곱함수의 연속성과 미분가능성

#세 줄 요약

$x=a$에서

① $f(x)$ 불연속, $g(x)$ 연속, $f(x)g(x)$ 연속이면 $g(a)=0$

② $f(x)$ 불연속(좌극한, 우극한, 함숫값 존재)이면
$(x-a)f(x)$ 연속, $(x-a)^2 f(x)$ 미분가능
(주의 : 극한값 존재 시 $(x-a)f(x)$ 미분가능)

③ $f(x)$ 불연속(좌극한, 우극한, 함숫값 중 적어도 하나 존재X)이면
연속성, 미분가능성 정의대로 따져보기

① 증명

$g(a)\neq 0 \Rightarrow \underbrace{f(x)g(x)}_{\text{연속}} \div \underbrace{g(x)}_{\text{연속}} = \underbrace{f(x)}_{\text{연속}}$

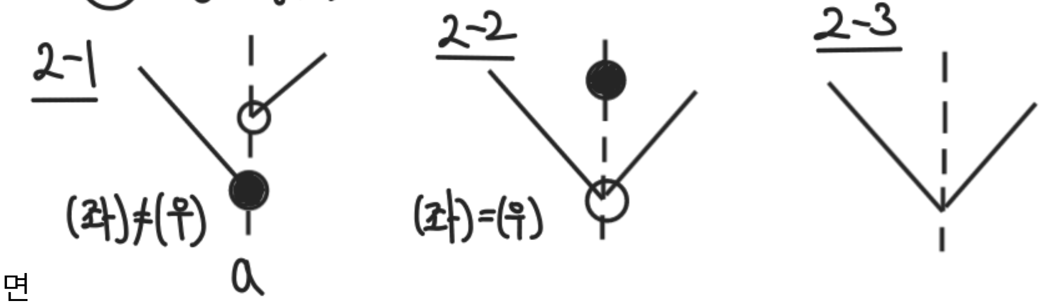
① 직관적 이해 (좌, 우극한 존재 시)

	$f(x)$	×	$g(x)$	
$x\to a+$	α	×	$g(a)$	서로 다른 값에
$x\to a-$	β	×	$g(a)$	같은 $g(a)$ 곱해서
$x=a$	γ	×	$g(a)$	같아지려면

$\therefore g(a)=0$

좌, 우극한, 함숫값 존재하지만
같지 않을 때 $(x-a)$ 곱해주면
모두 0으로 같아져 연속 되는구나 → ②-1

② $y=f(x)$



	2-1	2-2	2-3
$(x-a)f(x)$	연속 O, 미분 X	연속 O, 미분 O	미분 O
$(x-a)^2 f(x)$	연속 O, 미분 O	〃	

증명

$(x-a)f(x)$ 연속 $\Leftrightarrow 0=\lim_{x\to a}\underbrace{(x-a)}_{\to 0}\underbrace{f(x)}_{\text{좌, 우 달라도 0이랑 곱해짐}}$

$(x-a)f(x)$ 미가 $\Leftrightarrow \lim_{x\to a}\dfrac{(x-a)f(x)-0\cdot f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}f(x)$ 존재

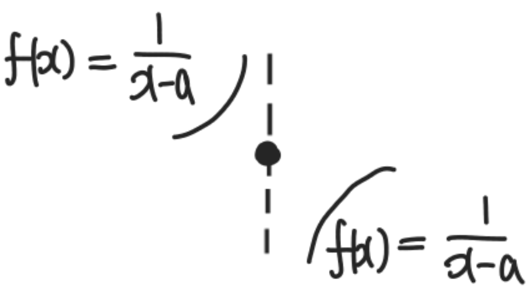
2-1 X
2-2 O
2-3 O

$(x-a)^2 f(x)$ 미가 $\Leftrightarrow \lim_{x\to a}\dfrac{(x-a)^2 f(x)-0\cdot f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x-a)f(x)$ 존재

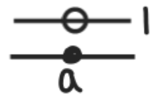
③ $(x-a)f(x)$는 $x=a$에서 연속 OR 미분가능? (거짓)

→ 좌극한, 우극한 존재하지 않을 때($\pm\infty$, 2의 발산)는 부정형 가능하므로 직접 "정의대로" 확인하기

3-1

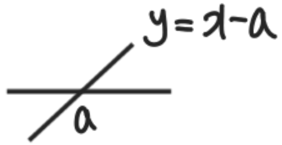


$(x-a)f(x)$



연속 X

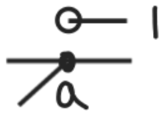
$(x-a)^2 f(x)$



연속 O 미분 O

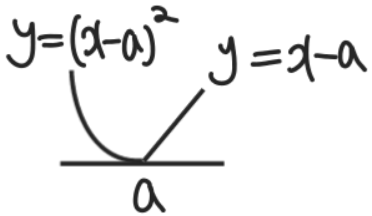
3-2

$(x-a)f(x)$



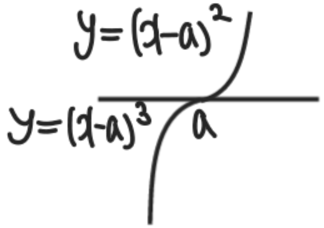
연속 X

$(x-a)^2 f(x)$



연속 O 미분 X

$(x-a)^3 f(x)$



연속 O 미분 O

20201120(나)

20. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x & (x \le 0) \\ x-1 & (0 < x \le 2) \\ 2x-3 & (x > 2) \end{cases}$$

와 상수가 아닌 다항식 $p(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

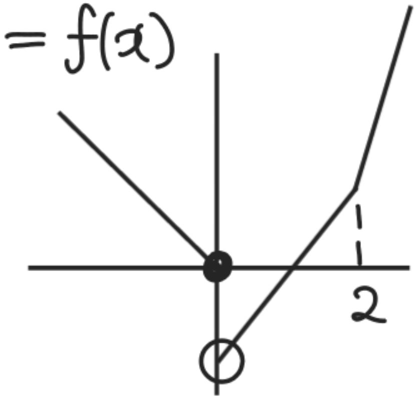
<보 기>

ㄱ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $p(0)=0$이다.

ㄴ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(2)=0$이다.

ㄷ. 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(x)$는 $x^2(x-2)^2$으로 나누어떨어진다.

$y=f(x)$



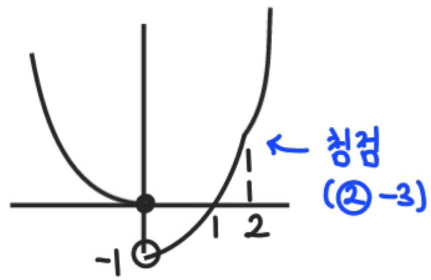
ㄱ) $f(x)$가 $x=0$ 불연속이므로 $p(0)=0$ (∵ ①)

ㄴ) $x=0$ (좌) $\neq$ (우) 이므로 $p(x)=x^2Q_1(x)$ (∵ ②-1)

$x=2$ (좌) $=$ (우) 이므로 $p(x)=(x-2)Q_2(x)$ (∵ ②-3)

따라서 $p(x)=x^2(x-2)Q(x)$

ㄷ) $\{f(x)\}^2=\begin{cases} x^2 & x\le 0 \\ (x-1)^2 & 0<x\le 2 \\ (2x-3)^2 & x>2 \end{cases}$



$x=0$ (좌) $\neq$ (우) 이므로 $p(x)=x^2Q_1(x)$ (∵ ②-1)

$x=2$ (좌) $=$ (우) 이므로 $p(x)=(x-2)Q_2(x)$ (∵ ②-3)

따라서 $p(x)=x^2(x-2)^1Q(x)$

$\boxed{ㄱ, ㄴ}$

20171030(나)

30. 함수 $f(x) = |3x - 9|$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}f(x+k) & (x < 0) \\ f(x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $h(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 $h(k)$ 의 값의 합을 구하시오. (단, $k > 0$) [4점]

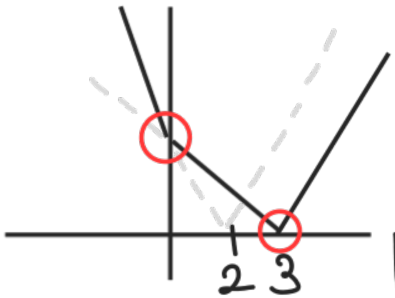
(가) 함수 $g(x)h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) $h'(3) = 15$

Case 1. $g(x)$ 가 $x=0$ 연속(②-3)

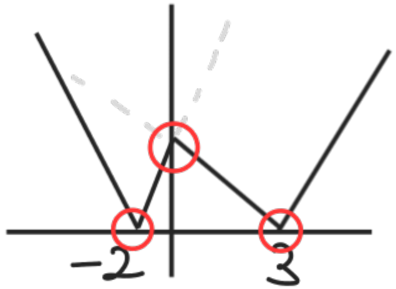
$g(0-) = \frac{3}{2}f(k) = \frac{9}{2}|k-3|$

$g(0+) = f(0) = 9$

$k=1$ 또는 $k=5$



$k=1$



$k=5$

$k=1$ 인 경우, $x=0, 3$ 첨점, ②-3 이용

$h(x) = x\cdot(x-3)\cdot(x-a) = x^3 - (a+3)x^2 + 3ax$

$h'(x) = 3x^2 - 2(a+3)x + 3a$, $h'(3) = -3a + 9 = 15$, $a = -2$

$h(x) = x(x-3)(x+2)$, $h(k) = h(1) = -6$

$k=5$ 인 경우, $x = -2, 0, 3$ 첨점. ②-3 이용

$h(x) = x(x+2)(x-3)$, $h'(3) = 15$ 성립.

$h(k) = h(5) = 70$

Case 2. $g(x)$ 가 $x=0$ 불연속 (②-1)

$x=0$ 불연속 x^2 인수, $x=3$ 첨점 $(x-3)$ 인수

$h(x) = x^2(x-3)$, $h'(3) = 15$ 성립 X

$70 + (-6) = 64$ $\boxed{64}$