2020학년도 3월 고3 전국연합학력평가 모의평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

공통과목 정답

1	④	2	②	3	④	4	④	5	⑤
6	③	7	②	8	③	9	②	10	④
11	④	12	⑤	13	⑤	14	①	15	②
16	19	17	10	18	6	19	80	20	40
21	164	22	432						

해 설

1. [출제의도] 세 항 사이의 관계를 이해하여 등차수열의 공차를 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=a+d$, $a_3=a+2d$

이를 주어진 등식에 대입하면

$(a+d)+(a+2d)=2(a+12)$, $3d=24$

따라서 $d=8$

2. [출제의도] 연속함수의 정의를 이해하여 함숫값을 구한다.

$x\neq 1$일 때 $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1}=x-2$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x-2)=-1$

3. [출제의도] 부정적분을 이해하여 함숫값을 구한다.

$f'(x)=3x^2+4x+5$에서

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(3x^2+4x+5)dx$

$=x^3+2x^2+5x+C$ (C는 적분상수)

$f(0)=4$이므로

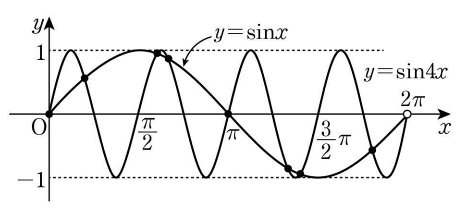
$C=4$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2+5x+4$이므로

$f(1)=1+2+5+4=12$

4. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 교점의 개수를 구한다.

함수 $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프와 일치하고 함수 $y=\sin 4x$의 최댓값은 1, 최솟값은 -1, 주기는 $\dfrac{\pi}{2}$이므로 $0\le x<2\pi$에서 두 함수 $y=\sin x$와 $y=\sin 4x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 두 곡선이 만나는 점의 개수는 8

5. [출제의도] 로그함수의 성질을 이해하여 로그가 포함된 부등식을 해결한다.

진수 조건에 의해

$n^2-9n+18>0$, $(n-6)(n-3)>0$

$n<3$ 또는 $n>6$ …… ㉠

$\log_{18}(n^2-9n+18)<1$에서

$n^2-9n+18<18$이므로

$n^2-9n<0$, $n(n-9)<0$

$0<n<9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 n의 값의 범위는

$0<n<3$ 또는 $6<n<9$

이를 만족시키는 자연수는 1, 2, 7, 8이므로

구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$1+2+7+8=18$

6. [출제의도] 미분계수의 정의를 이해하여 미분계수의 값을 구한다.

다항함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+2h)-f(2)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\left\{\dfrac{f(2+2h)-f(2)}{2h}\times 2\right\}$

$=2\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+2h)-f(2)}{2h}=2f'(2)$

$f'(x)=3x^2-4x$이므로

$f'(2)=3\times 2^2-4\times 2=4$

따라서 구하는 값은

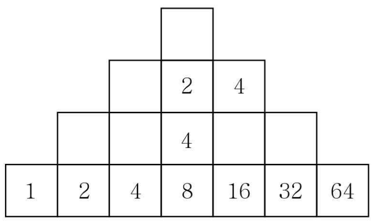
$2f'(2)=2\times 4=8$

7. [출제의도] 주어진 규칙을 추론하여 등비수열의 합을 구한다.

문제에서 제시된 세 번째 줄의 4와 인접한 아래쪽 칸의 수는 주어진 규칙에 의해 4의 2배인 8이다.

규칙으로부터 네 번째 줄의 8과 인접한 왼쪽 칸의 수는 그 수를 2배하여 8이 되어야 하므로 4이다.

이와 같은 방식으로 네 번째 줄에 있는 수를 모두 구하여 왼쪽부터 차례대로 나열하면 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64이다.



그러므로 네 번째 줄에 있는 모든 수의 합은 첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제7항까지의 합이다.

따라서 구하는 값은 $\dfrac{1\times(2^7-1)}{2-1}=127$

8. [출제의도] 함수의 극한의 성질을 이해하고 극한값을 구한다.

$x-1=t$라 하면 $x\to 0+$일 때, $t\to -1+$이므로

$\lim\limits_{x\to 0+}f(x-1)=\lim\limits_{t\to -1+}f(t)=-1$

$f(x)=s$라 하면 $x\to 1+$일 때, $s\to -1-$이므로

$\lim\limits_{x\to 1+}f(f(x))=\lim\limits_{s\to -1-}f(s)=2$

따라서

$\lim\limits_{x\to 0+}f(x-1)+\lim\limits_{x\to 1+}f(f(x))=(-1)+2=1$

9. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이해하여 주어진 조건을 만족시키는 값을 구한다.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$이므로 사인법칙에 의해

$\dfrac{10}{\sin C}=2\times 3\sqrt{5}$, $\sin C=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

삼각형 ABC는 예각삼각형이므로

$\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab}=\dfrac{4}{3}$에서 $\dfrac{a^2+b^2-\dfrac{2}{3}ab}{ab}=\dfrac{4}{3}$

$3a^2+3b^2-2ab=4ab$, $3(a-b)^2=0$이므로 $a=b$

코사인법칙에 의해

$10^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+a^2-2a^2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}a^2$,

$100=\dfrac{2}{3}a^2$, $a^2=150$

따라서 $ab=a^2=150$

10. [출제의도] 정적분을 이용하여 넓이를 계산한다.

$x<0$일 때, 점 A에서 두 함수 $y=ax^2+2$와 $y=-2x$의 그래프가 접하므로

$ax^2+2=-2x$, 즉 $ax^2+2x+2=0$ …… ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1-2a=0$

$a=\dfrac{1}{2}$이므로 접점 A의 x좌표는 -2이다.

점 B는 점 A와 y축에 대하여 대칭이므로

접점 B의 x좌표는 2이다.

주어진 두 함수의 그래프가 모두 y축에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는

$2\times\int_0^2\left(\dfrac{1}{2}x^2+2-2x\right)dx$

$=2\times\left[\dfrac{1}{6}x^3+2x-x^2\right]_0^2=2\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{8}{3}$

11. [출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

$a_{n+1}=\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k$에서 $n=1$을 대입하면

$a_2=\sum\limits_{k=1}^{1}ka_k=a_1$이므로 $a_2=2$

$n\ge 2$일 때 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}ka_k$이므로

$a_{n+1}-a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k-\sum\limits_{k=1}^{n-1}ka_k$

$=na_n$

그러므로 $a_{n+1}=(n+1)a_n$ (단, $n\ge 2$)

위 식에 $n=50$을 대입하면

$a_{51}=51a_{50}$이고 $a_{50}>0$이므로 $\dfrac{a_{51}}{a_{50}}=51$

따라서 $a_2+\dfrac{a_{51}}{a_{50}}=2+51=53$

[보충 설명]

2 이상의 자연수 n에 대하여 $a_n>0$ …… (*)

임을 수학적 귀납법을 이용하여 보일 수 있다.

$a_2=2$이고 $n\ge 2$일 때 $a_{n+1}=(n+1)a_n$이므로

(i) $n=2$일 때

$a_2=2>0$이므로 (*)이 성립한다.

(ii) 2 이상의 자연수 k에 대하여 $n=k$일 때 (*)이 성립한다고 가정하면 $a_k>0$

$n=k+1$일 때 $a_{k+1}=(k+1)a_k>0$이므로 $n=k+1$일 때도 (*)이 성립한다.

따라서 (i), (ii)에 의해 2 이상의 자연수 n에 대하여 $a_n>0$이다.

12. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 선분의 길이 구하는 문제를 해결한다.

$m=3^x$에서 $x=\log_3 m$이므로 $\mathrm{A}_m(\log_3 m,\ m)$

$m=\log_2 x$에서 $x=2^m$이므로 $\mathrm{B}_m(2^m,\ m)$

그러므로 $\overline{\mathrm{A}_m\mathrm{B}_m}=2^m-\log_3 m$

$\overline{\mathrm{A}_m\mathrm{B}_m}$이 자연수이기 위해서는 m과 2^m이 자연수이므로 $\log_3 m$이 음이 아닌 정수이다.

그러므로 $m=3^k$ (단, k는 음이 아닌 정수이다.)

$m=3^0$일 때, $a_1=2^1-\log_3 1=2$

$m=3^1$일 때, $a_2=2^3-\log_3 3=7$

$m=3^2$일 때, $a_3=2^9-\log_3 9=510$

따라서 $a_3=510$

[보충 설명]

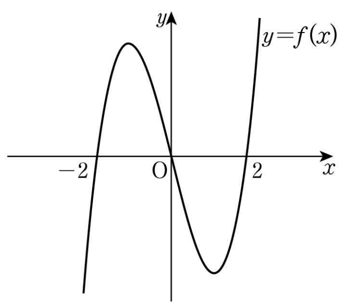
위의 풀이에서 $\overline{\mathrm{A}_m\mathrm{B}_m}$이 자연수이기 위해서는 $m=3^k$ 꼴임을 알 수 있다. 이제 m의 값이 3^{n-1}에서 3^n으로 증가하면 $2^m-\log_3 m$의 값도 증가함을 보이자.
모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{aligned}\left(2^{3^n}-n\right)-\left\{2^{3^{n-1}}-(n-1)\right\}&=2^{3^n}-2^{3^{n-1}}-1\\&=2^{3^{n-1}}(2^3-1)-1\\&=7\times 2^{3^{n-1}}-1\end{aligned}$$

$3^{n-1}\geq 1$이므로 $2^{3^{n-1}}\geq 2$이다.
그러므로 $7\times 2^{3^{n-1}}-1>0$
따라서 $2^{3^{n-1}}-(n-1)<2^{3^n}-n$이 성립한다.

13. [출제의도] 도함수를 이용하여 미분가능한 함수의 성질을 추론한다.

그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.



ㄱ. $m=-1$일 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{15}{4}$, $g\left(\frac{1}{2}\right)=-5$

$g\left(\frac{1}{2}\right)\leq f\left(\frac{1}{2}\right)$이므로 $h\left(\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)=-5$ (참)

ㄴ. $m=-1$일 때, $g(x)=\begin{cases}47x-4 & (x<0)\\ -2x-4 & (x\geq 0)\end{cases}$

(ⅰ) $x<0$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 기울기가 양수이고 y절편이 음수인 직선의 일부이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 단 하나의 교점을 갖는다. 그 교점의 x좌표를 $x_1\,(x_1<0)$이라 하면 $x<0$에서 함수 $h(x)$는 $x=x_1$에서만 미분가능하지 않다.

(ⅱ) $x=0$일 때, $g(0)-4<0=f(0)$이므로 $x=0$에서 함수 $h(x)$의 미분가능성은 함수 $g(x)$의 미분가능성과 같다. 즉, 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(ⅲ) $x>0$일 때,

$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=2x^3-6x+4\\&=(x-1)^2(x+2)\geq 0\end{aligned}$$

즉, $f(x)\geq g(x)$
$x>0$에서 $h(x)=g(x)$이므로 함수 $h(x)$의 미분가능성은 함수 $g(x)$의 미분가능성과 같다.
따라서 $x>0$에서 함수 $h(x)$는 미분가능하다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 2이다. (참)

ㄷ. 양수 m에 대하여

$x=0$일 때, $g(0)=\frac{4}{m^3}>0=f(0)$이므로
$x=0$에서 함수 $h(x)$의 미분가능성은 함수 $f(x)$의 미분가능성과 같다. 즉, 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.
$x>0$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 기울기가 양수이고 y절편도 양수인 직선의 일부이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 단 하나의 교점을 갖는다. 그 교점의 x좌표를 $x_2\,(x_2>0)$이라 하면 $x>0$에서 함수 $h(x)$는 $x=x_2$에서만 미분가능하지 않다.
그러므로 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수가 1이려면 $x<0$에서 함수 $h(x)$는 미분가능해야 한다.
$x<0$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 접한다고 할 때, 접점의 x좌표를 t라 하자.
$f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$에서

$2t^3-8t=-\frac{47}{m}t+\frac{4}{m^3}$ …… ㉠

$6t^2-8=-\frac{47}{m}$ …… ㉡

$t\times$㉡$-$㉠에서

$4t^3=-\frac{4}{m^3}$

$t=-\frac{1}{m}$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$\frac{6}{m^2}-8=-\frac{47}{m}$, $8m^2-47m-6=0$

$(8m+1)(m-6)=0$
m은 양수이므로 $m=6$
$m=6$일 때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 $x=-\frac{1}{6}$인 점에서 접한다.

(ⅰ) $m=6$일 때, 함수 $x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq f(x)$이므로 $h(x)=f(x)$이다.
그러므로 $x<0$에서 함수 $h(x)$는 미분가능하다.

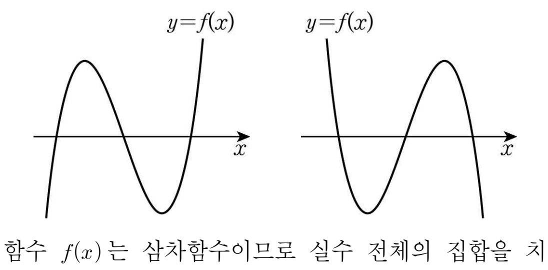
(ⅱ) $0<m<6$일 때, $x<0$에서 m의 값이 작아질수록 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $m=6$일 때보다 기울기의 절댓값이 커지고 y절편도 커지므로 $x<0$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 만나지 않는다.
그러므로 $x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq f(x)$이므로 $h(x)=f(x)$이다.
따라서 $x<0$에서 함수 $h(x)$는 미분가능하다.

(ⅲ) $m>6$일 때, $x<0$에서 m의 값이 커질수록 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $m=6$일 때보다 기울기의 절댓값이 작아지고 y절편도 작아지므로 $x<0$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만난다. 이때 두 점의 x좌표를 각각 x_3, x_4라고 하면 함수 $h(x)$는 $x=x_3$, $x=x_4$에서 미분가능하지 않다.

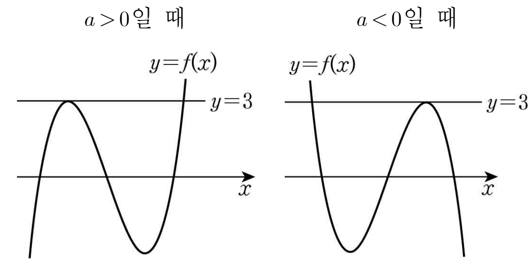
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수가 1인 양수 m의 최댓값은 6이다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

14. [출제의도] 함수의 그래프를 이용하여 함수의 극댓값과 극솟값의 합을 구하는 문제를 해결한다.

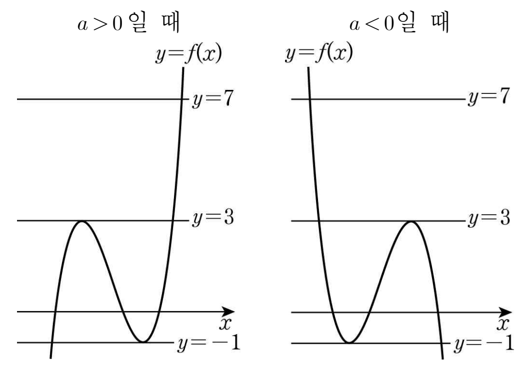
함수 $f(x)$의 삼차항의 계수를 a라 하면 조건 (가)에 의해 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 서로 다른 세 점에서 만나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 삼차함수이므로 실수 전체의 집합을 치역으로 갖고, 이차함수 $g(x)=x^2-6x+10=(x-3)^2+1$은 $x=3$에서 최솟값 1을 갖는다.
그러므로 조건 (나)에서 함수 $g(f(x))=\{f(x)-3\}^2+1$은 $f(x)=3$인 x에서 최솟값 1을 가지므로 $m=1$
한편, 방정식 $g(f(x))=1$의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 방정식 $f(x)=3$을 만족시키는 서로 다른 실근의 개수는 2
그러므로 직선 $y=3$과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



즉, 함수 $f(x)$의 극댓값은 3
조건 (다)의 방정식 $g(f(x))=17$을 풀면
$\{f(x)-3\}^2+1=17$, $\{f(x)-3\}^2=16$
$f(x)=-1$ 또는 $f(x)=7$
조건 (다)에서 방정식 $g(f(x))=17$은 서로 다른 세 실근을 갖고 위의 그래프에서 방정식 $f(x)=7$의 실근의 개수를 유추하면 1이므로 방정식 $f(x)=-1$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
그러므로 세 직선 $y=-1$, $y=3$, $y=7$과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



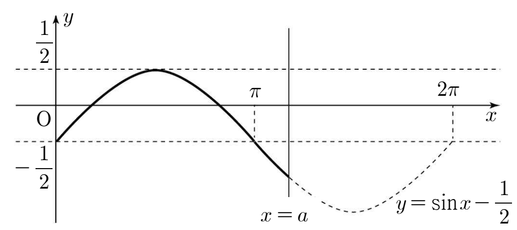
즉, 함수 $f(x)$의 극솟값은 -1
따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 3, 극솟값은 -1이므로 그 합은 $3+(-1)=2$

15. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용해서 삼각함수를 추측한다.

$\pi<a<2\pi$라 하면 함수 $y=\sin x-\frac{1}{2}$의 그래프에서

$\pi<x<a$일 때 $\sin x-\frac{1}{2}<-\frac{1}{2}$이므로

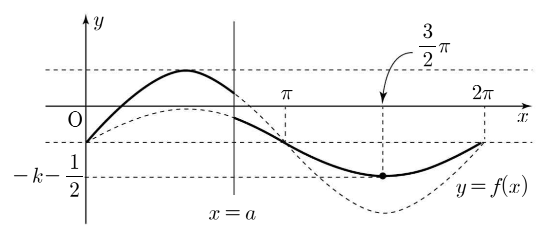
$\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}$이다. 따라서 조건 (가)를 만족시키지 않는다.



따라서 $0<a\leq\pi$이다. ……㉠

(ⅰ) $k>0$인 경우

$a\leq x\leq 2\pi$에서 함수 $y=k\sin x-\frac{1}{2}$은 $x=\frac{3}{2}\pi$일 때 최솟값 $k\sin\frac{3}{2}\pi-\frac{1}{2}=-k-\frac{1}{2}$을 갖는다.



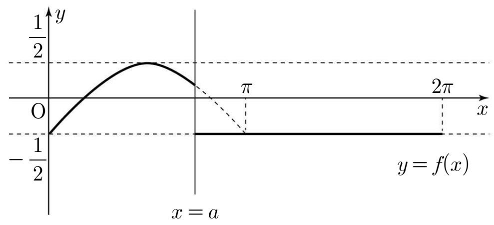
따라서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 $k+\frac{1}{2}$ 이고,

$k+\frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ 이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $k=0$인 경우

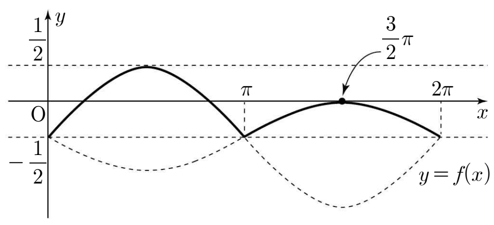
함수 $f(x)=\begin{cases} \sin x-\frac{1}{2} & (0 \le x < a) \\ -\frac{1}{2} & (a \le x \le 2\pi) \end{cases}$ 이고

방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 2 이하이므로
조건 (나)를 만족시키지 않는다.



(iii) $k<0$인 경우
$0<a<\pi$이면 $\sin a>0$이므로
$f(a)=k\sin a-\frac{1}{2}<-\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $|f(a)|>\frac{1}{2}$ 이고 조건 (가)를 만족시키지 않으므로 ㉠에 의해 $a=\pi$이다.
조건 (나)에 의해 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 $f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=0$이다.



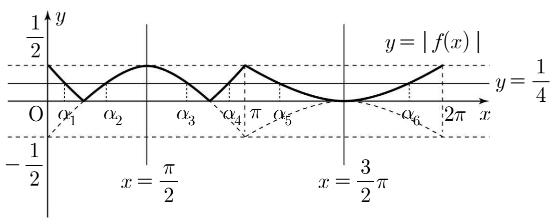
즉 $k\times(-1)-\frac{1}{2}=0$이므로 $k=-\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 구하는 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} \sin x-\frac{1}{2} & (0 \le x < \pi) \\ -\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2} & (\pi \le x \le 2\pi) \end{cases}$$

이다.

함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}$이 만나는 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6이라고 하자.



$\frac{\alpha_1+\alpha_4}{2}=\frac{\pi}{2}$, $\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}=\frac{\pi}{2}$, $\frac{\alpha_5+\alpha_6}{2}=\frac{3\pi}{2}$ 이므로
$S=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6=\pi+\pi+3\pi=5\pi$
이다. 따라서
$20\left(\frac{a+S}{\pi}+k\right)=20\left(\frac{\pi+5\pi}{\pi}-\frac{1}{2}\right)=20\times\frac{11}{2}=110$
이다.

16. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제를 해결한다.

점 P의 시각 $t(t \ge 0)$에서의 속도 $v(t)$는
$v(t)=3t^2-6t+a$
$v(3)=3\times3^2-6\times3+a=15$
따라서 $a=6$

17. [출제의도] 로그의 성질을 이해하여 조건을 만족시키는 값을 구한다.

$\log x^3-\log\frac{1}{x^2}=3\log x-(-2\log x)=5\log x$
$10 \le x < 1000$에서
$1 \le \log x < 3$, $5 \le 5\log x < 15$
따라서 $5\log x$의 값이 자연수가 되도록 하는 x의 개수는 10

[보충 설명]
$5\log x$의 값이 자연수가 되도록 하는 x의 값을 구하면 $x=10$, $10^{\frac{6}{5}}$, $10^{\frac{7}{5}}$, $10^{\frac{8}{5}}$, $\cdots$, $10^{\frac{14}{5}}$

18. [출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 함수의 극한값 구하는 문제를 해결한다.

최고차항의 계수가 1이고 두 점 $A(-2, 0)$, $P(t, t+2)$를 지나는 이차함수 $f(x)$는
$f(x)=(x+2)(x-t+1)$
그러므로 점 Q의 좌표는 $Q(0, 2-2t)$
$\overline{AP}=\sqrt{\{t-(-2)\}^2+(t+2-0)^2}=|t+2|\sqrt{2}$,
$\overline{AQ}=\sqrt{\{0-(-2)\}^2+\{(2-2t)-0\}^2}=2\sqrt{t^2-2t+2}$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{2}\times\overline{AP}-\overline{AQ}\right)&=\lim_{t\to\infty}\left(2|t+2|-2\sqrt{t^2-2t+2}\right)\\&=2\lim_{t\to\infty}\frac{|t+2|^2-(t^2-2t+2)}{|t+2|+\sqrt{t^2-2t+2}}\\&=2\lim_{t\to\infty}\frac{6t+2}{|t+2|+\sqrt{t^2-2t+2}}\\&=2\lim_{t\to\infty}\frac{6+\frac{2}{t}}{\left|1+\frac{2}{t}\right|+\sqrt{1-\frac{2}{t}+\frac{2}{t^2}}}\\&=2\times\frac{6+0}{1+1}\\&=6\end{aligned}$$

19. [출제의도] 삼각함수의 정의를 이해한다.

원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원이 세 동경 OP, OQ, OR와 만나는 점을 각각 A, B, C라 하자.

점 P가 제1사분면 위에 있고, $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ 이므로

점 A의 좌표는 $A\left(2\sqrt{2}, 1\right)$
점 Q가 점 P와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로
동경 OQ도 동경 OP와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 그러므로 점 B의 좌표는 $B\left(1, 2\sqrt{2}\right)$
점 R가 점 Q와 원점에 대하여 대칭이므로
동경 OR도 동경 OQ와 원점에 대하여 대칭이다.
그러므로 점 C의 좌표는 $C\left(-1, -2\sqrt{2}\right)$
삼각함수의 정의에 의해
$\sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan\gamma=\frac{\left(-2\sqrt{2}\right)}{(-1)}=2\sqrt{2}$

따라서 $9\left(\sin^2\beta+\tan^2\gamma\right)=9\times\left(\frac{8}{9}+8\right)=80$

20. [출제의도] 삼각함수의 그래프의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}\right]$에서 $0<a<\frac{4}{7}$ 이므로

$-\frac{\pi}{a}<-\frac{7}{4}\pi$, $\frac{7\pi}{2}<\frac{2\pi}{a}$ 이다.

함수 $f(x)=2\sin(ax)+b$의 그래프가 두 점 $A\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $B\left(\frac{7}{2}\pi, 0\right)$을 지나므로

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(-\frac{a}{2}\pi\right)+b=-2\sin\left(\frac{a}{2}\pi\right)+b=0$

$f\left(\frac{7}{2}\pi\right)=2\sin\left(\frac{7a}{2}\pi\right)+b=0$

따라서 $\sin\left(\frac{7a}{2}\pi\right)=-\sin\left(\frac{a}{2}\pi\right)$

$0<a<\frac{4}{7}$에서 $0<\frac{a}{2}\pi<\frac{2}{7}\pi$, $0<\frac{7a}{2}\pi<2\pi$이므로

$\frac{7a}{2}\pi=2\pi-\frac{a}{2}\pi$ 또는 $\frac{7a}{2}\pi=\pi+\frac{a}{2}\pi$

따라서 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{1}{3}$

(i) $a=\frac{1}{2}$ 일 때

$f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+b$에서

$$\begin{aligned}f\left(-\frac{\pi}{2}\right)&=2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+b\\&=2\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+b\\&=-\sqrt{2}+b=0\end{aligned}$$

이므로 $b=\sqrt{2}$
이는 b는 유리수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=\frac{1}{3}$ 일 때

$f(x)=2\sin\left(\frac{1}{3}x\right)+b$에서

$$\begin{aligned}f\left(-\frac{\pi}{2}\right)&=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+b\\&=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+b\\&=-1+b=0\end{aligned}$$

이므로 $b=1$
이때 $f\left(\frac{7}{2}\pi\right)=0$이다.

(i), (ii)에서 $a=\frac{1}{3}$, $b=1$이고

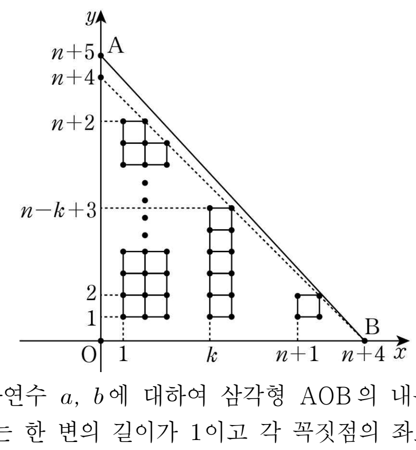
$30(a+b)=30\times\left(\frac{1}{3}+1\right)=40$

21. [출제의도] 수열의 합을 이용하여 문제를 해결한다.

직선 AB의 방정식은
$y=-\frac{n+5}{n+4}x+n+5$
자연수 a에 대하여 $x=a$일 때

$$\begin{aligned}y&=-\frac{n+5}{n+4}a+n+5\\&=n+5-\left(1+\frac{1}{n+4}\right)a\\&=n+5-a-\frac{a}{n+4}\end{aligned}$$

$0<a<n+4$일 때, $0<\frac{a}{n+4}<1$이므로
$x=a$일 때, y좌표가 자연수인 점의 개수는
$n+4-a$이다.



두 자연수 a, b에 대하여 삼각형 AOB의 내부에 포함되는 한 변의 길이가 1이고 각 꼭짓점의 좌표가 자연수인 정사각형의 네 꼭짓점의 좌표를 각각
(a, b), $(a+1, b)$, $(a+1, b+1)$, $(a, b+1)$
이라 하면
$a=1$일 때, $1 \le b \le n+1$이므로 정사각형의 개수는 $(n+1)$이다.
$a=2$일 때, $1 \le b \le n$이므로 정사각형의 개수는 n이다.
$a=3$일 때, $1 \le b \le n-1$이므로 정사각형의 개수는

$(n-1)$ 이다.

$\vdots$

$a=n+1$ 일 때, $b=1$ 이므로 정사각형의 개수는 1 이다.

따라서

$$a_n=(n+1)+n+(n-1)+\cdots+1$$
$$=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$
$$=\frac{1}{2}(n^2+3n+2)$$

$$\sum_{n=1}^{8}a_n=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{8}(n^2+3n+2)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{8\times9\times17}{6}+3\times\frac{8\times9}{2}+2\times8\right)$$
$$=164$$

22. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 이용하여 문제를 해결한다.

$f(x)$ 가 최고차항의 계수가 4 인 삼차함수이므로

$g(x)=\int_t^x f(s)ds$ 는 최고차항의 계수가 1 인

사차함수이고 실수 전체의 집합에서 함수

$g(x)-g(a)$ 는 미분가능하다.

$g(x)\ge g(a)$ 일 때, $|g(x)-g(a)|=g(x)-g(a)$

$g(x)<g(a)$ 일 때, $|g(x)-g(a)|=-\{g(x)-g(a)\}$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$ 은 $g(x)-g(a)\neq0$ 인 모든 x 에서 미분가능하다.

$g(x)-g(a)=0$ 를 만족시키는 x 의 값을 k 라 하면,

$g(k)=g(a)$ 이므로

$$\frac{|g(x)-g(a)|-|g(k)-g(a)|}{x-k}=\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$$

(i) $x=k$ 의 좌우에서 $g(x)-g(a)$ 의 부호가 같을 때

$$\lim_{x\to k-}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$ 는 $x=k$ 에서 미분가능하다.

(ii) $x=k$ 의 좌우에서 $g(x)-g(a)$ 의 부호가 다르고 $f(k)=0$ 일 때

$$\lim_{x\to k-}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$ 는 $x=k$ 에서 미분가능하다.

(iii) $x=k$ 의 좌우에서 $g(x)-g(a)$ 의 부호가 다르고 $f(k)\neq0$ 일 때,

$$\lim_{x\to k-}\frac{|g(x)-g(a)|}{x-k}\neq\lim_{x\to k+}\frac{|g(x)-g(a)|}{x-k}$$

이므로 함수 $|g(x)-g(a)|$ 는 $x=k$ 에서 미분가능하지 않다.

(나)에서 함수 $|g(x)-g(a)|$ 가 미분가능하지 않은 x 의 개수가 1 이므로

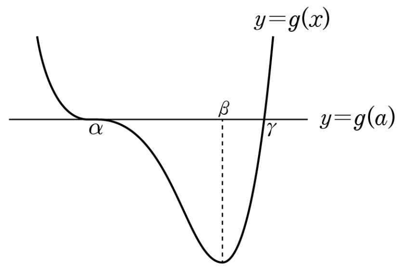
$g(x)-g(a)=0$, $g'(x)=f(x)\neq0$

인 x 가 단 하나 존재한다는 것을 알 수 있다.

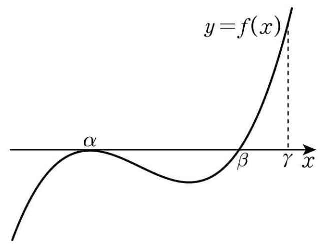
그러므로 사차함수 $y=g(x)$ 는 단 하나의 극솟값을 갖고 함수 $g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=g(a)$ 는 서로 다른 두 점에서 만난다.

$g'(x)=0$ 인 방정식 $g(x)-g(a)=0$ 의 근을 α, 함수 $g(x)$ 가 극솟값을 가질 때의 x 의 값을 β 라 하면 α, β 의 대소관계에 따라 다음과 같이 두 경우로 나눌 수 있다.

(i) $\alpha<\beta$ 인 경우 (단, $g(\gamma)=g(\alpha)$, $\beta<\gamma$)



함수 $y=g(x)$ 의 도함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그려 보면



$g(\alpha)=g(\gamma)=g(a)$ 이므로 $\alpha=a$ 또는 $\gamma=a$

(가)에서 $f'(a)=0$ 이므로 $\alpha=a$ 이다.

따라서 $f(x)=4(x-a)^2(x-\beta)$ 이다.

$h(t)=g(a)=\int_t^a f(s)ds=-\int_a^t f(s)ds$ 에서

$h'(t)=-f(t)$

함수 $h(t)$ 가 $t=2$ 에서 최댓값, 즉 극댓값을 가지므로 $h'(2)=-f(2)=0$

따라서 $a=2$ 또는 $\beta=2$ 이다.

$a=2$ 이면 $h(2)=\int_2^2 f(t)dt=0\neq27$

이므로 $a\neq2$

$\beta=2$ 이면

$h(3)=\int_3^a f(s)ds=0$ 이고,

$h(2)=\int_2^a f(s)ds=27$ 이므로

$h(2)-h(3)=\int_2^3 f(s)ds=27$ 이다.

$$\int_2^3 f(s)ds$$
$$=\int_2^3 4(s-a)^2(s-2)ds$$
$$=\int_2^3 4\{s^3-2(a+1)s^2+(a^2+4a)s-2a^2\}ds$$
$$=\left[s^4-\frac{8}{3}(a+1)s^3+2(a^2+4a)s^2-8a^2s\right]_2^3$$
$$=65-\frac{152}{3}(a+1)+10(a^2+4a)-8a^2$$
$$=2a^2-\frac{32}{3}a+\frac{43}{3}=27$$

이므로

$3a^2-16a-19=0$

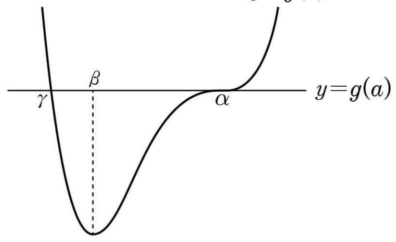
$(a+1)(3a-19)=0$

$a=-1$ 또는 $a=\frac{19}{3}$

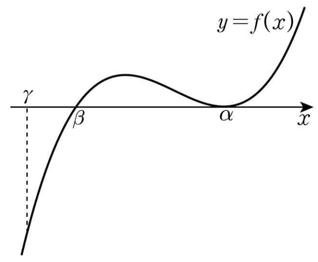
$a<2$ 이므로 $a=-1$ 이다.

$f(x)=4(x+1)^2(x-2)$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) $\alpha>\beta$ 인 경우 (단, $g(\gamma)=g(\alpha)$, $\gamma<\beta$)



함수 $y=g(x)$ 의 도함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그려 보면



(가)에서 $f'(a)=0$ 이므로 $\alpha=a$ 이다.

따라서 $f(x)=4(x-a)^2(x-\beta)$ 이다.

$\alpha<\beta$ 인 경우와 마찬가지로 $\beta=2$ 이다.

$f(x)=4(x-a)^2(x-2)$

$a\neq3$ 이면 $h(3)=\int_3^a f(s)ds\neq0$ 이므로 $a=3$

따라서 $f(x)=4(x-3)^2(x-2)$ 이고

$h(2)=\int_2^a f(s)ds=\int_2^3 4(s-3)^2(s-2)ds=\frac{1}{3}$

$h(2)\neq27$ 이므로 주어진 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 가 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)=4(x+1)^2(x-2)$ 이다.

$f(5)=4\times36\times3=432$

선택과목 '확률과 통계' 정답

23	③	24	⑤	25	①	26	①	27	④
28	①	29	8	30	209				

해 설

23. [출제의도] 중복순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

천의 자리의 수가 1인 네 자리 자연수의 개수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

천의 자리의 수가 2이고 백의 자리의 수가 0인 네 자리 자연수의 개수는

${}_4\Pi_2=4^2=16$

따라서 구하는 경우의 수는

$64+16=80$

24. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

흰 공 2개, 빨간 공 2개, 검은 공 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{8!}{2!\times2!\times4!}=420$

흰 공 2개를 하나로 보고 7개의 공을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{7!}{2!\times4!}=105$

따라서 구하는 경우의 수는 $420-105=315$

25. [출제의도] 원순열의 정의를 이해하여 원순열의 수를 구한다.

가운데 원에 색칠하는 경우의 수는 7

가운데 원에 칠한 색을 제외한 6가지 색을 모두 사용하여 가운데 원을 제외한 나머지 6개의 원을 색칠하는 경우의 수는 $(6-1)!=5!$

따라서 구하는 경우의 수는 $7\times5!=840$

26. [출제의도] 여러 가지 순열을 활용하여 문제를 해결한다.

펭귄 인형을 크기가 작은 것부터 a_1, a_2, a_3이라 하고 곰 인형을 크기가 작은 것부터 b_1, b_2, b_3, b_4라 하자.

(ⅰ) a_3이 b_2보다 왼쪽에 있는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{3!}=4$

(ⅱ) a_3이 b_2보다 오른쪽에 있는 경우의 수는

$\dfrac{3!}{2!}\times\dfrac{3!}{2!}=9$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 $4+9=13$

27. [출제의도] 순열과 조합을 활용하여 문제를 해결한다.

집합 Y의 원소들을 3으로 나누었을 때의 나머지가 같은 수들을 원소로 하는 집합 Y의 부분집합을 각각 $A=\{1, 4\}$, $B=\{2, 5\}$, $C=\{3\}$이라 하자.

(ⅰ) $f(4)=3$인 경우

$f(1)+f(2)+f(3)=3k$(k는 자연수)이므로

집합 A, B, C의 원소 중에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값으로 선택할 수 있는 원소의 개수와 각 경우의 함수의 개수는 표와 같다.

A	B	C	함수의 개수
1	1	1	$3!\times2\times2=24$
3	0	0	$2^3=8$
0	3	0	$2^3=8$
0	0	3	$1^3=1$

$\therefore\ 24+8+8+1=41$

(ⅱ) $f(4)=1$ 또는 $f(4)=4$인 경우

$f(1)+f(2)+f(3)=3k+1$(k는 자연수)이므로

집합 A, B, C의 원소 중에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값으로 선택할 수 있는 원소의 개수와 각 경우의 함수의 개수는 표와 같다.

A	B	C	함수의 개수
1	0	2	$3\times2=6$
2	1	0	$3\times2^2\times2=24$
0	2	1	$3\times2^2=12$

$\therefore\ 2\times(6+24+12)=84$

(ⅲ) $f(4)=2$ 또는 $f(4)=5$인 경우

$f(1)+f(2)+f(3)=3k+2$(k는 자연수)이므로

집합 A, B, C의 원소 중에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값으로 선택할 수 있는 원소의 개수와 각 경우의 함수의 개수는 표와 같다.

A	B	C	함수의 개수
1	2	0	$3\times2^2\times2=24$
2	0	1	$3\times2^2=12$
0	1	2	$3\times2=6$

$\therefore\ 2\times(24+12+6)=84$

따라서 구하는 함수의 개수는 $41+84+84=209$

【 다른 풀이 】

(ⅰ) $f(4)=3$인 경우

집합 Y의 원소 중 중복을 허락하여 선택한 세 수들의 합을 3으로 나눈 나머지가 0이 되는 수들의 순서쌍은

$(1, 1, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(3, 3, 3)$, $(4, 4, 4)$, $(5, 5, 5)$와

$(1, 1, 4)$, $(1, 4, 4)$, $(2, 2, 5)$, $(2, 5, 5)$와

$(1, 2, 3)$, $(1, 3, 5)$, $(2, 3, 4)$, $(3, 4, 5)$이고,

각 순서쌍을 이루는 수들을 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 되도록 나열하는 방법의 수는

$5\times\dfrac{3!}{3!}+4\times\dfrac{3!}{2!}+4\times3!=41$

(ⅱ) $f(4)=1$ 또는 $f(4)=4$인 경우

집합 Y의 원소 중 중복을 허락하여 선택한 세 수들의 합을 3으로 나눈 나머지가 1이 되는 수들의 순서쌍은

$(1, 1, 2)$, $(1, 1, 5)$, $(1, 3, 3)$, $(2, 2, 3)$, $(2, 4, 4)$,

$(3, 3, 4)$, $(3, 5, 5)$, $(4, 4, 5)$와

$(1, 2, 4)$, $(1, 4, 5)$, $(2, 3, 5)$이고,

각 순서쌍을 이루는 수들을

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 되도록 나열하는 방법의 수는

$8\times\dfrac{3!}{2!}+3\times3!=42$

$\therefore\ 42\times2=84$

(ⅲ) $f(4)=2$ 또는 $f(4)=5$인 경우

집합 Y의 원소 중 중복을 허락하여 선택한 세 수들의 합을 3으로 나눈 나머지가 2가 되는 수들의 순서쌍은

$(1, 1, 3)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 5, 5)$, $(2, 2, 4)$, $(2, 3, 3)$,

$(3, 3, 5)$, $(3, 4, 4)$, $(4, 5, 5)$와

$(1, 2, 5)$, $(1, 3, 4)$, $(2, 4, 5)$이고,

각 순서쌍을 이루는 수들을

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 되도록 나열하는 방법의 수는

$8\times\dfrac{3!}{2!}+3\times3!=42$

$\therefore\ 42\times2=84$

따라서 구하는 함수의 개수는 $41+84+84=209$

28. [출제의도] 중복순열을 이용하여 경우의 수를 추론한다.

(ⅰ) $a=0$인 경우

$\dfrac{bc}{a}$가 정의되지 않으므로 정수가 되는 경우는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $a=1$인 경우

$\dfrac{bc}{a}$는 항상 정수이므로 b, c를 정하는 경우의 수는 0, 1, 2, 3에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_4\Pi_2=4^2=16$

(ⅲ) $a=2$인 경우

$bc=2k$(k는 정수)일 때 $\dfrac{bc}{a}$가 정수이다. $a=2$일 때 b와 c를 택하는 전체 경우의 수 16에서 b와 c가 모두 홀수인 경우의 수 4를 빼면 되므로 $16-4=12$

(ⅳ) $a=3$인 경우

$bc=3k$(k는 정수)일 때 $\dfrac{bc}{a}$가 정수이다. $a=3$일 때 b와 c를 택하는 전체 경우의 수 16에서 $bc\neq3k$인 경우의 수를 빼면 된다.

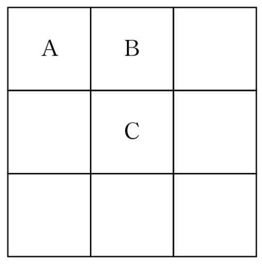
$bc\neq3k$인 경우의 수는 1, 2에서 2개를 택하는 중복순열의 수 ${}_2\Pi_2=4$이므로

$16-4=12$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 $\dfrac{bc}{a}$가 정수가 되도록 하는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $16+12+12=40$

29. [출제의도] 원순열을 이용하여 문제를 해결한다.

회전하여 일치하는 것을 같은 것으로 보므로 빨간색을 칠할 정사각형은 그림과 같이 A, B, C 중에서 택할 수 있다.



(ⅰ) A에 빨간색을 칠하는 경우

파란색을 칠할 수 있는 경우의 수는 5이다.

나머지 7개의 정사각형에 남은 7개의 색을 칠하는 경우의 수는 $7!$이다.

(ⅱ) B에 빨간색을 칠하는 경우

파란색을 칠할 수 있는 경우의 수는 3이다.

나머지 7개의 정사각형에 남은 7개의 색을 칠하는 경우의 수는 $7!$이다.

(ⅲ) C에 빨간색을 칠하는 경우

파란색을 어떤 정사각형에 칠해도 빨간색이 칠해진 정사각형과 꼭짓점을 공유하므로 조건을 만족시킬 수 없다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$(3+5)\times7!=8\times7!$

따라서 $k=8$

30. [출제의도] 중복조합을 활용하여 문제를 해결한다.

<B형>과 <C형>이 각각 2번 나타나도록 5개의 바둑돌을 나열한 경우는

●○●○● 또는 ○●○●○

(ⅰ) ●○●○●인 경우

1번의 <D형>을 만들기 위해서는 새로운 1개의 ○을 나열되어 있는 ○에 이웃하도록 나열하고, 4번의 <A형>을 만들기 위해서는 새로운 4개의 ●을 나열되어 있는 ●에 이웃하도록 나열하면 되므로

$${}_2C_1\times{}_{3+4-1}C_4={}_2C_1\times{}_6C_4=30$$

(ⅱ) ○●○●○인 경우

같은 방법으로

$${}_3C_1\times{}_{2+4-1}C_4={}_3C_1\times{}_5C_4=15$$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 모든 경우의 수는 45

선택과목 '미적분' 정답

23	①	24	①	25	③	26	⑤	27	③
28	①	29	4	30	125				

해 설

23. [출제의도] 수열의 극한값을 계산한다.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+2n+1}-\sqrt{4n^2-2n-1}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4n^2+2n+1)-(4n^2-2n-1)}{\sqrt{4n^2+2n+1}+\sqrt{4n^2-2n-1}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+2}{\sqrt{4n^2+2n+1}+\sqrt{4n^2-2n-1}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4+\frac{2}{n}}{\sqrt{4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{4-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}}$

$=\dfrac{4}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=1$

24. [출제의도] 수열의 극한의 성질을 이해하여 극한값을 구한다.

$\lim\limits_{n\to\infty}na_n(b_n+2n)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(na_nb_n+2n^2a_n)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{(n^2a_n)\times\left(\dfrac{b_n}{n}\right)+2n^2a_n\right\}$

$=\left(\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n\right)\times\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{n}\right)+2\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n$

$=3\times5+2\times3=21$

25. [출제의도] 수열의 극한을 활용하여 문제를 해결한다.

점 $(a_n,\ \sqrt{n})$이 원 $x^2+y^2=4n^2$ 위의 점이므로 $(a_n)^2+(\sqrt{n})^2=4n^2$이다.

$a_n>0$이므로, $a_n=\sqrt{4n^2-n}$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n-\sqrt{4n^2-n}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+\sqrt{4n^2-n}}$

$=\dfrac{1}{4}$

26. [출제의도] 등비수열이 수렴할 조건을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 값을 구한다.

(i) $0<\dfrac{m}{5}<1$, 즉 $0<m<5$이면

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{m}{5}\right)^n=0$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{m}{5}\right)^{n+1}+2}{\left(\frac{m}{5}\right)^n+1}=\dfrac{0+2}{0+1}=2$

그러므로 자연수 m의 값은 1, 2, 3, 4

(ii) $\dfrac{m}{5}=1$, 즉 $m=5$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{m}{5}\right)^n=1$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{m}{5}\right)^{n+1}+2}{\left(\frac{m}{5}\right)^n+1}=\dfrac{1+2}{1+1}=\dfrac{3}{2}$

그러므로 $m\neq5$

(iii) $\dfrac{m}{5}>1$, 즉 $m>5$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{m}{5}\right)^n=\infty$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{m}{5}\right)^{n+1}+2}{\left(\frac{m}{5}\right)^n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{m}{5}+2\times\frac{1}{\left(\frac{m}{5}\right)^n}}{1+\frac{1}{\left(\frac{m}{5}\right)^n}}$

$=\dfrac{\frac{m}{5}+0}{1+0}=\dfrac{m}{5}$

즉, $\dfrac{m}{5}=2$에서 $m=10$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{m}{5}\right)^{n+1}+2}{\left(\frac{m}{5}\right)^n+1}=2$가 되도록 하는 자연수 m의 개수는 5

[보충 설명] 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴과 발산

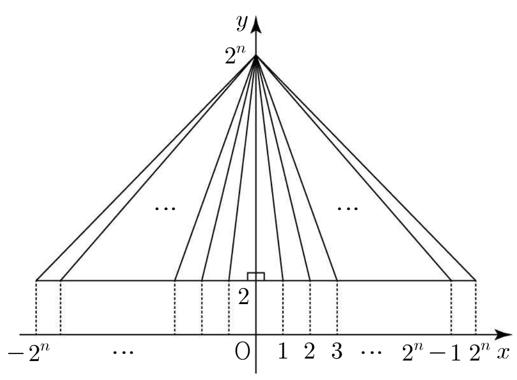
(i) $r>1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=\infty$ (발산)

(ii) $r=1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=1$ (수렴)

(iii) $-1<r<1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$ (수렴)

(iv) $r\leq-1$일 때, 수열 $\{r^n\}$은 진동한다. (발산)

27. [출제의도] 수열의 극한을 이용하여 수학 내적 문제를 해결한다.



조건 (가)에 의하여 $b=2$, $a\neq0$

조건 (나)에 의하여

a는 $-2^n\leq a\leq-1$, $1\leq a\leq2^n$인 정수

(i) $1\leq a\leq2^n$인 경우

모든 삼각형 ABC의 넓이의 합은

$\dfrac{1}{2}\times(2^n-2)\times\{1+2+3+\cdots+(2^n-1)+2^n\}$

$=\dfrac{1}{2}\times(2^n-2)\times\dfrac{2^n(1+2^n)}{2}$

$=\dfrac{1}{4}(8^n-4^n-2^{n+1})$

(ii) $-2^n\leq a\leq-1$인 경우

모든 삼각형 ABC의 넓이의 합은 (i)과 같다.

(i), (ii)에 의하여

$S_n=2\times\dfrac{1}{4}(8^n-4^n-2^{n+1})$

$=\dfrac{1}{2}(8^n-4^n-2^{n+1})$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{8^{n-2}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8^n-4^n-2^{n+1}}{8^{n-2}}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{2^n}-\frac{2}{4^n}}{\frac{1}{64}}=32$

28. [출제의도] 등비수열의 극한을 이용하여 수열의 합 문제를 해결한다.

함수 $f(x)=\dfrac{x-1}{2x-6}$에 대하여

$|f(3-a)|=\left|\dfrac{(3-a)-1}{2(3-a)-6}\right|=\left|\dfrac{2-a}{-2a}\right|=\left|\dfrac{a-2}{2a}\right|$

$|1-f(3+a)|=\left|1-\dfrac{(3+a)-1}{2(3+a)-6}\right|=\left|\dfrac{a-2}{2a}\right|$

이다. $h(a)=\dfrac{a-2}{2a}\ (a\neq0)$라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|f(3-a)|^{n+1}}{2^n+|1-f(3+a)|^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|h(a)|^{n+1}}{2^n+|h(a)|^n}$

이다.

(i) $|h(a)|<2$일 때,

$\left|\dfrac{h(a)}{2}\right|<1$이고 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{h(a)}{2}\right|^n=0$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|h(a)|^{n+1}}{2^n+|h(a)|^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\left|\frac{h(a)}{2}\right|^{n+1}}{1+\left|\frac{h(a)}{2}\right|^n}=0$

이 되어 $k=0$이다.

(ii) $|h(a)|=2$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|h(a)|^{n+1}}{2^n+|h(a)|^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}}{2^n+2^n}=1$

이 되어 $k=1$이다.

(iii) $|h(a)|>2$일 때,

$\left|\dfrac{2}{h(a)}\right|<1$이고 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2}{h(a)}\right|^n=0$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|h(a)|^{n+1}}{2^n+|h(a)|^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|h(a)|}{\left|\frac{2}{h(a)}\right|^n+1}=|h(a)|$

이다.

$|h(a)|=\left|\dfrac{a-2}{2a}\right|=\left|\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2}\right|=k$ ($k\geq3$인 자연수)를 만족시키는 a를 구하면

$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2}=k$일 때, $a=\dfrac{2}{2k+1}$

$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2}=-k$일 때, $a=-\dfrac{2}{2k-1}$

이다. 따라서 $g(k)=-2\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$이다.

$\sum\limits_{k=3}^{17}g(k)=-2\sum\limits_{k=3}^{17}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$

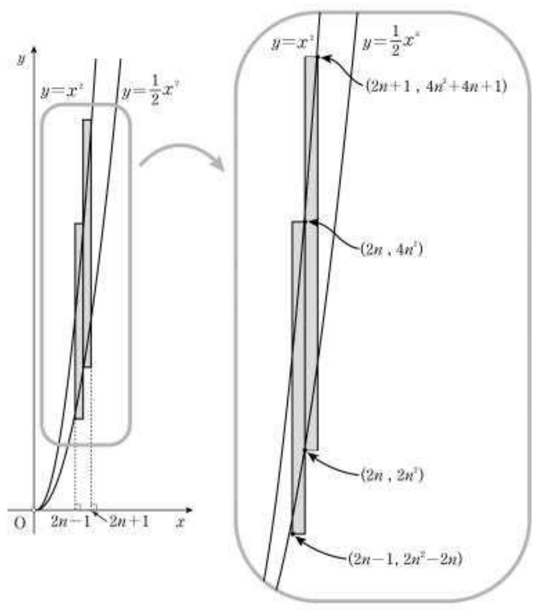
$=-2\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{33}-\dfrac{1}{35}\right)$

$=-2\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{35}\right)=-\dfrac{12}{35}$

29. [출제의도] 조건을 만족시키는 정사각형의 개수를 추론하여 수열의 극한값을 구한다.

$S_{n+1}-S_n$의 값은 $2n-1\leq x<2n+1$에서 조건을 만족시키는 정사각형의 개수와 같다.

$f(x)=x^2$, $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2$이라 하자.



(i) $2n-1\leq x<2n$일 때,

$f(2n)=(2n)^2=4n^2$,

$g(2n-1)=\dfrac{1}{2}\times(2n-1)^2=2n^2-2n+\dfrac{1}{2}$

이므로 조건을 만족시키는 정사각형의 개수는 $2n^2-2n$보다 크거나 같고 $4n^2$보다 작은 자연수의 개수와 같다. 즉, 정사각형의 개수는 $4n^2-(2n^2-2n)=2n^2+2n$

(ii) $2n\leq x<2n+1$일 때,

$f(2n+1)=(2n+1)^2=4n^2+4n+1$,

$g(2n)=\frac{1}{2}\times(2n)^2=2n^2$

이므로 조건을 만족시키는 정사각형의 개수는 $2n^2$보다 크거나 같고 $4n^2+4n+1$보다 작은 자연수의 개수와 같다. 즉, 정사각형의 개수는

$(4n^2+4n+1)-2n^2=2n^2+4n+1$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$S_{n+1}-S_n=(2n^2+2n)+(2n^2+4n+1)=4n^2+6n+1$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}-S_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+6n+1}{n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=4$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}-S_n}{n^2}=4$

[다른 풀이]

자연수 m에 대하여

$2m-2<x<2m-1$과 $\frac{1}{2}x^2<y<x^2$에서 조건을 만족시키는 정사각형의 개수를 a_{2m-1}이라 하면

$a_{2m-1}=(2m-1)^2-\frac{(2m-2)^2}{2}$

$=2m^2-1$

$2m-1\le x<2m$과 $\frac{1}{2}x^2<y<x^2$에서 조건을 만족시키는 정사각형의 개수를 a_{2m}이라 하면

$a_{2m}=(2m)^2-\frac{(2m-1)^2-1}{2}=2m^2+2m$

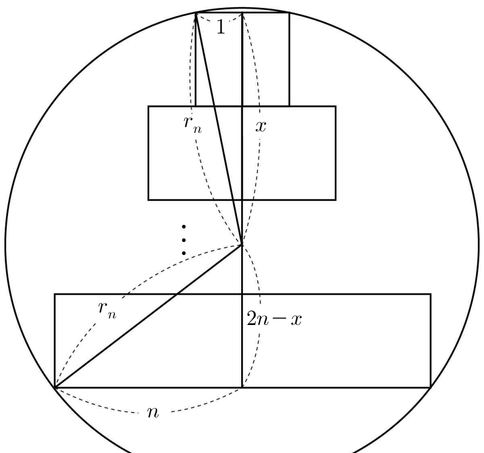
그러므로

$$S_n=\sum_{m=1}^{n-1}(2m^2+2m)+\sum_{m=1}^{n}(2m^2-1)$$
$$=\frac{n(4n^2+2)}{3}+n^2-2n$$

$$S_{n+1}-S_n=\frac{(n+1)\{4(n+1)^2+2\}}{3}+(n+1)^2-2(n+1)-\left\{\frac{n(4n^2+2)}{3}+n^2-2n\right\}$$
$$=4n^2+6n+1$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}-S_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+6n+1}{n^2}=4$

30. [출제의도] 수열의 극한을 추론한다.



[도형 n]을 포함하는 원들 중 가장 작은 원은 위의 그림과 같이 네 꼭짓점을 지나게 된다. 이 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하고, 원의 중심에서 도형의 윗변까지의 길이를 x라 하면

$(r_n)^2=x^2+1$, $(r_n)^2=(2n-x)^2+n^2$

이다. 따라서 $x^2+1=(2n-x)^2+n^2$이므로

$x=\frac{5n^2-1}{4n}$이다. 따라서

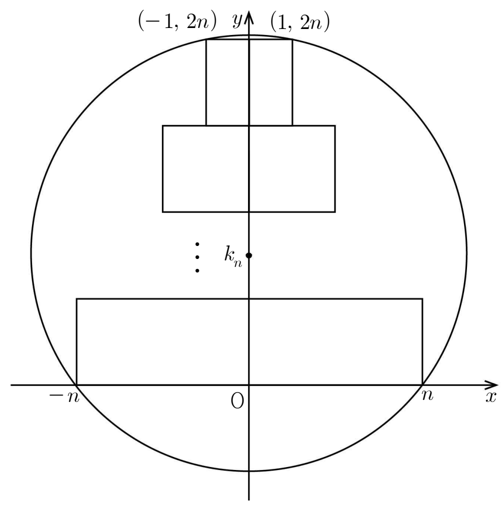
$(r_n)^2=\left(\frac{5n^2-1}{4n}\right)^2+1=\frac{25n^4+6n^2+1}{16n^2}$이다.

그러므로

$a_n=\pi(r_n)^2=\frac{25n^4+6n^2+1}{16n^2}\pi$이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{80a_n}{\pi n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{125n^4+30n^2+5}{n^4}=125$

[다른 풀이]



[도형 n]을 포함하는 원들 중 가장 작은 원은 위의 그림처럼 네 점을 지나게 된다. 이 원의 방정식을 $x^2+(y-k_n)^2=r_n^2$이라 하자. 이 원은 $(n,0)$과 $(1,2n)$을 지나므로

$$\begin{cases}n^2+(k_n)^2=(r_n)^2\\1+(2n-k_n)^2=(r_n)^2\end{cases}$$

이다. 따라서

$n^2+(k_n)^2=1+(2n-k_n)^2$

이므로 $k_n=\frac{3n^2+1}{4n}$이다. 따라서

$(r_n)^2=n^2+\left(\frac{3n^2+1}{4n}\right)^2=\frac{25n^4+6n^2+1}{16n^2}$이다.

그러므로 $a_n=\pi(r_n)^2=\frac{25n^4+6n^2+1}{16n^2}\pi$이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{80a_n}{\pi n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{125n^4+30n^2+5}{n^4}=125$

선택과목 '기하' 정답

23	①	24	③	25	③	26	①	27	⑤
28	①	29	90	30	54				

해 설

23. [출제의도] 포물선의 초점의 좌표를 구한다.

포물선 $y^2-4y-ax+4=0$, 즉

$(y-2)^2=ax$의 그래프는 포물선 $y^2=ax$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2=ax$의 초점의 좌표가 $\left(\frac{a}{4},0\right)$이므로

포물선 $(y-2)^2=ax$의 초점의 좌표는 $\left(\frac{a}{4},2\right)$이다.

따라서 $\frac{a}{4}=3$, $2=b$, 즉 $a=12$, $b=2$이므로

$a+b=12+2=14$

24. [출제의도] 쌍곡선의 정의하여 값을 구한다.

$\overline{\mathrm{AF}}=k$라 하면 정사각형의 대각선의 길이는

$\overline{\mathrm{AF'}}=\sqrt{2}k$

한편, 주축의 길이가 2이므로 쌍곡선의 정의에 의해

$\overline{\mathrm{AF'}}-\overline{\mathrm{AF}}=2$, $\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{AF}}+2$

즉, $\sqrt{2}k=k+2$이므로

$k=\frac{2}{\sqrt{2}-1}=2(\sqrt{2}+1)$

따라서 대각선의 길이는

$\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{AF}}+2$

$=k+2=2\sqrt{2}+2+2=4+2\sqrt{2}$

[다른 풀이]

주어진 쌍곡선의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$($a$, b는 양의 상수)라 하자.

쌍곡선의 주축의 길이가 2이므로

$2a=2$에서 $a=1$

따라서 $c=\sqrt{1+b^2}$이고

$\mathrm{F}(\sqrt{1+b^2},0)$, $\mathrm{F'}(-\sqrt{1+b^2},0)$이므로

$\overline{\mathrm{FF'}}=2\sqrt{1+b^2}$

이때 사각형 ABF′F는 정사각형이므로 점 A의 좌표는 $(\sqrt{1+b^2},2\sqrt{1+b^2})$

이때 정사각형 ABF′F의 대각선의 길이는

$\overline{\mathrm{AF'}}=\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{FF'}}=2\sqrt{2}\times\sqrt{1+b^2}$ … ㉠

이고, 쌍곡선의 정의에 의해

$\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{AF}}+2=2\sqrt{1+b^2}+2$ … ㉡

이므로 ㉠, ㉡에서

$2\sqrt{2}\times\sqrt{1+b^2}=2\sqrt{1+b^2}+2$

$(\sqrt{2}-1)\sqrt{1+b^2}=1$

따라서

$\sqrt{1+b^2}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$

이므로 정사각형 ABF′F의 대각선의 길이는 ㉡에서

$2(\sqrt{2}+1)+2=4+2\sqrt{2}$

25. [출제의도] 포물선의 방정식을 이해한다.

점 P는 포물선 $y^2=8x$의 준선 $x=-2$ 위의 점이다.

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QF}}=10$이므로 포물선의 정의에 의하여

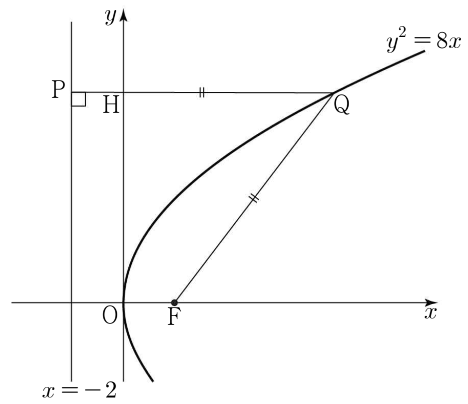
준선 $x=-2$와 선분 PQ는 수직이다.

선분 PQ와 y축이 만나는 점을 H라 하면 $\overline{\mathrm{PH}}=2$

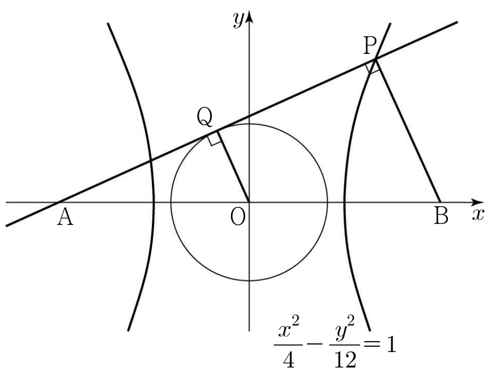
$\therefore$ Q$(8,k)$

점 Q가 포물선 위의 점이므로 $k^2=8\times8$

따라서 양수 k의 값은 8



26. [출제의도] 쌍곡선을 활용하여 문제를 해결한다.



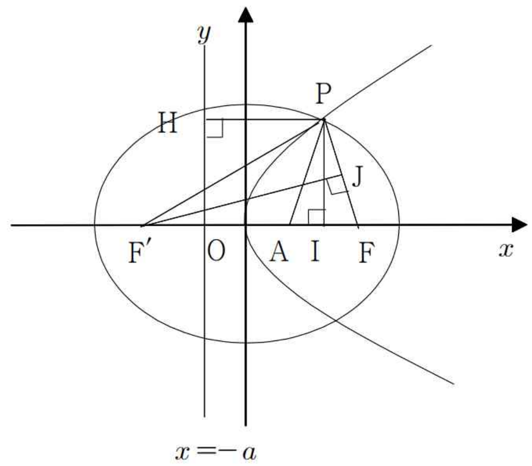
원점을 O, 직선 AP와 원이 접하는 점을 Q라
하면 삼각형 ABP와 삼각형 AOQ는
서로 닮음이고, $\overline{AB}=8$, $\overline{AO}=4$이므로
닮음비는 $2:1$이다.
$\overline{OQ}=r$라 하면 $\overline{BP}=2r$
두 점 A, B가 쌍곡선의 초점이므로
쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{AP}-\overline{BP}=4$
$\overline{AP}=4+2r$
직각삼각형 ABP에서 $(4+2r)^2+(2r)^2=64$
$r^2+2r-6=0$
따라서 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{7}-1$

27. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

선분 BC의 중점을 O라 하고, 직선 BC를 x축으로, 직선 OA를 y축으로 하는 좌표평면을 생각하자.
$\mathrm{B}(-5,0)$, $\mathrm{C}(5,0)$이고 점 P는 두 점 B, C를 초점으로 하고, 주축의 길이가 2인 쌍곡선 위의 점이다.
이 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이라 하면
$2a=2$에서 $a=1$
$25=a^2+b^2$에서 $b^2=24$
즉 쌍곡선의 방정식은 $x^2-\frac{y^2}{24}=1$
$\mathrm{P}(p,q)$라 하면 $p^2-\frac{q^2}{24}=1$이고
$\mathrm{A}(0,5\sqrt{3})$이므로
$\overline{PA}^2=p^2+(q-5\sqrt{3})^2$
$\quad=1+\frac{q^2}{24}+(q-5\sqrt{3})^2$
$\frac{d}{dq}(\overline{PA}^2)=0$에서 $q=\frac{24\sqrt{3}}{5}$이므로
$q=\frac{24\sqrt{3}}{5}$일 때 선분 PA의 길이가 최소이다.
따라서 삼각형 PBC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times10\times\frac{24\sqrt{3}}{5}=24\sqrt{3}$

28. [출제의도] 포물선과 타원의 정의를 이용하여 장축의 길이를 구한다.

$\overline{AF}=2$, $\mathrm{A}(a,0)$이고 삼각형 PAF가 $\overline{PA}=\overline{PF}$인 이등변삼각형이므로 점 P의 x좌표는 $a+1$이다.
한편, 점 P에서 포물선의 준선 $x=-a$에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{PA}=\overline{PH}$
$\quad=(a+1)-(-a)$
$\quad=2a+1$
이때, 이등변삼각형 PAF의 꼭짓점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 I라 하고 $\angle\mathrm{PFI}=\alpha$라 하면
$\cos\alpha=\frac{\overline{IF}}{\overline{PF}}$
$\quad=\frac{\frac{1}{2}\overline{AF}}{\overline{PF}}$
$\quad=\frac{1}{2a+1}$ … ㉠



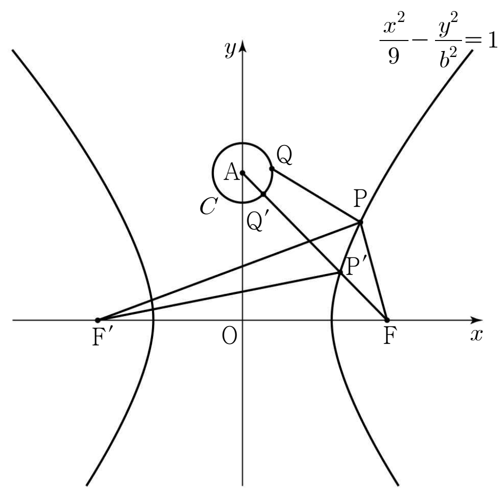
또, 이등변삼각형 PF′F의 꼭짓점 F′에서 변 FP에 내린 수선의 발을 J라 하면 $\mathrm{F}(a+2,0)$이므로
$\cos\alpha=\frac{\overline{FJ}}{\overline{FF'}}$
$\quad=\frac{\frac{1}{2}\overline{PF}}{\overline{FF'}}$
$\quad=\frac{a+\frac{1}{2}}{2a+4}$
$\quad=\frac{2a+1}{4a+8}$ … ㉡
㉠과 ㉡이 같아야 하므로
$\frac{1}{2a+1}=\frac{2a+1}{2a+8}$
$(2a+1)^2=4a+8$
$4a^2+4a+1=4a+8$
$a=\frac{\sqrt{7}}{2}$
따라서, 타원의 장축의 길이는
$\overline{PF'}+\overline{PF}=\overline{FF'}+\overline{PF}$
$\quad=(2a+4)+(2a+1)$
$\quad=4a+5$
$\quad=4\times\frac{\sqrt{7}}{2}+5$
$\quad=5+2\sqrt{7}$
이므로
$p^2+q^2=5^2+2^2=29$

29. [출제의도] 포물선의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

두 점 A, B의 좌표를 각각 a, b라 하자. 포물선 $y^2=4x$의 초점 F의 좌표는 $\mathrm{F}(1,0)$이고 삼각형 AFB의 무게중심 x좌표가 6이므로
$\frac{a+b+1}{3}=6$에서 $a+b=17$
한편, 포물선 위의 점에서 초점까지의 거리는 포물선의 준선까지의 거리와 같고, 포물선 $y^2=4x$의 준선의 방정식은 $x=-1$이므로
$\overline{AF}=a+1$, $\overline{BF}=b+1$
따라서
$\overline{AF}\times\overline{BF}=(a+1)(b+1)$
$\quad=ab+a+b+1=ab+18$
이때 a, b는 $a+b=17$을 만족시키는 자연수이므로 ab는 $a=8$, $b=9$ 또는 $a=9$, $a=8$일 때 최댓값 72를 갖는다.
따라서 구하는 $\overline{AF}\times\overline{BF}$의 최댓값은
$72+18=90$

30. [출제의도] 쌍곡선의 방정식을 활용하여 추론한다.

쌍곡선의 주축의 길이가 6이므로 $a^2=9$
점 P가 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로
$\overline{PF'}-\overline{PF}=6$
$\overline{PQ}+\overline{PF'}=\overline{PQ}+(\overline{PF}+6)=(\overline{PQ}+\overline{PF})+6$
$\overline{PQ}+\overline{PF}$는 두 점 P, Q가 선분 AF 위의 점일 때 최소이다.



그림과 같이 선분 AF가 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{b^2}=1$과 원 C와 만나는 점을 각각 P′, Q′이라 하면
$\overline{PQ}+\overline{PF'}\ge(\overline{P'Q'}+\overline{P'F})+6$
$\quad=(\overline{AF}-1)+6$
$\quad=\sqrt{c^2+25}+5$
$\overline{PQ}+\overline{PF'}$의 최솟값이 12이므로 $\sqrt{c^2+25}+5=12$
$c^2=24$
$\therefore\ b^2=c^2-a^2=24-9=15$
따라서 $a^2+3b^2=9+3\times15=54$