삼각함수 활용!

by 지민♡

1. 무작정 박치기 X, 설계 먼저!

설계가 거창한 것이 아니다. ☆☆☆ 문제의 조건을 어떻게 활용할지, 주어진 도형에서 어떤 걸 할 수 있을지 고민 해보고 풀이에 진입해야 한다.

도형의 기본은 삼각형

사각형, 오각형, 직선, 교선 ··· 등등 도형이 복잡한 경우 무조건 삼각형으로 쪼개 생각할 것!!

여태껏 배운 도형의 성질들 대부분이 삼각형에 관한 것이다.

☆☆☆ 확정된 삼각형

삼각형에는 변 길이 3개, 각 관련 정보 3개 총 6개의 조건이 있고,

이 중 아무거나 3개만 알면 삼각형이 확정된다. ⇒ 모든 정보를 구할 수 있다.

이 논리가 익숙해지면 문제 풀이 전, 풀이 중 설계를 할 때 유용하고, 계산량도 준다.

⇒ 칼럼, 손해설 참고!! 꼭!!

☆☆☆ 문제가 안 풀린다면 "각"

도형에는 "길이" 정보와 "각(angle)" 정보가 있고, 일반적으로 "각"정보가 파악하기도, 활용하기도 어렵다.

문제가 안 풀린다면 놓친 각 조건이 있는지 점검해보는 것이 좋다.

삼각형, 외각, 평행(엇각), 닮음, 원주각 ···

각 조건에 예민해지도록!!

설계 단계에서 막혀도 OK

→ 13번 참고

어려운 도형문제는 주어진 조건을 어떻게 활용해야 할지 막막한 경우가 있다.

이런 경우 주저하지 말고 풀이를 시작해야 한다!

수선, 각 표시, 길이 표시 등 할 수 있는 것들을 해나가다 보면 길이 보일 것이다

2. 사용할 수 있는 툴은 숙달하기!

삼각형의 넓이

$\frac{1}{2}$(밑변)(높이) or $\boxed{\frac{1}{2}ab\sin\theta}$

의식할 필요 없이 넓이를 알려줬거나 구해야 하는 경우 무조건 공식을 떠올려야 한다.

원

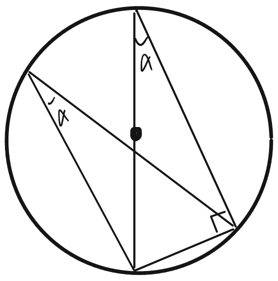
원 위의 모든 점은 중심과 이은 것을 염두에 둬야 하고,

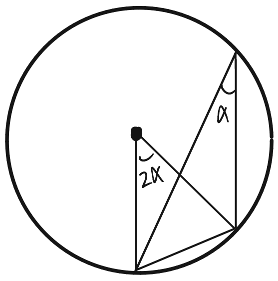
원주각/중심각 도 잘 활용해야 한다.

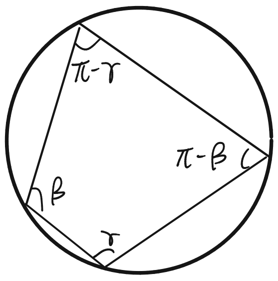
원주각

외접원이 그려져 있는 경우 꼭 신경 써야 한다.

어려운 도형 문제에 잘 풀리지 않는 경우 원주각을 잘 관찰해 볼 것!!







중학도형

아주아주 중요하다. 문제 풀이 때 아래 내용을 떠올리지 못해 틀리는 일은 없어야 한다.

- 삼각형 외각
- 삼각형 합동, 닮음
- 중선, 각의 이등분선
- 무게중심, 외심, 내심
- 내접원의 반지름과 삼각형 넓이의 관계

사인/코사인 법칙

단순히 공식을 잘 외우는 게 중요한 게 X

어떤 정보가 있을 때 어떤 공식을 활용해야 할지 영리하게 판단해야 한다.

사인 법칙

외접원 반지름 ~, 넓이 ~ 나오면 무조건 의심!

삼각형에서 "각" 정보가 2개 이상일 때에도 유용하다.

코사인 법칙

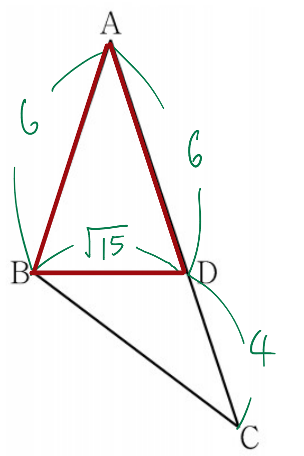
엄~~청 자주 쓰인다.

변 3개를 모두 알거나, 변 2개 각 1개를 안다면 무조건 사용한다.

사인법칙과 달리, 둔각일 때 cos 의 부호를 고려해주어야 한다.

1. $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=10$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위에 점 D를 $\overline{AB}=\overline{AD}$가 되도록 잡는다. $\overline{BD}=\sqrt{15}$일 때, 선분 BC의 길이를 k라 하자. k^2의 값을 구하시오. [3점]

41



[2021학년도 9월 모의평가 가형 12번/나형 25번]

<Idea>

△ABD는 세 변의 길이를 모두 알기 때문에

"확정된 삼각형"

$\overline{BC}$를 구해야 하는데

i) △ABC : 정보 하나 부족 → ∠A 구하고 오기

ii) △BCD : 〃 → ∠BDA 구하고 오기

i) $\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2\overline{AB}\,\overline{AD}\cos\angle A$

$15=36+36-2\cdot 36\cdot\cos\angle A$

$\boxed{\therefore \cos A=\frac{19}{24}}$

$\Rightarrow \overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AB}\,\overline{AC}\cos\angle A$

$\overline{BC}^2=36+100-2\cdot 60\cdot\frac{19}{24}$

$=\boxed{41}$

ii) $\overline{AB}^2=\overline{BD}^2+\overline{AD}^2-2\overline{BD}\,\overline{AD}\cos(\angle BDA)$

$36=15+36-2\sqrt{15}\cdot 6\cdot\cos(\angle BDA)$

$\boxed{\therefore \cos(\angle BDA)=\frac{\sqrt{15}}{12}}$

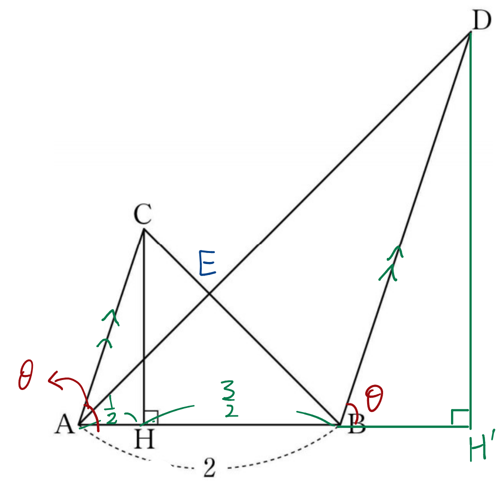
$\Rightarrow \overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{DC}^2-2\overline{BD}\,\overline{DC}\cos(\angle BDC)$

$\overline{BC}^2=15+16+2\sqrt{15}\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{15}}{12}$

$=\boxed{41}$

2. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}\,/\!/\,\overline{BD}$, $\overline{AC}:\overline{BD}=1:2$인 두 삼각형 ABC, ABD가 있다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발 H는 선분 AB를 $1:3$으로 내분한다.

15



H'를 설정하는 과정이 발상적이어 보일 수 있는데, 1:2 닮음, $\overline{AB}=2$, 51 세 조건을 엮으면 미지수 도입 후 코사인 법칙을 쓰는 등 어떻게든 풀려요! 처음 설계할 때 답이 나오도록 설계한 게 확실하다면, 계산 박치기 무서워하지 마세요!

두 삼각형 ABC, ABD의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r, R라 할 때, $4(R^2-r^2)\times\sin^2(\angle CAB)=51$이다. $\overline{AC}^2$의 값을 구하시오. (단, $\angle CAB<\frac{\pi}{2}$) [4점]

[2021학년도 3월 전국연합학력평가 21번]

<Idea>

$4(R^2-r^2)\sin^2(\angle CAB)=51$

원이 결합된 도형이 아니라 R을 쉽게 구하기는 어려워 보임.

sin 값을 구하려면 확정된 삼각형이 있어야 하는데 없음.

$\Rightarrow \frac{a}{\sin\theta}=2R$ 이용해 길이로 형변환 고려해볼 것

$\overline{AC}\,/\!/\,\overline{BD}$ 이므로 $\angle CAB=\angle DBH'=\theta$

$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2r$, $\frac{\overline{AD}}{\sin\theta}=2R$

$\Rightarrow \boxed{\overline{AD}^2-\overline{BC}^2=51}$ … ①

$\overline{AC}=a$ or $\overline{CH}=h$ 등 미지수 도입 후 ①을 한 문자로 정리

$\overline{CH}=h \Rightarrow \overline{AC}=\sqrt{h^2+\frac{1}{4}}$, $\boxed{\overline{BC}=\sqrt{h^2+\frac{9}{4}}}$

한편, △ACH와 △BDH'이 1:2 닮음이므로

$\overline{BH'}=2\overline{AH}=1$, $\overline{DH'}=2\overline{CH}=2h \Rightarrow \boxed{\overline{AD}=\sqrt{4h^2+9}}$

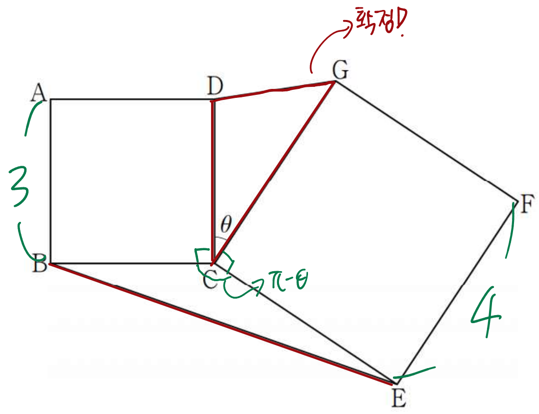
①을 h로 정리하면,

$(4h^2+9)-(h^2+\frac{9}{4})=3h^2+\frac{27}{4}=51$

$3h^2=\frac{177}{4} \Rightarrow \boxed{h^2=\frac{59}{4}}$

$\therefore \overline{AC}^2=h^2+\frac{1}{4}=\boxed{15}$

3. 그림과 같이 평면 위에 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD와 한 변의 길이가 4인 정사각형 CEFG가 있다. $\angle DCG=\theta$ $(0<\theta<\pi)$라 할 때, $\sin\theta=\frac{\sqrt{11}}{6}$이다. $\overline{DG}\times\overline{BE}$의 값은? [4점]



① 15　② 17　③ 19　④ 21　⑤ 23

[2021년도 7월 전국연합학력평가 나형 15번]

<idea>

△DCG는 $\overline{DC}$, $\overline{CG}$를 알고, θ에 대한 정보가 있으므로 "확정된 삼각형" ⇒ 코사인 법칙으로 $\overline{DG}$ 구할 수 있음.

$\overline{BE}$를 구하기 위해선 △BCE를 관찰해야 함.

$\overline{BC}$, $\overline{CE}$를 알고, $\angle BCE=\pi-\theta$ 이므로 △BCE도 "확정된 삼각형" ⇒ 코사인 법칙으로 $\overline{BE}$ 구할 수 있음.

$\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta = \frac{25}{36}$　∴ $\boxed{\cos\theta=\frac{5}{6}}$

$\overline{DG}^2 = \overline{DC}^2+\overline{CG}^2-2\overline{DC}\,\overline{CG}\cos\theta$

$= 9+16-24\cdot\frac{5}{6}$

$= 5$　∴ $\boxed{\overline{DG}=\sqrt{5}}$

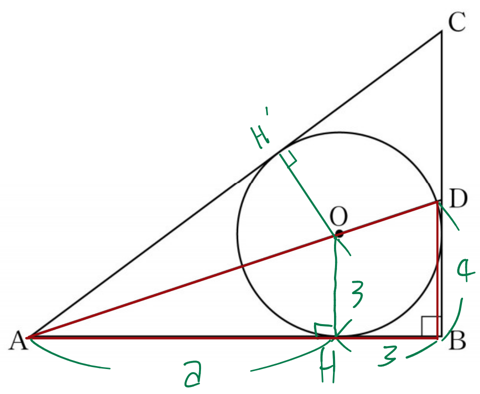
$\overline{BE}^2 = \overline{BC}^2+\overline{CE}^2-2\overline{BC}\,\overline{CE}\cos(\pi-\theta)$

$= 9+16+24\cdot\frac{5}{6}$

$= 45$　∴ $\boxed{\overline{BE}=3\sqrt{5}}$

∴ $\boxed{\overline{DG}\times\overline{BE}=15}$

4. 그림과 같이 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC에 내접하고 반지름의 길이가 3인 원의 중심을 O라 하자. 직선 AO가 선분 BC와 만나는 점을 D라 할 때, $\overline{DB}=4$이다. 삼각형 ADC의 외접원의 넓이는? [4점]



① $\frac{125}{2}\pi$　② 63π　③ $\frac{127}{2}\pi$　④ 64π　⑤ $\frac{129}{2}\pi$

[2021년도 10월 전국연합학력평가 가형 17번]

<idea>

주어진 단서가 적고, 각에 관한 정보가 없음.

⇒ 길이 위주로 접근

△ADC의 외접원 R ⇒ 사인 법칙 써야 함

⇒ 각과 마주보는 변의 길이를 모두 알아야 함.

어디로 계산하는 게 쉬울지 고민해 볼 것!

$\overline{AH}=a$ 라 하면, 삼각형의 닮음을 이용해 a를 구할 수 있다.

$3:4=a:a+3$ ⇒ $\boxed{a=9}$

이제 △ABD는 "확정된 삼각형"

⇒ ∠CAD, ∠ADC, $\overline{AD}$ 등을 구할 수 있음.

$\overline{DC}$, $\overline{AC}$, ∠ACD 를 구하면 사인법칙 적용 가능

내접원의 특성을 이용해 길이를 얻어내야 함.

미적분 과정의 배각 공식을 알면 계산 가능

$\overline{H'C}=b$라 하면 $\overline{BC}=3+b$, $\overline{AC}=9+b$

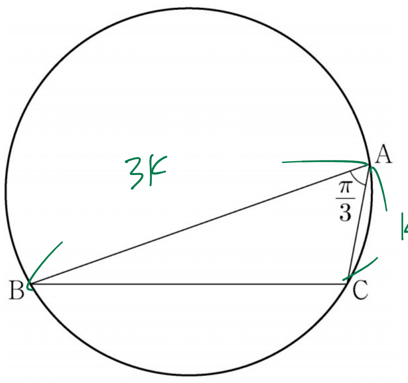
$2(\text{삼각형 ABC 넓이}) = \underset{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{12(3+b)} = \underset{r}{3}(\underset{\text{둘레}}{12+3+b+9+b})$

$12+4b=2b+24$ ⇒ $\boxed{b=6}$

$\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)} = \frac{b-1}{\sin(\angle DAB)} = \frac{5}{\frac{1}{\sqrt{10}}} = \boxed{5\sqrt{10}=2R}$

$\boxed{\therefore R^2\pi=\frac{125}{2}\pi}$

5. $\angle A=\frac{\pi}{3}$ 이고 $\overline{AB}:\overline{AC}=3:1$ 인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 선분 AC의 길이를 k라 하자. k^2의 값을 구하시오. [4점]



21

[2021학년도 대학수학능력시험 가형 10번/나형 28번]

<idea>

외접원의 반지름 → 사인 법칙 써야 함.

∠B 나 ∠C를 구하는 것 보다 BC를 구하는 것이 쉬워 보임

⇒ 코사인 법칙으로 BC 구한 후 사인 법칙으로 R 구하기

<코사인>

$$\overline{BC}^2 = 9k^2+k^2-2\cdot 3k^2\cdot \cos\frac{\pi}{3} = 7k^2 \Rightarrow \boxed{\overline{BC}=\sqrt{7}k}$$

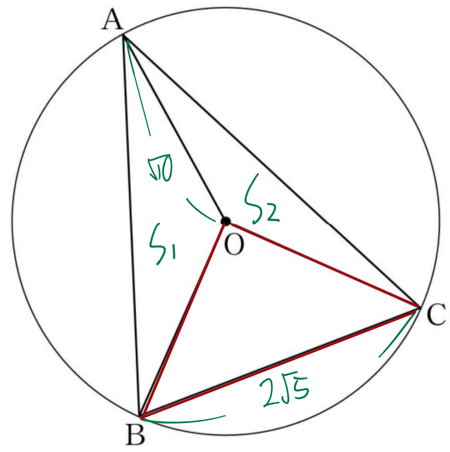
<사인>

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)} = \frac{\sqrt{7}k}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\cdot 7$$

$$\therefore \boxed{k=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\cdot 2\cdot 7=\sqrt{21}}$$

$$\therefore \boxed{k^2=21}$$

6. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 인 원에 내접하는 예각삼각형 ABC에 대하여 두 삼각형 OAB, OCA의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. $3S_1=4S_2$이고 $\overline{BC}=2\sqrt{5}$ 일 때, 선분 AB의 값은? [4점]



① $2\sqrt{7}$ ② $\sqrt{30}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{34}$ ⑤ 6

[2021년도 3월 전국연합학력평가 가형 19번]

<idea>

△OBC는 세 변의 길이를 알기 때문에 "확정된 삼각형"

S_1, S_2 조건
- $S=\frac{1}{2}$(밑변)(높이) → ...? 각도 안 됨.
- $S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$ → 이 식으로 접근

S_1, S_2 각각 두 변의 길이를 알고 있으므로 ($\sqrt{10}$)

S_1, S_2 조건을 사이각에 대한 정보로 해석 가능

$$3S_1=4S_2$$

$$3\cdot\frac{1}{2}\sqrt{10}^2\sin(\angle AOB) = 4\cdot\frac{1}{2}\sqrt{10}^2\sin(\angle AOC)$$

$$\therefore \boxed{3\sin(\angle AOB)=4\sin(\angle AOC)}$$

△OBC에서 코사인법칙을 쓰면,

$$\overline{BC}^2=\overline{OB}^2+\overline{OC}^2-2\overline{OB}\,\overline{OC}\cos(\angle BOC)$$

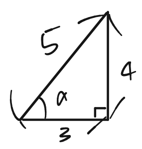
$$20=10+10-2\cdot 10\cos(\angle BOC) \Rightarrow \boxed{\angle BOC=\frac{\pi}{2}}$$

O를 기준으로 하는 각 정보를 모두 알고 있음.

$\angle AOB=\alpha$ 라 하면, $\angle AOC=\frac{3}{2}\pi-\alpha$ $\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$

$$3\sin\alpha = 4\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) = -4\cos\alpha$$

$$\therefore \boxed{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{4}{3}} \Rightarrow$$



$$\boxed{\cos\alpha=-\frac{3}{5},\ \sin\alpha=\frac{4}{5}}$$

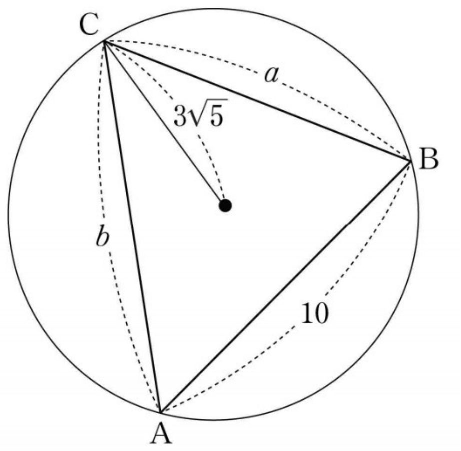
$\overline{AB}$를 구하기 위해 △AOB에서 코사인법칙을 쓰면,

$$\overline{AB}^2=\overline{AO}^2+\overline{BO}^2-2\overline{AO}\,\overline{BC}\cos\alpha$$

$$=10+10+2\cdot 10\cdot\frac{3}{5}=32 \Rightarrow \boxed{\overline{AB}=4\sqrt{2}}$$

7. 길이가 각각 10, a, b인 세 선분 AB, BC, CA를 각 변으로 하는 예각삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점을 지나는 원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$이고

$\frac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab}=\frac{4}{3}$ 일 때, ab의 값은? [4점]



① 140 ② 150 ③ 160 ④ 170 ⑤ 180

[2021년도 3월 전국연합학력평가 나형 19번]

<idea>

$R=3\sqrt{5}$ ⇒ 사인법칙

$\frac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab}=\frac{4}{3}$ ⇒ 코사인 법칙

$\overline{AB}$를 알기 때문에 사인법칙으로 $\angle C$를 구할 수 있다.

$\frac{10}{\sin C}=6\sqrt{5}$ $\therefore \boxed{\sin C=\frac{\sqrt{5}}{3},\ \cos C=\frac{2}{3}}$

코사인 법칙으로 $a^2+b^2\sim$ 식을 표현할 수 있다.

$10^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$\therefore a^2+b^2-ab\cos C=100+ab\cos C$

$=\boxed{100+\frac{2}{3}ab}$

$\frac{100+\frac{2}{3}ab}{ab}=\frac{4}{3}$

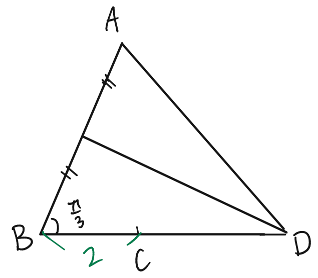
$\frac{100}{ab}=\frac{2}{3}$ $\therefore \boxed{ab=150}$

8. $\angle ABC=\frac{\pi}{3}$, $\overline{BC}=2$인 삼각형 ABC에서 선분 AB의 수직이등분선과 선분 BC의 연장선이 만나는 점을 D라 하면, 세 점 A, B, D를 지나는 원의 반지름의 길이는 $\frac{5\sqrt{3}}{3}$이다. $\cos(\angle CAD)$의 값은? [4점]

① $\frac{7\sqrt{19}}{38}$ ② $\frac{5\sqrt{19}}{38}$ ③ $\frac{3\sqrt{19}}{38}$ ④ $\frac{7\sqrt{17}}{38}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{17}}{38}$

<idea>

[2022학년도 주멘 모의고사 1회 15번]



$\triangle ABD$가 이등변삼각형

$R=\frac{5\sqrt{3}}{3}$ → 사인법칙

$\frac{\overline{AD}}{\sin B}=2\cdot\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ⇒ $\boxed{\overline{AD}=5}$

$\triangle ABD$는 두 변의 길이와 각을 알기 때문에 "확정된 삼각형"

$\angle CAD$를 알기 위해서는 $\overline{AC}$를 알아야 함.

⇒ $\overline{AC}$를 알기 위해선 $\overline{AB}$를 알아야 함

⇒ $\overline{AB}$는 확정된 삼각형에서 코사인법칙으로 구할 수 있음.

이등변삼각형에서 $\angle B=\frac{\pi}{3}$라서 정삼각형!으로 판단할 수 있다.

$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2-2\overline{AB}\,\overline{BD}\cos\frac{\pi}{3}$

$25=\overline{AB}^2+25-2\cdot5\overline{AB}\cdot\frac{1}{2}$

$\overline{AB}^2-5\overline{AB}=0$ ⇒ $\boxed{\overline{AB}=5}$

$\triangle ABC$에서 코사인법칙을 쓰면

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AB}\,\overline{BC}\cos\frac{\pi}{3}$

$\overline{AC}^2=25+4-2\cdot5\cdot2\cdot\frac{1}{2}=19$ ⇒ $\boxed{\overline{AC}=\sqrt{19}}$

$\triangle ACD$에서 코사인법칙을 쓰면

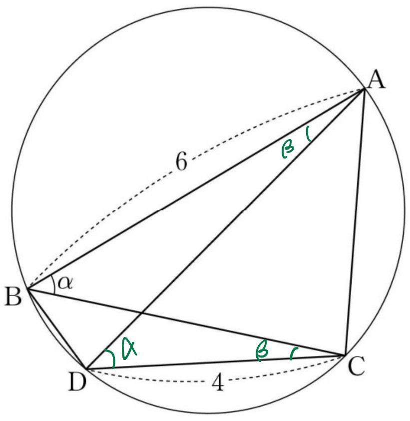
$\overline{CD}^2=\overline{AC}^2+\overline{AD}^2-2\overline{AC}\,\overline{AD}\cos(\angle CAD)$

$9=19+25-2\cdot5\sqrt{19}\cos(\angle CAD)$

$\therefore \cos(\angle CAD)=\frac{35}{10\sqrt{19}}=\boxed{\frac{7\sqrt{19}}{38}}$

9. 그림과 같이 예각삼각형 ABC가 한 원에 내접하고 있다. $\overline{AB}=6$이고, $\angle ABC=\alpha$라 할 때 $\cos\alpha=\frac{3}{4}$이다. 점 A를 지나지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{CD}=4$이다. 두 삼각형 ABD, CBD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1 : S_2 = 9 : 5$이다. 삼각형 ADC의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오. [4점]

63



[2021년도 3월 전국연합학력평가 나형 29번]

<Idea>

원주각으로 $\angle ADC=\alpha$ 알 수 있고,

S_1, S_2 조건에서는 α가 아니라 β가 공통각이다.

S_1, S_2 조건으로 $\overline{AD}:\overline{BC}$ 구하고

$\cos\alpha$ 이용해서 길이 확정

$S_1 : S_2 = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot \overline{AD}\sin\beta : \frac{1}{2}\cdot 4\cdot \overline{BC}\sin\beta$

$= 3\overline{AD} : 2\overline{BC} = 9 : 5$

$\boxed{6\overline{BC}=5\overline{AD}}$ $\Rightarrow$ $\overline{BC}=5k$, $\overline{AD}=6k$

변 길이 비율로 알고, α 조건 사용해야 함

$\Rightarrow$ $\overline{AC}$가 공통인 $\triangle ABC$, $\triangle ADC$ 분석

코사인 법칙을 쓰면

$\overline{AC}^2 = 6^2+(5k)^2-2\cdot 6\cdot 5k\cos\alpha$

$= 4^2+(6k)^2-2\cdot 4\cdot 6k\cos\alpha$

$36+25k^2-45k = 16+36k^2-36k$

$11k^2+9k-20=0$

$(11k+20)(k-1)=0$ $\boxed{k=1}$

$S=\frac{1}{2}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{DC}\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=3\sqrt{7}$

$\therefore \boxed{S^2=63}$

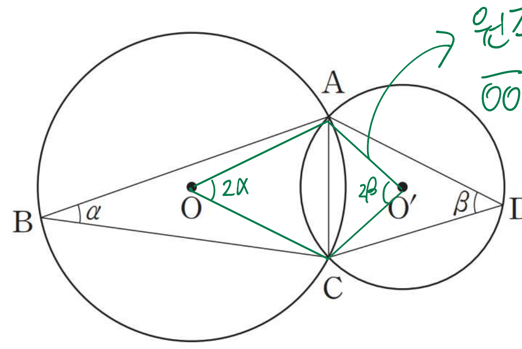
10. 그림과 같이 한 평면 위에 있는 두 삼각형 ABC, ACD의 외심을 각각 O, O′이라 하고 $\angle ABC=\alpha$, $\angle ADC=\beta$라 할 때,

$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{3}{2}$, $\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}$, $\overline{OO'}=1$

① ② ③

이 성립한다. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

26



원주각 기본

$\overline{OO'}=1$ 조건이 있기 때문에 더더욱 저 사각형을 그려야 함

<Idea>

[2022학년도 예비시행 21번]

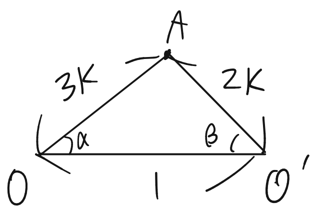
① 조건 ⇒ $\overline{AC}$가 공통이므로 사인법칙 써서 반지름 비를 알 수 있음

②, ③ 조건 ⇒ 처음에 어떻게 활용할 지 감이 잘 안오지만,

$\triangle AOO'$을 그려보면 활용 가능.

$\frac{\overline{AC}}{\sin\alpha}=2R$, $\frac{\overline{AC}}{\sin\beta}=2r$

$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{R}{r}=\frac{3}{2}$ $\therefore \boxed{2R=3r}$ $\Rightarrow R=3k,\ r=2k$



$\angle OAO'=\pi-(\alpha+\beta)$

② 조건 사용 가능

$\overline{OO'}^2=\overline{AO}^2+\overline{AO'}^2-2\overline{AO}\,\overline{AO'}\cos(\angle OAO')$

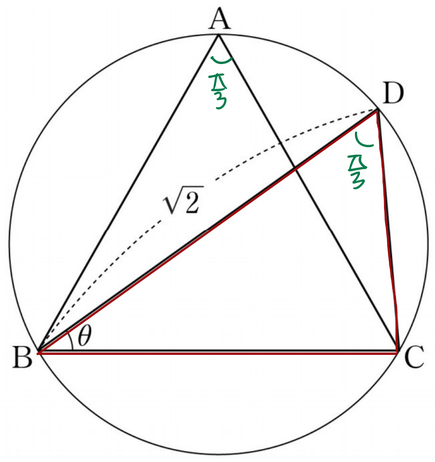
$1 = 9k^2+4k^2+12k^2\cos(\alpha+\beta) = 17k^2$

$\therefore \boxed{k=\frac{1}{\sqrt{17}}}$

$S=\pi R^2 = 9\pi k^2 = \boxed{\frac{9}{17}\pi}$

$\therefore p+q=\boxed{26}$

11. 정삼각형 ABC가 반지름의 길이가 r인 원에 내접하고 있다. 선분 AC와 선분 BD가 만나고 $\overline{BD}=\sqrt{2}$가 되도록 원 위에서 점 D를 잡는다. $\angle DBC=\theta$라 할 때, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$이다. 반지름의 길이 r의 값은? [4점]



① $\frac{6-\sqrt{6}}{5}$ ② $\frac{6-\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{4}{5}$
④ $\frac{6-\sqrt{3}}{5}$ ⑤ $\frac{6-\sqrt{2}}{5}$

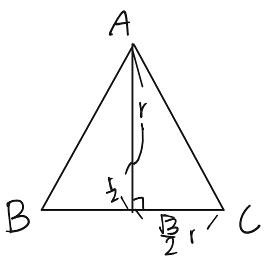
[2021년도 10월 전국연합학력평가 나형 19번]

<idea>

반지름의 길이 r ⇒ 사인법칙

정삼각형 ABC ⇒ 모든 각 $60°$, 변의 길이 r로 표현 가능

△BCD에서 계산할 수 있는 틀이 많다.



⇒ 정삼각형 한 변의 길이 $\boxed{\sqrt{3}r}$

△BCD에서 사인법칙을 쓰면

$\frac{\overline{CD}}{\sin\theta}=\sqrt{3}\,\overline{CD}=2r$ $\therefore \boxed{\overline{CD}=\frac{2}{3}\sqrt{3}r}$

△BCD는 변 1개와 각 2개를 알아 "확정된 삼각형" 이므로 계산을 통해 r 값을 구할 수 있다.

$\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2-2\overline{BD}\,\overline{CD}\cos\frac{\pi}{3}$

$3r^2=2+\frac{4}{3}r^2-2\sqrt{2}\,\frac{2}{3}\sqrt{3}r\,\frac{1}{2}$

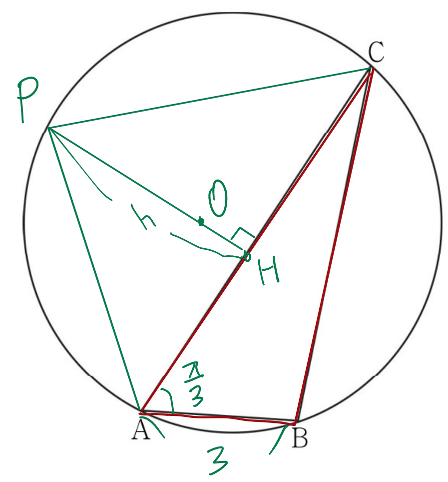
$\frac{5}{3}r^2+\frac{2}{3}\sqrt{6}r-2=0$

$5r^2+2\sqrt{6}r-6=0$ $\therefore r=\frac{-\sqrt{6}\pm\sqrt{6+30}}{5}$

$\therefore \boxed{r=\frac{6-\sqrt{6}}{5}}$

12. 그림과 같이 원 C에 내접하고 $\overline{AB}=3$, $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 원 C의 넓이가 $\frac{49}{3}\pi$일 때, 원 C 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은? (단, 점 P는 점 A도 아니고 점 C도 아니다.) [4점]

엄밀히 설정하려면 P가 $\overline{AC}$ 기준 왼 쪽인지 오른쪽인지 판별해야 하는데, 그냥 한 쪽으로 가정하고 계산해도 답이 나오고, △ABC 길이를 모두 구한 후 ∠B가 둔각인을 판별해 P의 위치를 정할 수 있다.



① $\frac{32}{3}\sqrt{3}$ ② $\frac{34}{3}\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$
④ $\frac{38}{3}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{40}{3}\sqrt{3}$

[2021년도 4월 전국연합학력평가 가형 19번]

<idea>

원의 넓이 ⇒ R ⇒ 사인법칙

정보를 하나 더 얻으면 △ABC를 "확정된 삼각형"으로 만들 수 있다.

△PAC 넓이의 최댓값은 $\overline{AC}$가 고정이라면 높이가 최대일 때 최대일 것.

넓이 $\frac{49}{3}\pi$ ⇒ $\boxed{R=\frac{7}{\sqrt{3}}}$

사인 법칙을 쓰면

$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{BC}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{14}{\sqrt{3}}$ $\therefore \boxed{\overline{BC}=7}$ ⇒ △ABC는 "확정된 삼각형"

$\overline{AC}$의 길이는 정해진 것이고, 이 때 넓이는 h가 최대일 때, 즉 $\overline{PH}$가 $\overline{AC}$의 수직이등분선 일 때 최대이다.

코사인법칙을 쓰면,

$\overline{BC}^2=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2-2\overline{AC}\,\overline{AB}\cos\frac{\pi}{3}$

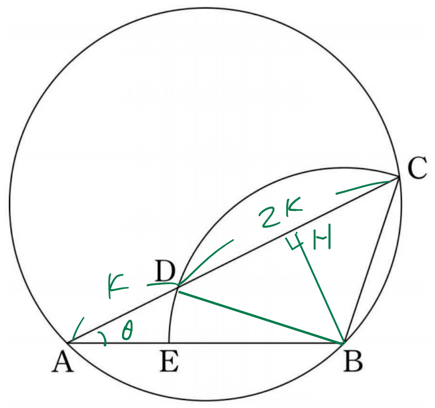
$49=\overline{AC}^2+9-3\overline{AC}$ ⇒ $\therefore \boxed{\overline{AC}=8}$

$\overline{PO}=R=\frac{7}{\sqrt{3}}$, $\overline{OH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH}^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ⇒ $\boxed{h=\frac{8}{\sqrt{3}}}$

$\therefore S=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\frac{8}{\sqrt{3}}=\boxed{\frac{32}{3}\sqrt{3}}$

13. 그림과 같이 넓이가 5π인 원에 내접하는 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC를 반지름으로 하는 부채꼴이 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점 D를 지날 때, $\tan(\angle CAB)=\frac{1}{2}$이다. $\overline{DE}^2=p+q\sqrt{10}$일 때, $5(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]

28



[2022학년도 주멘 모의고사 2회 21번]

<Idea>

넓이가 5π ⇒ 사인법칙

θ가 조건을 유념해야 한다!? 문제 내에서 어떻게 쓰일지 잘 모르기 때문에 유념하고 있다가 적당히 사용할 것.

△ABC에서 사인법칙을 쓰면

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=\frac{\overline{BC}}{\frac{1}{\sqrt5}}=2R=2\sqrt5$$

$\therefore \boxed{\overline{BC}=2}$

부채꼴 BCE를 활용하기 위해 그림과 같이 선분을 이으면, $\boxed{\theta\text{를 포함하는 직각}\triangle AHB}$가 생긴다.

$$\tan\theta=\frac{\overline{HB}}{\overline{AH}}=\frac{\overline{HB}}{2K}=\frac{1}{2}\qquad \therefore \boxed{\overline{HB}=K}$$

$\overline{DH}=\overline{HB}=K$ 이므로 $\boxed{\angle BDH=\angle BCH=\frac{\pi}{4}}$

$\overline{BC}=\overline{BD}=2$ 이므로 $\boxed{K=\sqrt2}$

⇒ 이제 위 그림에 있는 모든 삼각형은

"확정된 삼각형"

$\overline{DE}$를 구하기 위해

> $\overline{AB}$를 구함 ⇒ $\overline{AE}$를 구함
>
> ⇒ △ADE에서 코사인 법칙

순으로 계산하자.

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AC}\,\overline{BC}\cos\frac{\pi}{4}$$

$$=18+4-12=10$$

$\therefore \boxed{\overline{AB}=\sqrt{10}}$

$\overline{AE}=\sqrt{10}-2$ 이므로

$$\overline{DE}^2=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2-2\overline{AD}\,\overline{AE}\cos\theta$$

$$=2+14-4\sqrt{10}-2\sqrt2(\sqrt{10}-2)\frac{2}{\sqrt5}$$

$$=\boxed{8-\frac{12}{5}\sqrt{10}}$$

$\therefore \boxed{5(p+q)=28}$