 만족해야 한다.

a, b가 정해지면 c는 자동으로 $10-(a+b)$가 되므로

위 네 개의 식을 모두 만족하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수가

세 번째 시행(단, $a+b<10$)에서 놀이가 끝나는 경우의 수가 된다.

$1 \le c \le 6$, $a+b+c=10$이므로 a와 b는 $4 \le a+b \le 9$를 만족해야 한다.

a, b가 $4 \le a+b \le 9$를 만족하는 사건은 주사위를 두 번 던지는 사건에서

$a+b=2$ $a+b=3$, $a+b=10$, $a+b=11$, $a+b=12$

를 만족하는 사건을 제외한 사건이므로 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$6^2-1-2-3-2-1=27$

가지다.

② $a+b>10$인 경우

$$a+b-c=10$$
$$1 \le a \le 6$$
$$1 \le b \le 6$$
$$1 \le c \le 6$$

을 모두 만족해야 한다.

a, b가 정해지면 c는 자동으로 $(a+b)-10$이 되므로

위 네 개의 식을 모두 만족하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수가

세 번째 시행 (단, $a+b>10$)에서 놀이가 끝나는 경우의 수가 된다.

$1 \le c \le 6$, $a+b-c=10$, $2 \le a+b \le 12$이므로

a와 b는 $11 \le a+b \le 12$를 만족해야 한다.

이를 만족하는 $(a,\ b)$를 나열하면

$$(5,\ 6),\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)$$

이다. 따라서 3가지다.

따라서 논제에서 구하고자 하는 경우의 수는

$$\begin{aligned}\text{i}) + \text{ii}) &= 3+(27+3)\\ &=33\end{aligned}$$

이다.

(2) 주사위를 네 번 던져서 놀이가 끝났을 때 **[규칙]** i) 만 적용되는 사건은

네 번의 시행에서 나온 주사위의 눈을 차례로 a, b, c, d라 할 때

$$a+b+c+d=10$$
$$1 \le a \le 6$$
$$1 \le b \le 6$$
$$1 \le c \le 6$$
$$1 \le d \le 6$$

을 모두 만족하는 사건이고

이는 $a+b+c+d=10$을 만족하는 전체 자연수 쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$에서

$(1,\ 1,\ 1,\ 7)$, $(1,\ 1,\ 7,\ 1)$, $(1,\ 7,\ 1,\ 1)$, $(7,\ 1,\ 1,\ 1)$을 제외한 사건이므로 경우의 수는

$$\begin{aligned}{}_9\mathrm{C}_3-4 &= 84-4\\ &=80\end{aligned}$$

이다.

(3) 네 번의 시행에서 나온 주사위의 눈을 차례로 a, b, c, d라 할 때, 논제의 사건은

① [규칙] ⅰ) 만 적용되는 사건

② [규칙] ⅰ) 과 ⅱ) 가 적용되고 $a+b \geq 11$인 사건

③ [규칙] ⅰ) 과 ⅱ) 가 적용되고 $5 \leq a+b \leq 7$이고 $a+b+c \geq 11$인 사건

④ [규칙] ⅰ) 과 ⅱ) 가 적용되고 $8 \leq a+b \leq 9$이고 $a+b+c \geq 11$인 사건

으로 나눌 수 있다.

① 논제 (2)에 의해 80가지다.

② $(a,\ b)$가 $(5,\ 6)$ 또는 $(6,\ 5)$이면 c는 $2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ 중 하나이고
$(a,\ b)$가 $(6,\ 6)$이면 c는 $1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ 중 하나이므로 경우의 수는

$$2 \times 5 + 1 \times 5 = 15$$

이다.

③ $a+b=k$ (단, $5 \leq k \leq 7$)를 만족하는 $(a,\ b)$는

$$(1,\ k-1),\ (2,\ k-2),\ \cdots,\ (k-1,\ 1)$$

이고 $a+b+c \geq 11$이어야 하므로

$$11-k \leq c \leq 6$$

을 만족한다. 이에 따라 d의 값은 정해지므로 경우의 수는

$$(k-1) \times (k-4)$$

이다.

④ $a+b=k$ (단, $8 \leq k \leq 9$)를 만족하는 $(a,\ b)$는

$$(k-6,\ 6),\ (k-5,\ 5),\ \cdots,\ (6,\ k-6)$$

이고 $a+b+c \geq 11$이어야 하므로

$$11-k \leq c \leq 6$$

을 만족한다. 이에 따라 d의 값은 정해지므로 경우의 수는

$$(13-k) \times (k-4)$$

이다.

따라서 논제에서 구하고자하는 경우의 수는

$$\text{①}+\text{②}+\text{③}+\text{④} = 80 + 15 + \sum_{k=5}^{7}(k-1)(k-4) + \sum_{k=8}^{9}(13-k)(k-4)$$
$$= 167$$

이다.