수리 영역

가형

1. ①	2. ④	3. ①	4. ②	5. ②
6. ④	7. ④	8. ③	9. ①	10. ③
11. ①	12. ①	13. ④	14. ⑤	15. ①
16. ②	17. ②	18. ④	19. ⑤	20. ②
21. ④	22. 2	23. 18	24. 27	25. 21
26. 220	27. 4	28. 50	29. 10	30. 228

1. $\begin{pmatrix} a+b & 2b+4 \\ 2b+2a & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

이때 두 행렬이 같을 조건에 의해

$a+b=3,\ 2b+4=2,\ 2b+2a=6$

$\therefore a=4,\ b=-1$

$\therefore ab=4\times(-1)=-4$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+16n}-2n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+16n-4n^2}{\sqrt{4n^2+16n}+2n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{16n}{\sqrt{4n^2+16n}+2n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{16}{\sqrt{4+\dfrac{16}{n}}+2}$

$=\dfrac{16}{\sqrt{4}+2}=4$

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{2}{e^x+1}-\dfrac{1}{e^x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}\times\dfrac{e^x-1}{e^x(e^x+1)}\right)$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}\times\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{e^x(e^x+1)}$

$=1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

4. $\mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{2}{3}$에서

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{P}(A)=\dfrac{2}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)}$

$=\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{3}$

5. $\sqrt{x^2+x+3}=t$로 놓으면 $t\ge0$이고 $t^2=x^2+x+3$이므로 주어진 방정식은

$t=t^2-6,\ t^2-t-6=0$

$(t+2)(t-3)=0$

$\therefore t=3\ (\because t\ge0)$

이때 $\sqrt{x^2+x+3}=3$이므로 양변을 제곱하여 풀면

$x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

따라서, 모든 실근의 합은 -1이다.

6. $\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$이고, $x=e$일 때 $t=1$, $x=e^2$일 때 $t=2$이므로

$\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{\ln(\ln x)}{x}dx=\int_1^2\ln t\,dt$

$=[t\ln t]_1^2-\displaystyle\int_1^2dt$

$=2\ln2-[t]_1^2$

$=2\ln2-1$

7. 현재 바이러스의 개체 수를 a라 하고 매분마다 r배로 증가한다고 하면 주어진 조건으로부터

$r^{10}a=2a,\ r^{10}=2$

$\therefore r=2^{\frac{1}{10}}$

x분 후에 처음으로 그 개체 수가 현재의 60배 이상이 된다고 하면

$\left(2^{\frac{1}{10}}\right)^xa\ge60a,\ 2^{\frac{x}{10}}\ge60$

양변에 상용로그를 취하면

$\dfrac{x}{10}\log2\ge\log60$

$\therefore x\ge\dfrac{10(1+\log2+\log3)}{\log2}=\dfrac{10\times1.78}{0.30}=59.33\cdots$

따라서, 개체 수가 처음으로 현재보다 60배 이상이 되는 것은 약 60분 후이다.

8. 일차변환 f를 나타내는 행렬을 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면 임의의 실수 x, y에 대하여

$A\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax \\ cx \end{pmatrix}$에서 $ax=0$ $\quad\therefore a=0$

$A\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} by \\ dy \end{pmatrix}$에서 $dy=0$ $\quad\therefore d=0$

이때 $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4b \\ 3c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$에서

$b=\dfrac{3}{2},\ c=\dfrac{7}{3}$

따라서, $\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{7}{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix}$에서 구하는 점의 좌표는 $(3, 14)$이다.

9. $x\ne a$에서 함수 $f(x)$는 연속이므로 $x=a$에서 연속이면 된다.

즉, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$이어야 한다.

이때 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin2x}{x-a}$이 존재해야 하고 $x\to a$일 때, (분모)$\to0$이면 (분자)$\to0$이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to a}\sin2x=\sin2a=0$

이를 만족하는 실수 a는

$a=\dfrac{\pi}{2}\ (\because 0<a<\pi)$

이때 이 값을 대입하고 $x-\dfrac{\pi}{2}=t$로 놓으면

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin2x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin(2t+\pi)}{t}$

$=-2\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin2t}{2t}=-2$

$\therefore b=-2$

$\therefore ab=\dfrac{\pi}{2}\times(-2)=-\pi$

10. $n=k$일 때 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$1\cdot3+2\cdot5+\cdots+k(2k+1)=\dfrac{1}{6}k(k+1)(4k+5)$

이 등식의 양변에 $\boxed{(k+1)(2k+3)}$을 더하면

$1\cdot3+2\cdot5+\cdots+k(2k+1)+(k+1)(2k+3)$

$=\dfrac{1}{6}k(k+1)(4k+5)+(k+1)(2k+3)$

$=\dfrac{1}{6}\boxed{(k+1)(k+2)(4k+9)}$

$\therefore f(k)=(k+1)(2k+3),\ g(k)=(k+1)(k+2)(4k+9)$

$\therefore f(2)=3\times7=21,\ g(0)=1\times2\times9=18$

$\therefore f(2)-g(0)=3$

11. 주어진 방정식의 좌변은

$2\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+2\sin x$

$=2\sqrt{2}\left(\cos x\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin x\sin\dfrac{\pi}{4}\right)+2\sin x$

$=2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)+2\sin x$

$=2\cos x$

이므로

$2\cos x=3\tan x$

$2\cos x=3\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$2\cos^2x=3\sin x$

$2-2\sin^2x=3\sin x$

$2\sin^2x+3\sin x-2=0$

$(2\sin x-1)(\sin x+2)=0$

$\therefore \sin x=\dfrac{1}{2}\ (\because -1\le\sin x\le1)$

이때 $0\le x<2\pi$이므로

$x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$

따라서, 모든 x의 값의 합은 π이다.

12. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f\left(\frac{x}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-1}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f\left(\frac{x}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}$

$=\dfrac{1}{2}f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$

한편, $y=\sin x$에서 x, y를 바꾸면

$x=\sin y$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠에서 $x=\dfrac{1}{2}$일 때 $y=\dfrac{\pi}{6}\ \left(\because 0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

또, ㉠에서 $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{\cos y}$이므로

$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \dfrac{1}{2}f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

13. $y^2=8x$의 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(2, 0)$이고, 준선은 $x=-2$이다.

$\mathrm{A}(a_1, a_2),\ \mathrm{B}(b_1, b_2)$라 하고, 두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하면

$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AP}}=a_1+2$

$\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BQ}}=b_1+2$

$\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표가 $(3, 2)$이므로

$\dfrac{a_1+b_1}{2}=3$

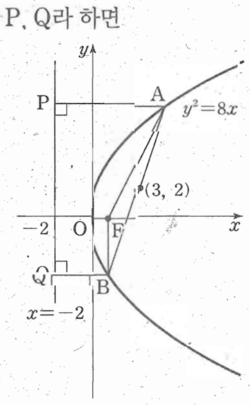
$\therefore a_1+b_1=6$

$\therefore \overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}$

$=(a_1+2)+(b_1+2)$

$=a_1+b_1+4$

$=10$



14. $\mathrm{P}(X=0)={}_{48}\mathrm{C}_0(1-p)^{48}=(1-p)^{48}=\dfrac{1}{4^{48}}$에서

$1-p=\dfrac{1}{4}$ $\quad\therefore p=\dfrac{3}{4}$

그러므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(48,\ \dfrac{3}{4}\right)$를 따른다.

즉, 48은 충분히 큰 수이므로 X는 정규분포

$\mathrm{N}\left(48\times\dfrac{3}{4},\ 48\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(36, 3^2)$을 따른다.

따라서, 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X\ge30)=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-36}{3}\ge\dfrac{30-36}{3}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge-2)$

$=P(-2\le Z\le 0)+P(Z\ge 0)$
$=P(0\le Z\le 2)+P(Z\ge 0)$
$=0.4772+0.5$
$=0.9772$

15. 서로 다른 9개의 색을 9개의 원에 칠하는 경우의 수는 $9!$

이때 3개씩 접해진 원이 회전하여 같아지는 경우는 3가지가 있으므로 구하는 방법의 수는

$9!\times\frac{1}{3}=3\times 8!$

[다른 풀이]

서로 다른 9개의 색 중 하나는 3개씩 접해진 원 속에 있다. 8개 중 2개를 택하여 3개씩 접한 원에 색을 칠하는 경우의 수는 ${}_8C_2\times 3!$이고, 이 각각에 대하여 3개씩 접한 3개의 원에 칠하는 경우의 수는 ${}_6P_3$이고, 이 각각에 대하여 나머지 3개씩 접한 3개의 원에 칠하는 경우의 수는 ${}_3P_3$이다.

따라서, 구하는 경우의 수는

${}_8C_2\times 3!\times {}_6P_3\times {}_3P_3=3\times 8!$

16. 반지름의 길이가 2이고, $\angle OAP=\theta$이므로

$\triangle OQ_1A=\frac{1}{2}\times\overline{OQ_1}\times\overline{Q_1A}$
$=\frac{1}{2}\times 2\sin\theta\times 2\cos\theta$
$=2\sin\theta\cos\theta$

또, $\angle POQ_2=2\theta$이므로

$\triangle OCQ_2=\frac{1}{2}\times\overline{OC}\times\overline{OQ_2}$
$=\frac{1}{2}\times 2\times 2\cos 2\theta$
$=2\cos 2\theta$

그러므로 두 삼각형의 넓이의 합은

$\triangle OQ_1A+\triangle OCQ_2=2\sin\theta\cos\theta+2\cos 2\theta$
$=\sin 2\theta+2\cos 2\theta$
$=\sqrt{5}\sin(2\theta+\alpha)$
$\left(\text{단, } \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

이때 이 넓이가 최대가 되는 θ는 $2\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$이므로

$\tan 2\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{\tan\alpha}$

$=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}}=\frac{1}{2}$

17. $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&2\cdot 2\\0&1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&6\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\cdot 3\\0&1\end{pmatrix}$

$\vdots$

$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&2n\\0&1\end{pmatrix}\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

$\therefore M=\left\{\begin{pmatrix}1&2n\\0&1\end{pmatrix}\middle| n=1, 2, 3, \cdots\right\}$

집합 M의 두 원소 $P=\begin{pmatrix}1&2p\\0&1\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}1&2q\\0&1\end{pmatrix}$에 대하여 ($p$, q는 자연수)

$PQ=\begin{pmatrix}1&2p\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2q\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2p+2q\\0&1\end{pmatrix}$에서

$1+1+2p+2q=20$

$\therefore p+q=9$

$\therefore P+Q=\begin{pmatrix}1&2p\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2q\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2p+2q\\0&2\end{pmatrix}$

따라서, 구하는 행렬 $P+Q$의 모든 성분의 합은

$2+2+2p+2q=22$이다.

18. $a=\overline{BF'}=3$, $b=\overline{OB}=\sqrt{a^2-2^2}=\sqrt{5}$,

$c=\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{14}$

$\therefore \overline{AC}+\overline{AC'}=2\sqrt{a^2+c^2}=2\sqrt{23}$

19. ㄱ. $f'(x)=e^{\sin x}\cdot\cos x$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

이때 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	+	+	0	−	0	+	+
$f(x)$	1	↗	e	↘	$\frac{1}{e}$	↗	1

$x=\frac{\pi}{2}$일 때, 극댓값 e를 갖는다. ∴ 참

ㄴ. $f''(x)=e^{\sin x}\cdot\cos^2 x-e^{\sin x}\cdot\sin x$
$=e^{\sin x}(\cos^2 x-\sin x)$
$=e^{\sin x}(-\sin^2 x-\sin x+1)$

에서 $f''(x)=0$인 값은

$-\sin^2 x-\sin x+1=0$

$\therefore \sin x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ($\because -1\le\sin x\le 1$) …… ㉠

이를 만족하는 x의 값은 2개이고 이 두 값을 경계로 하여 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 2개이다. ∴ 참

ㄷ. ㉠의 근을 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ $\left(\text{단, } 0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi\right)$

라 하면 $f'(x)$는 $x=\alpha$에서 극대이고 최대이다.

그런데 $f'(0)=1$이므로 $f'(\alpha)>1$이다. ∴ 참

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

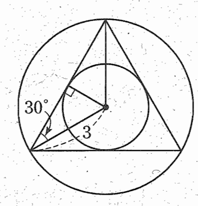
20. 그릇의 깊이는 $y=\ln 9=2\ln 3$이므로 채워진 물의 깊이는 $\ln 3$이고, 구하는 물의 부피는

$\int_0^{\ln 3}\pi(e^y)^2dy=\pi\int_0^{\ln 3}e^{2y}dy=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}\right]_0^{\ln 3}$

$=\frac{\pi}{2}(e^{2\ln 3}-e^0)=\frac{\pi}{2}(9-1)$

$=4\pi$

21. 그림과 같이 반지름의 길이가 3인 원에 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이는 $2\times 3\cos 30°=3\sqrt{3}$이고, 이 정삼각형에 내접하는 원의 반지름의 길이는



$3\sin 30°=\frac{3}{2}$이 된다.

같은 방법으로 생각하면 원 C_k와 원 C_{k+1}의 반지름의 길이의 비가 $2:1$이므로 원 C_n의 중심의 x좌표는

$3+2\times\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{3}{2^{n-1}}\right)-\frac{3}{2^{n-1}}$

($n=2, 3, 4, \cdots$)이다.

따라서, 구하는 원의 중심의 x좌표의 극한값은

$3+2\times\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}}+0=9$이다.

22. 점 P의 좌표를 $(0, k, 0)$으로 놓으면

$\overline{AP}=\sqrt{1^2+(-2-k)^2+(-3)^2}=\sqrt{k^2+4k+14}$

$\overline{BP}=\sqrt{(-3)^2+(3-k)^2+4^2}=\sqrt{k^2-6k+34}$

$\overline{AP}=\overline{BP}$이므로

$k^2+4k+14=k^2-6k+34$

$10k=20$

$k=2$

$\therefore P(0, 2, 0)$

$\therefore \overline{OP}=2$

23. 로그의 진수조건에서 $x-4>0$, $x+4>0$, $x>0$

$\therefore x>4$

$\log_2(x-4)+\log_2(x+4)<\log_2 6x$에서

$\log_2(x-4)(x+4)<\log_2 6x$

$x^2-16<6x$

$x^2-6x-16<0$

$(x-8)(x+2)<0$

$-2<x<8$

$\therefore 4<x<8$

따라서, 만족하는 정수 x는 5, 6, 7이므로 합은 18이다.

24. $\vec{x}\perp(\vec{x}+\vec{y})$에서 $\vec{x}\cdot(\vec{x}+\vec{y})=|\vec{x}|^2+\vec{x}\cdot\vec{y}=0$

$\therefore \vec{x}\cdot\vec{y}=-|\vec{x}|^2$

$\therefore (\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{y}-3\vec{x})=(\vec{x}+\vec{y})\cdot\vec{y}-(\vec{x}+\vec{y})\cdot 3\vec{x}$

$=\vec{x}\cdot\vec{y}+|\vec{y}|^2-0$

$=-|\vec{x}|^2+|\vec{y}|^2$

$=-3^2+6^2=27$

25. 분수부등식을 풀면

$\frac{2x-10n}{(x-n)(x-9n)}\le 0$

$2(x-n)(x-5n)(x-9n)\le 0$ (단, $x\ne n$, $x\ne 9n$)

$\therefore x<n$ 또는 $5n\le x<9n$

이때 자연수 x의 개수는

$(n-1)+(9n-5n)=5n-1$

자연수 x의 개수가 100이상이 되어야 하므로

$5n-1\ge 100$

$n\ge\frac{101}{5}=20.2$

따라서, 자연수 n의 최솟값은 21이다.

26. 이차방정식 $x^2-4nx-1=0$의 두 근이 a_n, b_n이므로 근과 계수의 관계에서

$a_n+b_n=4n$, $a_nb_n=-1$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}\left\{(a_k+1)(b_k+1)\right\}=\sum_{k=1}^{10}(a_kb_k+a_k+b_k+1)$

$=\sum_{k=1}^{10}4k$

$=4\times\frac{10\cdot 11}{2}$

$=220$

27. 서로 다른 4장의 카드를 뽑아 배열하는 경우의 수는

${}_{10}P_4=10\times 9\times 8\times 7$

홀수 2개, 짝수 2개가 배열되는 경우의 수는

${}_5C_2\times{}_5C_2\times 4!=10^2\times 4!$

홀수 2개, 짝수 2개가 홀수는 홀수끼리 짝수는 짝수끼리 인접하도록 배열되는 경우의 수는

${}_5C_2\times{}_5C_2\times 2!\times 2!\times 2!=10^2\times 8$

따라서, 구하는 확률은

$\frac{\frac{10^2\times 8}{10\times 9\times 8\times 7}}{\frac{10^2\times 4!}{10\times 9\times 8\times 7}}=\frac{8}{4!}=\frac{1}{3}$

$\therefore p+q=4$

28. 두 사안 A, B에 각각 찬성하는 사건이 서로 독립이므로 100명 중 A, B 모두 찬성하는 비율 $\hat{p}$은

$\hat{p}=\frac{40}{100}\times\frac{n}{100}=\frac{4n}{1000}$ …… ㉠

이때 모비율 p에 대한 신뢰구간

$\left[\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{100}},\ \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{100}}\right]$

이때 주어진 신뢰구간은 $[0.1216, 0.2784]$이므로 신뢰구간의 양끝 값을 더하면

$2\hat{p}=0.4$ ∴ $\hat{p}=0.2$

따라서, ㉠에서 $\frac{4n}{1000}=0.2$이다.

$\therefore n=50$

29. 직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{PQ}=\left(2, \frac{1}{k}, 2\right)\cdot(1, 2, -2)=2+\frac{2}{k}-4=0$에서

$k=1$

또, $\overrightarrow{PR}\perp l$이므로 구하는 평면은 점 R를 지나며 직선 l에 수직인 평면이다.

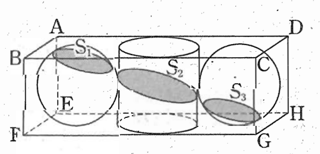
따라서, 구하는 평면의 방정식은

$2(x-2)+1(y-2)+2(z-1)=0,\ 2x+y+2z=8$

$\therefore \frac{x}{4}+\frac{y}{8}+\frac{z}{4}=1$

$\therefore 16(a+b+c)=16\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)=10$

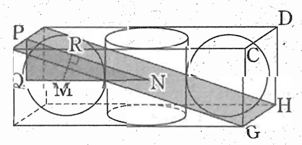
30.

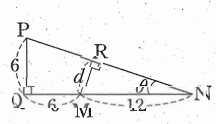


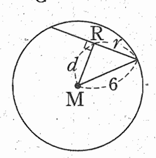
세 단면의 넓이를 차례대로 S_1, S_2, S_3라 하고, 평면 α와 평면 ABCD가 이루는 이면각의 크기를 θ라 하면

$\tan\theta=\frac{1}{3}$이므로 $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$

따라서, $S_2\cos\theta=36\pi$에서 $S_2=36\pi\times\frac{\sqrt{10}}{3}=12\sqrt{10}\pi$







또, 구의 중심에서 평면 α까지의 거리 d는

$\sin\theta=\frac{d}{12}=\frac{1}{\sqrt{10}}$에서 $d=\frac{12}{\sqrt{10}}$이므로

$S_1=S_3=\pi r^2=\pi(6^2-d^2)$

$=\pi\left(36-\frac{72}{5}\right)=\frac{108}{5}\pi$

$\therefore S_1+S_2+S_3=\left(12\sqrt{10}+\frac{216}{5}\right)\pi$

$\therefore a+5b=12+5\times\frac{216}{5}=228$

나형

1. ①	2. ④	3. ⑤	4. ④	5. ①
6. ③	7. ④	8. ④	9. ②	10. ③
11. ③	12. ②	13. ⑤	14. ②	15. ⑤
16. ②	17. ②	18. ④	19. ②	20. ⑤
21. ④	22. 19	23. 18	24. 7	25. 160
26. 220	27. 35	28. 47	29. 38	30. 26

1~2. 가형의 1~2번과 동일

3. $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{3})(\sqrt{x+2}+\sqrt{3})}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+2}+\sqrt{3})}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(\sqrt{x+2}+\sqrt{3})$

$=\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

4. $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{1}{2}=\frac{3}{10}+\frac{2}{5}-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}}=\frac{1}{2}$

5. 세 수 a, b, 3은 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2b=a+3$

세 수 b, 3, a는 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$3^2=ab$

두 식에서 a를 소거하여 정리하면

$2b^2-3b-9=0$

$(2b+3)(b-3)=0$에서

$b=-\frac{3}{2}\ (\because b\neq3)$

따라서, $a=-6$이므로 $a+b=-\frac{15}{2}$이다.

6. $\begin{pmatrix}a & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}a-1 & 1\\ 4 & 3-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

$x=y=0$ 이외의 해를 가지려면 $\begin{pmatrix}a-1 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

$(a-1)\times2-4=0$

$2a-2-4=0$

$\therefore a=3$

7. 가형의 7번과 동일

8. $G=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}$에서

$G^2=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}$

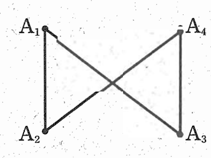
$=\begin{pmatrix}2&0&0&2\\0&2&2&0\\0&2&2&0\\2&0&0&2\end{pmatrix}$

$G^3=G^2G=\begin{pmatrix}2&0&0&2\\0&2&2&0\\0&2&2&0\\2&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0&4&4&0\\4&0&0&4\\4&0&0&4\\0&4&4&0\end{pmatrix}$

따라서, 이 그래프의 꼭짓점 A_2를 출발하여, 중간에 두 꼭짓점을 거쳐 꼭짓점 A_4로 가는 방법의 수는 G^3의 (2, 4) 성분인 4와 같다.

[참고]



9. $f'(x)=2ax+b$이므로

$f(f'(x))=a(2ax+b)^2+b(2ax+b)+1$

$f'(f(x))=2a(ax^2+bx+1)+b$

$f(f'(x))=f'(f(x))$이므로

$4a^3x^2+(4a^2b+2ab)x+ab^2+b^2+1$

$=2a^2x^2+2abx+2a+b$

양변의 계수를 비교하면

$4a^3=2a^2,\ 4a^2b+2ab=2ab,\ ab^2+b^2+1=2a+b$

$a\neq0$이므로 $a=\frac{1}{2}$, $b=0$

$\therefore a+b=\frac{1}{2}$

10. 가형의 10번과 동일

11. $y'=3x^2-2$

곡선 $y=x^3-2x+1$ 위의 점 A(1, 0)에서의 접선의 기울기를 m이라 하면

$m=3-2=1$

따라서, 접선의 방정식은

$y=x-1$

$\therefore a=1, b=-1$

$\therefore a+b=0$

12. 한 달 통화시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(180, 20^2)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\geq220)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{220-180}{20}\right)=\mathrm{P}(Z\geq2)$

$=0.5-0.4772=0.0228$

$0.0228\times5000=114$

따라서, 한 달 통화시간이 220시간 이상인 휴대전화 사용자 수는 114명이다.

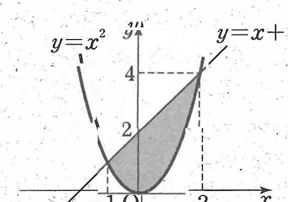
13. 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=x+2$의 교점의 x좌표는

$x^2=x+2,\ x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=x+2$로 둘러싸인 도형은 다음 그림과 같다.



따라서, 구하는 넓이 S는

$S=\int_{-1}^{2}\{(x+2)-x^2\}dx$

$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$

$=-\frac{8}{3}+2+4-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)$

$=\frac{9}{2}$

14. ㄱ. $\lim_{x\to-1+0}f(x)=\lim_{x\to-1+0}\frac{|x-1|}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to-1+0}\frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$=\lim_{x\to-1+0}\frac{-1}{x+1}=-\infty$

$\lim_{x\to-1-0}f(x)=\lim_{x\to-1-0}\frac{|x-1|}{x^2-1}$

$= \lim_{x\to -1-0} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$= \lim_{x\to -1-0} \frac{-1}{x+1} = \infty$

따라서, $\lim_{x\to -1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 실수 a의 값에 관계없이 $x=-1$에서 불연속이다. ∴ 참

ㄴ. $f(0)=\frac{|-1|}{-1}=-1$, $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{|-1|}{-1}=-1$

∴ $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$

따라서, 실수 a의 값에 관계없이 $x=0$에서 연속이다. ∴ 참

ㄷ. $\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{|x-1|}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to 1+0}\frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$=\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{|x-1|}{x^2-1}$

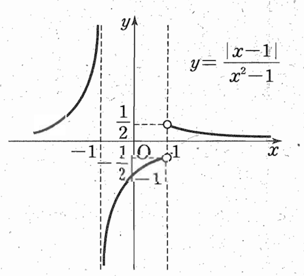
$=\lim_{x\to 1-0}\frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$=\lim_{x\to 1-0}\frac{-1}{x+1}=-\frac{1}{2}$

따라서, $\lim_{x\to 1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 실수 a의 값에 관계없이 $x=1$에서 불연속이다. ∴ 거짓

다라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

[참고] $y=\frac{|x-1|}{x^2-1}$ 의 그래프는 다음과 같다.



15. 2열에 배열된 수를 작은 수부터 순서대로 나열하여 다음과 같이 항 3개씩 하나의 군으로 묶으면

(8, 10, 16), (24, 26, 32), (40, 42, 48)⋯

이때 $200=3\times66+2$이므로 a_{200}은 제67군의 두 번째 항이다.

각 군의 첫째항 8, 24, 40은 첫째항이 8, 공차가 16인 등차수열이므로 67번째 항은 $8+(67-1)\times16=1064$이다.

또, 각 군에서 (두 번째 수)=(첫 번째 수)+2이므로

$a_{200}=1066$

[다른 풀이]

2열에 배열된 수를 작은 수부터 순서대로 나열하여 다음과 같이 항 3개씩 하나의 군으로 묶으면

(8, 10, 16), (24, 26, 32), (40, 42, 48)⋯

이때 $200=3\times66+2$이므로 a_{200}은 제67군의 두 번째 항이다.

각 군의 두 번째 항을 작은 수부터 나열하여 만든 등차수열 10, 26, 42, ⋯의 제67번째항이 a_{200}이므로

$a_{200}=10+(67-1)\times16=1066$

16. (i) 첫 번째 시행에서 A, B 주머니에서 각각 1, 2가 나올 확률은 $\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}$이고

두 번째 시행에서 1, 1이 나올 확률은 $\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}$이다.

∴ $\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{9}{100}$

(ii) 첫 번째 시행에서 A, B 주머니에서 각각 2, 1이 나올 확률은 $\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}$이고

두 번째 시행에서 1, 1이 나올 확률은 $\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}$이다.

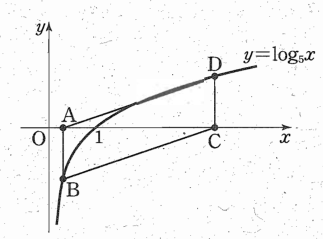
∴ $\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{100}$

따라서, 구하는 확률은

$\frac{9}{100}+\frac{3}{100}=\frac{12}{100}=\frac{3}{25}$

17. 가형의 17번과 동일

18.



사각형 ABCD가 평행사변형일 필요충분조건은 $\overline{AB}=\overline{CD}$ 즉, $|\log_5 a|=|\log_5 b|$이다.

이때 $0<a<1<b$이므로

$-\log_5 a=\log_5 b$

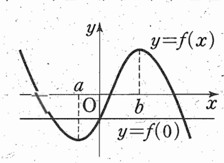
$\log_5 a+\log_5 b=\log_5 ab=0$

∴ $ab=1$

19. ㄱ. $a<x<b$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $y=f(x)$는 증가한다. 따라서, $f(0)>0$이면 $f(b)>0$이다. ∴ 참

ㄴ. 증감표를 조사하면 $x=a$에서 극솟값, $x=b$에서 극댓값을 갖는다.

따라서, 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=f(0)$은 서로 다른 세 점에서 만난다.



즉, 방정식 $f(x)-f(0)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다. ∴ 참

ㄷ. $f(b)<0$일 때 즉, 극댓값이 음수일 때, 방정식 $f(x)=0$은 오직 한 개의 실근을 갖는다. ∴ 거짓

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

20. $F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x(-t^2+2t)dt=-\frac{1}{3}x^3+x^2$

$G'(x)=F(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2=-\frac{1}{3}x^2(x-3)$

$G'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

$G(0)=\int_0^0 F(t)dt=0$

함수 $G(x)$의 증감을 조사하면 다음과 같다.

x	⋯	0	⋯	3	⋯
$G'(x)$	+	0	+	0	−
$G(x)$	↗	0	↗	최대	↘

따라서, 함수 $G(x)$는 $x=3$에서 최댓값을 갖는다.

∴ $a=3$

21. 가형의 21번과 동일

22. $f'(x)=(x^2-5)+(x+3)2x$

$=3x^2+6x-5$

$f'(2)=3\cdot2^2+6\cdot2-5=19$

23. 가형의 23번과 동일

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^{n-1}}{4^n}-\frac{1}{4^n}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

∴ $p+q=7$

25. $(2x+1)^6$의 전개식에서 x^3의 항은

${}_6C_3(2x)^3\cdot1^3=20\times8x^3=160x^3$

따라서, x^3의 계수는 160이다.

26. 가형의 26번과 동일

27. A, B, C, D, E 5종류의 김밥 중 3개를 택하는 중복조합의 수이므로

${}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$(가지)

따라서, 구하는 경우의 수는 35(가지)이다.

28. 확률의 총합이 1이므로

$10a+10\times3a=40a=1$

∴ $a=\frac{1}{40}$

$E(X)=\frac{1}{40}(1+3+5+\cdots+19)$

$+\frac{3}{40}(2+4+6+\cdots+20)$

$=\frac{1}{40}\times\frac{10(1+19)}{2}+\frac{3}{40}\times\frac{10(2+20)}{2}$

$=\frac{100+330}{40}=\frac{43}{4}$

∴ $p+q=47$

29. $\int_{-1}^{1}\{2f(x)-1\}^2dx$

$=\int_{-1}^{1}[4\{f(x)\}^2-4f(x)+1]dx$

$=4\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx-4\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_{-1}^{1}dx$

$=4\times15-4\times6+2[x]_0^1$

$=60-24+2=38$

30. $f(n)$는 $\log n$의 가수이고 $1\le n\le100$인 자연수이므로

$0\le\log n\le2$ ⋯⋯ ㉠

$\log n=m+\alpha$($m=0$ 또는 $m=1$ 또는 $m=2$, $0\le\alpha<1$)로 놓으면

$\log n^2=2\log n=2m+2\alpha$ $(0\le2\alpha<2)$

$0\le2\alpha<1$이면 $\log n^2$의 가수는 2α이므로 $f(n^2)=2f(n)$를 만족한다.

∴ $0\le\alpha<\frac{1}{2}$ ⋯⋯ ㉡

그런데 $1\le2\alpha<2$이면 $\log n^2$의 가수는 $2\alpha-1$이므로 $f(n^2)=2\alpha-1$, $2f(n)=2\alpha$가 되어 $f(n^2)=2f(n)$를 만족하지 않는다. ㉠, ㉡에서 $\log n$의 값의 범위는 다음의 세 가지로 나눌 수 있다.

(i) $0\le\log n<\frac{1}{2}$일 때($m=0$일 때)

$1\le n<\sqrt{10}$이므로 자연수 n는 1, 2, 3이다.

(ii) $1\le\log n<\frac{3}{2}$일 때($m=1$일 때)

$10\le n<10\sqrt{10}$,

$10^2\le n^2<1000$에서 $31^2=961$, $32^2=1024$이므로

이때 자연수 n는 10, 11, 12, ⋯, 31이다.

(iii) $\log n=2$일 때($m=2$일 때)

$n=100$

따라서, (i), (ii), (iii)에서 조건을 만족하는 자연수 n의 개수는

$3+22+1=26$(개)