이투스 9월 변형

1) 9번 변형

실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\left(x^2+2x\right)f(x)-(x-1)^2g(x)=x^2-4x+6$$

을 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$위의 $x=1$인 점에서의 접선의 y절편은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

10-2

2) 10번 변형

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{-1}^{x}(t^3+2t)\,dt+\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{1}^{x+1}(t^2-2t)dt$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

10-3

3) 11번 변형

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sum_{k=1}^{n}(a_k - 2b_k) = n^2$

(나) $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{3}$

$b_1 = 1$일 때, b_8의 값은?

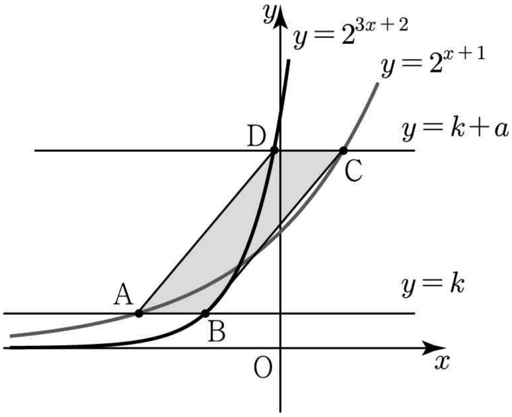
① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

10-3

4) 12

그림과 같이 직선 $y=k$가 두 곡선 $y=2^{x+1}$, $y=2^{3x+2}$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고 직선 $y=k+a$가 두 곡선 $y=2^{x+1}$, $y=2^{3x+2}$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 사각형 ABCD가 평행사변형이 되게 하는 a의 값을 $f(k)$라 할 때, $f(1)\times f\left(\frac{1}{2}\right)\times f\left(\frac{1}{4}\right)$의 값은?

(단, $0<k<\sqrt{2}$)

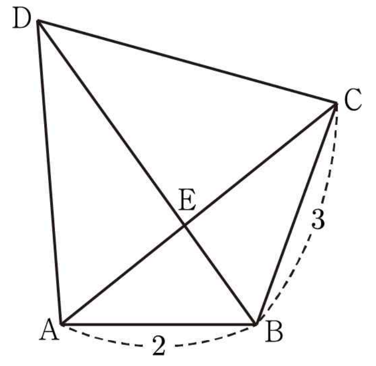


① $\frac{217}{8}$ ② $\frac{61}{2}$ ③ $\frac{251}{8}$ ④ $\frac{135}{4}$ ⑤ $\frac{279}{8}$

10-2

5) 13

그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=3$인 사각형 ABCD에서 $\cos(\angle DCB)=\frac{1}{4}$, $\cos(\angle DAB)=-\frac{1}{4}$이고 두 대각선 AC, BD가 만나는 점을 E라 할 때, 삼각형 EBC의 외접원과 삼각형 EAD의 외접원의 넓이비가 $9:16$이다. 선분 CD의 길이는?



① $\frac{3+\sqrt{249}}{4}$　　② $\frac{3+5\sqrt{10}}{4}$　　③ $\frac{3+\sqrt{251}}{4}$

④ $\frac{3+18\sqrt{7}}{4}$　　⑤ $\frac{3+\sqrt{253}}{4}$

10-3

6) 14
두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=(x+1)(x-2)(x^2+1)$이다.
(나) $\lim_{x\to\infty}\frac{g'(x)}{x^2}$의 값은 0과 3이 아닌 정수이다.
(다) 모든 실수 x에 대하여 $g'(f'(x))=\frac{11}{2}$이다.

$f(0)+g(0)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

10-3

7) 15

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} -a_n-1 \ (a_n \le -1) \\ a_n+2 \quad (-1 < a_n \le 0) \\ a_n-1 \quad (0 < a_n \le 1) \\ -a_n+2 \ (a_n > 1) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_7=0$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $a_5>1$이면 $a_6=-1$이다.

ㄴ. $a_6=1$이면 $\sum_{n=1}^{100} a_n=91$

ㄷ. a_1의 값이 될 수 있는 모든 수의 합은 1이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10-2

8) 20번 변형
실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x & (x<2) \\ 2 & (x=2) \\ -\dfrac{1}{2}x+2 & (x>2) \end{cases}$$

가 있다. 두 상수 a, b와 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $\left||f(x)+a|+b\right|$가 실수 전체의 집합에서 연속이다. $a+b$의 값으로 가능한 모든 값 중 최솟값을 m이라 할 때, $|10m|$의 값을 구하시오.
10-2

9) 21
함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}\log_3 x & (x\text{가 유리수일 때}) \\ \log_2 \sqrt{x} & (x\text{가 무리수일 때})\end{cases}$$

일 때, 유리수 m과 무리수 n에 대하여 두 수 $f(m)$과 $f(m)f(n)$은 모두 자연수가 되게 하는 두 실수 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오. (단, $0<m<100$, $0<n<100$)
10-3

10) 22 변형1

함수 $f(x)=x^3-4x^2+3x$와 양수 α에 대하여

$$\int_{\alpha}^{t} f(x)\,dx=0$$

을 만족시키는 t의 값의 개수가 1일 때, $f\left(\frac{4}{3}\alpha\right)$의 값을 구하시오.

10-3

11)

$x \geq 1$에서 정의된 함수 $f(x)$가 $x > 1$인 모든 실수 x에 대하여 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $1 \leq x < 2$일 때 $f(x) = (x-1)(x-2)$이다.
(나) 자연수 n에 대하여 $f(2a+2^n) = k \times f(a+2^{n-1})$이다.
(단, k는 상수이고 $0 \leq a < 2^{n-1}$)

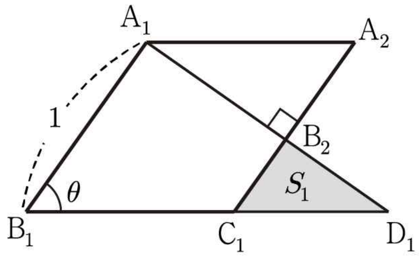
$\displaystyle\int_1^{\alpha} f(x)\,dx = 0$을 만족시키는 α $(\alpha \neq 1)$의 값을 크기가 작은 순으로 나타내면 α_1, α_2, α_3, $\cdots$이다. $\displaystyle\int_{32}^{\alpha_5} f(x)dx = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

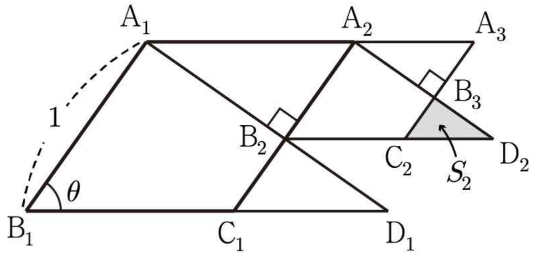
[4점]

10-2

12) 27-28

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 마름모 $A_1B_1C_1A_2$가 있다. 점 A_1에서 선분 C_1A_2에 내린 수선의 발을 B_2, 두 직선 A_1B_2, B_1C_1의 교점을 D_1이라 하자. $\angle A_1B_1C_1 = \theta$라 하고 삼각형 $B_2C_1D_1$의 넓이를 S_1이라 하자. 선분 A_1A_2의 연장선 위에 $\overline{A_2B_2} = \overline{A_2A_3}$인 점 A_3를 잡고 한 변의 길이가 $\overline{A_2B_2}$인 마름모 $A_2B_2C_2A_3$를 그린 뒤 점 A_2에서 선분 C_2A_3에 내린 수선의 발을 B_3, 두 직선 A_2B_3, B_2C_2의 교점을 D_2이라 하자. 삼각형 $B_3C_2D_2$의 넓이를 S_2이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 삼각형 $B_{n+1}C_nD_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\tan\theta}{8}$이다. 이때, $\cos\theta$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$) [4점]





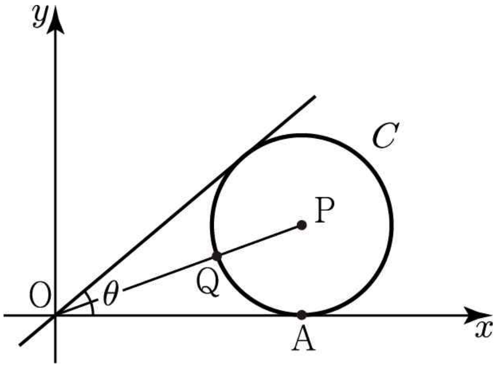
⋮

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{2}{5}$　③ $\frac{3}{5}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{3}{4}$

10-1

13) 29

그림과 같이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$인 직선에 접하고 점 $\mathrm{A}(1,\,0)$에서 x축에 접하는 원 C가 있다. 원점 O와 원 C의 중심 P를 지나는 직선이 원 C와 만나는 점 중 원점에 가까운 점을 Q라 할 때, 점 Q가 그리는 곡선을 D라 하자. 곡선 D위의 $\theta=\frac{\pi}{3}$에 대응하는 점 Q에서의 접선의 기울기는? [4점]



① $-\frac{\sqrt{3}}{12}$　　② $-\frac{\sqrt{3}}{9}$　　③ $-\frac{\sqrt{3}}{8}$

④ $-\frac{\sqrt{3}}{6}$　　⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

10-1

14) 30

$t>1$인 실수 t에 대하여 직선 $y=tx$와 곡선 $y=e^x-1$이 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$ $(f(t)>0)$라 하고, 직선 $y=tx$와 곡선 $y=e^x-1$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(t)$라 하자. $f(\alpha)=\ln2$인 상수 α에 대하여 $S'(\alpha)=\frac{q}{p}(\ln2)^2$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

10-1

1) 정답 ③
준식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$3f(1)=3$
$\therefore\ f(1)=1$
준식의 양변을 미분하면
$(2x+2)f(x)+(x^2+2x)f'(x)-2(x-1)g(x)-(x-1)^2g'(x)=2x-4$
양변에 $x=1$을 대입하면
$4f(1)+3f'(1)=-2$
$3f'(1)=-6\ (\because f(1)=1)$
$\therefore\ f'(1)=-2$
따라서 곡선 $y=f(x)$위의 $x=1$인 점의 좌표는 $(1,\ 1)$이고 $f'(1)=-2$이므로 접선의 방정식은 $y=-2x+3$이다.
접선의 y절편은 3이다.

2) 정답 ②
$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{-1}^{x}(t^3+2t)\,dt$에서
$f(t)=t^3+2t$라 하고 $F'(x)=f(x)$라 하면
$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{-1}^{x}(t^3+2t)\,dt$
$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=F'(1)=f(1)=3$

$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{1}^{x+1}(t^2-2t)dt$에서
$g(t)=t^2-2t$라 하고 $G'(x)=g(x)$라 하면
$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{1}^{x+1}(t^2-2t)dt$
$=\lim_{x\to0}\frac{G(x+1)-G(1)}{x}=G'(1)=g(1)=-1$
따라서
$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{-1}^{x}(t^3+2t)\,dt+\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{1}^{x+1}(t^2-2t)dt$
$=3+(-1)=2$

3) 정답 ②

(가)의 양변에 $n=1$을 대입하면 $a_1-2b_1=1$

$b_1=1$이므로 $a_1=3$

(가)에서 $\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-2b_k)=(n-1)^2\ \ (n\geq 2)$이므로

$a_n-2b_n=n^2-(n-1)^2$

$\quad=2n-1\ \ (n\geq 2)\cdots$㉠

(나)에서 $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{3}$

$a_1=3$이므로 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{n^2}$

$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{(n-1)^2}\ \ (n\geq 2)$

따라서 $a_n=(n-1)^2\ \ (n\geq 2),\ a_1=3\ \cdots$㉡

㉠, ㉡에서 ㉡−㉠을 하면

$2b_n=n^2-4n+2$

따라서 $b_n=\dfrac{1}{2}n^2-2n+1$

$b_8=32-16+1=17$이다.

4) 정답 ①

[그림 : 최성훈T]

직선 $y=k$가 두 곡선 $y=2^{x+1},\ y=2^{3x+2}$와 만나는 점의 x좌표를 구해보자.

$2^{x+1}=k,\ x+1=\log_2 k$

$\therefore\ x=-1+\log_2 k$

$2^{3x+2}=k,\ 3x+2=\log_2 k$

$\therefore\ x=\dfrac{-2+\log_2 k}{3}$

따라서

$\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{-2+\log_2 k}{3}-(-1+\log_2 k)$

$\quad=\dfrac{1-2\log_2 k}{3}$

직선 $y=k+a$가 두 곡선 $y=2^{x+1},\ y=2^{3x+2}$와 만나는 교점을 구해보자.

$2^{x+1}=k+a,\ x+1=\log_2(k+a)$

$\therefore\ x=-1+\log_2(k+a)$

$2^{3x+2}=k+a$, $3x+2=\log_2(k+a)$

$\therefore\ x=\dfrac{-2+\log_2(k+a)}{3}$

따라서

$\overline{\mathrm{CD}}=\{-1+\log_2(k+a)\}-\left\{\dfrac{-2+\log_2(k+a)}{3}\right\}$

$=\dfrac{-1+2\log_2(k+a)}{3}$

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}$이므로

$1-2\log_2 k=-1+2\log_2(k+a)$

$2\log_2(k^2+ak)=2$

$\log_2(k^2+ak)=1$

$k^2+ak=2$

따라서 $a=\dfrac{2}{k}-k$

$f(k)=\dfrac{2}{k}-k$

$f(1)=1$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{7}{2}$, $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{31}{4}$

$f(1)\times f\left(\dfrac{1}{2}\right)\times f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{217}{8}$

5) 정답 ①

[그림 : 이정배T]

$\cos(\angle\mathrm{DCB})=\dfrac{1}{4}$, $\cos(\angle\mathrm{DAB})=-\dfrac{1}{4}$에서 $\angle\mathrm{DAB}=\pi-\angle\mathrm{DCB}$이므로

$\angle\mathrm{DAB}+\angle\mathrm{DCB}=\pi$이다.

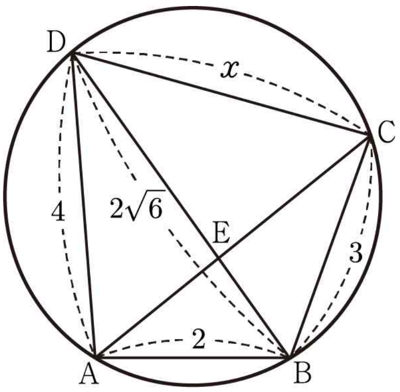
따라서 사각형의 네 꼭짓점 A, B, C, D는 한 원 위의 점이다.

그러므로 호 AB에 대한 원주각으로 $\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{ADB}$이고

$\angle\mathrm{AED}=\angle\mathrm{BEC}$ ($\because$ 맞꼭지각)

$\triangle\mathrm{EBC}\backsim\triangle\mathrm{EAD}$ (AA 닮음)

삼각형 EBC의 외접원과 삼각형 EAD의 외접원의 넓이비가 9 : 16이므로 두 삼각형의 넓이비도 9 : 16이다.



따라서 $\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{AD}}=3:4$에서 $\overline{\mathrm{BC}}=3$이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=4$이다.

삼각형 ABD에서

$\overline{\mathrm{AD}}=4$, $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\cos(\angle\mathrm{DAB})=-\dfrac{1}{4}$이므로 코사인법칙을 적용하면

$$\overline{\mathrm{BD}}^2=4^2+2^2-2\times4\times2\times\left(-\frac{1}{4}\right)=24$$

$$\overline{\mathrm{BD}}=2\sqrt{6}$$

삼각형 BCD에서 $\overline{\mathrm{BC}}=3$, $\overline{\mathrm{BD}}=2\sqrt{6}$, $\cos(\angle\mathrm{DCB})=\dfrac{1}{4}$이므로 $\overline{\mathrm{CD}}=x$라 두고 코사인법칙을 적용하면

$$\frac{1}{4}=\frac{x^2+3^2-(2\sqrt{6})^2}{2\times x\times3}$$

$$3x=2x^2-30$$

$$2x^2-3x-30=0$$

$$x=\frac{3+\sqrt{249}}{4}\quad(\because x>0)$$

6) 정답 ②

(나)에서 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1이 아닌 삼차함수이다.

(가)에서 함수 $g(x)$의 최고차항의 계수를 a (a는 정수)라 두면 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 $\dfrac{1}{a}$이고 함수 $g(x)$는 삼차함수이고 함수 $f(x)$는 일차함수이다.

(i) $f(x)=\dfrac{1}{a}(x+1)$, $g(x)=a(x-2)(x^2+1)$일 때,

$f'(x)=\dfrac{1}{a}$, $g'(x)=a(3x^2-4x+1)$에서

$$g'(f'(x))=a\left(\frac{3}{a^2}-\frac{4}{a}+1\right)=\frac{3}{a}-4+a=\frac{11}{2}$$

$a-\dfrac{19}{2}+\dfrac{3}{a}=0$

$2a^2-19a+6=0$

$a=\dfrac{19\pm\sqrt{19^2-48}}{4}$

a가 정수라는 조건에 모순이다.

(ii) $f(x)=\dfrac{1}{a}(x-2)$, $g(x)=a(x+1)(x^2+1)$일 때,

$f'(x)=\dfrac{1}{a}$, $g'(x)=a(3x^2+2x+1)$에서

$g'(f'(x))=a\left(\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{2}{a}+1\right)=\dfrac{3}{a}+2+a=\dfrac{11}{2}$

$\dfrac{3}{a}-\dfrac{7}{2}+a=0$

$2a^2-7a+6=0$

$(a-2)(2a-3)=0$

$a=2$ 또는 $a=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ a=2$

(i), (ii)에서

$f(x)=\dfrac{1}{2}(x-2)$, $g(x)=2(x+1)(x^2+1)$이다.

$f(0)=-1$, $g(0)=2$이므로

$f(0)+g(0)=1$

7) 정답 ③

[그림 : 배용제T]

ㄱ.

$a_5>1$이면 $a_6=-a_5+2$이므로 $a_7=0$에서

$a_6=1$ 또는 $a_6=-1$이다.

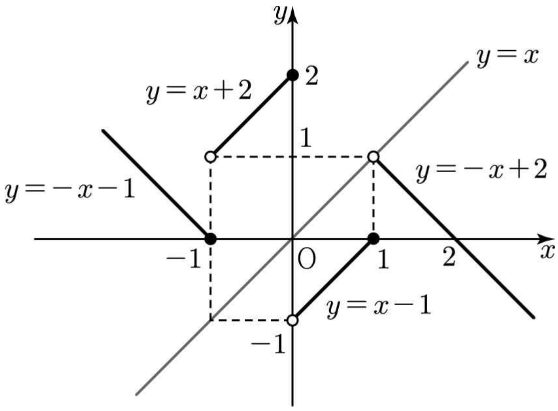
$a_6=-a_5+2=1$일 때, $a_5=1$

$a_6=-a_5+2=-1$일 때, $a_5=3$이다.

따라서 $a_5>1$일 때는 $a_6=-1$이다. (참)

ㄴ.

다음과 같은 그래프에서 $\{a_n\}$을 관찰할 수 있다.



$a_6=1$이면 $a_5=-2$, $a_4=4$, $a_3=-5$, $a_2=7$, $a_1=-8$이고

$a_7=0$이면 $a_8=2$, $a_9=-3$, $a_{10}=5$, $a_{11}=-6$, $a_{12}=8$, $\cdots$이다.

따라서 $b_n=a_{2n-1}+a_{2n}$이라 할 때, $b_1=b_2=b_3=-1$, $b_4=b_5=\cdots=2$이다.

$\sum_{n=1}^{100} a_n=\sum_{n=1}^{50} b_n=(-1)\times 3+2\times 47=91$ (참)

ㄷ.

a_6의 값으로 가능한 값은 $a_6=1$ 또는 $a_6=-1$ 또는 $a_6=2$이다.

(i) $a_6=1$일 때, $a_1=-8$이다. (∵ㄴ.)

(ii) $a_6=-1$일 때, $a_1=9$이다.

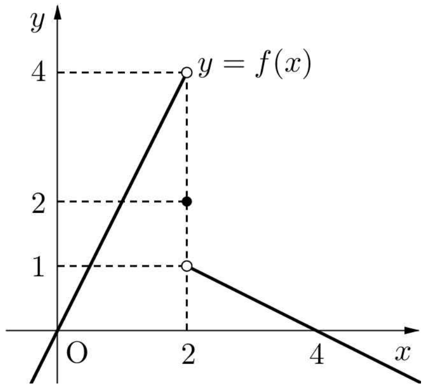
(iiI) $a_6=2$일 때,

<table>
<tr><th>a_6</th><th>a_5</th><th>a_4</th><th>a_3</th><th>a_2</th><th>a_1</th></tr>
<tr><td rowspan="5">2</td><td rowspan="5">0</td><td>-1</td><td>3</td><td>-4</td><td>6</td></tr>
<tr><td>1</td><td>-2</td><td>4</td><td>-5</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td rowspan="3">0</td><td>-1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>-2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td rowspan="3">-3</td><td rowspan="2">-3</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>5</td><td>-6</td></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td>-6</td><td>8</td><td>-9</td></tr>
</table>

으로 가능한 a_1의 모든 값의 합은 -16
(i), (ii), (iii)에서 가능한 모든 a_1의 값의 합은 -15이다. (거짓)

8) 정답 45

함수 $f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $||f(x)+a|+b|$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 함수 $||f(x)+a|+b|$가 $x=2$에서 연속이면 된다.

$g(x)=|f(x)+a|$라 할 때, $\lim_{x\to2-}g(x)=g(2)$, $\lim_{x\to2+}g(x)=g(2)$, $\lim_{x\to2-}g(x)=\lim_{x\to2+}g(x)$가 성립할 수 있게 a를 정한 뒤 $h(x)=|g(x)+b|$라 할 때, $h(x)$가 $x=2$에서 연속이 되도록 b의 값을 정하도록 하자.

(i) $\lim_{x\to2-}g(x)=g(2)$일 때,

$\lim_{x\to2-}g(x)=|4+a|$, $g(2)=|2+a|$이므로
$|4+a|=|2+a|$
$4+a=-2-a$
$\therefore\ a=-3$
함수 $h(x)$가 $x=2$에서 연속이기 위해서는
$|1+b|=|2+b|$
$-1-b=2+b$
$-3=2b$
$\therefore\ b=-\dfrac{3}{2}$

따라서 $a+b=-\dfrac{9}{2}$

(ii) $\lim_{x\to 2+}g(x)=g(2)$일 때,

$\lim_{x\to 2+}g(x)=|1+a|$, $g(2)=|2+a|$이므로

$|1+a|=|2+a|$

$-1-a=2+a$

$\therefore\ a=-\dfrac{3}{2}$

함수 $h(x)$가 $x=2$에서 연속이기 위해서는

$\left|\dfrac{5}{2}+b\right|=\left|\dfrac{1}{2}+b\right|$

$\dfrac{5}{2}+b=-\dfrac{1}{2}-b$

$\therefore\ b=-\dfrac{3}{2}$

따라서 $a+b=-3$

(iii) $\lim_{x\to 2-}g(x)=\lim_{x\to 2+}g(x)$일 때,

$\lim_{x\to 2-}g(x)=|4+a|$, $\lim_{x\to 2+}g(x)=|1+a|$이므로

$|4+a|=|1+a|$

$4+a=-1-a$

$\therefore\ a=-\dfrac{5}{2}$

함수 $h(x)$가 $x=2$에서 연속이기 위해서는

$\left|\dfrac{3}{2}+b\right|=\left|\dfrac{1}{2}+b\right|$

$\dfrac{3}{2}+b=-\dfrac{1}{2}-b$

$\therefore\ b=-1$

따라서 $a+b=-\dfrac{7}{2}$

(i), (ii), (iii)에서 $a+b=-\dfrac{9}{2}$ 또는 $a+b=-3$ 또는 $a+b=-\dfrac{7}{2}$이다.

따라서 $m=-\dfrac{9}{2}$이고

$10m=-45$

그러므로 $|10m|=45$

9) 정답 13

k는 자연수이다.

m	$f(m)$	$f(m)f(n)$
1	0	모순
3	1	$\log\sqrt{n}$가 자연수 $\sqrt{n}=2^k$꼴 $n=2^{2k}$로 n는 자연수로 모순
3^2	2	$\log n$가 자연수 $n=2^k$꼴로 n는 자연수로 모순
3^3	3	$\log n^{\frac{3}{2}}$가 자연수 $n^{\frac{3}{2}}=2^k$꼴 $n=2^{\frac{2k}{3}}$꼴 $2^{\frac{2}{3}}$, $2^{\frac{4}{3}}$, $2^{\frac{8}{3}}$, $2^{\frac{10}{3}}$, $2^{\frac{14}{3}}$, $2^{\frac{16}{3}}$으로 6개 $2^{\frac{20}{3}}>100$
3^4	4	$\log n^2$가 자연수 $n^2=2^k$꼴 $n=2^{\frac{k}{2}}$꼴 $2^{\frac{1}{2}}$, $2^{\frac{3}{2}}$, $2^{\frac{5}{2}}$, $2^{\frac{7}{2}}$, $2^{\frac{9}{2}}$, $2^{\frac{11}{2}}$, $2^{\frac{13}{2}}$으로 7개 $2^{\frac{15}{2}}>100$

따라서

순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 $6+7=13$이다.

10) 정답 12

$\int_{\alpha}^{t} f(x)\,dx = \int_{0}^{t} f(x)\,dx - \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$에서

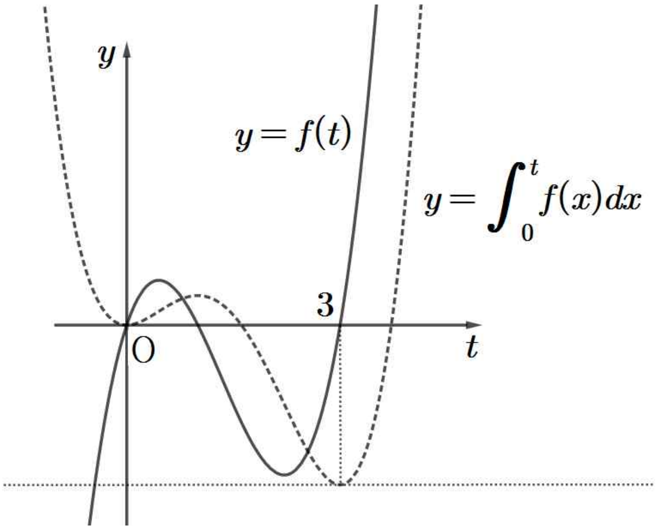
$\int_{0}^{t} f(x)\,dx = \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx \cdots ㉠$

㉠의 좌변은 t에 대한 함수이고 우변은 상수이다.

따라서 $y = \int_{0}^{t} f(x)\,dx$와 $y = \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$의 교점의 개수가 1개가 되는 상황이다.

$t-y$평면에서 $y=f(t)$의 그래프(실선)에 따른

$y = \int_{0}^{t} f(x)\,dx$의 그래프(점선)는 다음과 같다.



따라서 $\alpha = 3$

$f\left(\frac{4}{3}\alpha\right) = f(4) = 12$

[랑데뷰팁]

$\int_{0}^{t} f(x)\,dx = \int_{0}^{t} (x^3 - 4x^2 + 3x)dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x\right]_0^t = \frac{1}{4}t^4 - \frac{4}{3}t^3 + \frac{3}{2}t$이므로

점선 그래프는 $y = \frac{1}{4}t^4 - \frac{4}{3}t^3 + \frac{3}{2}t$

11) 정답 211

[그림 : 최성훈T]

$n=1$일 때

$f(2a+2)=k\times f(a+1)\ \ (0\le a<1)$

이므로 $2a+2=x$라 하면

$$f(x)=k\times f\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$=k\times\left(\frac{x}{2}-1\right)\left(\frac{x}{2}-2\right)$$

$$=k\times\frac{1}{4}(x-2)(x-4)\ \ (2\le x<4)$$

$n=2$일 때

$f(2a+4)=k\times f(a+2)\ \ (0\le a<2)$

이므로 $2a+4=x$라 하면

$$f(x)=k\times f\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$=k^2\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{x}{2}-2\right)\left(\frac{x}{2}-4\right)$$

$$=k^2\times\frac{1}{4^2}(x-4)(x-8)\ \ (4\le x<8)$$

마찬가지로

$8\le x<16$일 때 $f(x)=k^3\times\dfrac{1}{4^3}(x-8)(x-16)$

$16\le x<32$일 때 $f(x)=k^4\times\dfrac{1}{4^4}(x-16)(x-32)$

$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$

따라서

$2^n\le x<2^{n+1}$일 때 $f(x)=\left(\dfrac{k}{4}\right)^n\left(x-2^n\right)\left(x-2^{n+1}\right)$

한편, $1\le x<2$일 때

$f(x)=(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$에서

$f'(x)=2x-3$이므로 $\lim\limits_{x\to 2-}f'(x)=1$

$2\le x<4$일 때

$f(x)=\dfrac{k}{4}\times(x-2)(x-4)=\dfrac{k}{4}\left(x^2-6x+8\right)$에서

$f'(x)=\dfrac{k}{4}(2x-6)$이므로 $\lim\limits_{x\to 2+}f'(x)=-\dfrac{k}{2}$

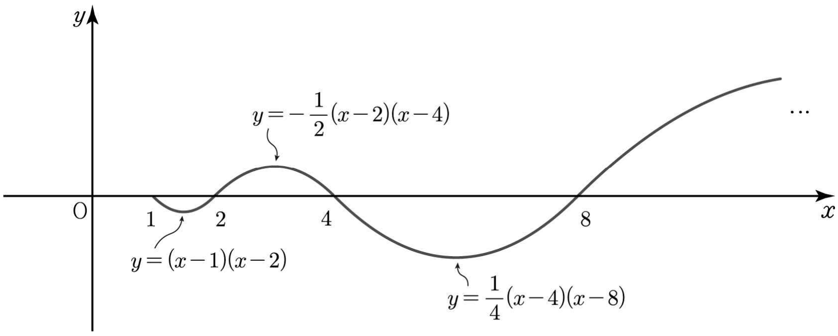
따라서 $-\dfrac{k}{2}=1$

$\therefore\ k=-2$

따라서

$2^n \le x < 2^{n+1}$일 때

$f(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2^n)(x-2^{n+1})$



따라서 $n \ge 0$

$$\int_{2^n}^{2^{n+1}} f(x)dx = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{(2^{n+1}-2^n)^3}{6}$$

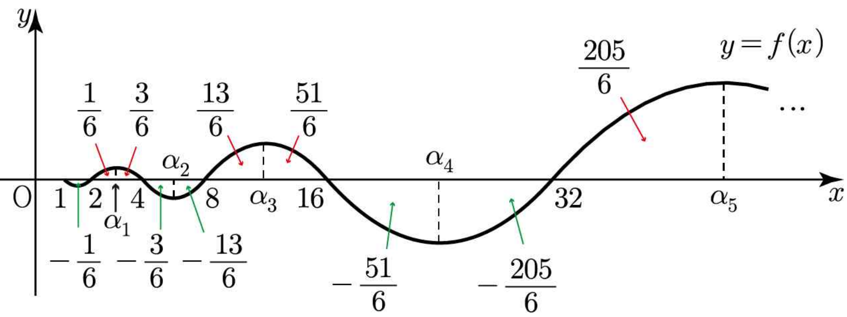
$$= (-1)^{n+1} \times \frac{1}{2^n} \times \frac{(2^n)^3}{6}$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{4^n}{6}$$

한편, $\int_1^2 f(x)dx = -\frac{1}{6}$이므로

0이상 정수 n에 대해 $\int_{2^n}^{2^{n+1}} f(x)dx = (-1)^{n+1}\frac{4^n}{6}$이 성립한다.

그림으로 나타내면 다음과 같다.



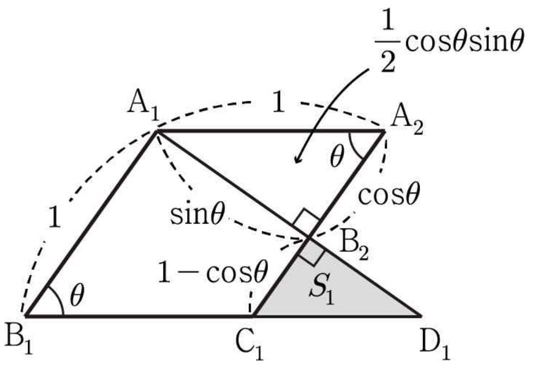
따라서

$$\int_{32}^{\alpha_5} f(x)dx = \frac{205}{6}$$

$p = 6,\ q = 205$이다.

$\therefore\ p + q = 211$

12) 정답 ③
[그림 : 최성훈T]



직각삼각형 $A_1B_2A_2$에서 $\overline{A_1B_2}=\sin\theta$, $\overline{A_2B_2}=\cos\theta$이므로

삼각형 $A_1A_2B_2$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\cos\theta\times\sin\theta$이다.

그림과 같이 $\triangle A_1A_2B_2 \backsim \triangle D_1C_1B_2$이고

$\overline{B_2C_1}=1-\cos\theta$이므로

두 삼각형의 닮음비는 $\cos\theta : 1-\cos\theta$이다.

따라서 삼각형 $D_1C_1B_2$의 넓이 S_1은

$S_1=\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta\times\left(\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right)^2=\frac{\tan\theta(1-\cos\theta)^2}{2}$이고

$\overline{A_1B_1}:\overline{A_2B_2}=1:\cos\theta$에서 등비급수의 공비 r은 $r=\cos^2\theta$이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{S_1}{1-r}=\frac{\tan\theta}{8}$에서 $\frac{8S_1}{\tan\theta}=1-r$

그러므로

$4(1-\cos\theta)^2=1-\cos^2\theta$

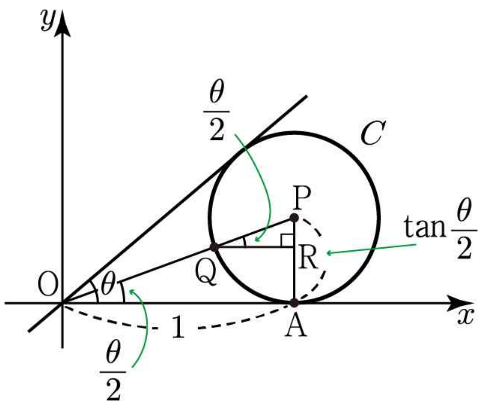
$4(1-\cos\theta)=1+\cos\theta$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{3}{5}$

13) 정답 ②
[그림 : 최성훈T]

$\angle POA=\frac{\theta}{2}$, $\angle PAO=\frac{\pi}{2}$, $\overline{OA}=1$이므로 $\overline{AP}=\tan\frac{\theta}{2}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(1, \tan\frac{\theta}{2}\right)$이다.



점 Q에서 직선 AP에 내린 수선의 발을 R이라 하면

$\angle\mathrm{PQR}=\frac{\theta}{2}$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\tan\frac{\theta}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{QR}}=\tan\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$, $\overline{\mathrm{PR}}=\tan\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$이다.

따라서 점 $\mathrm{Q}\left(1-\tan\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2},\ \tan\frac{\theta}{2}-\tan\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)$이다.

즉, $\begin{cases} x=1-\sin\frac{\theta}{2} \\ y=\tan\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right) \end{cases}$ 이다.

$$\frac{dx}{d\theta}=-\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right)-\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$=\frac{\sec^2\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right)-\sin\frac{\theta}{2}}{2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sec^2\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right)-\sin\frac{\theta}{2}}{-\cos\frac{\theta}{2}}$$

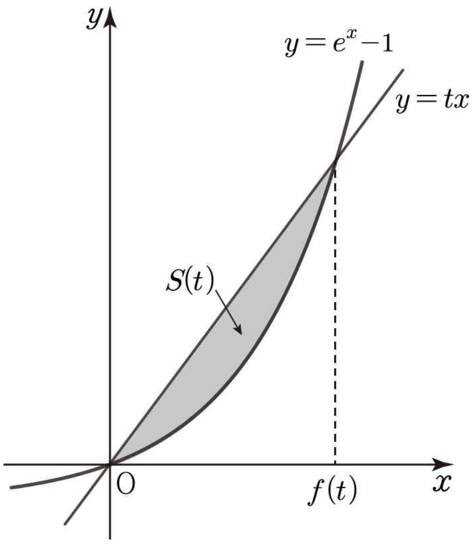
$\theta=\frac{\pi}{3}$을 대입하면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{4}{3}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{9}$$

14) 정답 3
[그림 : 이정배T]

$y=tx$와 $y=e^{x}-1$의 교점의 x좌표가 $f(t)$이므로
$e^{f(t)}-1=tf(t)$ …㉠
㉠의 양변에 $t=\alpha$를 대입하면 $f(\alpha)=\ln2$이므로
$e^{\ln2}-1=\alpha\times\ln2$
$\therefore\ \alpha=\dfrac{1}{\ln2}$ …㉡
㉠의 양변을 t에 관해 미분하면
$e^{f(t)}\times f'(t)=f(t)+tf'(t)$이다.
양변에 $t=\alpha$을 대입하면
$e^{\ln2}\times f'(\alpha)=\ln2+\dfrac{1}{\ln2}f'(\alpha)$
$\left(2-\dfrac{1}{\ln2}\right)f'(\alpha)=\ln2$
$\therefore\ f'(\alpha)=\dfrac{(\ln2)^2}{2\ln2-1}$ …㉢
$S(t)$는 다음 그림과 같다.



$S(t)=\dfrac{1}{2}t\{f(t)\}^2-\displaystyle\int_0^{f(t)}(e^x-1)dx$

$S'(t)=\dfrac{1}{2}\{f(t)\}^2+tf(t)f'(t)-\left(e^{f(t)}-1\right)f'(t)$

$S'(\alpha)=\dfrac{1}{2}\{f(\alpha)\}^2+\alpha f(\alpha)f'(\alpha)-\left(e^{f(\alpha)}-1\right)f'(\alpha)$

㉡, ㉢에서

$$S'(\alpha)=\frac{1}{2}\times(\ln 2)^2+\frac{1}{\ln 2}\times\ln 2\times\frac{(\ln 2)^2}{2\ln 2-1}-\left(e^{\ln 2}-1\right)\times\frac{(\ln 2)^2}{2\ln 2-1}$$

$$=\frac{(\ln 2)^2}{2}+\frac{(\ln 2)^2}{2\ln 2-1}-\frac{(\ln 2)^2}{2\ln 2-1}$$

$$=\frac{(\ln 2)^2}{2}$$

따라서 $p=2$, $q=1$이다.

$p+q=3$