2021학년도 대학수학능력시험 모의평가 2회

수학 영역(나형) 해설지

Epsilon

정답 및 해설

1) [정답] ④ (출제자 : 19 백수정)

[출제의도] 간단한 로그의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$\log_3 6 - \log_9 4 = \log_3 6 - \log_3 2 = \log_3 \frac{6}{2} = \log_3 3 = 1$

2) [정답] ① (출제자 : 20 김유진)

[출제의도] 간단한 미분계수의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$f'(x) = 3x^2 - 7$

따라서 $f'(2) = 3 \times 2^2 - 7 = 5$ 이다.

3) [정답] ③ (출제자 : 19 강종우)

[출제의도] 간단한 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$\cos\left(-\frac{7}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{7}{3}\pi\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

4) [정답] ④ (출제자 : 20 송문주)

[출제의도] 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

$\mathrm{P}(A^C \cup B) = 1 - \mathrm{P}(A \cap B^C) = \frac{2}{5}$ 이므로

$\mathrm{P}(A \cap B^C) = \frac{3}{5}$ 이다.

$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B^C) + \mathrm{P}(A \cap B)$ 이므로

구하고자 하는 확률은 $\mathrm{P}(A) = \frac{3}{5} + \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$ 이다.

5) [정답] ⑤ (출제자 : 20 송문주)

[출제의도] 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 4x - 12}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+6)}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+6}{x} = \frac{8}{2} = 4$

6) [정답] ④ (출제자 : 19 정지혁)

[출제의도] 이산확률변수의 표본평균의 평균을 알고 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

크기가 2 인 표본의 표본평균 $\overline{X}$ 에 대하여 $\mathrm{E}(\overline{X}) = \mathrm{E}(X)$ 이므로

$\mathrm{E}(X) = -\frac{1}{5}$ 이다.

따라서 $-a + b = -\frac{1}{5}$ 이다. … ㉠

한편, 확률의 합은 1 이므로 $2a + b = 1$ 이다. … ㉡

두 식 ㉠, ㉡ 을 연립하면 $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{1}{5}$ 이다.

따라서 $\mathrm{P}(X \geq 0) = \mathrm{P}(X = 0) + \mathrm{P}(X = 1) = a + b = \frac{3}{5}$ 이다.

7) [정답] ② (출제자 : 20 이선우)

[출제의도] 그래프가 주어진 함수의 우극한과 좌극한을 구할 수 있는가?

[해설]

$\lim_{x \to 0+} f(x) = -1$ 이고 $\lim_{x \to 2-} f(x) = 4$ 이므로

$\lim_{x \to 0+} f(x) + \lim_{x \to 2-} f(x) = -1 + 4 = 3$ 이다.

8) [정답] ① (출제자 : 20 송문주)

[출제의도] 수열의 합이 주어진 수열의 일반항을 구할 수 있는가?

[해설]

$S_n - S_{n-1} = a_n \ (n \geq 2)$ 이므로

$a_n = (n^2 + 3n - 2) - \{(n-1)^2 + 3(n-1) - 2\} = 2n + 2 \ (n \geq 2)$

이고 $a_1 = S_1$ 이므로 $a_1 = 1^2 + 3 \times 1 - 2 = 2$ 이다.

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{a_1 a_2} + \sum_{n=2}^{10} \frac{1}{(2n+2)(2n+4)}$$

$$= \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{10} \left(\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+4} \right)$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{22} - \frac{1}{24} \right)$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{24} \right) = \frac{7}{48}$$

따라서 구하고자 하는 값은 $\frac{7}{48}$ 이다.

9) [정답] ② (출제자 : 19 정지혁)

[출제의도] 주어진 자료를 해석하여 조건부확률을 구할 수 있는가?

[해설]
조사에 참여한 200명의 학생 중 임의로 선택한 한 명이
영화감상을 선택한 학생인 사건을 A, 여학생인 사건을 B라 하자.
이때, 구하고자 하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

$\mathrm{P}(A)=\frac{110}{200}=\frac{11}{20}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{50}{200}=\frac{1}{4}$ 이므로
$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{11}{20}}=\frac{5}{11}$ 이다.

10) [정답] ① (출제자 : 19 황주영)

[출제의도] 속도와 가속도의 관계를 활용하여 가속도를 구할 수 있는가?

[해설]
시각 $t=a$에서 두 점 A, B의 속도가 같다고 할 때, $v_1(a)=v_2(a)$이다.
$2a^2-2a=a^2+2a+32$이므로 $a^2-4a-32=0$이다.
$a=-4$ 또는 $a=8$인데 $a>0$이므로 $a=8$이다.
시각 $t=8$에서 두 점 A, B의 가속도의 차는
$|v_1'(8)-v_2'(8)|$이고
$v_1'(t)=4t-2$, $v_2'(t)=2t+2$이므로
$|v_1'(8)-v_2'(8)|=|30-18|=12$이다.

11) [정답] ③ (출제자 : 20 이도윤)

[출제의도] 주어진 수열의 규칙을 파악할 수 있는가?

[해설]
주어진 수열 $\{a_n\}$의 항을 나열해보면
$a_1=1$
$a_2=2^{-a_1}=\frac{1}{2}$
$a_3=8(a_2)^2=2$
$a_4=2^{-a_3}=\frac{1}{4}$
$a_5=8(a_4)^2=\frac{1}{2}\cdots$ 로
$n\geq 2$일 때, 수열 $\{a_n\}$의 항은 $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{4}$이 반복되는 것을 알 수 있다.
따라서 $\sum_{n=1}^{25}a_n=a_1+8(a_2+a_3+a_4)$
$=1+8\left(\frac{1}{2}+2+\frac{1}{4}\right)=23$

12) [정답] ③ (출제자 : 20 정원철)

[출제의도] 원순열을 활용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

[해설]
먼저 5명의 학생이 원형으로 앉는 경우의 수는 $\frac{5!}{5}=4!=24$이다.
빈 자리가 서로 이웃하지 않기 위해서는
학생과 학생 사이에 빈 자리는 최대 1개여야 한다.
학생이 앉은 자리가 5개이므로
학생 사이에 빈 자리를 배치하는 경우의 수는
${}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\times 4}{2}=10$이다.

따라서 빈 자리가 서로 이웃하지 않도록 5명의 학생이 원탁에 앉는 경우의 수는 $24\times 10=240$이다.

[별해]
빈 자리와 5명의 학생을 원탁에 배치하는 경우의 수는
$\frac{7!}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{6!}{2}=\frac{720}{2}=360$이다.

이때, 빈자리를 이웃하게 하여 5명의 학생이 원탁에 앉는 경우의 수는
$\frac{6!}{6}=5!=120$이다.

따라서 전체 경우에서 빈 자리가 이웃한 경우를 빼면
$360-120=240$이다.

13) [정답] ⑤ (출제자 : 20 송문주)

[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

[해설]
$\angle\mathrm{BAC}=\theta$라 하자.
주어진 원의 넓이가 10π이므로 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이다.
사인법칙에 의해 $\frac{2\sqrt{2}}{\sin\theta}=2\sqrt{10}$이므로 $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$이 된다.
$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$이므로 $\cos\theta=\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$이다.
선분 AC의 길이를 구하기 위해서 코사인법칙을 사용하면
$(2\sqrt{5})^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\times 2\sqrt{5}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=(2\sqrt{2})^2$이 된다.
$\overline{\mathrm{AC}}^2-8\overline{\mathrm{AC}}+12=0$이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=2$ 또는 $\overline{\mathrm{AC}}=6$이다.

i) $\overline{\mathrm{AC}}=2$일 경우
$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2=28>4=\overline{\mathrm{AC}}^2$이므로 $\angle\mathrm{ABC}<\frac{\pi}{2}$가 되어
조건을 만족시키지 않는다.

ii) $\overline{\mathrm{AC}}=6$일 경우
$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2=28<36=\overline{\mathrm{AC}}^2$이므로 $\angle\mathrm{ABC}>\frac{\pi}{2}$가 되어
조건을 만족시킨다.

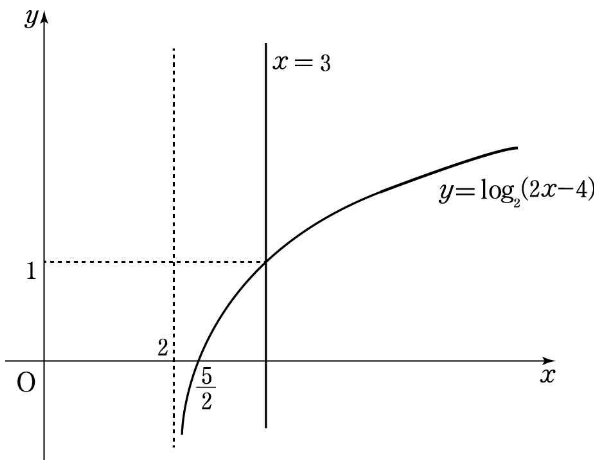
따라서 선분 AC의 길이는 6이다.

14) [정답] ① (출제자 : 19 정지혁)

[출제의도] 로그함수의 그래프의 특징을 이용하여 로그함수의 식을 구할 수 있는가?

[해설]

곡선 $y=\log_2(2x-4)$ 의 그래프는 다음과 같다.



곡선 $y=\log_2(2x-4)$ 는 점 $(3,1)$ 을 지나고 점근선 $x=2$ 를 갖는다.
곡선 $y=\log_2(2x-4)$ 와 직선 $x=3$ 에 대해 대칭인 곡선은
밑이 2 이고 점근선이 $x=4$ 이면서 점 $(3,1)$ 을 지나는 로그함수이다.

점근선이 $x=4$ 이고, 밑이 2 인 로그함수는 $y=\log_2 p(x-4)$ 이다.
그런데, 이 곡선이 점 $(3,1)$ 을 지나므로 $p=-2$ 이다.

$a\log_{\frac{1}{3}}(bx+c)=\log_{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{a}}}(bx+c)=\log_2(8-2x)$ 에서
$\frac{1}{a}=\log_{\frac{1}{3}}2$, $b=-2$, $c=8$ 이다.
이때, $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{a}}=2$ 이므로 $\frac{1}{a}=\log_{\frac{1}{3}}2=-\log_3 2$ 이고
$a=-\log_2 3$ 이다.

따라서 $a+b+c=6-\log_2 3$ 이다.

[별해]

두 곡선 $y=f(x)$, $y=f(6-x)$ 가 $x=3$ 에 대칭임을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
$f(x)=\log_2(2x-4)$ 라 하면, $f(6-x)=\log_2(8-2x)$ 이므로
$a\log_{\frac{1}{3}}(bx+c)=\log_2(8-2x)$ 이다.

이하의 과정은 윗부분의 해설과 같다.

15) [정답] ② (출제자 : 20 송문주)

[출제의도] 중복조합을 활용하여 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는가?

[해설]

주머니에서 꺼낸 빨간색 공의 개수를 x, 노란색 공의 개수를 y, 파란색 공의 개수를 z 라 하자.

구하고자 하는 경우의 수는
$x+y+z=10$ (단, $1\le x\le 4$, $1\le y\le 3$, $1\le z\le 8$)을 만족시키는 순서쌍 (x,y,z) 의 개수와 같다.

$x=X+1$, $y=Y+1$, $z=Z+1$ 이라 하자.
각 색깔별로 적어도 1 개의 공을 꺼내야 하므로 $X+Y+Z=7$
(단, $0\le X\le 3$, $0\le Y\le 2$, $0\le Z\le 7$) 이 된다.
$X+Y+Z=7$ 을 만족시키는 경우에서 $X\ge 4$ 또는
$Y\ge 3$ 가 되는 경우를 제외해주면 된다.

ⅰ) $X\ge 4$ 인 경우
$X=4+X'$ (단, $X'\ge 0$)라고 하자.
$X'+Y+Z=3$ 을 만족시키는 경우의 수는 ${}_3H_3$ 이다.

ⅱ) $Y\ge 3$ 인 경우
$Y=3+Y'$ (단, $Y'\ge 0$)라고 하자.
$X+Y'+Z=4$ 를 만족시키는 경우의 수는 ${}_3H_4$ 이다.

ⅲ) $X\ge 4$ 이고 $Y\ge 3$ 인 경우
$X+Y+Z=7$ 을 만족시키는 경우는 $X=4$, $Y=3$ 뿐이므로
1 가지이다.

그런데, ⅰ)과 ⅱ)에서 모두 ⅲ)의 경우를 포함하고 있으므로
1 을 빼줘야 한다.

따라서 구하고자 하는 경우의 수는
${}_3H_7-({}_3H_3+{}_3H_4-1)=12$ 이다.

16) [정답] ⑤ (출제자 : 20 정원철)

[출제의도] 함수의 극한을 이용하여 구하고자 하는 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$\lim_{x\to 0}\frac{\{f(x)\}^2}{f(x+1)}=k$ 에서 분자가 0 으로 수렴하는데 극한값이
0 이 아니므로 분모 또한 0 으로 수렴해야 함을 알 수 있다.
그러므로 $f(1)=0$ 이다.

즉, $f(x)=x(x-1)(x+a)$ (a 는 상수)와 같이 나타낼 수 있고,
이를 다시 조건식에 대입해보자.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\{f(x)\}^2}{f(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x-1)^2(x+a)^2}{x(x+1)(x+a+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)^2(x+a)^2}{(x+1)(x+a+1)}=k$$

이고 위 식에서 분자가 0 으로 수렴하는데 극한값이 0 이 아니므로
분모 또한 0 으로 수렴해야 함을 알 수 있다.

따라서 $a+1=0$ 즉, $a=-1$ 이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)^2(x+a)^2}{(x+1)(x+a+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)^4}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)^4}{x+1}=1=k$$

이다.

즉, $f(x)=x(x-1)^2$ 이므로 $f(k+3)=f(4)=4\times 3^2=36$ 이다.

[별해]

함수 $f(x)$ 가 다항식임을 이용하여 함수 $f(x)$ 의 식을 구할 수도 있다.
$f(0)=0$ 이므로 다항식 $f(x)$ 는 x 를 인수로 갖는다.
$\lim_{x\to 0}\frac{\{f(x)\}^2}{f(x+1)}=k$ 에 대하여 다항식 $\{f(x)\}^2$ 이 x^2 를 인수로 가지므로
$k\ne 0$ 이기 위해서는 다항식 $f(x+1)$ 이 x^2 를 인수로 가져야 한다.

상수 a에 대하여 $f(x+1)=x^2(x-a)$,

즉 $f(x)=(x-1)^2(x-a-1)$이라 하자.

이때 $f(0)=0$이어야 하므로 $a=-1$이다.

따라서 $f(x)=(x-1)^2x$이다.

17) [정답] ③ (출제자 : 20 이도윤)

[출제의도] 확률밀도함수의 특징을 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?

[해설]

함수 $g(x)$의 그래프가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$g(3-x)=g(3+x)$ $(0\le x\le 3)$

이 식에 $x=1,\ 2,\ 3$을 각각 대입하면

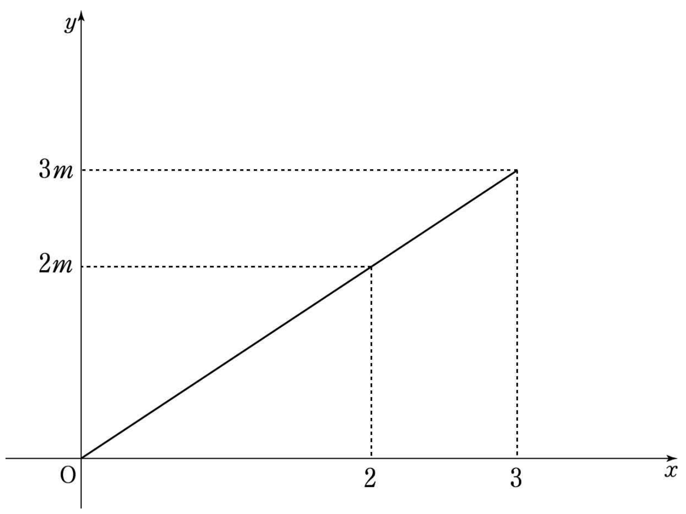
$g(2)=g(4),\ g(1)=g(5),\ g(0)=g(6)$이다.

따라서 $g(0)+g(1)+g(2)=g(4)+g(5)+g(6)$이고,

$\mathrm{P}(0\le X\le 3)=\mathrm{P}(4\le X\le 7)$이다.

그런데 $g(3)=\mathrm{P}(3\le X\le 4)=\frac{1}{7}$이고, $\mathrm{P}(0\le X\le 7)=1$이므로

$\mathrm{P}(0\le X\le 3)=\mathrm{P}(4\le X\le 7)=\frac{3}{7}$이다.



$\mathrm{P}(0\le X\le 3)=\frac{3}{7}$이므로 $\frac{1}{2}\times 3\times 3m=\frac{3}{7}$,

$m=\frac{2}{21}$이다.

$f(2)=2m,\ g(4)=g(2)=\mathrm{P}(2\le X\le 3)$이고,

$\mathrm{P}(2\le X\le 3)=\frac{1}{2}\times 1\times(2m+3m)=\frac{5}{2}m$

따라서 $f(2)+g(4)=\frac{9}{2}m$이고, $m=\frac{2}{21}$이므로

$\frac{9}{2}\times\frac{2}{21}=\frac{3}{7}$

18) [정답] ② (출제자 : 19 정지혁)

[출제의도] 수학적 귀납법을 사용하여 주어진 식이 성립함을 보일 수 있는가?

[해설]

(가) : $\frac{2}{(m+2)(m+3)}$ / (나) : $m+1$ / (다) : $\frac{1}{m+3}$

(가)

주어진 식은 공통인 식 $\frac{1}{m+1}$로 묶어 정리하는 과정이다.

$a_{m+1}=\frac{2}{(m+1)(m+2)(m+3)}$이므로

$$1-\frac{1}{m+1}+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k+2}+a_{m+1}+\frac{1}{m+2}$$
$$=1-\frac{1}{m+1}\times\left(1-\boxed{\frac{2}{(m+2)(m+3)}}\right)+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k+2}+\frac{1}{m+2}$$

이다. 따라서 (가)에 알맞은 식은 $\frac{2}{(m+2)(m+3)}$이다.

(나), (다)

(가)에서 $\frac{2}{(m+2)(m+3)}=\frac{2}{m+2}-\frac{2}{m+3}$이므로

이를 다시 정리하면

$$1-\frac{1}{m+1}\times\left(1-\frac{2}{m+2}+\frac{2}{m+3}\right)+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k+2}+\frac{1}{m+2}$$
$$=1-\frac{1}{m+1}+\frac{2}{\boxed{(m+1)}(m+2)}-\frac{2}{\boxed{(m+1)}(m+3)}$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k+2}+\frac{1}{m+2}$$
$$=1-\frac{1}{m+1}+\frac{2}{m+1}-\frac{2}{m+2}-\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+3}$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k+2}+\frac{1}{m+2}$$
$$=1-\frac{1}{m+2}+\boxed{\frac{1}{m+3}}+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k+2}$$

이다. 따라서 (나), (다)에 들어갈 알맞은 식은 각각 $m+1$, $\frac{1}{m+3}$이다.

$f(m)=\frac{2}{(m+2)(m+3)}$, $g(m)=m+1$, $h(m)=\frac{1}{m+3}$이므로

$f(6)=\frac{2}{8\times 9}=\frac{1}{36}$, $g(8)=8+1=9$, $h(3)=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$이다.

따라서 $f(6)\times g(8)\times h(3)=\frac{1}{36}\times 9\times\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$이다.

19) [정답] ④ (출제자 : 19 정지혁)

[출제의도] 주어진 상황을 해석하고 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

카드에 적힌 모든 숫자의 합은 12이다.

임의로 꺼낸 k개의 카드에 적힌 숫자의 합을 M_k라 하면

구하고자 하는 경우는 M_k가 $3,\ 6,\ 9,\ 12$ 중 하나인 경우이다.

i) $k=1$일 때

'$M_1=3$인 경우, 3이 적힌 카드 한 장을 뽑는 경우'이다.

따라서 $p_1=\frac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_1}=\frac{1}{3}$이다.

ii) $k=2$일 때

'$M_2=6$인 경우, 3이 적힌 카드를 두 장 뽑는 경우'와

'$M_2=3$인 경우, 1, 2가 적힌 카드를 각각 한 장씩 뽑는 경우'가 있다.

두 경우의 확률은 각각 $\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$, $\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{4}{15}$이므로

$p_2=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$이다.

iii) $k=3$일 때

'$M_3=6$인 경우, 1, 2, 3이 적힌 카드를 각각 한 장씩 뽑는 경우'

가 있다. 이 경우의 확률은 $\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$이다.

iv) $k=4$, $k=5$일 때

이 경우 $k=2$, $k=1$ 일 때 남아있는 카드를 생각하여 쉽게 구할 수 있다.
카드에 적힌 모든 숫자의 합은 12 이고, 뽑은 카드에 적힌 숫자가 3 의 배수라면 주머니에 남아있는 카드에 적힌 숫자의 합도 3 의 배수이다.

iv−1) $k=4$ 일 때
이 경우 $k=2$ 일 때 주머니에 남아있는 카드의 합을 생각하자.
$k=2$ 이고 조건을 만족시킬 때, 주머니에 들어있는 카드들의 조합은 $k=4$ 일 때 조건을 만족시킨다.

그런데, $k=2$ 일 때 조건을 만족시키도록 카드 2 장을 뽑을 확률은 조건을 만족시키도록 카드 4 장을 뽑지 않을 확률과 같다.
따라서 $p_2=p_4$ 이고, 따라서 $p_4=\frac{1}{3}$ 이다.

4−2. $k=5$ 일 때
4−1과 같은 이유로 $p_5=p_1$ 이고, $p_5=\frac{1}{3}$ 이다.

v) $k=6$ 일 때
이 경우 모든 카드를 뽑는다. 이때, 카드들에 적힌 숫자의 합은 12 이므로 $M_6=12$ 이다. 따라서 이 경우 확률은 1 이므로 $p_6=1$ 이다.

따라서
$$\sum_{k=1}^{6}p_k=2(p_1+p_2)+p_3+p_6=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{5}+1=\frac{41}{15}\text{ 이다.}$$

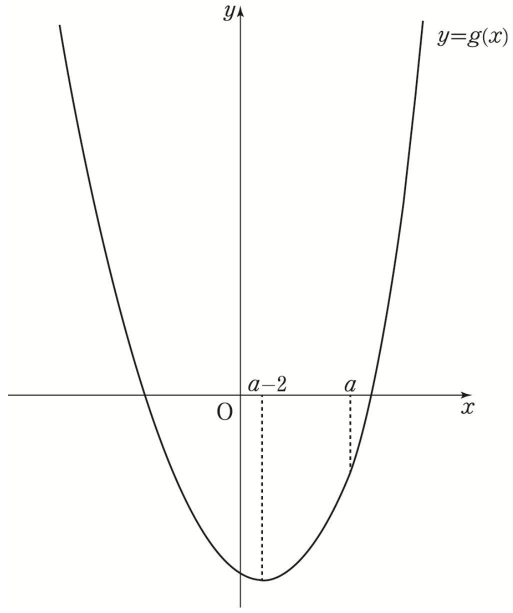
20) [정답] ③ (출제자 : 20 김동연, 최인환)
[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 함수의 그래프를 추론하고 극값을 구할 수 있는가?

[해설]
$g'(a)=3a^2-9\neq 0$ 이므로 $a\neq -\sqrt{3}$, $a\neq \sqrt{3}$ 이다.
$f'(a-2)=0$ 이므로 두 상수 m , n 에 대하여
$f(x)=m\{x-(a-2)\}^2+n$
$\quad =mx^2-2m(a-2)x+m(a-2)^2+n$ 이라 하자.
(이때 $f'(x)=2mx-2m(a-2)x=2m\{x-(a-2)\}$ 이다.)
함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 연속이므로
$f(a)=a^3-9a$, $f'(a)=3a^2-9$ 이다.
이때 위에서 얻은 두 함수 $f(x)$, $f'(x)$ 의 식에서 얻은
$f(a)=4m+n$, $f'(a)=4m$ 을 위의 식과 연립하면
$n=a^3-3a^2-9a+9$ 이다.

ㄱ.
$a=2$ 일 때, $0<a$ 이므로 $g(0)=f(0)$ 이다.
이때 $f(0)=n=2^3-3\times2^2-9\times2+9=-13$ 이다. (참)

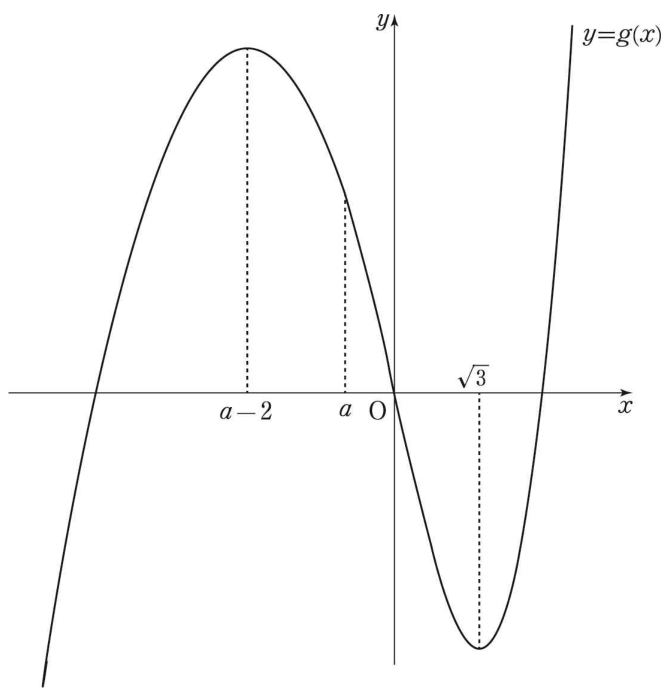
ㄴ.
i) $a>\sqrt{3}$ 일 때, 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 아래와 같다.

x	$\cdots$	$a-2$	$\cdots$
$g'(x)$	−	0	+
$g(x)$	↘	극소	↗



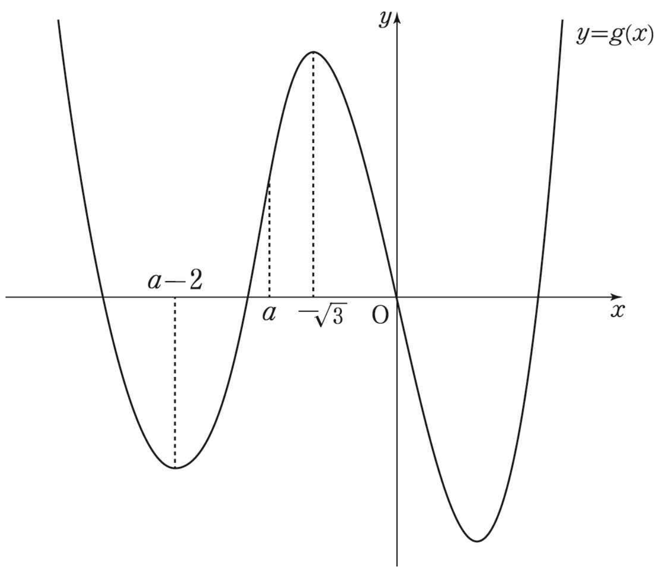
ii) $-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$ 일 때, 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 아래와 같다.

x	$\cdots$	$a-2$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗



iii) $a<-\sqrt{3}$ 일 때, 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 아래와 같다.

x	$\cdots$	$a-2$	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$g'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗



함수 $g(x)$ 의 최솟값이 존재하는 경우는 ⅰ), ⅲ)의 경우이다.

ⅰ) $a > \sqrt{3}$ 일 때, 함수 $g(x)$ 는 $x = a-2$ 에서 극솟값 $g(a-2)$ 를 가지고 그 값이 최솟값이 된다.
따라서 $g(a-2) = f(a-2) = a^3 - 3a^2 - 9a + 9 = -18$, $a > \sqrt{3}$ 을 동시에 만족시키는 a 를 찾으면 된다.

ⅲ) $a < -\sqrt{3}$ 일 때, 함수 $g(x)$ 는 $x = a-2$, $x = \sqrt{3}$ 에서 극솟값을 가지고 $g(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$ 이므로 함수 $g(x)$ 의 최솟값이 -18 인 경우에는 $g(a-2)$ 가 최솟값이 되어야 한다.
따라서 $g(a-2) = f(a-2) = a^3 - 3a^2 - 9a + 9 = -18$,
$a < -\sqrt{3}$ 을 동시에 만족시키는 a 를 찾으면 된다.

방정식 $a^3 - 3a^2 - 9a + 9 = -18$ 을 풀어보자.
$(a+3)(a-3)^2 = 0$ 이므로 ⅰ)에서는 $a = 3$ 이고 ⅲ)에서는 $a = -3$ 이다.
따라서 함수 $g(x)$ 의 최솟값이 존재하고 그 값이 -18 이 되도록 하는 a 의 개수는 3, -3 으로 2개이다. (거짓)

ㄷ.
함수 $g(x)$ 의 극댓값 k 는 $a < \sqrt{3}$ 에서 존재한다.
ⅰ) $-\sqrt{3} < a < \sqrt{3}$ 일 때, 함수 $g(x)$ 는 $x = a-2$ 에서 극댓값 $g(a-2)$ 를 가지므로 $k = g(a-2) = f(a-2) = a^3 - 3a^2 - 9a + 9$ 이다.
$-\sqrt{3} < a < \sqrt{3}$ 에서 $a^3 - 3a^2 - 9a + 9$ 의 최댓값을 구해보자.
$h(a) = a^3 - 3a^2 - 9a + 9$ 라고 하면,
$h'(a) = 3a^2 - 6a - 9 = 3(a+1)(a-3)$ 이므로 $a = -1$ 일 때, 극댓값 14 를 가진다. 따라서 $-\sqrt{3} < a < \sqrt{3}$ 에서 k 의 최댓값은 14 이다.

ⅱ) $a < -\sqrt{3}$ 일 때, 함수 $g(x)$ 는 $x = -\sqrt{3}$ 에서 극댓값 $g(-\sqrt{3})$ 을 가지므로 $k = g(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$ 이다.
따라서 $a < -\sqrt{3}$ 에서 k 의 최댓값은 $6\sqrt{3}$ 이다.

ⅰ), ⅱ)에서 $14 > 6\sqrt{3}$ 이므로 함수 $g(x)$ 의 극댓값 k 가 존재할 때, $k \le 14$ 이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

21) [정답] ⑤ (출제자 : 20 김동연)
[출제의도] 등차중항과 등차수열의 합을 이용하여 구하고자 하는 값을 구할 수 있는가?

[해설]
수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 할 때,
수열 $\{b_n\}$ 의 공차가 3 이므로 $d \le 3$ 이면
$a_n > b_n$ 인 자연수 n 의 최솟값은 1 이거나 존재하지 않는다.
이는 $m \ge 4$ 에 모순이므로 $d \ge 4$ 이다.
이때 $d > 4$ 이면
$a_n \ge 4n + 100$ 을 만족시키는 자연수 n 이 존재하므로 $d = 4$ 이다.

$a_{m-3} + a_{m+2} = (a_m - 3d) + (a_m + 2d) = 2a_m - d = 76$ 이므로
$a_m = 40$ 이다.

$a_n > b_n$ 인 자연수 n 의 최솟값이 m 이므로 $a_m > b_m$, $40 > b_m$ 이다.
또한 $a_n \le b_n$ 인 자연수 n 의 최댓값은 $m-1$ 이므로
$a_{m-1} \le b_{m-1}$, $a_m - 4 \le b_m - 3$ 이다. 따라서 $39 \le b_m < 40$ 이다.
이때 수열 $\{b_n\}$ 의 모든 항이 자연수이므로 $b_m = 39$ 이다.

$$\sum_{k=1}^{2m}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{2m} a_k - \sum_{k=1}^{2m} b_k$$
$$= \frac{2m(a_1 + a_{2m})}{2} - \frac{2m(b_1 + b_{2m})}{2}$$
$$= m(a_1 + a_{2m} - b_1 - b_{2m})$$

$a_1 + a_{2m} = a_m + a_{m+1} = 40 + 44 = 84$ 이고
$b_1 + b_{2m} = b_m + b_{m+1} = 39 + 42 = 81$ 이므로
$\sum_{k=1}^{2m}(a_k - b_k) = m(84 - 81) = 3m = 30$, 즉 $m = 10$ 이다.

$a_{10} = 40$ 이므로 $a_3 = a_{10} - 7 \times 4 = 40 - 28 = 12$ 이다.
따라서 $a_3 + m = 12 + 10 = 22$ 이다.

22) [정답] 75 (출제자 : 20 김태희)
[출제의도] 간단한 중복조합의 값을 구할 수 있는가?

[해설]
${}_5\mathrm{H}_4 + {}_5\mathrm{C}_4 = {}_8\mathrm{C}_4 + {}_5\mathrm{C}_4 = 70 + 5 = 75$

23) [정답] 22 (출제자 : 20 이도윤)
[출제의도] 간단한 정적분의 값을 구할 수 있는가?

[해설]
$$\int_2^4 (x^3 - 3x^2 + 9)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 9x\right]_2^4$$
$$= (64 - 64 + 36) - (4 - 8 + 18) = 36 - 14 = 22$$

24) [정답] 75 (출제자 : 19 장지원)

[출제의도] 지수의 성질을 이용하여 값을 구할 수 있는가?

[해설]

주어진 식의 양변에 5×2^{2k} 를 곱하여 식을 정리하면

$2^{2k} \times 5^k = 5 \times \sqrt{3}$ 이므로 $20^k = 5\sqrt{3}$, $400^k = (20^k)^2 = 75$ 이다.

25) [정답] 225 (출제자 : 19 장지원)

[출제의도] 정규분포를 따르는 확률변수의 성질을 이용하여 평균과 표준편차를 구할 수 있는가?

[해설]

주어진 식 $\mathrm{P}(m \le X \le 2m) + \mathrm{P}(X \le m-2) = 0.5$ 를 표준화하면

$\mathrm{P}(0 \le Z \le m) + \mathrm{P}(Z \le -2) = 0.5$ 이다.

위 식이 성립하기 위해서는 $m + (-2) = 0$ 이어야 하므로 $m = 2$ 이다.

$\mathrm{P}(X \le a) = \mathrm{P}(Z \le a-2) = 0.0401$ 에서

$\mathrm{P}(Z \le -1.75) = 0.5 - 0.4599 = 0.0401$ 이므로

$a - 2 = -1.75$, $a = \dfrac{1}{4}$ 이다.

따라서 $100(m+a) = 100\left(2 + \dfrac{1}{4}\right) = 225$ 이다.

26) [정답] 6 (출제자 : 20 김동해)

[출제의도] 삼각함수의 성질을 활용하여 구하고자 하는 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$f\left(-\dfrac{b}{2}\right) = -1$, $f\left(\dfrac{b}{2}\right) = 2$ 이므로 $a + c = 2$, $-a + c = -1$ 이다.

따라서 $a = \dfrac{3}{2}$, $c = \dfrac{1}{2}$ 이다.

$c = \dfrac{1}{2}$ 이므로 점 $\mathrm{C}(b, c)$ 의 y 좌표는 $\dfrac{1}{2}$ 이다.

이때 두 점 A , B 의 중점을 M 이라 하면 $\mathrm{M}\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ 이므로

선분 CM 의 길이는 b 이다.

삼각형 ABC 의 넓이는 두 삼각형 AMC , BMC 의 넓이의 합이므로

$12 = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{CM}} \times \left\{\dfrac{1}{2} - (-1)\right\} + \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{CM}} \times \left(2 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2}b$ 이다.

$\dfrac{3}{2}b = 12$ 이므로 $b = 8$, 따라서 $abc = \dfrac{3}{2} \times 8 \times \dfrac{1}{2} = 6$ 이다.

27) [정답] 36 (출제자 : 19 정재훈)

[출제의도] 정적분의 정의를 이용하여 구하고자 하는 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx - \int_2^3 \{f(x) - f(2)\}\,dx = \int_2^3 f(2)\,dx = f(2)$ 이므로

주어진 등차수열의 공차는 $f(2)$ 이다.

따라서 $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx + 2f(2) = \int_2^3 f(x)\,dx$ 이다.

함수 $f(x)$ 가 $1 \le x \le 3$ 에서 증가한다.

$1 \le x \le 2$ 일 때 $f(x) \le f(2)$ 이고,

$2 \le x \le 3$ 일 때 $f(x) \ge f(2)$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_1^3 |f(x) - f(2)|\,dx &= \int_1^2 \{f(2) - f(x)\}\,dx + \int_2^3 \{f(x) - f(2)\}\,dx \\ &= -\int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx \\ &= -\int_1^2 f(x)\,dx + \left(\int_1^2 f(x)\,dx + 2f(2)\right) \\ &= 2f(2)\end{aligned}$$ 이다.

따라서 구하고자 하는 값은 $2 \times 18 = 36$ 이다.

28) [정답] 25 (출제자 : 19 장지원)

[출제의도] 사차함수의 그래프를 주어진 접선을 통해 추론할 수 있는가?

[해설]

(가) 조건에 의해 다항식 $f(x) - x$ 는 $x + k$, $x - k$ 를 인수로 가진다.

(나) 조건에서 함수 $f(x)$ 의 그래프가

직선 $y = x$ 에 적어도 한 점에서 접하므로

다항식 $f(x) - x$ 는 $(x+k)^2$ 또는 $(x-k)^2$ 을 인수로 가진다.

이때 다항식 $f(x) - x$ 가 $(x+k)^2$ 을 인수로 가진다고 했을 때,

이차식 $g(x)$ 에 대하여 $f(x) - x = (x+k)^2 g(x)$ 라 하자.

(가) 조건에 의해 $g(k) = 0$ 이어야 하므로,

이차식 $g(x)$ 는 $(x-k)^2$ 또는 $(x-k)(x+k)$ 이어야 한다.

즉 함수 $f(x) - x$ 는 $(x-k)^2(x+k)^2$ 또는 $(x-k)(x+k)^3$ 이어야 한다.

다항식 $f(x) - x$ 가 $(x-k)^2$ 을 인수로 가질 때도 마찬가지의 방법으로,

함수 $f(x) - x$ 는 $(x-k)^2(x+k)^2$ 또는

$(x-k)(x+k)^3$ 또는 $(x-k)^3(x+k)$ 이어야 함을 알 수 있다.

i) 함수 $f(x) - x$ 가 $(x-k)(x+k)^3$ 또는 $(x-k)^3(x+k)$ 인 경우

함수 $f(x) - x$ 의 그래프는 x 축에 접하고, 음수인 극솟값을 갖는다.

(나) 조건에 의하여 함수 $f(x) - x$ 의 그래프가 직선 $y = k$ 에 접해야 한다.

이때 함수 $f(x) - x$ 의 미분계수가 0 인 경우는

$k = 0$ 이거나 극솟값이 k 인 경우이다.

이는 주어진 조건인 $k > 0$ 에 모순이므로 이 경우는 제외한다.

ii) 함수 $f(x) - x$ 가 $(x-k)^2(x+k)^2$ 인 경우

함수 $f(x) - x$ 의 그래프가 $x = 0$ 에서 극댓값 k 를 가져야 하므로,

$f(0) - 0 = (-k)^2 k^2$, $k = k^4$ 에서 $k = 1$ 이다.

$$\begin{aligned}f(x) &= (x-1)^2(x+1)^2 + x \\ &= (x^2 - 1)^2 + x \\ &= x^4 - 2x^2 + x + 1\end{aligned}$$ 이므로

$f'(x) = 4x^3 - 4x + 1$ 이다.

따라서 $f'(2k) = 4 \times 2^3 - 4 \times 2 + 1 = 25$ 이다.

29) [정답] 186 (출제자 : 19 황주영)

[출제의도] 같은 것이 있는 순열을 활용하여 복잡한 경우의 수를 구할 수 있는가?

[해설]
(가) 조건을 만족시키는 경우의 수를 먼저 구한 뒤,
(가) 조건을 만족시키면서 (나) 조건을 만족시키지 않는 경우의 수를 구해서 제외하자.

1. A 가 B 보다 먼저 공연하는 경우의 수

i) 다섯 명이 따로 공연하는 경우

$\frac{5!}{2!}=60$ 가지

ii) 두 명은 함께, 나머지 세 명은 혼자서 공연하는 경우

① A , B 모두 홀로 공연하는 경우
동시에 공연할 두 학생을 C , D , E 중에서 선택한 후,
A 가 B 보다 먼저 공연하도록 배열하면,

${}_3C_2\times\frac{4!}{2!}=36$ 가지

② A , B 중 한 명이 다른 학생과 같이 공연하는 경우
A , B 중 다른 사람과 함께 에 공연할 학생을 선택한 후,
선택한 학생과 함께 공연할 학생을 C , D , E 중에서 선택하고
A 가 B 보다 먼저 공연하도록 배열하면,

${}_2C_1\times{}_3C_1\times\frac{4!}{2!}=72$ 가지

iii)네 명의 학생은 두 명씩 동시에, 남은 한 학생은 홀로 공연하는 경우

① A , B 모두 다른 학생과 함께 공연하는 경우
A , B 와 공연할 학생을 C , D , E 중에서 각각 선택하고
A 가 B 보다 먼저 공연하도록 배열하면,

${}_3P_2\times\frac{3!}{2!}=18$ 가지

② A , B 중 한 명의 학생이 홀로 공연하는 경우
A , B 중 홀로 공연할 학생을 고르고 남은 학생과 함께 공연할 학생을 C , D , E 중에서 선택한 뒤,
A 가 B 보다 먼저 공연하도록 배열하면,

${}_2C_1\times{}_3C_1\times\frac{3!}{2!}=18$ 가지

따라서 A 가 B 보다 먼저 공연하는 경우의 수는
$60+36+72+18+18=204$ 가지

2. A 가 B 보다 먼저 공연하고, C 와 D 가 동시에 공연하는 경우의 수

ii)−①의 경우

$\frac{4!}{2!}=12$ 가지

iii)−②의 경우

$2\times\frac{3!}{2!}=6$ 가지

따라서 A 가 B 보다 먼저 공연하고, C 와 D 가 동시에 공연하는 경우의 수는 $12+6=18$ 가지

따라서 구하는 전체 경우의 수는
$204-18=186$ 가지이다.

30) [정답] 35 (출제자 : 19 정지혁)

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 추론할 수 있는가?

[해설]
$\left|\int_4^x g(t)\,dt\right|=(x-2)f(x)$ 이므로 함수 $\left|\int_4^x g(t)\,dt\right|$ 는 사차함수이다.
이때, 모든 실수 x 에 대하여 $\left|\int_4^x g(t)\,dt\right|\ge 0$ 이므로
모든 실수 x 에 대하여 $(x-2)f(x)\ge 0$ 이다.

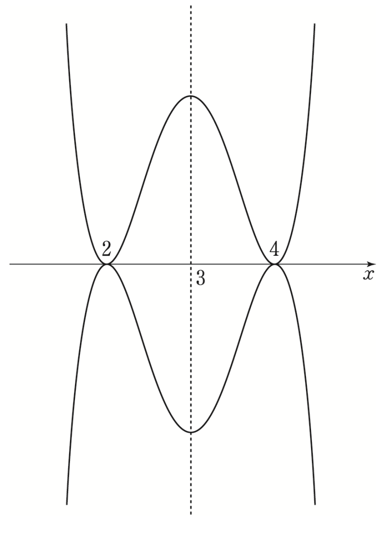
사차함수 $(x-2)f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $(x-2)f(x)\ge 0$ 을 만족시키기 위해서는 함수 $(x-2)f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수여야 한다. 따라서 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 양수이다.

모든 실수 x 에 대하여 $(x-2)f(x)\ge 0$ 이므로
$x<2$ 일 때 $f(x)\le 0$ 이고 $x>2$ 일 때 $f(x)\ge 0$ 이다.
또, $f(2)=0$ 이다. ⋯ [1]

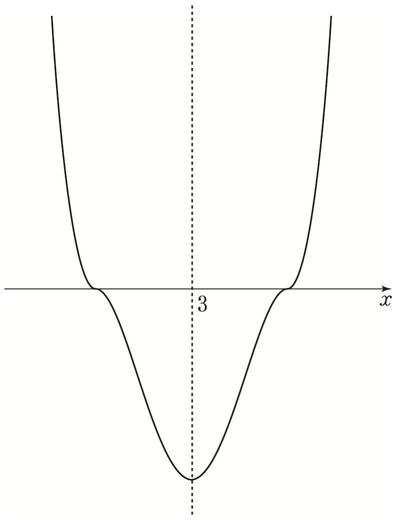
한편, $\left|\int_4^4 g(t)\,dt\right|=2f(4)=0$ 이므로 $f(4)=0$ 이다.
이때, $x>2$ 에서 $f(x)\ge 0$ 이므로 $x=4$ 에서는 $f(x)$ 의 부호가 바뀔 수 없다. 따라서 $f'(4)=0$ 이다. ⋯ [2]

$f(x)$ 의 최고차항의 계수를 $m\ (m>0)$ 이라 하면,
$f(x)=m(x-2)(x-4)^2$ 이고,
$\left|\int_4^x g(t)\,dt\right|=m(x-2)^2(x-4)^2$ 이다.

$p(x)=m(x-2)^2(x-4)^2$, $\int_4^x g(t)\,dt=G(x)$ 라 하자.
함수 $y=G(x)$ 의 그래프는 $x=2$, $x=4$ 를 경계로
$y=p(x)$ 또는 $y=-p(x)$ 으로 구성되어 있다.



한편, 모든 실수 x 에 대하여
$\int_3^x g(t)\,dt=\int_3^4 g(t)\,dt+\int_4^x g(t)\,dt\ge 0$ 이므로
$G(x)\ge G(3)$ 이다. 따라서 함수 $G(x)$ 의 최솟값은 $G(3)$ 이다.
따라서 가능한 함수 $G(x)$ 의 개형은 다음과 같다.



따라서 함수 $G(x)$는

$$G(x)=\begin{cases} p(x) & (\,x<2 \ \text{또는}\ x>4\,) \\ -p(x) & (\,2\le x\le 4\,) \end{cases}$$

이다.

이때 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로
함수 $\int_4^x g(t)\,dt = G(x)$는 미분가능하고 $G'(x)=g(x)$이다.
따라서

$$g(x)=\begin{cases} p'(x) & (\,x<2 \ \text{또는}\ x>4\,) \\ -p'(x) & (\,2\le x\le 4\,) \end{cases} \quad ,\ g(2)=g(4)=0$$

이다.

조건 (다)에서

$$\begin{aligned}\int_3^6 g(x)\,dx &= \int_3^4 -p'(x)\,dx+\int_4^6 p'(x)\,dx \\ &= -p(4)+p(3)+p(6)-p(4) \\ &= m+64m=65m \\ &= 13\end{aligned}$$

이므로 $m=\dfrac{13}{65}=\dfrac{1}{5}$이다.

구하고자 하는 값은 $f(9)=\dfrac{1}{5}(9-2)(9-4)^2=\dfrac{7\times 25}{5}=35$이다.

※ [1]에 관한 보충 설명

21. 자연수 n에 대하여 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$의 극댓값을 a_n이라 하자.

> (가) $f(n)=0$
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $(x+n)f(x)\ge 0$이다.

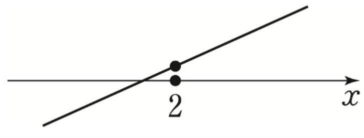
a_n이 자연수가 되도록 하는 n의 최솟값은? [4점]

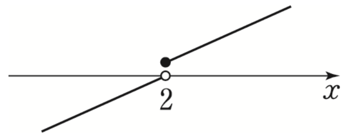
① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

이러한 표현은 기출문제에 한 번 등장한 적이 있다.
[2016학년도 6월 수학 A형 21번]

$x=2$일 때, $f(x)$은 어느 값이 되더라고 주어진 부등식 $(x-2)f(x)\ge 0$을 만족시킨다. 그런데 왜 $f(2)=0$일까?

$f(2)>0$이라고 생각해보자. ($f(2)$는 x축보다 윗부분에 있다.)



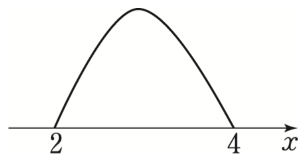


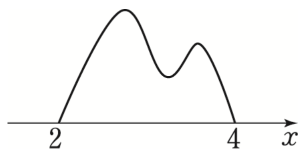
이 경우 $x>2$인 상황에서는 별 무리 없이 함수의 그래프가 그려진다.
그런데, $x<2$에서는 항상 음수여야 하는데, 어떤 방법으로든 2보다 작은 부분에서도 함숫값이 양수가 되는 부분이 생긴다.
만약, $x<2$에서 $f(x)<0$을 만족시키도록 그리려면 함수가 끊어지는 대참사가 생긴다.
따라서 $f(2)>0$일 수 없다.

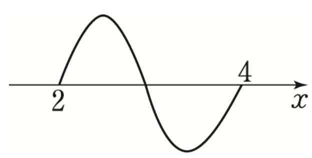
$f(2)<0$인 경우도 위와 같은 맥락으로 가능하지 않음을 보일 수 있다.
따라서 가능한 경우는 '$f(2)=0$인 경우'밖에 없다.

※ [2]에 관한 보충 설명
$f(2)=0$, $f(4)=0$이므로 롤의 정리에 의해 열린구간 $(2,4)$에서 $f'(c)=0$을 만족시키는 c가 하나 이상 존재한다.
즉, 이 구간에서 극댓값 또는 극솟값이 존재한다.

그런데, 위 주어진 부등식에서 $x>2$에서 $f(x)>0$이어야 한다.
따라서 가능한 경우는 열린구간 $(2,4)$에서 증가하다가 감소하는, 즉, 극댓값을 갖는 경우밖에 가능하지 않다.
(극댓값, 극솟값을 둘 다 갖게 되면 삼차함수가 아니게 되거나, 주어진 조건 '$x>2$일 때 $f(x)\ge 0$'을 만족시키지 못한다.)







$f(x)$가 $x<4$일 때 극댓값을 가지므로 $x\ge 4$에서는 극솟값을 가져야 한다. 이때, $x>2$에서 $f(x)\ge 0$이므로 극솟값은 0보다 크거나 같다.

그런데, $x>4$일 때 $f(x)$가 극솟값을 갖는다면 그 값은 음수일 수밖에 없다. ($f(4)=0$이고 이때 감소하기 때문이다.)
따라서 가능한 경우는 '$x=4$에서 극소인 경우' 뿐이다.