유사문항
정답과 해설

[빠른 정답]

1	①	*2*	④	*3*	30	*4*	⑤	*5*	③
6	27	*7*	⑤	*8*	④	*9*	③	*10*	10
11	③	*12*	12	*13*	④	*14*	20	*15*	②
16	④	*17*	22	*18*	⑤	*19*	①	*20*	②
21	21	*22*	③						
확통				*27*	209	*29*	84		
미적분				*24*	②	*26*	④		
기하				*26*	18	*27*	18	*29*	29

[참고] 해설지의 선택과목 번호는 확통부터 순서대로 23~29번으로 표기되어 있습니다.

---

1) ①

$$\frac{2^{\sqrt{3}-1}}{2^{\sqrt{3}+1}}=2^{(\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+1)}=2^{-2}=\frac{1}{4}$$

2) ④

$$\int_{-3}^{3}(x^3+4x^2)dx+\int_{3}^{-3}(x^3+x^2)dx$$
$$=\int_{-3}^{3}(x^3+4x^2)dx-\int_{-3}^{3}(x^3+x^2)dx$$
$$=\int_{-3}^{3}(x^3+4x^2-x^3-x^2)dx$$
$$=\int_{-3}^{3}3x^2dx=\left[x^3\right]_{-3}^{3}=54$$

3) 30

함수 $y=\log x$의 그래프를 x축의 방향으로 a, y축의 방향으로 b만큼 평행이동시킨 그래프의 방정식은
$y=\log(x-a)+b$이다.
함수 $y=\log(x-a)+b$의 그래프는 점 $(4,\ b)$를 지나므로
$\log(4-a)+b=b$
$\log(4-a)=0$
$4-a=1$
$\therefore\ a=3$
함수 $y=\log(x-3)+b$의 그래프는 점 $(13,\ 11)$을 지나므로
$\log 10+b=11$
$\therefore\ b=10$
따라서 $ab=30$

4) ⑤

$\lim_{x\to 0+} f(x) + \lim_{x\to 2-} f(x) = 2+0=2$

5) ③

$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$

$= 1 - 2\sin\theta\cos\theta = \frac{3}{4}$

이므로 $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{8}$

따라서 $\tan\theta + \cot\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = 8$

6) 27

$f(x) = \int (4x^3 + 4x + 1)dx$

$= x^4 + 2x^2 + x + C$ (단, C는 적분상수)

$f(0) = 1$이므로 $C = 1$

$f(x) = x^4 + 2x^2 + x + 1$

$f(2) = 16 + 8 + 2 + 1 = 27$

7) ⑤

함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x = a$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to a+} |f(x)| = \lim_{x\to a-} |f(x)| = |f(a)|$

$|a^2 - 4| = |a+2|$ 에서 $a^2 - 4 = \pm(a+2)$

(ⅰ) $a^2 - 4 = a + 2$일 때

$a^2 - a - 6 = 0$에서 $a = -2$ 또는 $a = 3$

(ⅱ) $a^2 - 4 = -(a+2)$일 때

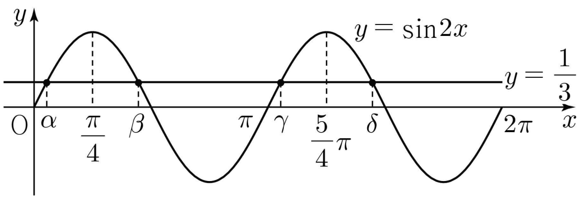
$a^2 + a - 2 = 0$에서 $a = -2$ 또는 $a = 1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 a의 값은 -2, 1, 3으로 그 합은

$(-2) + 1 + 3 = 2$

8) ④

$0 \le x \le 2\pi$ 일 때, 방정식 $\sin 2x = \frac{1}{3}$ 을 만족시키는 해는 두 함수 $y = \sin 2x$, $y = \frac{1}{3}$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같다.



네 교점의 x 좌표 α , β , γ , δ에 대하여 $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{4}$ 이고 $\frac{\gamma+\delta}{2} = \frac{5}{4}\pi$ 이므로

방정식의 모든 해의 합은

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 3\pi$

9) ③

$f(x) = x(x-a)(x-6)$ 이라 하자.

$f(0) = 0$ 이므로 원점은 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이고 원점에서 접하는 접선의 기울기는 $f'(0)$ 이다.

원점이 아닌 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식은

$y - f(t) = f'(t)(x-t)$

이고 이 직선이 원점을 지나므로

$0 - f(t) = f'(t)(0-t)$

$tf'(t) - f(t) = 0$ …… ㉠

$f(x) = x^3 - (a+6)x^2 + 6ax$ 에서

$f'(x) = 3x^2 - 2(a+6)x + 6a$

이므로 ㉠에서

$t\{3t^2 - 2(a+6)t + 6a\} - \{t^3 - (a+6)t^2 + 6at\} = 0$

$2t^3 - (a+6)t^2 = 0$, $t^2\{2t - (a+6)\} = 0$

$t \ne 0$ 이므로 $t = \frac{a+6}{2}$ 이다.

$f'(0) = 6a$, $f'\left(\frac{a+6}{2}\right) = -\frac{1}{4}(a^2 - 12a + 36)$

이므로 $0 < a < 6$ 인 실수 a 에 대하여 두 접선의 기울기의 곱을 $g(a)$ 라 하면

$g(a) = -\frac{3}{2}(a^3 - 12a^2 + 36a)$

$g'(a) = -\frac{3}{2}(3a^2 - 24a + 36) = -\frac{9}{2}(a-2)(a-6)$

$0 < a < 6$ 이므로 $g'(a) = 0$ 에서 $a = 2$

$0 < a < 6$ 에서 함수 $g(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(6)
$g'(a)$		$-$	0	$+$	
$g(a)$		↘	-48	↗	

함수 $g(a)$ 는 $a = 2$ 일 때 극소이면서 최소가 된다.

따라서 $0 < a < 6$ 에서 함수 $g(a)$ 의 최솟값은

$g(2) = -48$ 이다.

10) 10

$\log x^3 - \log \frac{1}{x^2} = 3\log x - (-2\log x) = 5\log x$

$10 \le x < 1000$ 에서

$1 \le \log x < 3$, $5 \le 5\log x < 15$

따라서 $5\log x$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 x 의 개수는 10

[보충 설명]

$5\log x$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 x 의 값을 구하면

$x = 10$, $10^{\frac{6}{5}}$, $10^{\frac{7}{5}}$, $10^{\frac{8}{5}}$, $\cdots$, $10^{\frac{14}{5}}$

11) ③

세 수 α, β, γ가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\beta = \alpha + \gamma$ …… ㉠

세 수 β, α, γ가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\alpha^2 = \beta\gamma$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$(2\beta - \gamma)^2 = \beta\gamma$, $(4\beta - \gamma)(\beta - \gamma) = 0$

에서 $\beta \ne \gamma$이므로 $4\beta = \gamma$이다.

이때, $\alpha < \beta < \gamma$에서 β, α, γ가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

이 등비수열의 공비 r에 대하여 $r < 0$이다.

$r^2 = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{4\beta}{\beta}$에서 $r^2 = 4$, $r = -2$

따라서 방정식 $f(x) = 0$의 서로 다른 세 실근은 β, -2β, 4β이다.

즉, $f(x) = (x - \beta)(x + 2\beta)(x - 4\beta)$이고

$f(0) = 8\beta^3 = 8$에서 $\beta = 1$

따라서 $f(x) = (x-1)(x+2)(x-4)$이므로

$f(5) = 4 \times 7 \times 1 = 28$

12) 12

모든 실수 x에 대하여 $\{f(x) + x^2 - 1\}^2 \ge 0$, $f(x) \ge 0$이므로 정적분 $\int_{-1}^{2} \{f(x) + x^2 - 1\}^2 dx$의 값이 최소가 되기 위해서는

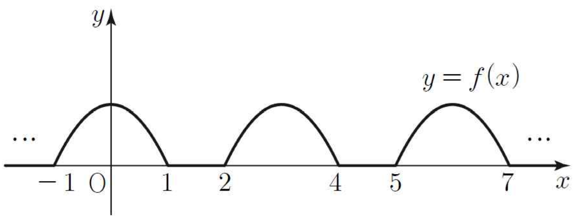
(ⅰ) $-1 \le x \le 1$에서

$x^2 - 1 \le 0$이므로 $f(x) = -(x^2 - 1) = -x^2 + 1$

(ⅱ) $1 < x \le 2$에서

$x^2 - 1 > 0$이므로 $f(x) = 0$

$f(x+3) = f(x)$이고, (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{2}^{5} f(x)dx = \int_{5}^{8} f(x)dx = \cdots = \int_{23}^{26} f(x)dx$

따라서 $\int_{-1}^{26} f(x)dx = 9\int_{-1}^{2} f(x)dx = 9\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx = 12$

13) ④

(ⅰ) $n=1$일 때,

(좌변)$= a_1 = \dfrac{1}{2(2+4)} = \boxed{\dfrac{1}{12}}$

(우변)$= \dfrac{1}{(1+1)^2} - T_1 = \boxed{\dfrac{1}{12}}$

이므로 (★)이 성립한다.

(ⅱ) $n=m$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} - T_m$ 이다.

$n=m+1$일 때, (★)이 성립함을 보이자.

$(m+1+1)a_{m+1} = T_{m+1} - T_m$이므로

$a_{m+1} = \dfrac{1}{m+2}(T_{m+1} - T_m)$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} - T_m + a_{m+1}$

$\displaystyle= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} - T_m + \boxed{\frac{1}{m+2}}(T_{m+1} - T_m)$

$\displaystyle= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} - T_{m+1} + \frac{m+3}{m+2}(T_{m+1} - T_m)$

$\displaystyle= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} - T_{m+1} + \frac{1}{(m+2)^2}$

$\displaystyle= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{(k+1)^2} - T_{m+1}$

그러므로 $n=m+1$일 때도 (★)이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 (★)이 성립한다.

$\alpha = \dfrac{1}{12}$, $f(2) = \dfrac{1}{4}$. 따라서 $\dfrac{\alpha}{f(2)} = \dfrac{1}{3}$

14) 20

$a(t)=3t^2-18t+24$에서 $v(t)=t^3-9t^2+24t+k$이다.

시각 $t=1$에서 시각 $t=6$까지 점 P의 위치의 변화량 p와

점 P가 움직인 거리 q에 대하여 $|p|=q$이므로

$1 \le t \le 6$에서 함수 $v(t)$의 부호가 변하지 않는다.

$a(t)=3t^2-18t+24=3(t-2)(t-4)$에서 함수 $v(t)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 그리면

x	(1)	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$	(6)
$a(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$v(t)$	$k+16$	↗	$k+20$	↘	$k+16$	↗	$k+36$

$1 \le t \le 6$에서 함수 $v(t)$의 부호가 변하지 않으므로

$k+36 \le 0$ 또는 $k+16 \ge 0$

즉, $k \le -36$ 또는 $k \ge -16$

따라서 $\alpha=-36$, $\beta=-16$이고 $\beta-\alpha=(-16)-(-36)=20$

15) ②

(ⅰ) $a_1 \le a_2$일 때,

$a_3=2a_1+a_2=2$ ⋯ ㉠

이므로 $a_2>0$

① $a_1 \ge 0$일 때

$a_2 \le a_3$이므로 $a_4=2a_2+a_3=2a_2+2$

$a_3 \le a_4$이므로 $a_5=2a_3+a_4=2a_2+6$

$a_4 \le a_5$이므로 $a_6=2a_4+a_5=6a_2+10$

이때, $a_6=19$이므로 $6a_2+10=19$

$a_2=\dfrac{3}{2}$

$a_2=\dfrac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면 $2a_1+\dfrac{3}{2}=2$

$a_1=\dfrac{1}{4}$

② $a_1<0$일 때

$a_2>a_3$이므로 $a_4=a_2+a_3=a_2+2$

$a_3 \le a_4$이므로 $a_5=2a_3+a_4=a_2+6$

$a_4 \le a_5$이므로 $a_6=2a_4+a_5=3a_2+10$

이때, $a_6=19$이므로 $3a_2+10=19$

$a_2=3$

$a_2=3$을 ㉠에 대입하면 $2a_1+3=2$

$a_1=-\dfrac{1}{2}$

(ⅱ) $a_1>a_2$일 때

$a_3=a_1+a_2=2$ ⋯ ㉡

이므로 $a_1>0$

$a_2 \le a_3$이므로 $a_4 = 2a_2 + a_3 = 2a_2 + 2$

① $a_2 \ge 0$일 때

$a_3 \le a_4$이므로 $a_5 = 2a_3 + a_4 = 2a_2 + 6$

$a_4 \le a_5$이므로 $a_6 = 2a_4 + a_5 = 6a_2 + 10$

이때, $a_6 = 19$이므로 $6a_2 + 10 = 19$

$a_2 = \frac{3}{2}$

$a_2 = \frac{3}{2}$을 ㉡에 대입하면 $a_1 + \frac{3}{2} = 2$

$a_1 = \frac{1}{2}$

이때, $a_1 < a_2$이므로 주어진 조건을 만족시키는 a_1의 값은 존재하지 않는다.

② $a_2 < 0$일 때

$a_3 > a_4$이므로 $a_5 = a_3 + a_4 = 2a_2 + 4$

$a_4 \le a_5$이므로 $a_6 = 2a_4 + a_5 = 6a_2 + 8$

이때, $a_6 = 19$이므로 $6a_2 + 8 = 19$

$a_2 = \frac{11}{6}$

이때, $a_2 > 0$이므로 주어진 조건을 만족시키는 a_2와 a_1의 값은 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a_1 = \frac{1}{4}$ 또는 $a_1 = -\frac{1}{2}$

따라서 모든 a_1의 값의 합은 $\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

[다른 풀이]

$a_3 = 2$, $a_6 = 19$

(ⅰ) $a_3 \le a_4$인 경우

$a_5 = 4 + a_4$, $a_6 = 3a_4 + 4$

$\therefore a_4 = 5$

① $a_2 \le a_3$인 경우 : $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$

$a_1 \le a_2$일 때 $a_1 = \frac{1}{4}$

$a_1 > a_2$일 때 $a_1 = \frac{1}{2}$(조건을 만족하지 않는다.)

② $a_2 > a_3$인 경우 : $a_2 = 3$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$

$a_1 \le a_2$일 때 $a_1 = -\frac{1}{2}$

$a_1 > a_2$일 때 $a_1 = -1$(조건을 만족하지 않는다.)

(ⅱ) $a_3 > a_4$인 경우

$a_5 = a_4 + 2$, $a_6 = 3a_4 + 2$

$\therefore a_4 = \frac{17}{3}$(조건을 만족하지 않는다.)

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a_1=\frac{1}{4}$ 또는 $a_1=-\frac{1}{2}$

따라서 모든 a_1의 값의 합은 $\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$

16) ④

$\frac{a_3}{a_2}=2$이므로 공비는 2이다.

$a_5=\frac{1}{8}\times 2^4=2$

17) 22

$f'(x)=(2x+3)'\times(x^2+5)+(2x+3)\times(x^2+5)'$

$=2(x^2+5)+(2x+3)\times 2x$

$=6x^2+6x+10$

$f'(1)=6+6+10=22$

18) ⑤

$\log_a\frac{a^3}{b^2}=\log_a a^3-\log_a b^2=3-2\log_a b=2$

$\log_a b=\frac{1}{2}$, $\log_b a=2$

따라서 $\log_a b+3\log_b a=\frac{1}{2}+6=\frac{13}{2}$

19) ①

$f'(x)=3x^2+12x+9=3(x+1)(x+3)$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값을 가지므로

$f(-1)=-1+6-9+a=-6$

따라서 $a=-2$

20) ②

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d\ (d>0)$이라 하면

$a_5=5$이므로 $a_3=5-2d$, $a_4=5-d$, $a_6=5+d$, $a_7=5+2d$

그러므로

$$\sum_{k=3}^{7}|2a_k-10|=|2a_3-10|+|2a_4-10|+|2a_5-10|+|2a_6-10|+|2a_7-10|$$

$=|-4d|+|-2d|+0+|2d|+|4d|$

$=12d=20$

따라서 $d=\frac{5}{3}$이므로 $a_6=a_5+d=\frac{20}{3}$

21) 21

$\overline{\mathrm{AB}}=3a$, $\overline{\mathrm{AC}}=a$라 하면

$\overline{\mathrm{BC}}^2=9a^2+a^2-2\cdot 3a\cdot a\cos\frac{\pi}{3}$

$=7a^2$

$\therefore \overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{7}a$

$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\sqrt{7}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{7}a}{\sqrt{3}}=2\times 7$

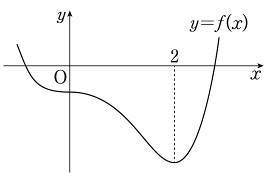
$a=\sqrt{21}=\overline{\mathrm{AC}}$

따라서 $k^2=21$

22) ③

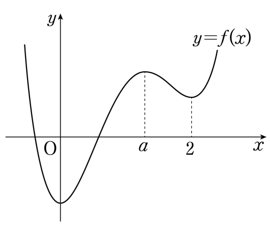
조건 (나)에서 $|f(x)|\geq 0$ 이므로 방정식 $|f(x)|=f(0)$ 이 실근을 갖지 않으려면 $f(0)<0$ 이어야 한다.

ㄱ. $a=0$ 이면 조건 (가)에서 $f'(x)=x^2(x-2)$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



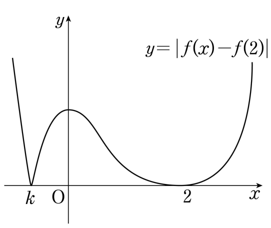
따라서 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. (반례) $0<a<2$ 이고 $f(a)>0$ 일 때, $f(2)>0$ 이면 그림과 같이 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (거짓)



ㄷ. 함수 $|f(x)-f(2)|$ 가 $x=k$ 에서만 미분가능하지 않으려면 $f(x)-f(2)=\frac{1}{4}(x-k)(x-2)^3$ 이어야 한다.

또, $f'(0)=0$ 이므로 함수 $y=|f(x)-f(2)|$ 의 그래프는 다음과 같다.



이때 함수 $|f(x)-f(2)|$ 는 $k<0$ 인 실수 k 에 대하여 $x=k$ 에서만 미분가능하지 않다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

23) 209

집합 Y의 원소들을 3으로 나누었을 때의 나머지가 같은 수들을 원소로 하는 집합 Y의 부분집합을 각각 $A=\{1, 4\}$, $B=\{2, 5\}$, $C=\{3\}$이라 하자.

(i) $f(4)=3$인 경우

$f(1)+f(2)+f(3)=3k$(k는 자연수)이므로

집합 A, B, C의 원소 중에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값으로 선택할 수 있는 원소의 개수와 각 경우의 함수의 개수는 표와 같다.

A	B	C	함수의 개수
1	1	1	$3!\times2\times2=24$
3	0	0	$2^3=8$
0	3	0	$2^3=8$
0	0	3	$1^3=1$

$\therefore\ 24+8+8+1=41$

(ii) $f(4)=1$ 또는 $f(4)=4$인 경우

$f(1)+f(2)+f(3)=3k+1$ (k는 자연수)이므로 집합 A, B, C의 원소 중에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값으로 선택할 수 있는 원소의 개수와 각 경우의 함수의 개수는 표와 같다.

A	B	C	함수의 개수
1	0	2	$3\times2=6$
2	1	0	$3\times2^2\times2=24$
0	2	1	$3\times2^2=12$

$\therefore\ 2\times(6+24+12)=84$

(iii) $f(4)=2$ 또는 $f(4)=5$인 경우

$f(1)+f(2)+f(3)=3k+2$ (k는 자연수)이므로 집합 A, B, C의 원소 중에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값으로 선택할 수 있는 원소의 개수와 각 경우의 함수의 개수는 표와 같다.

A	B	C	함수의 개수
1	2	0	$3\times2^2\times2=24$
2	0	1	$3\times2^2=12$
0	1	2	$3\times2=6$

$\therefore\ 2\times(24+12+6)=84$

따라서 구하는 함수의 개수는 $41+84+84=209$

[다른 풀이]

(i) $f(4)=3$인 경우

집합 Y의 원소 중 중복을 허락하여 선택한 세 수들의 합을 3으로 나눈 나머지가 0이 되는 수들의 순서쌍은

$(1, 1, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(3, 3, 3)$, $(4, 4, 4)$, $(5, 5, 5)$와

$(1, 1, 4)$, $(1, 4, 4)$, $(2, 2, 5)$, $(2, 5, 5)$와

$(1, 2, 3)$, $(1, 3, 5)$, $(2, 3, 4)$, $(3, 4, 5)$이고,

각 순서쌍을 이루는 수들을 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 되도록 나열하는 방법의 수는

$$5\times\frac{3!}{3!}+4\times\frac{3!}{2!}+4\times3!=41$$

(ii) $f(4)=1$ 또는 $f(4)=4$인 경우

집합 Y의 원소 중 중복을 허락하여 선택한 세 수들의 합을 3으로 나눈 나머지가 1이 되는 수들의 순서쌍은

$(1, 1, 2)$, $(1, 1, 5)$, $(1, 3, 3)$, $(2, 2, 3)$, $(2, 4, 4)$, $(3, 3, 4)$, $(3, 5, 5)$, $(4, 4, 5)$와

$(1, 2, 4)$, $(1, 4, 5)$, $(2, 3, 5)$이고,

각 순서쌍을 이루는 수들을 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 되도록 나열하는 방법의 수는

$8\times\dfrac{3!}{2!}+3\times 3!=42$

$\therefore\ 42\times 2=84$

(iii) $f(4)=2$ 또는 $f(4)=5$인 경우

집합 Y의 원소 중 중복을 허락하여 선택한 세 수들의 합을 3으로 나눈 나머지가 2가 되는 수들의 순서쌍은

$(1, 1, 3)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 5, 5)$, $(2, 2, 4)$, $(2, 3, 3)$, $(3, 3, 5)$, $(3, 4, 4)$, $(4, 5, 5)$와

$(1, 2, 5)$, $(1, 3, 4)$, $(2, 4, 5)$이고,

각 순서쌍을 이루는 수들을 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 되도록 나열하는 방법의 수는

$8\times\dfrac{3!}{2!}+3\times 3!=42$

$\therefore\ 42\times 2=84$

따라서 구하는 함수의 개수는 $41+84+84=209$

24) 84

(가)를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_{14}={}_{16}\mathrm{C}_2=120$

(나)에서 $a\neq 2$, $b\neq 2$, $c\neq 2$

(i) a, b, c 중 1개가 2인 경우

$a=2$일 때, $b+c=12$를 만족시키는 b와 c의 모든 순서쌍 (b, c)의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_{12}$이고 $(2, 10)$, $(10, 2)$인 경우를 제외하면 ${}_2\mathrm{H}_{12}-2=11$

$b=2$, $c=2$인 경우의 수도 각각 11이므로 a, b, c 중 1개가 2인 경우의 수는 $11\times 3=33$

(ii) a, b, c 중 2개가 2인 경우

순서쌍 (a, b, c)를 구하면 $(2, 2, 10)$, $(2, 10, 2)$, $(10, 2, 2)$의 세 가지 경우가 있다.

따라서 구하는 경우의 수는 $120-(33+3)=84$

25) ②

$\dfrac{(4x-1)^n}{2^{3n}+3^{2n}}=\dfrac{(4x-1)^n}{8^n+9^n}=\dfrac{\left(\dfrac{4x-1}{9}\right)^n}{\left(\dfrac{8}{9}\right)^n+1}$에서

$n\to\infty$일 때, $\left(\dfrac{8}{9}\right)^n\to 0$이므로 주어진 수열이 수렴하려면

등비수열 $\left\{\left(\dfrac{4x-1}{9}\right)^n\right\}$이 수렴해야 한다.

$-1<\dfrac{4x-1}{9}\leq 1$에서 $-2<x\leq\dfrac{5}{2}$이므로

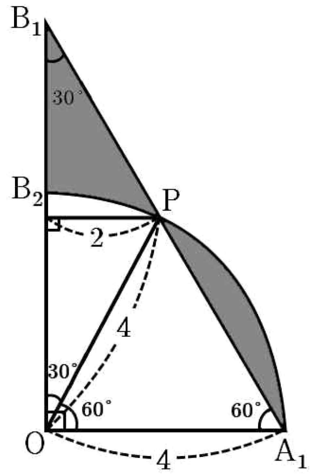
수열 $\left\{\dfrac{(4x-1)^n}{2^{3n}+3^{2n}}\right\}$이 수렴하기 위한 모든 정수 x의 개수는 4이다.

26) ④

직각삼각형 OA_1B_1 에서 $\overline{OA_1}=4$, $\overline{OB_1}=4\sqrt{3}$ 으므로

부채꼴 OA_1B_2 와 선분 A_1B_1 이 만나는 점을 P 라 하면

$\angle OA_1B_1=60°$, $\angle OB_1A_1=30°$, $\overline{OP}=4$ 이다.



따라서 위 그림에서 구하는 면적은

삼각형 OPB_1 에서 반지름의 길이가 4 이고 중심각의 크기가 $30°$ 인 부채꼴의 넓이를 뺀 면적과,

반지름의 길이가 4 이고 중심각의 크기가 $60°$ 인 부채꼴 OPA_1 에서

한 변의 길이가 4 인 정삼각형의 넓이를 뺀 면적을 더한 것과 같다.

따라서

$R_1=(\Delta OPB_1-\text{ 부채꼴 } OPB_2)+(\text{부채꼴 } OPA_1-\Delta OPA_1)$

$=\left(4\sqrt{3}\times 2\times\frac{1}{2}-16\pi\times\frac{1}{12}\right)+\left(16\pi\times\frac{1}{6}-4\sqrt{3}\right)$

$=\left(\frac{12\sqrt{3}-4\pi}{3}\right)+\left(\frac{8\pi-12\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi$

색칠한 바깥쪽과 안쪽 도형의 닮음비는 $\overline{OB_1}:\overline{OB_2}=4\sqrt{3}:4$

따라서 도형의 넓이비는 $3:1$ 이기 때문에 S_n 은 첫째항이 $\frac{4}{3}\pi$, 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{1}{3}}=2\pi$

27) 18

접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$ 이라 하면 접점은 타원 위의 점이므로 $\frac{x_1^2}{12}+\frac{y_1^2}{16}=1$ …… ㉠

접점 $(x_1,\ y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

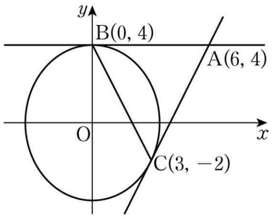
$\frac{x_1x}{12}+\frac{y_1y}{16}=1$

이 접선이 점 $(6,\ 4)$를 지나므로 $\frac{x_1}{2}+\frac{y_1}{4}=1$ 에서

$y_1 = 4 - 2x_1$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $x_1^2 - 3x_1 = 0$, $x_1 = 0$ 또는 $x_1 = 3$

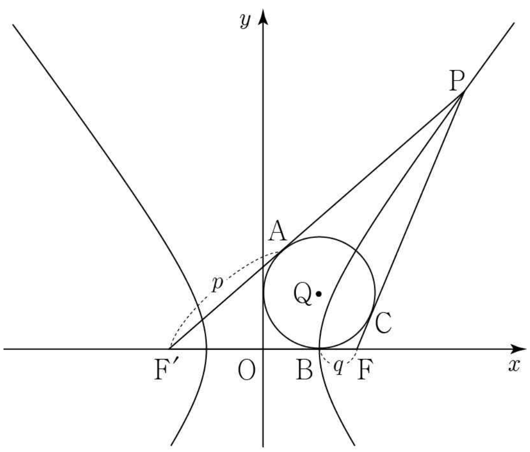
이때 두 접점 $(0,\ 4)$, $(3,\ -2)$를 각각 B, C라 하자.



$\overline{\mathrm{AB}} = 6 - 0 = 6$이고, 직선 AB는 x축에 평행하므로 점 C와 직선 AB 사이의 거리는 $4-(-2)=6$이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\dfrac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$

28) 18



주어진 쌍곡선의 두 초점 F′, F의 좌표는 $\mathrm{F}'(-5,\ 0)$, $\mathrm{F}(5,\ 0)$이다.

그림과 같이 삼각형 PF′F에 내접하는 원과 삼각형의 세 변의 접점을 각각 A, B, C라 하자.

$\overline{\mathrm{AF}'} = \overline{\mathrm{F}'\mathrm{B}} = p$, $\overline{\mathrm{BF}} = \overline{\mathrm{FC}} = q$라 하면

$\overline{\mathrm{PF}'} - \overline{\mathrm{PF}} = p - q = 6$

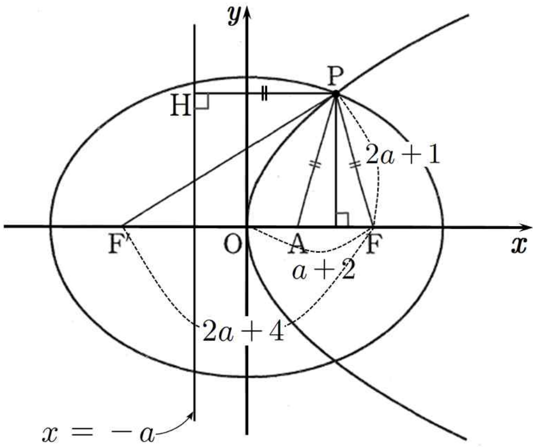
$\overline{\mathrm{F}'\mathrm{B}} + \overline{\mathrm{BF}} = p + q = 10$

$p = 8$이므로 점 B의 좌표는 $(3,\ 0)$이다.

삼각형 PF′F에 내접하는 원의 중심 Q의 좌표는 $(3,\ 3)$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{OQ}}^{\,2} = 18$

29) 29



P의 x좌표는 $a+1$이고 포물선의 정의에 의하여

$\overline{PA}=\overline{PH}=\overline{PF}=2a+1$이고, $\overline{FF'}=\overline{PF'}=2a+4$이다.

$\triangle PAF$와 $\triangle F'FP$는 닮음이므로

$(2a+4):(2a+1)=(2a+1):2$가 성립한다.

⇨ $(2a+1)^2=2(2a+4)$

⇨ $4a^2=7$

$\therefore\ a=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$이다.

한편 타원의 정의에 의하여 장축의 길이는 $\overline{F'P}+\overline{FP}$와 같다.

$$\begin{aligned}\overline{F'P}+\overline{FP}&=(2a+4)+(2a+1)\\&=4a+5\\&=5+2\sqrt{7}\end{aligned}$$

따라서 $p=5$, $q=2$이므로 $p^2+q^2=29$이다.

[다른 풀이]

포물선의 방정식은 $y^2=4ax$이고, 점 P의 x좌표는 $a+1$이므로 $P(a+1, \sqrt{4a^2+4a})$이다.

점 P에서 포물선의 준선 $x=-a$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{PF}=\overline{PA}=\overline{PH}=2a+1$

또한 F의 x좌표 c는 $a+2$이고

$\overline{PF'}=\overline{FF'}=2c=2a+4$

따라서 장축의 길이는 $\overline{PF}+\overline{PF'}=4a+5$

한편 $\overline{AF}$의 중점을 M이라고 하면

$\overline{PF'}^2=\overline{F'M}^2+\overline{PM}^2$이므로

$(2a+4)^2=(2a+3)^2+\left(\sqrt{4a^2+4a}\right)^2$

$\therefore a=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

(장축의 길이)$=4a+5=5+2\sqrt{7}$

$\therefore p=5, q=2$

$p^2+q^2=29$

불꽃수학
김성은