문항 분석, 유사문항 풀어보기까지

3월 모의고사

완벽 분석!

★★★ 자료 사용 설명서 ★★★

1. 2021년 시행 3월 모의고사 문제지를 푼다!

2. 채점 후 오답 문항을 다시 풀어본다!

3. 오답 점검 후 이 자료를 보며, 왼쪽 페이지 (짝수 페이지)의 분석 내용을 읽는다!

   point : 놓친 개념이나 풀이의 비약은 없는지, 접근 방법이 제대로 되었는지 확인하기!

4. 분석 후 오른쪽 페이지 (홀수 페이지)의 유사 문항을 풀어 보며

   공부한 내용을 잘 습득했는지 점검한다!

001 $\log_8 16$ 의 값은? [2점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

로그의 연산 성질을 활용하는 문제야.

$\log_a b + \log_a c = \log_a bc$

$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$

$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$

* 로그의 기본 성질

$\log_a b = c$

- $a>0,\ a\neq 1$ (밑 조건)
- $b>0$ (진수 조건)
- $a^c = b$

$\log_8 16 = \log_{2^3} 2^4 = \frac{4}{3}\log_2 2 = \frac{4}{3}$

유사문항에도 로그의 기본 연산 문제를 수록해 뒀으니 풀어봐!

[1-2020년 시행 9월 모평 나형 24번]

$\log_5 40 + \log_5 \frac{5}{8}$의 값을 구하시오. [3점]

002 공차가 3 인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_4 = 100$일 때, a_1의 값은? [2점]

① 91 ② 93 ③ 95 ④ 97 ⑤ 99

등차수열의 일반항 문제야.

첫째항을 a_1, 공차를 d라 하면 $a_n = a_1 + (n-1)d$

등차수열 문제가 나오면, 첫째항과 공차를 찾아봐야겠지.

$a_n = a_1 + 3(n-1)$

$a_4 = a_1 + 3 \cdot 3 = 9 + a_1 = 100$

$\rightarrow a_1 = 91$

유사문항에는 등비수열의 일반항 문제를 수록해 두었어.

* 등비수열의 일반항

첫째항이 a_1, 공비가 r인 등비수열 a_n

$\rightarrow a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

[2-2020년 시행 대수능 나형 2번]

첫째항이 $\frac{1}{8}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\frac{a_3}{a_2}=2$일 때, a_5의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

003 $0 \le x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $\sin 4x = \frac{1}{2}$ 의 서로 다른 실근의 개수는? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

삼각함수의 그래프와 기본 성질 (주기, 대칭성, 최대·최소)을 활용하는 문제야.

* 삼각함수의 기본 성질 $(b \neq 0)$

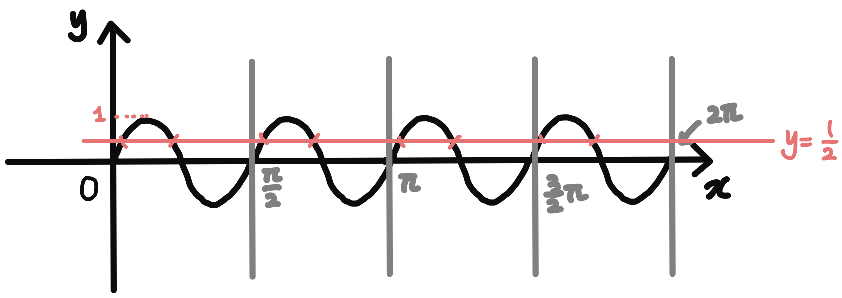
$y = a\sin bx + c$ (또는 $y = a\cos bx + c$)

- 주기 : $\frac{2\pi}{|b|}$
- 최댓값 : $|a| + c$
- 최솟값 : $-|a| + c$

$y = a\tan bx + c$

- 주기 : $\frac{\pi}{|b|}$
- 최댓값, 최솟값 : 없음

$y = \sin 4x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 임을 바탕으로 $0 \le x < 2\pi$ 에서의 그래프를 그려 볼게.



위의 그래프에서 볼 수 있듯이, $y = \frac{1}{2}$ 과 $y = \sin 4x$ 의 서로 다른 실근의 개수는 8개야!

유사문항에도 이 문제와 비슷하게 그래프를 활용하는 문제를 수록해 뒀어!

[3-2022학년도 수능 예시문항 8번]

함수 $y=6\sin\frac{\pi}{12}x\ (0\le x\le 12)$의 그래프와 직선 $y=3$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이는? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

004 $\int_{2}^{-2}(x^3+3x^2)\,dx$ 의 값은? [3점]

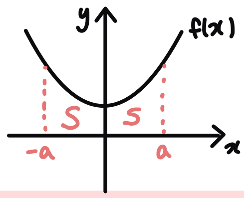
① -16　② -8　③ 0　④ 8　⑤ 16

정적분 문제인데, 우함수와 기함수의 성질을 활용하면 더 간단하게 풀 수 있어!

* 우함수와 기함수의 정적분 : 적분구간의 양 끝이 부호만 다르고 절댓값이 같은 경우

① 우함수 : y축 대칭 함수 $(f(-x)=f(x))$

→ 다항함수인 경우 : 짝수차항만 존재함

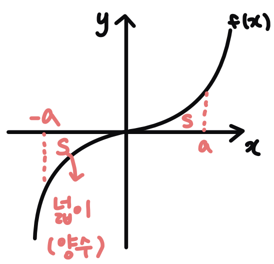


$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2S = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$\boxed{\therefore \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx}$$

② 기함수 : 원점 대칭인 함수 $(f(-x)=-f(x))$

→ 다항함수인 경우 : 홀수차항만 존재함



$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = (-S)+(S) = 0$$

$$\boxed{\therefore \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0}$$

$$\int_{2}^{-2}(x^3+3x^2)\,dx = -\int_{-2}^{2}(x^3+3x^2)\,dx$$

$$= -2\int_{0}^{2} 3x^2\,dx = -2\left[x^3\right]_{0}^{2}$$

$$= -2\cdot 8 = -16$$

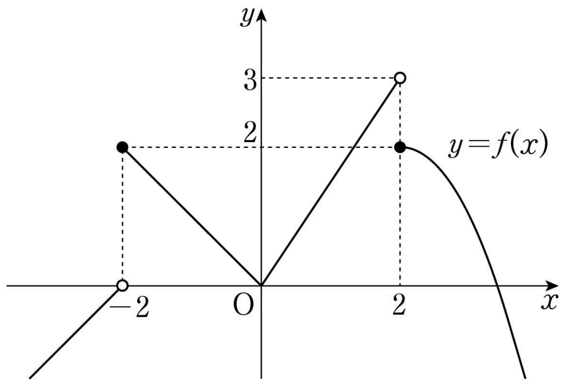
유사문항에도 마찬가지로 적분구간의 위끝과 아래끝을 바꾸어서 우함수, 기함수의 성질을 활용해 적분하는 문항을 수록해 뒀어!

[4-2019년 시행 10월 학평 나형 6번]

$\int_{-3}^{3}(x^3+4x^2)dx+\int_{3}^{-3}(x^3+x^2)dx$ 의 값은? [3점]

① 36 ② 42 ③ 48 ④ 54 ⑤ 60

005 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

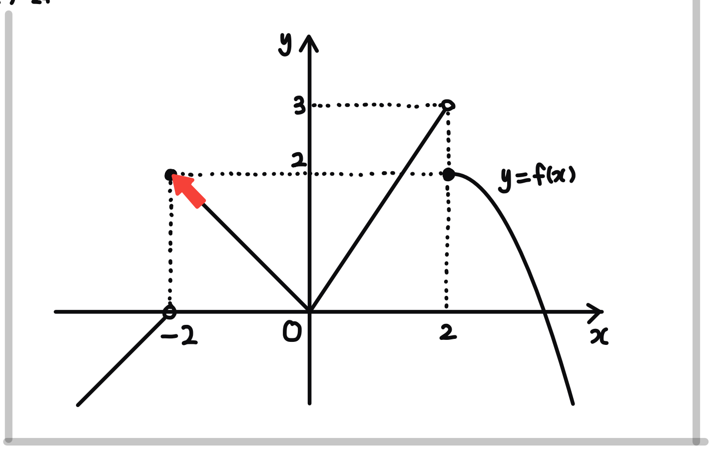


$\lim_{x\to-2+} f(x) + \lim_{x\to2-} f(x)$의 값은? [3점]

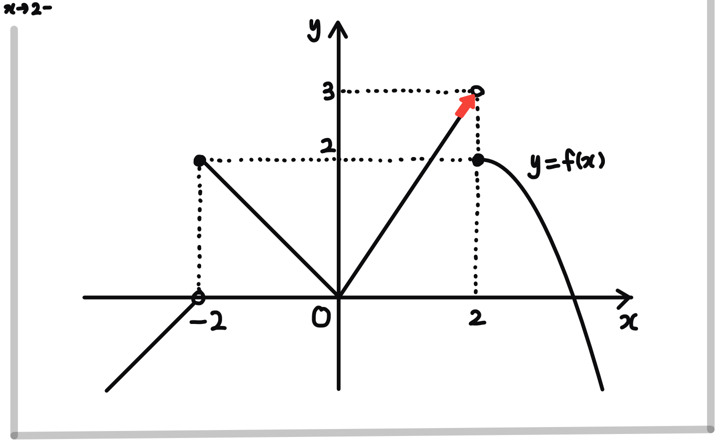
① 6　② 5　③ 4　④ 3　⑤ 2

함수의 극한 문제 중 그래프를 통해 함수의 좌극한, 우극한, 함숫값을 판단하는 기본 문제야.

$\lim_{x\to-2+} f(x) = 2$



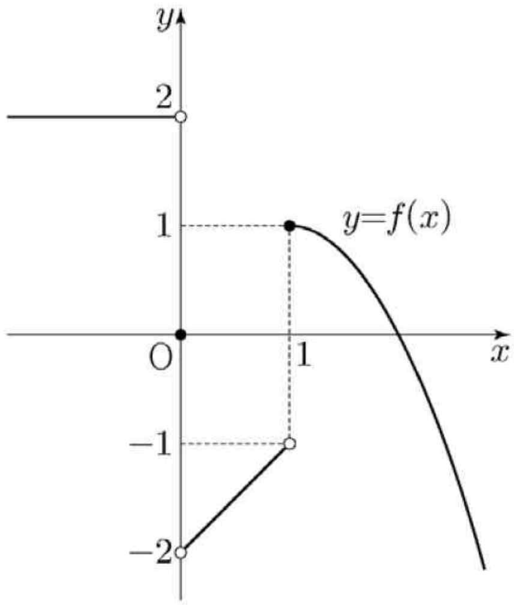
$\lim_{x\to2-} f(x) = 3$



유사문항에도 그래프에서 극한값을 찾는 문항을 수록해 뒀어!

[5-2022학년도 수능 예시문항 4번]

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 0-} f(x) - \lim_{x \to 1+} f(x)$ 의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

006 함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{x-3} & (x<3)\\[2mm] \dfrac{2x+1}{x-2} & (x\ge 3)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

함수의 연속에 관한 문제야.

* 함수의 연속

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이다

$\Leftrightarrow \lim_{x\to a-} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a+} f(x)$

함수 $f(x)$는 $x<3$, $x\ge 3$ 에서 각각 연속이기 때문에,

$x=3$ 에서만 연속이면 모든 실수에서 연속이라고 할 수 있어.

따라서 $\lim_{x\to 3-} f(x) = \lim_{x\to 3+} f(x) = f(3)$ 을 만족해야 해.

$\lim_{x\to 3-} \dfrac{x^2+ax+b}{x-3} = \lim_{x\to 3+} \dfrac{2x+1}{x-2} = 7$

$\lim_{x\to 3-} \dfrac{x^2+ax+b}{x-3} = 7$ 에서 $x\to 3$ 일 때 분모 $\to 0$ 이므로 분자 $\to 0$ 이어야 해.

$\to 9+3a+b=0$

여기서 두가지 풀이방법이 있어.

i) 정석 풀이

$b=-3a-9$ 에서 $\lim_{x\to 3-} \dfrac{x^2+ax-3a-9}{x-3} = \lim_{x\to 3-} \dfrac{(x-3)(x+a+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3-}(x+a+3) = a+6=7$

$\to a=1,\ b=-12$

ii) 로피탈

$\lim_{x\to 3-} \dfrac{x^2+ax+b}{x-3} = \lim_{x\to 3-} \dfrac{2x+a}{1} = 6+a$ …(이하 동일)

참고로 로피탈의 정리는 0/0 꼴일 때 계산을 줄이는 용도로 사용할 수 있어.

교육과정 외의 내용이기는 하지만, 사용하면 계산이 훨씬 편해져.

$x\to a$ 일때 $f(x)\to 0$, $g(x)\to 0$ 인 경우 $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a} \dfrac{g'(x)}{f'(x)}$

유사문항에도 함수의 연속성을 조사하는 비슷한 문제를 수록해 뒀어.

[6-2020년 시행 사관학교 나형 26번]

함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-10 & (x \le a) \\ \dfrac{x^2+ax+4a}{x-a} & (x > a) \end{cases}$$

가 $x=a$에서 연속일 때, $f(2a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]

007 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{(n+1)^2}{2} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{n^2}{2}+n+1 & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

일 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [3점]

① 235　② 240　③ 245　④ 250　⑤ 255

수열의 귀납적 정의 문제야.

수열 문제에서는 등차수열, 등비수열이 아니라면 식을 세우려는 접근보다는,

n=1부터 대입해가면서 규칙성을 파악하는 것이 좋아!

i) n이 홀수인 경우 (n=1, 3, 5, 7, 9)

$$\frac{2^2}{2}+\frac{4^2}{2}+\frac{6^2}{2}+\frac{8^2}{2}+\frac{10^2}{2}=\frac{1}{2}(2^2+4^2+6^2+8^2+10^2)$$

ii) n이 짝수인 경우 (n=2, 4, 6, 8, 10)

$$\frac{1}{2}(2^2+4^2+6^2+8^2+10^2)+(2+4+6+8+10)+1\times5$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n = 2\times\frac{1}{2}(2^2+4^2+6^2+8^2+10^2)+(2+4+6+8+10)+5$$

$$=220+30+5=255$$

참고로 이 부분은 식을 세워 계산해도 되고, 직접 계산해도 좋아.

식을 세우는 경우 $\sum_{n=1}^{5}(2n)^2=\sum_{n=1}^{5}4n^2=4\times\frac{5\cdot6\cdot11}{6}=220$

이렇게 계산할 수 있으니 참고해!

유사문항에도 비슷한 방법으로 경우를 나누어 푸는 문제를 수록해 놨어.

[7-2020년 시행 3월 학평 가형 9번]

수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 7$ 이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n + 3}{2} & (a_n \text{이 소수인 경우}) \\ a_n + n & (a_n \text{이 소수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. a_8의 값은? [3점]

① 11　② 13　③ 15　④ 17　⑤ 19

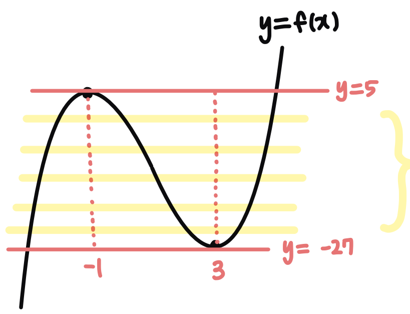
008 곡선 $y=x^3-3x^2-9x$ 와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 정수 k 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M-m$ 의 값은? [3점]

① 27 ② 28 ③ 29 ④ 30 ⑤ 31

삼차함수와 상수함수의 교점을 파악하는 문제야.

먼저 $f(x)=x^3-3x^2-9x$ 로 두고 $f(x)$ 의 개형을 파악해 볼게.

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$ 에서 $f(x)$는 $x=-1$, $x=3$ 에서 극값을 가짐을 알 수 있지.



이 부분에서 서로 다른 세 실근을 가져.

$M=4$, $m=-26$

$\rightarrow M-m=4-(-26)=30$

유사문항에도 비슷하게 삼차함수의 개형을 파악해서 교점을 찾는 문제를 수록해 뒀어

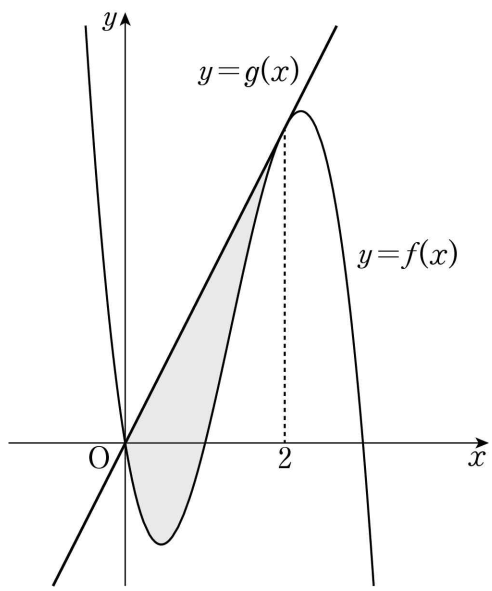
[8-2020년 시행 6월 모평 나형 19번]

방정식 $2x^3+6x^2+a=0$이 $-2 \le x \le 2$에서 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 정수 a의 개수는? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

009 최고차항의 계수가 -3인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$와 원점에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는? [4점]

① $\dfrac{7}{2}$　② $\dfrac{15}{4}$　③ 4　④ $\dfrac{17}{4}$　⑤ $\dfrac{9}{2}$



곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 문제야. 이 문제는 꼭 잘 봐둬!

삼차함수 $f(x)$와 일차함수 $g(x)$가 $x=2$에서 접하고 $x=0$에서 실근을 가지므로

$f(x)-g(x)=-3x(x-2)^2$ 라는 식을 쓸 수 있어.

$$\int_0^2 \{g(x)-f(x)\}dx = \int_0^2 3x(x-2)^2 dx$$

$$= \int_0^2 (3x^3-12x^2+12x)dx$$

$$= \left[\frac{3}{4}x^4-4x^3+6x^2\right]_0^2 = \frac{3}{4}\cdot 16-32+24=4$$

유사문항에 어려운거 넣어둬서 미안해..ㅠㅠ 하지만 이 방식으로 식을 써내려가는 문제가

기출에 많지 않아서 어쩔 수 없었어..

꼭 풀어보길 바라!!

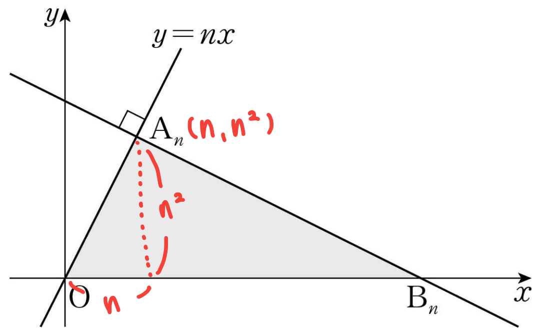
[9-2017년 시행 6월 모평 나형 30번]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(\alpha)=g(\alpha)$이고 $f'(\alpha)=g'(\alpha)=-16$인 실수 α가 존재한다. (나) $f'(\beta)=g'(\beta)=16$인 실수 β가 존재한다.

$g(\beta+1)-f(\beta+1)$의 값을 구하시오. [4점]

010 자연수 n에 대하여 점 $\mathrm{A}_n(n, n^2)$을 지나고 직선 $y=nx$에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 B_n이라 하자.



다음은 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{8}\frac{S_n}{n^3}$의 값을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)

점 $\mathrm{A}_n(n, n^2)$을 지나고 직선 $y=nx$에 수직인 → 기울기 $-\frac{1}{n}$ = (가)

직선의 방정식은

$$y = \boxed{(가)} \times x + n^2 + 1$$

y=0 대입 → $x = (n+n^3)$ → $\mathrm{B}_n(n+n^3, 0)$

이므로 두 점 A_n, B_n의 좌표를 이용하여 S_n을 구하면

$S_n = \frac{1}{2} \times (n+n^3) \times n^2$ = (나)

$$S_n = \boxed{(나)}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{8}\frac{S_n}{n^3} = \boxed{(다)}$$

$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{8}(1+n^2) = \frac{1}{2}\left(8+\frac{8\cdot9\cdot17}{6}\right) = \frac{1}{2}(8+204) = 106$ = (다)

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 r라 할 때, $f(1)+g(2)+r$의 값은? [4점]

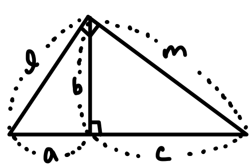
① 105　② 110　③ 115　④ 120　⑤ 125

일반적인 풀이 방법은 위에 자세히 적어 두었어.

이 방법으로는 두 직선이 수직일 조건 (기울기의 곱이 −1)을 이용해서 직접 좌표를 구했지만,

직각삼각형의 성질을 활용하면 더 쉽게 풀 수 있어. 꼭 잘 기억해 둬!

직각삼각형에서의 성질



① 넓이활용 → $l \times m = (a+c) \times b$

② a, b, c는 순서대로 등비수열 → $b^2 = a \times c$

③ $a : c = l^2 : m^2$

(ex) $l=1$, $m=2$ → $a : c = 1 : 4$

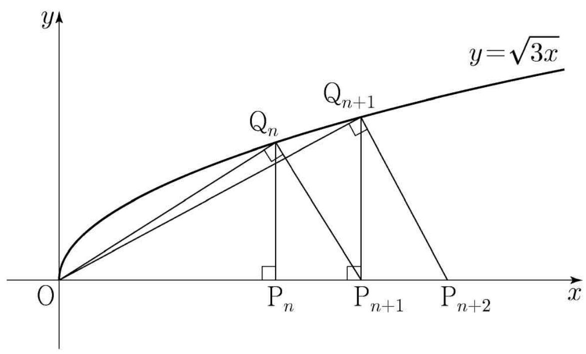
유사문항에도 이렇게 직각삼각형의 성질을 활용할 수 있는 문항을 수록해 뒀으니 연습해봐!

[10-2020년 시행 9월 모평 나형 16번]

모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 x축 위의 점 P_n과 곡선 $y=\sqrt{3x}$ 위의 점 Q_n이 있다.

- 선분 OP_n과 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$이 서로 수직이다.
- 선분 OQ_n과 선분 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 서로 수직이다.

다음은 점 P_1의 좌표가 $(1,\ 0)$일 때, 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n을 구하는 과정이다.
(단, O는 원점이다.)



모든 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표를 $(a_n,\ 0)$이라 하자.

$\overline{\mathrm{OP}_{n+1}}=\overline{\mathrm{OP}_n}+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$이므로

$a_{n+1}=a_n+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$

이다. 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$과 삼각형 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 닮음이므로

$\overline{\mathrm{OP}_n}:\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}:\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$

이고, 점 Q_n의 좌표는 $\left(a_n,\ \sqrt{3a_n}\right)$이므로

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\boxed{(가)}$

이다. 따라서 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n은

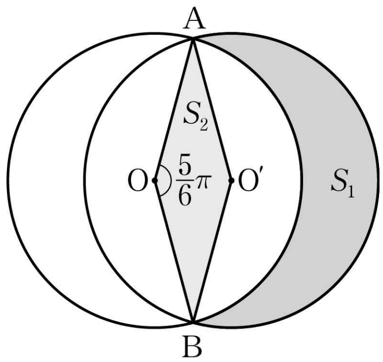
$$A_n=\frac{1}{2}\times\left(\boxed{(나)}\right)\times\sqrt{9n-6}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p+f(8)$의 값은? [4점]

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

011 그림과 같이 두 점 O, O′을 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 두 원 O, O'이 한 평면 위에 있다. 두 원 O, O'이 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, $\angle \mathrm{AOB} = \frac{5}{6}\pi$이다.



원 O의 외부와 원 O'의 내부의 공통부분의 넓이를 S_1, 마름모 AOBO′의 넓이를 S_2라 할 때, $S_1 - S_2$의 값은? [4점]

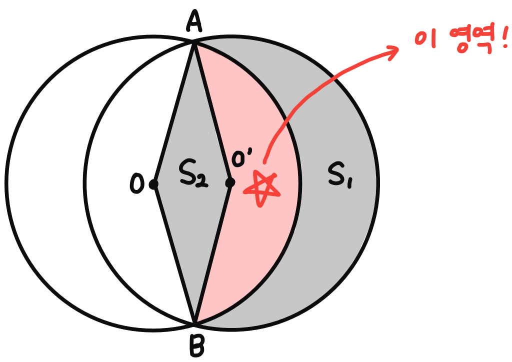
① $\frac{5}{4}\pi$ ② $\frac{4}{3}\pi$ ③ $\frac{17}{12}\pi$ ④ $\frac{3}{2}\pi$ ⑤ $\frac{19}{12}\pi$

삼각함수의 도형에서의 활용 문제야.

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각을 θ라 할 때,

- 호의 길이 $l = r\theta$
- 부채꼴의 넓이 $S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$

이 문제는 굉장히 독특한데, S_1, S_2에 모두 포함되지 않은 가운데 영역을 포함해서 식을 쓰면 깔끔하게 풀 수 있다는 점이야. (~ 미적분 기출에 많이 있는 사고방식임 ~)



$S_1 - S_2 = (S_1 + ☆) - (S_2 + ☆)$

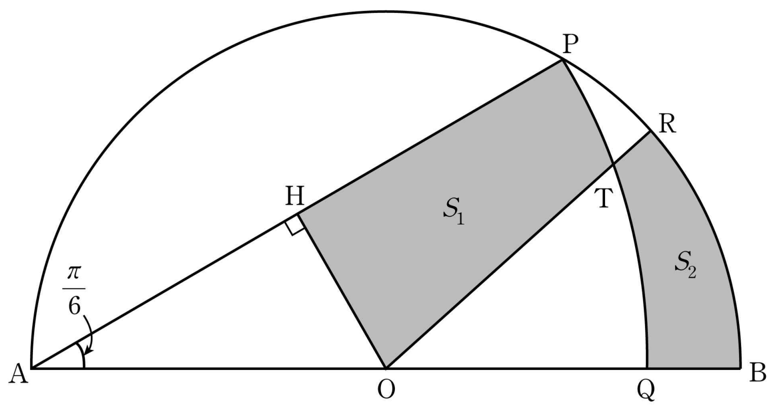
$= \frac{1}{2}\cdot 3^2 \cdot \frac{7}{6}\pi - \frac{1}{2}\cdot 3^2 \cdot \frac{5}{6}\pi = \frac{3}{2}\pi$

유사문항에는 이 사고가 활용된 미적분 기출 문항을 변형해서 수록해 뒀어.

미적분 선택 학생들은 저 문항의 원본 문항도 꼭 찾아서 풀어봐!

[11-2019년 시행 6월 모평 가형 28번 변형]

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 $\angle \mathrm{PAB}=\dfrac{\pi}{6}$가 되도록 점 P를 잡고, 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AP}}$인 원과 선분 AB의 교점을 Q라 하자.
호 PB 위에 점 R를 호 PR와 호 RB의 길이의 비가 $3:7$이 되도록 잡는다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 선분 OR와 호 PQ의 교점을 T, 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 하자.
세 선분 PH, HO, OT와 호 TP로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 두 선분 RT, QB와 두 호 TQ, BR로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. 이때 S_1-S_2의 값은? [4점]



① $\dfrac{2}{15}\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ② $\dfrac{2}{15}\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ ③ $\dfrac{2}{15}\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{16}$
④ $\dfrac{\pi}{30}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\dfrac{\pi}{30}-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

012 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-g(x)}{x-1} = 5$
>
> (나) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)+g(x)-2f(1)}{x-1} = 7$

두 실수 a, b에 대하여 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-a}{x-1} = b \times g(1)$일 때, ab의 값은? [4점]

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

함수의 극한에 관한 문제야.

> $x \to a$ 일 때,
>
> 분모 $\to 0$ 인데 극한값 존재 : 분자 $\to 0$
>
> 분자 $\to 0$ 인데 "0이 아닌" 극한값 존재 : 분모 $\to 0$
>
> (분자 $\to 0$ 인데 극한값이 0이어도 분모가 0으로 갈 수는 있지만,
>
> 항상 그렇지는 않으니 조심해.)

(가) 조건에서 $x \to 1$ 일 때 극한값이 존재하므로 분자 $\to 0$ 이어야 해.

따라서 $f(1) = g(1)$ 이지.

그리고 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)-\{g(x)-g(1)\}}{x-1} = f'(1) - g'(1) = 5$ 라는 것도 알 수 있어.

이제 (나) 조건을 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)+g(x)-g(1)}{x-1}$ 로 고칠 수 있어.

그럼 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} + \lim_{x \to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = 7 \longrightarrow f'(1) + g'(1) = 7$

(물론 로피탈을 사용해도 같은 결과를 얻을 수 있어.)

두 식을 연립하면 $f'(1) = 6$, $g'(1) = 1$ 임을 알 수 있지!

이제 구하는 값인 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-a}{x-1} = b \times g(1)$ 에서, $x \to 1$ 일 때 분모 $\to 0$ 이므로 분자 $\to 0$ 이어야 해.

따라서 $f(1) = a$ 이고, $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-a}{x-1} = f'(1)$ 이므로 $f'(1) = b \times g(1)$ 에서 $b \times g(1) = 6$ 이지.

$ab = f(1) \times \frac{6}{g(1)} = 6$ (사실 이 과정이 크게 의미있다고 생각하진 않지만,

이런 문제도 있다.. ~ 뭐 이런 의미로 한번 복습해줘!

유사문항에는 극한 식을 통해 다항함수의 식을 추론하는 문제를 수록해 놨어~

[12-2018년 시행 4월 학평 나형 17번]

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [4점]

(가) $\lim_{x \to \infty}\left\{\frac{f(x)}{x^2}+1\right\}=0$

(나) $\lim_{x \to 0}\frac{f(x)-3}{x^2}=-1$

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

013 함수

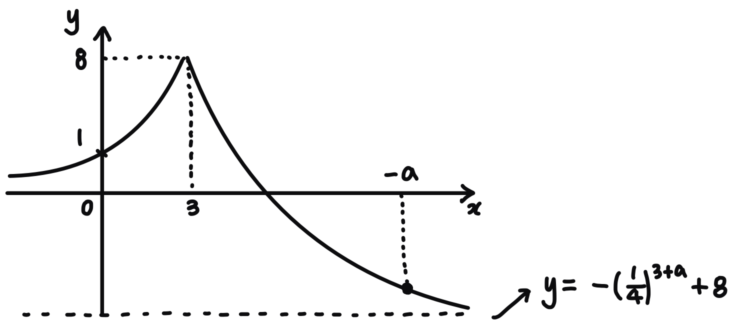
$$f(x)=\begin{cases} 2^{x} & (x<3) \\ \left(\frac{1}{4}\right)^{x+a}-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8 & (x \geq 3) \end{cases}$$

에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 y좌표가 정수인 점의 개수가 23 일 때, 정수 a의 값은? [4점]

① -7　② -6　③ -5　④ -4　⑤ -3

지수함수의 점근선을 활용하는 문제인데, 이 문제는 굉장히 독특하니 꼭 짚고 넘어가 줘!

일단 주어진 함수 먼저 파악해봐야겠지?



함수를 그려 보면 개형은 이렇게 생겼어.

문제에서 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 y좌표가 정수인 점의 개수가 23 이라고 했지.

그럼 $y=$(정수) 와 $y=f(x)$의 교점의 개수를 위에서부터 세어 볼게.

$y=8 \rightarrow$ 1개

$y=7 \sim 1 \rightarrow$ 2개 (14개)

$y=0 \sim ? \rightarrow$ 1개

여기서 23개가 존재하려면 여기서 8개 점이 나와야 하지. 따라서 $?=-7$ 이야.

즉, 점근선의 y값은 $-8 \leq$ (점근선 y값) < -7 이어야 해.

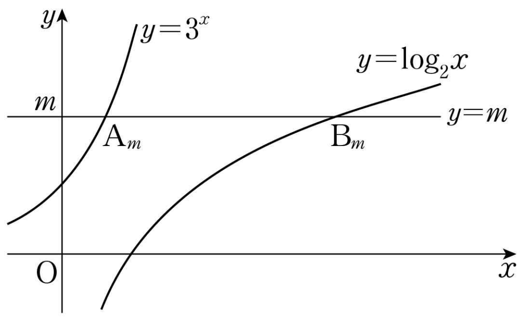
$-8 \leq 8-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} < -7 \rightarrow 15 < \left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} \leq 16$ 에서 $-3-a=2$, $a=-5$ 가 돼

기출이 많이 된 소재는 아니라서, 유사문항에는 값이 자연수가 나온다는 발상을 활용하는 문제를 수록했어.

두 문항 모두 확실하게 알아 둬!

[13-2020년 시행 3월 학평 나형 16번]

그림과 같이 자연수 m 에 대하여 두 함수 $y=3^x$, $y=\log_2 x$ 의 그래프와 직선 $y=m$ 이 만나는 점을 각각 A_m, B_m 이라 하자. 선분 $\mathrm{A}_m\mathrm{B}_m$ 의 길이 중 자연수인 것을 작은 수부터 크기순으로 나열하여 a_1, a_2, a_3, $\cdots$ 이라 할 때, a_3 의 값은? [4점]



① 502 ② 504 ③ 506 ④ 508 ⑤ 510

014 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+|f'(x)|$$

라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0)=g(0)=0$
> (나) 방정식 $f(x)=0$은 양의 실근을 갖는다.
> (다) 방정식 $|f(x)|=4$의 서로 다른 실근의 개수는 3 이다.

$g(3)$의 값은? [4점]

① 9　② 10　③ 11　④ 12　⑤ 13

삼차함수의 개형을 추론하는 문제야.

f(x)는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수,

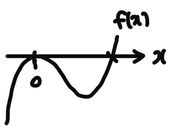
$$g(x)=\begin{cases} f(x)+f'(x) & (f'(x)\ge 0) \\ f(x)-f'(x) & (f'(x)<0) \end{cases}$$

이렇게 조건을 정리하고 (가)~(다)를 차근차근 살펴보자!

(가) $f(0)=g(0)=0$ 에서, $g(0)=f(0)+|f'(0)|$ 이므로 $f'(0)=0$ 임을 알 수 있어.

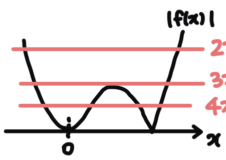
즉 함수 f(x)는 $x=0$ 에서 x축에 접하거나 삼중근을 가져.

(나) $f(x)=0$ 은 '양의 실근', 즉 $x=0$이 아닌 다른 실근을 가져.



이런 개형이겠지!

(다) 방정식 $|f(x)|=4$ 가 서로 다른 세 실근을 가져.

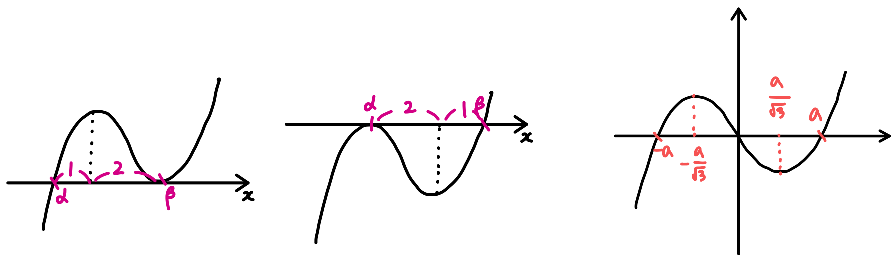


즉 함수 $y=f(x)$의 극솟값이 -4인것이지!

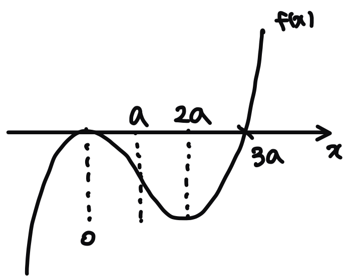
이제 삼차함수의 식만 파악하면 끝나.

꼭 암기하기 !!

*삼차함수 비율관계



삼차함수의 비율관계를 활용하면 좀 더 편하게 식을 쓸 수 있어.



$f(x) = x^2(x-3a)$

$f(2a) = -4 \rightarrow 4a^2 \cdot (-a) = -4 \rightarrow a = 1$

$\therefore f(x) = x^2(x-3)$

$f'(x) = 3x^2 - 6x \ , \ f'(3) = 27 - 18 = 9$

$\therefore g(3) = f(3) + f'(3) = 0 + 9 = 9$

복잡하긴 하지만, 이런 유형의 문제들 중에서는 그렇게 어렵지 않아.

꼭 판단을 내린 근거가 뭔지 꼼꼼히 짚어보고,

유사문항이 킬러 문항이지만 사고 과정이 거의 비슷하니 꼭 풀어보며 복습해봐.

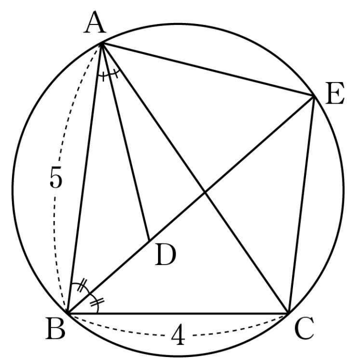
[14-2020년 시행 대수능 나형 30번]

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} |f(x)-g(x)| & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x\geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

015 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=4$, $\cos(\angle ABC)=\frac{1}{8}$ 인 삼각형 ABC 가 있다. $\angle ABC$ 의 이등분선과 $\angle CAB$ 의 이등분선이 만나는 점을 D, 선분 BD 의 연장선과 삼각형 ABC 의 외접원이 만나는 점을 E 라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



〈 보 기 〉

ㄱ. $\overline{AC}=6$

ㄴ. $\overline{EA}=\overline{EC}$

ㄷ. $\overline{ED}=\frac{31}{8}$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

삼각함수의 도형 문제야.

일단 사인법칙, 코사인법칙, 원주각에 대한 개념을 알고 있는지 한번 점검해보자!

* 사인법칙

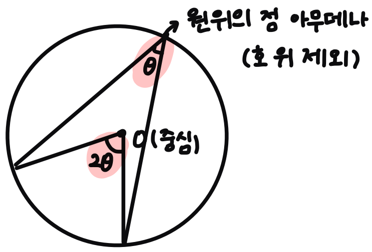
삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

* 코사인법칙

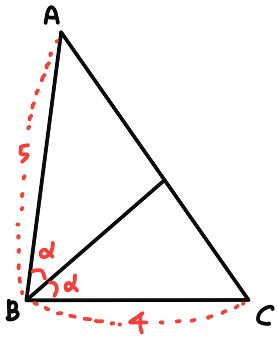
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$

* 중심각과 원주각



이제 본격적으로 문제를 풀어 볼게.

ㄱ.



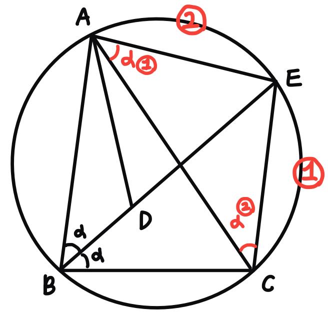
문제에서 $\cos 2\alpha = \frac{1}{8}$ 임을 알려줬어.

ㄱ 선지는 $\triangle ABC$ 에서 코사인 법칙만 쓰면 알수 있어!

$\overline{AC}^2 = 5^2 + 4^2 - 2\cdot 5\cdot 4\cdot \frac{1}{8} = 36$

$\therefore \overline{AC} = 6$ (참)

ㄴ.



ㄱ에서와 같이 $\angle ABE$를 α라 해볼게.

그럼 호 CE (①)의 원주각인 $\angle CAE = \alpha$ 라 할수 있어.

호 AE (②)의 원주각인 $\angle ACE = \alpha$ 도 성립하겠지?

즉 $\angle EAC = \angle ECA$ 이므로

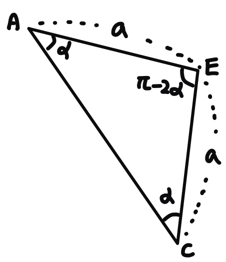
$\triangle ACE$는 $\overline{EA} = \overline{EC}$ 인 이등변삼각형이야. (참)

이제 문제의 (?) ㄷ을 풀어볼게. 길어도 차근차근 잘 따라와줘!

① 사각형 ABCD가 원에 내접하지? 이 경우 마주보는 두 각의 합은 항상 π로 일정해.

$\angle ABC = 2\alpha$ 이니, $\angle AEC = \pi - 2\alpha$ 인 것이지.

②



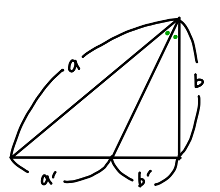
여기서 코사인법칙을 활용하면

$6^2 = a^2 + a^2 - 2\cdot a\cdot a\cdot \cos(\pi - 2\alpha)$

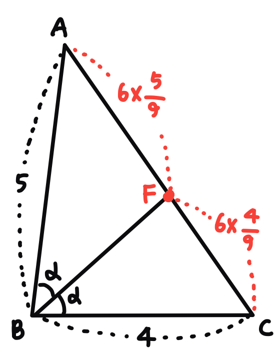
$36 = 2a^2 + 2a^2 \cos 2\alpha = 2a^2 + \frac{1}{8}\cdot 2a^2$

$36 = \frac{9}{4}a^2$, $a = 4$

③ 각의 이등분선의 성질을 알고 있지?



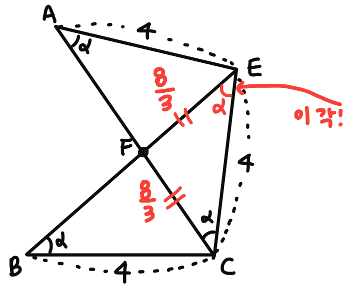
$a : b = a' : b'$



이걸 활용해서 구해보면

$\overline{AF} = \frac{10}{3}$, $\overline{CF} = \frac{8}{3}$ 이 돼.

④

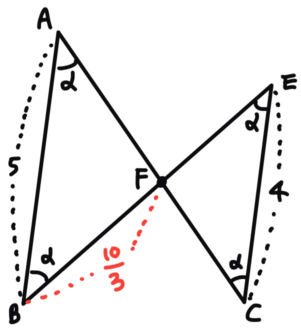


$\overline{BC} = \overline{AE} = 4$ 이므로

$\angle BEC = \angle ACE = \alpha$

따라서 $\triangle CFE$는 $\overline{CF} = \overline{EF} = \frac{8}{3}$ 인 이등변삼각형이야.

⑤

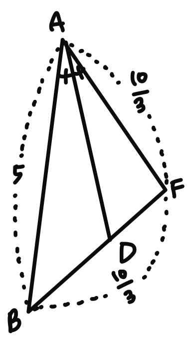


$\triangle FAB$와 $\triangle FCE$는 서로 닮음이야 (AA)

닮음비는 $5:4$ 이지.

$\overline{BF} = \frac{5}{4} \times \overline{EF} = \frac{5}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$

⑥



$\overline{AD}$는 $\angle BAF$의 이등분선이지?

③ 에서 사용한 성질을 한번 더 사용할거야.

$5 : \frac{10}{3} = \overline{BD} : \overline{DF} = 3:2$

$\overline{DF} = \frac{2}{5} \times \overline{BF} = \frac{2}{5} \times \frac{10}{3} = \frac{4}{3}$

$\therefore \overline{ED} = \overline{EF} + \overline{FD} = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = 4$ (거짓)

ㄷ 선지가 까다로웠지만 의미있는 문제이니, 차근차근 복습해 봐.

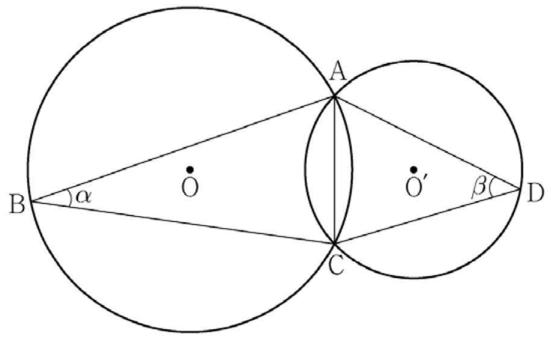
유사문항에도 사인, 코사인 법칙을 활용하는 2022 수능 예시문항 문제를 수록했으니 꼭 풀어보고!

[15-2022학년도 수능 예시문항 21번]

그림과 같이 한 평면 위에 있는 두 삼각형 ABC, ACD 의 외심을 각각 O, O′ 이라 하고
$\angle \mathrm{ABC} = \alpha$, $\angle \mathrm{ADC} = \beta$ 라 할 때,

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{3}{2},\ \cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{3},\ \overline{\mathrm{OO'}} = 1$$

이 성립한다. 삼각형 ABC 의 외접원의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



016 두 함수 $f(x)=2x^2+5x+3$, $g(x)=x^3+2$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수를 구하시오. [3점]

함수의 곱의 미분법에 대한 문제야.

$\boxed{f(x)g(x) \xrightarrow{\text{미분}} f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}$

$f(x)=2x^2+5x+3 \rightarrow f'(x)=4x+5 \rightarrow f'(0)=5$

$g(x)=x^3+2 \rightarrow g'(x)=3x^2 \rightarrow g'(0)=0$

$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 에서 $\underset{5\cdot 2}{f'(0)g(0)}+\underset{3\cdot 0}{f(0)g'(0)}=10$

유사문항에도 비슷한 연산문제가 들어가있으니 연습해봐 ~

[16-2022학년도 수능 예시문항 17번]

미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(1)=2$, $f'(1)=4$를 만족시킬 때, 함수 $g(x)=(x+1)f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수를 구하시오. [3점]

017 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식

$$3x^2-2(\log_2 n)x+\log_2 n>0$$

이 성립하도록 하는 자연수 n 의 개수를 구하시오. [3점]

로그부등식을 풀이하는 문제야 !

모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$ 이 항상 성립하려면 $D<0$ 을 만족해야겠지.

따라서 이문제에서는 $D/4=(\log_2 n)^2-3\log_2 n<0$ 이 성립하면 돼.

$\log_2 n\{\log_2 n-3\}<0$, $0<\log_2 n<3$, $\log_2 1<\log_2 n<\log_2 8$

$\therefore$ $1<n<8$, 자연수 n은 6개.

유사문항에도 거의 비슷한 문항을 수록해두었으니 꼭 풀어봐!

[17-2017년 시행 4월 학평 가형 17번]

두 집합

$$A = \left\{ x \,\middle|\, x^2 - 5x + 4 \le 0 \right\},$$

$$B = \left\{ x \,\middle|\, (\log_2 x)^2 - 2k \log_2 x + k^2 - 1 \le 0 \right\}$$

에 대하여 $A \cap B \neq \varnothing$ 을 만족시키는 정수 k의 개수는? [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

018 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $F(x)$의 도함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}-2x & (x<0)\\ k(2x-x^2) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이다. $F(2)-F(-3)=21$일 때, 상수 k의 값을 구하시오. [3점]

다항함수의 적분 문제야!

$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ (단, C는 적분상수, n은 자연수)

많은 학생들이 이 문제를 부정적분으로 쉽게 풀었을 것 같아.

정적분을 활용하는 풀이도 보여줄테니 꼭 두 풀이 모두 익혀 둬!

유사문항도 두가지 풀이 모두 가능하니 둘 다 연습해 봐~

Sol 1. 부정적분

$$f(x)=\begin{cases}-2x & (x<0)\\ k(2x-x^2) & (x\geq 0)\end{cases} \rightarrow F(x)=\begin{cases}-x^2+C_1 & (x<0)\\ k(x^2-\frac{1}{3}x^3)+C_2 & (x\geq 0)\end{cases}$$

$\rightarrow$ $F(x)$는 $x=0$에서 연속이어야 하므로 $C_1=C_2$

$$F(2)-F(-3)=\left\{k\left(4-\frac{8}{3}\right)+C_1\right\}-\left\{-9+C_1\right\}$$

$$=\frac{4}{3}k+9=21,\quad \frac{4}{3}k=12,\quad k=9$$

Sol 2 정적분

$$F(2)-F(-3)=\int_{-3}^{2}f(x)dx=\int_{-3}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx$$

$$=\int_{-3}^{0}(-2x)dx+\int_{0}^{2}k(2x-x^2)dx$$

$$=\left[-x^2\right]_{-3}^{0}+\left[k\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\right]_{0}^{2}$$

$$=-(-9)+k\left(4-\frac{8}{3}\right)$$

$$=\frac{4}{3}k+9=21,\quad k=9$$

유사문항에도 마찬가지로 두가지 풀이 모두 가능한 문항으로 수록해 뒀으니,

꼭 두가지 풀이 모두 시도해 봐!

[18-2022학년도 수능 예시문항 6번]

다항함수 $f(x)$가

$$f'(x) = 3x^2 - kx + 1,\ \ f(0) = f(2) = 1$$

을 만족시킬 때, 상수 k의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

019 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_1=2$, $a_2=4$이고 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}S_n = a_nS_{n+1}$$

이 성립할 때, S_5의 값을 구하시오. [3점]

귀납적으로 정의된 수열 문제인데, 7번 문제에서 했던 말 기억나?

등차, 등비수열이 아니라면 $n=1$부터 대입해나가면서 접근하라고 했지!

이 문제도 마찬가지야. (주어진 식의 양 변을 a_na_{n+1}로 나누면 $\frac{S_n}{a_n}=\frac{S_{n+1}}{a_{n+1}}$으로 식이 예뻐지니 참고!)

$n=1$부터 $n=4$까지 대입해가면 돼~ 아래에 식을 적어둘테니 참고해 :)

$a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=12$, $a_4=36$, $a_5=108$

$S_1=2$, $S_2=6$, $S_3=18$, $S_4=54$, $S_5=162$

$a_3S_2 = a_2S_3 \rightarrow a_3\cdot 6 = 4(6+a_3)$

$a_3=12$

$a_4S_3 = a_3S_4 \rightarrow a_4\cdot 18 = 12(18+a_4)$

$a_4=36$

$a_5S_4 = a_4S_5 \rightarrow a_5\cdot 54 = 36(54+a_5)$

$a_5=108$

유사문항에도 귀납적으로 정의된 수열 문제를 수록해 두었으니 참고해.

[19-2019년 시행 7월 학평 나형 26번]

첫째항이 2 이고 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 이 있다. x 에 대한 이차방정식

$$a_n x^2 - a_{n+1} x + a_n = 0$$

이 모든 자연수 n 에 대하여 중근을 가질 때, $\sum_{k=1}^{8} a_k$ 의 값을 구하시오. [4점]

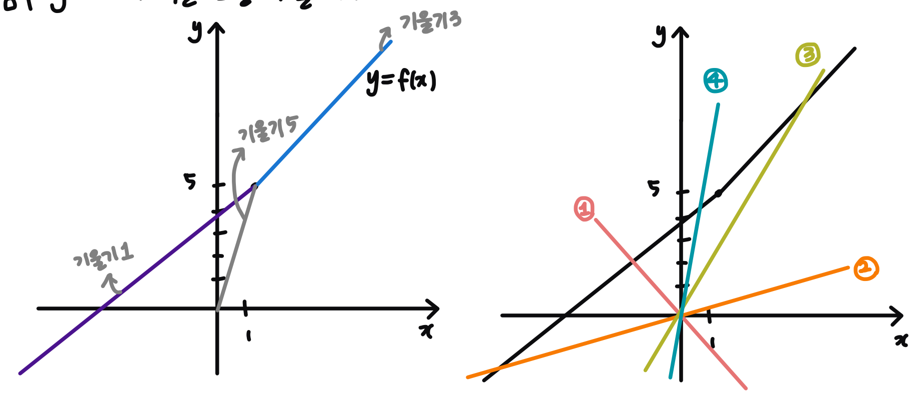
020 실수 m 에 대하여 직선 $y=mx$ 와 함수

$$f(x)=2x+3+|x-1|$$

의 그래프의 교점의 개수를 $g(m)$ 이라 하자. 최고차항의 계수가 1 인 이차함수 $h(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $h(5)$ 의 값을 구하시오. [4점]

주어진 조건을 통해 함수 g(m)의 식을 도출하고, 함수의 연속성도 활용해야 하는 문제야.

먼저 함수 g(m) 의 식을 도출해 볼게!



y=f(x)의 그래프를 그려보면 위와 같아.

이제 기울기 m을 기준으로 분류해야 하는데, 위의 '1, 3, 5' 기울기가 나올때 조심해야겠지? (평행하면 안만나니까)

그렇게 나눠서 교점의 개수를 구해 보면 이렇게 돼.

$m<0$ (①)	1
$m=0$	1
$0<m<1$ (②)	1
$m=1$	0
$1<m<3$	0
$m=3$	0
$3<m<5$ (③)	1
$m=5$	1
$m>5$ (④)	1

따라서 함수 g(m)은 $m=1$, $m=3$ 일 때에 불연속이야.

함수 $g(x)h(x)$ 가 모든 실수 x에서 연속이기 위해서는

$h(1)$과 $h(3)$ 이 0이 되어야 해!

$\to h(x)=(x-1)(x-3)$

$h(5)=4\cdot 2=8$

함수 식 작성과 연속성을 동시에 쓰는 문제가 없어서, 유사문항에는 연속성을 쓰는 문제를 넣어 두었어.

함수의 식을 작성해가는 방법도 꼭 익혀둬!

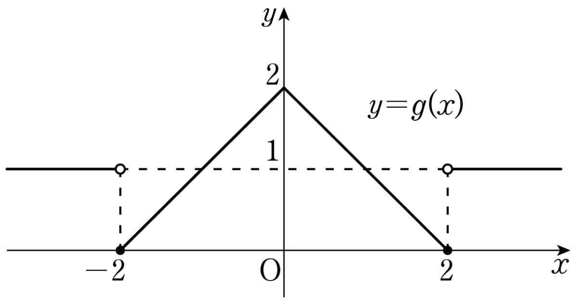
[20-2019년 시행 10월 학평 나형 14번]

최고차항의 계수가 1 인 이차함수 $f(x)$ 와 함수

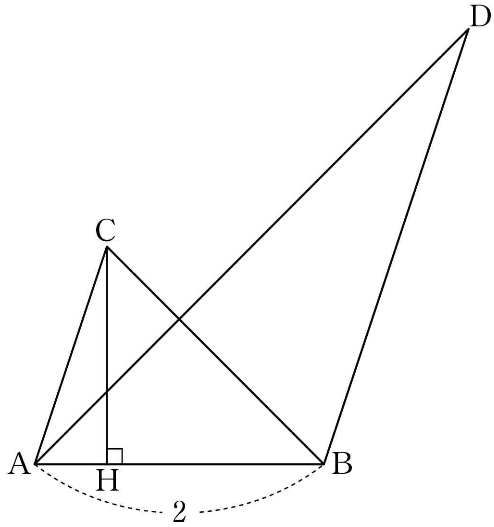
$$g(x)=\begin{cases} -|x|+2 & (|x|\leq 2) \\ 1 & (|x|>2) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이다. 함수 $y=f(x-a)g(x)$ 의 그래프가 한 점에서만 불연속이 되도록 하는 모든 실수 a 의 값의 곱은? [4점]

① -16　② -12　③ -8　④ -4　⑤ -1



021 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC} /\!/ \overline{BD}$, $\overline{AC}:\overline{BD}=1:2$ 인 두 삼각형 ABC, ABD 가 있다. 점 C 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발 H 는 선분 AB 를 1 : 3 으로 내분한다.



두 삼각형 ABC, ABD 의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r, R라 할 때, $4(R^2-r^2)\times\sin^2(\angle CAB)=51$ 이다. $\overline{AC}^2$ 의 값을 구하시오. (단, $\angle CAB<\frac{\pi}{2}$) [4점]

15번 문제와 마찬가지로 사인, 코사인 법칙을 활용할 것 같은 느낌이 오지?

* 사인법칙

삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

* 코사인법칙

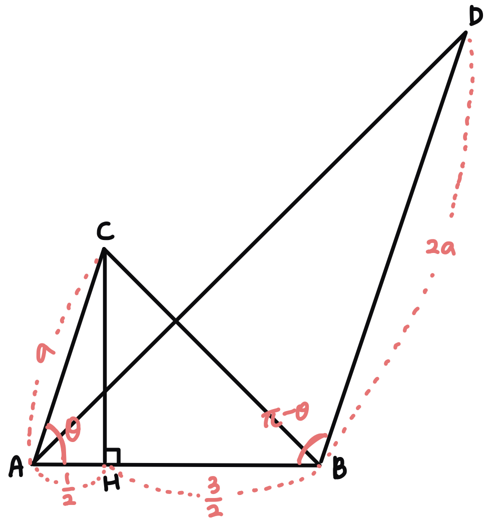
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$

또 이 문제에서 중요한 점은 평행선과 길이의 비가 주어졌다는 점이야.

따라서 닮음을 이용할 것이라는 생각을 하고 있어야 해!

(사실 이 문제에서는 안쓰지만, 항상 생각은 하고 있어야 해.)

이제 문제에서 준 정보를 그림에 표시해 보고, 미지수도 설정해 볼게.



문제에서 각각 삼각형의 외접원의 반지름의 길이와 사인 값을 통해서

제발 사인법칙좀 써달라고 외치고 있네! $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ 를 포함하게 한번 써 볼게

$$\frac{\overline{AD}}{\sin(\pi-\theta)} = \frac{\overline{AD}}{\sin\theta} = 2R, \quad \frac{\overline{BC}}{\sin\theta} = 2r$$

$\rightarrow \overline{AD} = 2R\sin\theta, \ \overline{BC} = 2r\sin\theta$

$\rightarrow 4(R^2 - r^2)\sin^2(\angle CAB) = 51 \xrightarrow{\text{대입}} \overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 = 51$

이제 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ 에 대한 식이 더 필요한데, 저 변들을 제외하면 각각 삼각형에서 나머지 변, 각 하나가

주어져 있으니 코사인 법칙을 써볼게!

$\overline{AD}^2 = 4a^2 + 4 + 2\cdot 2\cdot 2a\cos\theta$

$\overline{BC}^2 = a^2 + 4 - 4a\cos\theta$

이 식을 아까 $\overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 = 51$ 에 넣어서 정리하면

$3a^2 + 12a\cos\theta = 51$ 임을 알 수 있어.

그런데 $\triangle ACH$ 에서 $\cos\theta = \frac{1}{2a}$ 임을 알 수 있지?

$\therefore 3a^2 + 6 = 51, \ a^2 = 15$

삼각함수의 사인, 코사인법칙 문제들은 기출문제가 충분하지는 않아서 공부하기 힘들 수 있어.

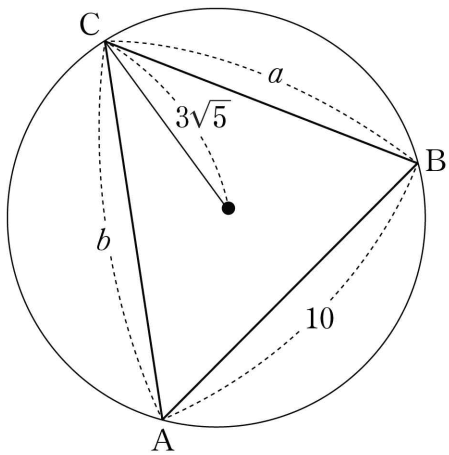
그래서 학생들이 자작 문항에만 집중하는 경향이 있는데 절대로 안 돼!

기출 문항들 먼저 완벽하게 학습한 후에 자작 문항 풀기~~

[21-2020년 시행 3월 학평 나형 19번]

길이가 각각 10, a, b 인 세 선분 AB, BC, CA 를 각 변으로 하는 예각삼각형 ABC 가 있다. 삼각형 ABC 의 세 꼭짓점을 지나는 원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$ 이고 $\dfrac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab}=\dfrac{4}{3}$ 일 때, ab 의 값은? [4점]

① 140　　② 150　　③ 160　　④ 170　　⑤ 180



022 양수 a와 일차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_0^x (t^2-4)\{|f(t)|-a\}\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.
(나) $g(2)=5$

$g(0)-g(-4)$의 값을 구하시오. [4점]

함수 $g(x)$를 추론하는 문제야.

정적분으로 정의된 함수의 형태로 $g(x)$가 주어졌어.

* 정적분으로 정의된 함수

$g(x)=\int_a^x f(t)dt$ 일 때,

$\boxed{1}$ 대입 : 아래끝 = 위끝 $(x=a)$

$\boxed{2}$ 미분 : $g'(x)=f(x)$

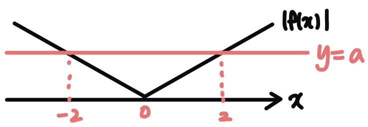
$\boxed{1}$ $g(0)=0$

$\boxed{2}$ $g'(x)=(x^2-4)\{|f(x)|-a\}$

$g'(x)$는 $x=2$, $x=-2$에서 실근을 하나씩 가지는 함수야.

그런데 (가) 조건에서 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다고 했지?

그 말의 뜻은, $\{|f(x)|-a\}$가 $x=2$, $x=-2$에서 실근을 가져야 한다는 거야.



이런 상황이 되는 거지.

여기서 $|f(x)|=\left|\frac{a}{2}x\right|$ 라는 식을 쓸 수 있어.

이제 (나) 조건으로 마무리를 해 볼게.

$$g(2)=\int_0^2 (t^2-4)\left(\left|\frac{a}{2}t\right|-a\right)dt=\int_0^2 (t^2-4)\left(\frac{a}{2}t-a\right)dt$$

$$=\int_0^2 \frac{a}{2}(t+2)(t-2)^2\,dt=5$$

$$\rightarrow \int_0^2 (t^3-2t^2-4t+8)\,dt=\frac{10}{a} \quad \rightarrow (\text{열심히 적분 ㅎㅎ})\ a=\frac{3}{2}$$

이제 $g(-4)$의 값만 구하면 되는데, 단순 연산이니 직접 해 봐! (22번 정답은 16)

[22-2020년 시행 대수능 나형 20번]

실수 $a(a>1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x+1)(x-1)(x-a)$$

라 하자. 함수

$$g(x)=x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2 f(t)dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 최댓값은? [4점]

① $\dfrac{9\sqrt{2}}{8}$ ② $\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$ ③ $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

선택과목

기하

023 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ 의 두 초점을 F, F′ 이라 할 때, 선분 FF′ 의 길이는? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

타원의 정의 문제야 모르면 큰일나!

* 타원

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 인 타원에서

꼭짓점 : $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$

장축의 길이 : $2a$, 단축의 길이 : $2b$

초점의 좌표 : $(\sqrt{a^2-b^2}, 0)$, $(-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$

$F(4, 0)$, $F'(-4, 0)$ 이므로 $\overline{FF'}=8$

유사문항은 장축의 길이를 묻는 문제니까, 절대 틀리면 안돼~

[23-2019년 시행 4월 학평 가형 3번]

타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$의 장축의 길이는? [2점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

024 두 초점이 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)$이고 주축의 길이가 8 인 쌍곡선의 한 점근선이 직선 $y=\frac{3}{4}x$ 일 때, 양수 c 의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

쌍곡선의 정의를 활용하는 문제야!

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$ → 점근선의 방정식 : $y=\pm\frac{b}{a}x$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ → 주축의 길이 : $2a$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ → 주축의 길이 : $2b$

두 초점이 x축 위에 있는데 주축의 길이가 8이므로

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 에서 $a=4$ 야.

또한 $\frac{|b|}{|a|}=\frac{3}{4}$ 에서 $b=\pm 3$ 이지.

이때 $c=\sqrt{a^2+b^2}$ 이므로 $c=5$ 가 돼.

유사문항도 쌍곡선의 기본 정의를 이용한 문항이니 풀어봐!

[24-2019년 시행 10월 학평 가형 5번]

직선 $y=\frac{1}{2}x$ 가 쌍곡선 $\frac{x^2}{k}-\frac{y^2}{64}=1$ 의 한 점근선일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? (단, k 는 양수이다.) [3점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

025 꼭짓점이 점 $(-1,\ 0)$이고 준선이 직선 $x=-3$인 포물선의 방정식이 $y^2=ax+b$일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? [3점]

① 14　② 16　③ 18　④ 20　⑤ 22

포물선의 정의 문제야.

포물선 $y^2=4px$
→ 꼭짓점 $(0,0)$
준선 $x=-p$
초점 $F(p,0)$

꼭짓점이 $(-1,0)$이므로 이 포물선은 $y^2=4px$ 형태에서 x축의 방향으로 −1만큼 평행이동했겠지.

평행이동 전을 생각해 보면, 준선이 $x=-2$, 꼭짓점이 $(0,0)$이므로 $y^2=8x$ 일 거야.

이걸 x축 방향으로 −1만큼 평행이동한 것이니, $y^2=8(x+1)$, 즉 $y^2=8x+8$이 될 거야.

$a=8$, $b=8$ → $a+b=16$

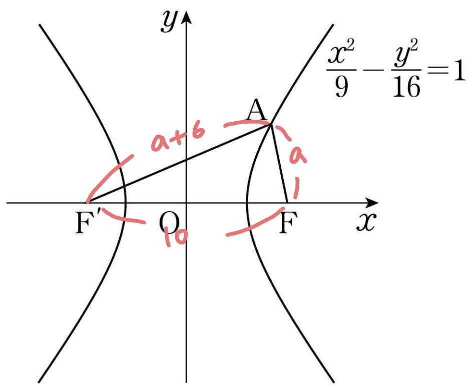
유사문항도 비슷해 ... ~ 이차곡선 정의는 절대 헷갈리지 않게 달달 외워 줘!

[25-2019년 시행 6월 모평 가형 8번]

포물선 $y^2 - 4y - ax + 4 = 0$의 초점의 좌표가 $(3,\ b)$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 양수이다.) [3점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

026 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 의 두 초점 F, F′ 과 쌍곡선 위의 점 A 에 대하여 삼각형 AF′F 의 둘레의 길이가 24 일 때, 삼각형 AF′F 의 넓이는? (단, 점 A 는 제1 사분면의 점이다.) [3점]



① $4\sqrt{3}$　② $4\sqrt{6}$　③ $8\sqrt{3}$　④ $8\sqrt{6}$　⑤ $16\sqrt{3}$

드디어 이차곡선의 성질을 활용하는 문제야!

이차곡선 문제에서는 정의와 대칭성을 잊지 않고 써먹는 것이 가장 중요해!

* 이차곡선의 정의

i) 포물선 : 초점까지의 거리 = 준선까지의 거리

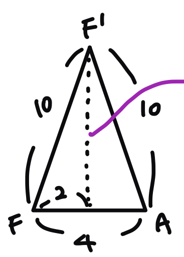
ii) 타원 : 두 초점까지 거리의 합이 일정 = 장축의 길이

iii) 쌍곡선 : 두 초점까지 거리의 차가 일정 = 주축의 길이

이 문제에서는 쌍곡선의 주축이 6, 초점의 좌표가 (5, 0), (-5, 0) 이지.

즉 $\overline{FF'}=10$ 이고, $\overline{AF}=a$ 라 하면 $\overline{AF'}=6+a$ 인 거야. 6 차이나니까!

이들의 합이 24 이므로 $2a+16=24$, $a=4$ 이지.



$\sqrt{10^2-2^2}=4\sqrt{6}$

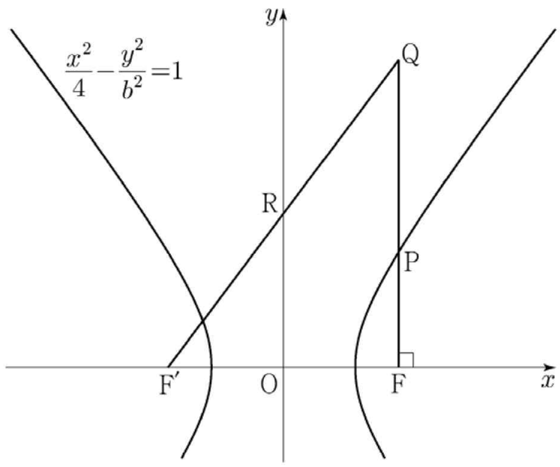
$\therefore \frac{1}{2}\times 4\times 4\sqrt{6}=8\sqrt{6}$

이차곡선 문항이 출제되면 무조건 아까 알려준 정의, 대칭성은 꼭 따져 줘!

유사문항은 2022 수능 예시문항 기하에서 쌍곡선 정의를 쓰는 문제를 실어 뒀어.

[26-2022학년도 수능 예시문항 기하 27번]

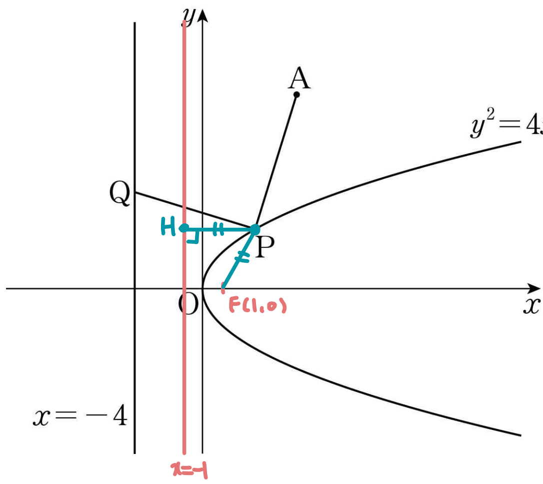
그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 이 있다. 점 F 를 지나고 x 축에 수직인 직선이 쌍곡선과 제1 사분면에서 만나는 점을 P 라 하고, 직선 PF 위에 $\overline{\mathrm{QP}} : \overline{\mathrm{PF}} = 5 : 3$ 이 되도록 점 Q 를 잡는다. 직선 $\mathrm{F}'\mathrm{Q}$ 가 y 축과 만나는 점을 R 라 할 때, $\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{QR}}$ 이다. b^2 의 값은?
(단, b 는 상수이고, 점 Q 는 제1 사분면 위의 점이다.) [3점]



① $\dfrac{1}{2}+2\sqrt{5}$ ② $1+2\sqrt{5}$ ③ $\dfrac{3}{2}+2\sqrt{5}$ ④ $2+2\sqrt{5}$ ⑤ $\dfrac{5}{2}+2\sqrt{5}$

027 점 A(6, 12)와 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 P, 직선 $x=-4$ 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20



포물선의 정의를 활용하는 문제인데, $\overline{AP}+\overline{PQ}$ 의 최솟값을 구하는 문제야.

이런 문제들은 보통 정의를 활용해서 길이를 다른 방법으로 표현하거나,

경우에 따라서는 점을 대칭이동시켜서 풀 때도 있어.

포물선의 방정식은 $y^2=4x$ 이므로 초점은 F(1,0), 준선의 방정식은 $x=-1$ 이야. (그림에 이 색으로 표시)

그 후 포물선 위의 점 ~ 초점 연결 / 준선에 수선의 발 내리기! (이 색으로 표시, 수선의 발은 H로 적을게)

이때 $\overline{AP}+\overline{PQ}$ 의 최솟값은 $\overline{AP}+\overline{PH}+\overline{HQ}$ 의 최솟값과 같으므로,

$\overline{AP}+\overline{PF}+3$ 이겠지? 즉 A ~ F를 연결한 선분의 길이 +3 이 구하는 길이야.

A(6, 12) ~ F(1, 0) : $\sqrt{(6-1)^2+12^2}=13$

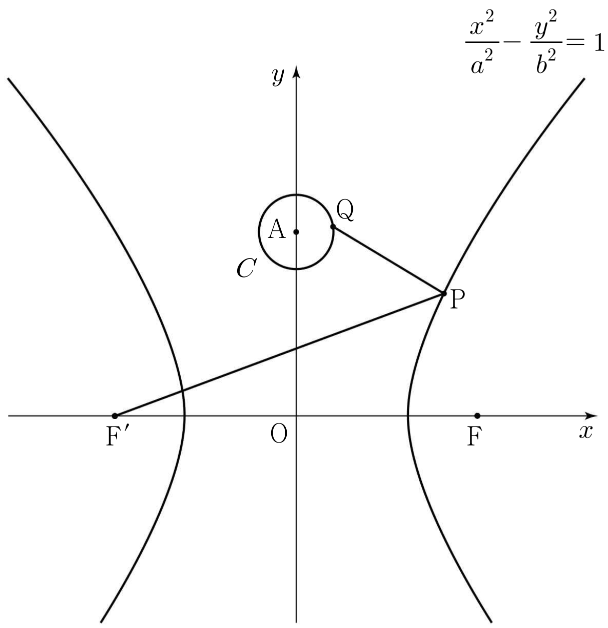
$\therefore$ $13+3=16$

이런 문제는 기출에 많으니 혹시라도 틀렸다면 꼭 기출 점검해보고,

유사문항은 쌍곡선의 정의를 활용하는 최솟값 문제니까 꼼꼼히 풀어봐~

[27-2018년 시행 4월 학평 가형 28번]

그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)(c>0)$이고, 주축의 길이가 6인 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$과 점 $\mathrm{A}(0,\ 5)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 제1사분면에 있는 쌍곡선 위를 움직이는 점 P와 원 C 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF}'}$의 최솟값이 12일 때, a^2+3b^2의 값을 구하시오.
(단, a와 b는 상수이다.) [4점]

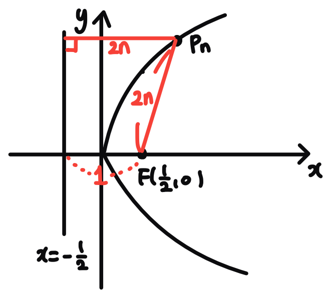


028 자연수 n에 대하여 초점이 F인 포물선 $y^2=2x$ 위의 점 P_n이 $\overline{\mathrm{FP}_n}=2n$을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{8}\overline{\mathrm{OP}_n}^2$의 값은? (단, O는 원점이고, 점 P_n은 제1 사분면에 있다.) [4점]

① 874 ② 876 ③ 878 ④ 880 ⑤ 882

이 문제도 포물선의 정의를 활용해야 하는 문제야.

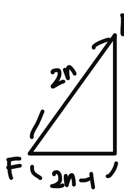
일단 주어진 정보를 정리해 보면, $y^2=2x$ 에서 $F(\frac{1}{2},0)$, 준선의 방정식은 $x=-\frac{1}{2}$이야.



$\overline{OP_n}^2$ 을 구해야 하니, P_n의 좌표를 구해야겠네.

그런데 위의 그래프만으로도 P_n의 x좌표가 $(2n-\frac{1}{2})$ 임은 알 수 있어.

y좌표만 구하면 되겠다!



→ 피타고라스 : $\sqrt{4n-1}$

그럼 $P_n(2n-\frac{1}{2}, \sqrt{4n-1})$ 이므로 $\overline{OP_n}^2=4n^2+2n-\frac{3}{4}$ 이지.

$$\sum_{n=1}^{8}(4n^2+2n-\frac{3}{4})=4\sum_{n=1}^{8}n^2+2\sum_{n=1}^{8}n-\frac{3}{4}\times 8$$
$$=4\cdot\frac{8\cdot 9\cdot 17}{6}+2\cdot\frac{8\cdot 9}{2}-6$$
$$=882$$

이 문제에서는 P_n의 x좌표가 F보다 무조건 크지만, 원래는 작은경우/ 같은 경우도 고려해 줘야 해.

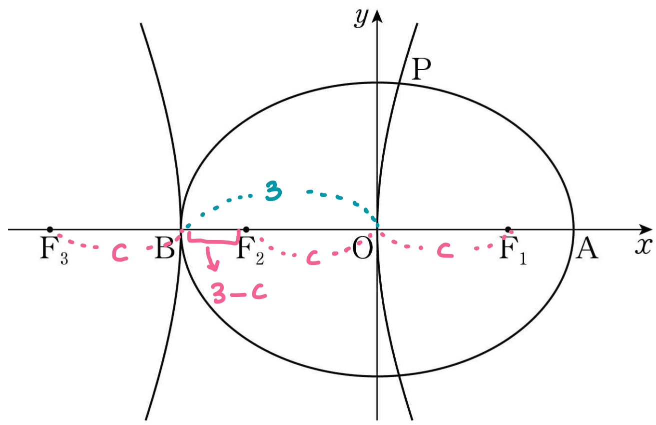
유사문항에서도 정의 활용, 그 계산을 해야 하니 시도해 봐.

[28-2012년 시행 대수능 가형 18번]

자연수 n에 대하여 포물선 $y^2 = \dfrac{x}{n}$의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PF}} = 1$이고 $\overline{\mathrm{FQ}} = a_n$이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{a_n}$의 값은? [4점]

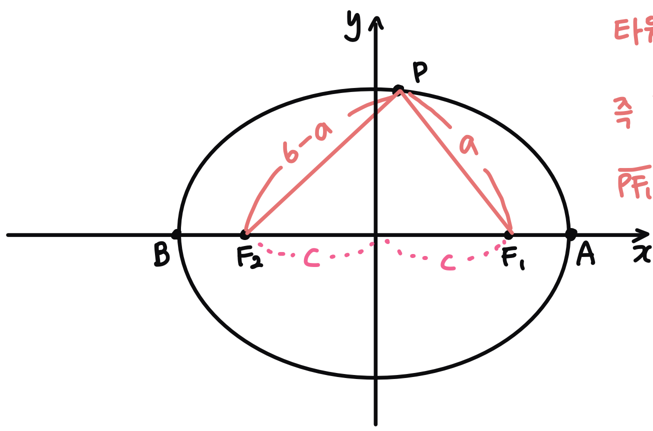
① 210 ② 205 ③ 200 ④ 195 ⑤ 190

029 두 초점이 $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ $(c>0)$ 인 타원이 x 축과 두 점 $A(3, 0)$, $B(-3, 0)$ 에서 만난다. 선분 BO 가 주축이고 점 F_1 이 한 초점인 쌍곡선의 초점 중 F_1 이 아닌 점을 F_3 이라 하자. 쌍곡선이 타원과 제1 사분면에서 만나는 점을 P 라 할 때, 삼각형 PF_3F_2 의 둘레의 길이를 구하시오. (단, O 는 원점이다.) [4점]



타원, 쌍곡선의 정의를 모두 활용하는 문제야.

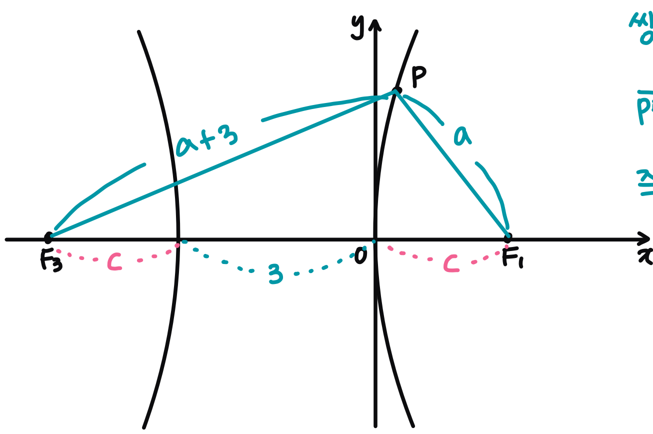
먼저 타원을 기준으로 주어진 정보를 모두 표시해볼게



타원의 꼭짓점이 ±3이므로 장축의 길이는 6이야.

즉 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=6$ 이므로

$\overline{PF_1}=a$ 라 두면 $\overline{PF_2}=6-a$ 이지.



쌍곡선의 주축의 길이가 3이므로

$\overline{PF_3}-\overline{PF_1}=3$ 이야.

즉 $\overline{PF_3}=a+3$ 이지.

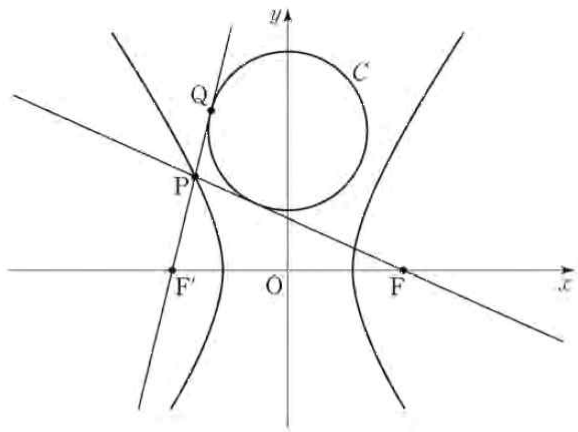
$\therefore$ $\triangle PF_3F_2$ 둘레의 길이 : $\overline{PF_2}+\overline{PF_3}+\overline{F_2F_3}=(6-a)+(a+3)+(3-c+c)=12$

처음에는 어려울 수 있지만, 이차곡선 여러개가 한번에 나타나 있는 경우 정보를 잘 표시하고 다뤄야 해.

유사문항에도 이렇게 정보량이 많은 문제를 수록해 뒀으니 꼭 연습해봐!

[29-2017년 시행 대수능 가형 27번]

그림과 같이 두 초점이 F, F$'$인 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{17}=1$ 위의 점 P에 대하여 직선 FP와 직선 F$'$P에 동시에 접하고 중심이 y축 위에 있는 원 C가 있다. 직선 F$'$P와 원 C의 접점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{F'Q}}=5\sqrt{2}$일 때, $\overline{\mathrm{FP}}^{\,2}+\overline{\mathrm{F'P}}^{\,2}$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{F'P}}<\overline{\mathrm{FP}}$) [4점]



(아래 자리가 없어서 여기에 적을게 :))

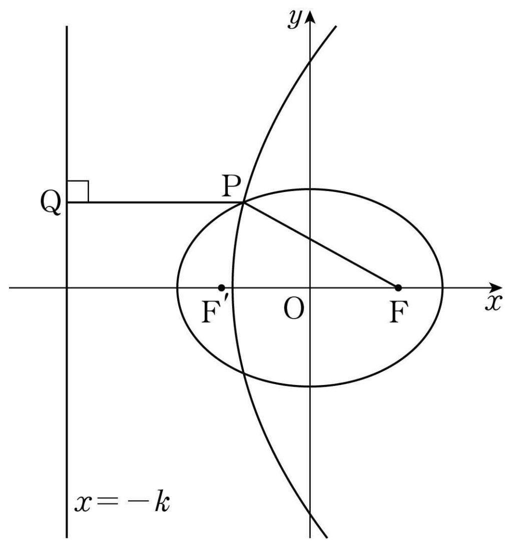
사실 이 정도 문제는 어렵지 않게 풀 수 있어야 해. 1단원만 들어가다 보니 문제들이 좀 쉽지?

좋은 결과 받은 학생들은 절대 자만하지 말고, 그렇지 않은 학생들은 앞으로 열공하면 돼. 이건 3모잖아! 앞으로도 파이팅~!!

030 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$ 이고 장축의 길이가 12 인 타원이 있다. 점 F 가 초점이고 직선 $x=-k\ (k>0)$ 이 준선인 포물선이 타원과 제2 사분면의 점 P 에서 만난다. 점 P 에서 직선 $x=-k$ 에 내린 수선의 발을 Q 라 할 때, 두 점 P, Q 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\cos(\angle \mathrm{F'FP}) = \dfrac{7}{8}$
(나) $\overline{\mathrm{FP}} - \overline{\mathrm{F'Q}} = \overline{\mathrm{PQ}} - \overline{\mathrm{FF'}}$

$c+k$ 의 값을 구하시오. [4점]



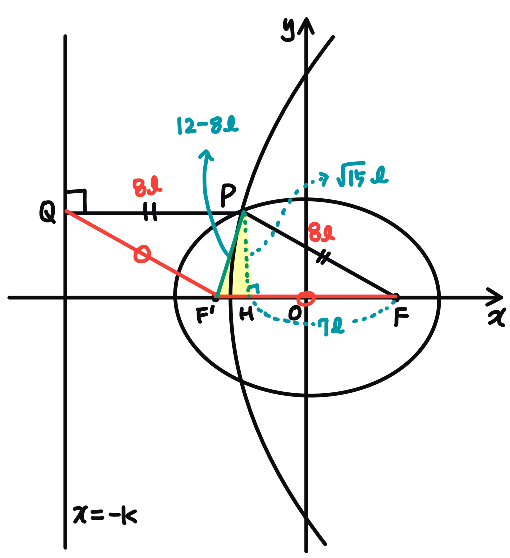
이 문제에서는 포물선과 타원의 성질을 동시에 활용해야 해.

(가) 조건에서 $\cos(\angle F'FP) = \frac{7}{8}$ 이라고 했으니, $\angle F'FP = \theta$ 로 둘게

포물선의 성질에 의해 $\overline{FP} = \overline{PQ}$ 이기 때문에,

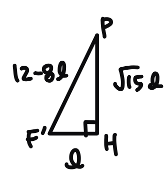
(나) 조건은 $\overline{FF'} = \overline{F'Q}$ 로 해석 가능해.

이제 이 정보들과 이차곡선의 성질로 얻을 수 있는 정보들을 그림에 나타내볼게.



$\overline{F'Q} = \overline{F'F}$ 인데 $\overline{PQ} // \overline{FF'}$

→ □PQF'F는 평행사변형 ($\overline{F'Q} = \overline{F'F} = 8l$)



피타고라스 → $l = 1$

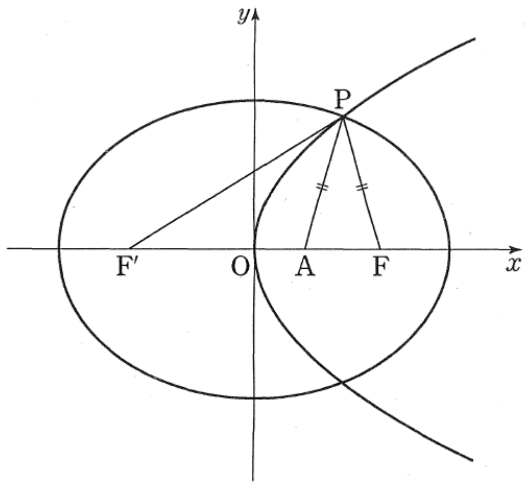
∴ $c+k = (4l)+(11l) = 15$

[30-2017년 시행 9월 모평 가형 27번]

좌표평면에서 초점이 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ $(a > 0)$이고 꼭짓점이 원점인 포물선과 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c > a)$인 타원의 교점 중 제1사분면 위의 점을 P라 하자.

$$\overline{\mathrm{AF}} = 2,\ \overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PF}},\ \overline{\mathrm{FF}'} = \overline{\mathrm{PF}'}$$

일 때, 타원의 장축의 길이는 $p + q\sqrt{7}$이다. $p^2 + q^2$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]



불꽃수학

김성은