2015학년도 수능대비 장영진 모의고사 제1회 정답

1	③	2	⑤	3	②	4	④	5	④
6	①	7	③	8	⑤	9	③	10	④
11	④	12	④	13	②	14	⑤	15	③
16	①	17	②	18	④	19	②	20	③
21	④	22	17	23	46	24	18	25	243
26	240	27	52	28	40	29	24	30	105

1. ③

$AB=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

2. ⑤

$\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2} = \dfrac{7}{12}$

$\therefore \sec^2\theta = \dfrac{12}{7}$

3. ②

$\cos\dfrac{2}{3}\pi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \dfrac{-\sqrt{2}k}{\sqrt{k^2+5}\,\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2}$

정리하면 $k^2=3$

$k>0$이므로 $k=\sqrt{3}$

4. ④

$a_n=2n-5$이므로 $a_6=7$

5. ④

$\mathrm{P}(A\,|\,B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{2}{5}$에서

$P(A\cap B) = \dfrac{2}{5}P(B)$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B) = P(B)-P(A\cap B) = P(B)-\dfrac{2}{5}P(A\cap B)$

$= \dfrac{3}{5}P(B) = \dfrac{1}{3}$

이므로 $P(B)=\dfrac{5}{9}$

6. ①

합성변환 $g\circ f^{-1}$를 나타내는 일차변환은

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{5\pi}{6} & \sin\frac{5\pi}{6} \\ -\sin\frac{5\pi}{6} & \cos\frac{5\pi}{6} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

이므로

$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad\therefore a+b=-7$

7. ③

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{2^n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}+1}\times\frac{2^{n+1}+1}{2^n+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}+1}\times\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{2}{2^n}} = \frac{1}{2}\times 2 = 1$$

8. ⑤

확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면

$\mathrm{P}(0\le X\le x) = \int_0^x f(t)dt = x^3$ 이므로

$\mathrm{P}(0\le X\le a) = \int_0^a f(t)dt = a^3 = 1$에서 $a=1$이고

양변을 미분하면 $f(x)=3x^2$이므로

$\mathrm{E}(X) = \int_0^1 x\times 3x^2 dx = \left[\frac{3}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{3}{4}$

9. ③

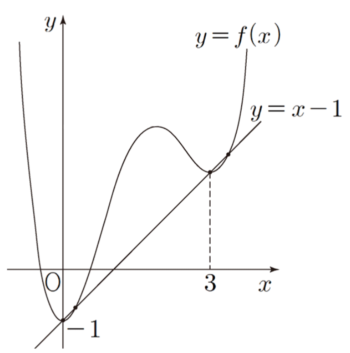
$\sqrt{2f(x)-2x+6} = t\,(t\ge 0)$라 두면

$\dfrac{1}{2}(t^2-6)+t=1$

$\therefore (t-2)(t+4)=0$

$\therefore t=\sqrt{2f(x)-2x+6}=2$

$\therefore f(x)=x-1$



$y=f(x)$와 $y=x-1$의 그래프는 그림처럼 4개의 교점을 가지므로 주어진 방정식의 실근은 4개다.

10. ④

주어진 식의 양변에 2^{n+1}을 곱하면

$$2^{n+2}a_{n+2}-2^{n+1}a_{n+1}=\boxed{4}\times(2^{n+1}a_{n+1}-2^{n}a_{n})$$

이다. $b_n=2^n a_n$이라 하면

$$b_{n+2}-b_{n+1}=\boxed{4}\times(b_{n+1}-b_n)$$

이고, $b_1=4$, $b_2=10$이므로

$$b_{n+1}-b_n=6\times(\boxed{4})^{n-1}$$

이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면

$$b_n=2^{2n-1}+2$$

이다. 따라서,

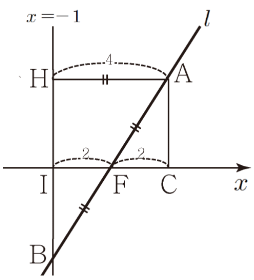
$$a_n=2^{n-1}+\boxed{\frac{1}{2^{n-1}}}$$

이다.

$$\therefore\ 4p\times f(8)=4\times4\times\frac{1}{128}=\frac{1}{8}$$

11. ④

$\mathrm{F}(1,\ 0)$이고 준선은 직선 $x=-1$이다.



A에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, x축에 내린 수선의 발을 C, 준선과 x축의 교점을 I라 하면

삼각형 BFI와 삼각형 BAH가 $2:1$ 닮음이므로 그림처럼

$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AH}}=4$, $\overline{\mathrm{FC}}=2$ 이고 직선 l의 기울기는 $\sqrt{3}$이다.

12. ④

$f(x)$가 n차 함수라 가정하면

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2f(x)+2}=3$에서 분모의 차수는 $n+2$이고 분자의 차수는 $2n$이므로 $n=2$이고 최고차항의 계수는 3이다.

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{e^x-e}=0$에서 $f(1)=0$이어야 하므로

$f(x)=3(x-1)(x-a)$라 하고

$x-1=t$라 두면

$$\lim_{t\to0}\frac{f(t+1)}{e^{t+1}-e}=\frac{1}{e}\lim_{t\to0}\frac{3t(t+1-a)}{e^t-1}$$

$$=\frac{3}{e}\times\lim_{t\to0}\frac{t}{e^t-1}\times\lim_{t\to0}(t+1-a)$$

$$=\frac{3}{e}\times1\times(1-a)=0$$

이므로 $a=1$

$\therefore\ f(x)=3(x-1)^2$

$\therefore\ f(0)=3$

13. ②

$x_k-x_{k-1}=\triangle x$라 하면 정적분의 정의에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\overline{P_kQ_k}\times(x_k-x_{k-1})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(2^{x_k}-x_k)\triangle x$$

$$=\int_0^1(2^x-x)dx=\left[\frac{2^x}{\ln2}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{\ln2}-\frac{1}{2}$$

14. ⑤

$\overrightarrow{Q_{k-1}Q_k}=\dfrac{1}{n}\overrightarrow{Q_0Q_n}$ $(k=0,1,2,3,\cdots,n)$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}n\times\overrightarrow{P_{k-1}P_k}\circ\overrightarrow{Q_{k-1}Q_k}=\sum_{k=1}^{n}n\times\overrightarrow{P_{k-1}P_k}\circ\left(\frac{1}{n}\overrightarrow{Q_0Q_n}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{P_{k-1}P_k}\circ\overrightarrow{Q_0Q_n}$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{P_{k-1}P_k}\right)\circ\overrightarrow{Q_0Q_n}$$

$$=\overrightarrow{P_0P_n}\circ\overrightarrow{Q_0Q_n}$$

$$=(1,1)\circ(1,1)$$

$$=2$$

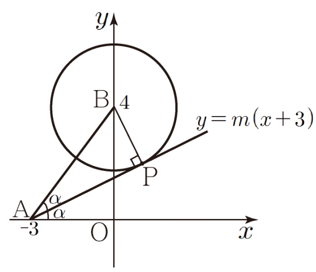
15. ③

$$491+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{25}}<499-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{25}}$$

$\therefore\ \sigma<10.204$

16. ①

원의 중심을 B라 하면 $\angle\mathrm{BAP}=\angle\mathrm{BAQ}=\alpha$이므로 그림처럼 접선 AP를 $y=m(x+3)$라 두면

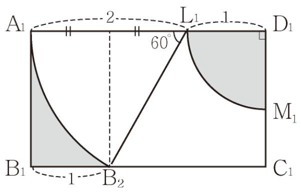


삼각형 OAB에서 $\cos2\alpha=2\cos^2\theta-1=\dfrac{3}{5}$ 이므로 $\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt5}$이고

$m=\tan\theta=\dfrac{1}{2}$이다.

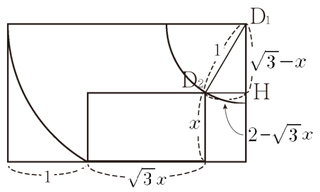
따라서, 원 C의 반지름은 점 $\mathrm{B}(0,4)$에서 접선 AP $x-2y+3=0$에 이르는 거리와 같으므로 $r=\dfrac{|0-8+3|}{\sqrt{1+4}}=\sqrt5$이다.

17. ②



그림처럼 S_1은 사다리꼴 $\mathrm{A_1B_1B_2L_1}$에서 부채꼴 $\mathrm{A_1B_2L_1}$을 제외한 면적과 부채꼴 $\mathrm{L_1M_1D_1}$의 면적의 합이다.

$$S_1=\left(\frac{2+1}{2}\times\sqrt{3}-\frac{1}{6}\times 4\pi\right)-\frac{1}{4}\times\pi=\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{5}{12}\pi$$



한편, $\mathrm{D_2}$에서 선분 $\mathrm{C_1D_1}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{\mathrm{C_2D_2}}=x$라 하면 주요 변들의 길이는 그림과 같다.

직각삼각형 $\mathrm{D_1D_2H}$ 에서

$(2-\sqrt{3}x)^2+(\sqrt{3}-x)^2=1^2$이고 이를 정리하면

$(2x-\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$

$\therefore\ x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{\mathrm{C_2D_2}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{C_1D_1}}$이므로

S_n은 첫째항이 $S_1=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}-\dfrac{5}{12}\pi$이고 공비가 $\dfrac{1}{4}$인 등비수열의 합이고

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{5}{12}\pi}{1-\frac{1}{4}}=2\sqrt{3}-\frac{5}{9}\pi$$

18. ④

ㄱ. $A^2B=(4E-B^2)^2B=B(4E-B^2)^2=BA^2$ (참)

ㄴ. A^{-1}가 존재한다면 $B=-2E$, $A=4E-B^2=O$이 되어 모순 (거짓)

ㄷ. $A^2=A(-B^2+4E)=-AB^2+4A=2AB+4A=O$

$B^3=B(-A+4E)=2A+4B$

$\therefore A^3+B^3=2A+4B$ (참)

19. ②

$0\le 3g(x)<3$이고 $f\left(\dfrac{x}{3}\right)$는 정수이므로 $3g(x)=0$ or 1 or 2이다.

ⅰ) $g(x)=0$ 일 때,

$f\left(\dfrac{x}{3}\right)=0$이므로 $0\le\log\dfrac{x}{3}<1$

$\therefore \log 3\le\log x<\log 30$이고

$0<\log 3<1<\log 30<2$이므로

$\log x=1$

$\therefore x=10$

ⅱ) $g(x)=\dfrac{1}{3}$ 일 때,

$f\left(\dfrac{x}{3}\right)=1$이므로 $1\le\log\dfrac{x}{3}<2$

$\therefore \log 30\le\log x<\log 300$이고

$1+\dfrac{1}{3}<\log 30<2+\dfrac{1}{3}<\log 300<3+\dfrac{1}{3}$이므로

$\log x=2+\dfrac{1}{3}$

$\therefore x=10^{\frac{7}{3}}$

ⅲ) $g(x)=\dfrac{2}{3}$ 일 때,

$f\left(\dfrac{x}{3}\right)=2$이므로 $2\le\log\dfrac{x}{3}<3$

$\therefore \log 300\le\log x<\log 3000$이고

$1+\dfrac{2}{3}<\log 300<2+\dfrac{2}{3}<\log 3000<3+\dfrac{2}{3}$이므로

$\log x=2+\dfrac{2}{3}$

$\therefore x=10^{\frac{8}{3}}$

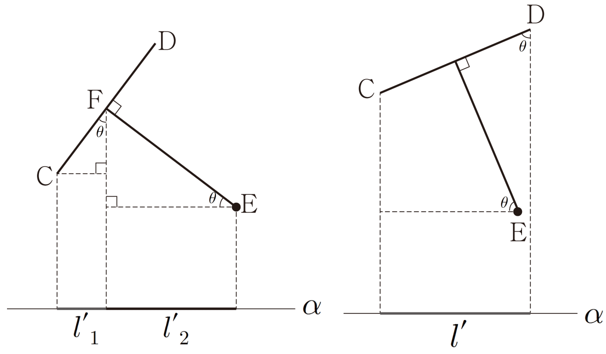
따라서, $ab=10^{\frac{7}{3}}\times 10^{\frac{8}{3}}=10^5$

$\therefore \log ab=5$

20. ③

선분 AB의 그림자 길이는 2로 일정하므로 두 선분 CD, EF의 그림자 길이의 최댓값을 구하면 되며, 두 선분 CD와 EF가 연결된 도형은 선분 AB를 회전축으로 하여 회전하는 상태로 볼 수 있다.

선분 EF가 평면 α와 이루는 예각을 θ라 하면 $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$ 범위에서만 살펴도 일반성을 잃지 않는다.



$\cos\delta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ 인 예각 δ에 대해

i) $0 \le \theta \le \delta$일 때,

왼쪽 그림과 같이 두 선분 CD, EF의 그림자 길이는

$l'_1 + l'_2 = \overline{\mathrm{CF}}\sin\theta + \overline{\mathrm{EF}}\cos\theta$

$\quad = \sin\theta + 2\cos\theta = \sqrt{5}\sin(\theta+\delta)$

이고 $\delta \le \theta+\delta \le 2\delta$ 이므로

$\theta+\delta = 2\delta$일 때, 즉 $\theta = \delta$일 때,

최솟값 $\sqrt{5}\sin2\delta = \dfrac{4}{5}\sqrt{5}$ 을 가진다.

ii) $\delta \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$일 때,

오른쪽 그림과 같이 두 선분 CD, EF의 그림자 길이는

$l' = \overline{\mathrm{CD}}\sin\theta = 2\sin\theta$

이고 $\delta \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$이므로

$\theta = \delta$일 때, 최솟값 $2\sin\delta = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ 를 가진다.

i) ii)에서

두 선분 CD, EF의 그림자 길이의 최솟값이 $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$이므로

세 선분 AB, CD, EF으로 이루어진 도형의 평면 α에 생기는 그림자 길이의 최솟값은 $\dfrac{10+4\sqrt{5}}{5}$이다.

21. ④

$g(t) \ge 0$이므로 $g(t)$가 증가할때 $\{g(t)\}^2$이 증가하고, $g(t)$가 감소할 때 $\{g(t)\}^2$이 감소한다. 따라서, $\{g(t)\}^2$이 오직 하나의 극값을 가질 조건으로 구해도 된다.

$\{g(t)\}^2 = h(t)$라 두면

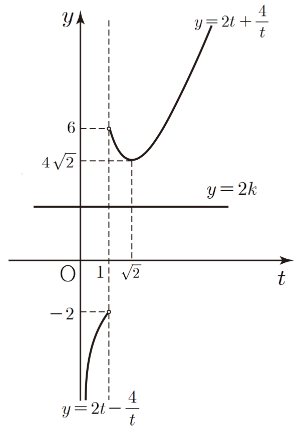
$$h(t) = (t-k)^2 + 4|\ln t| = \begin{cases} (t-k)^2 - 4\ln t & (0<t<1) \\ (t-k)^2 + 4\ln t & (t \ge 1) \end{cases}$$

$$h'(t) = \begin{cases} 2t - \dfrac{4}{t} - 2k & (0<t<1) \\ 2t + \dfrac{4}{t} - 2k & (t>1) \end{cases}$$

이므로

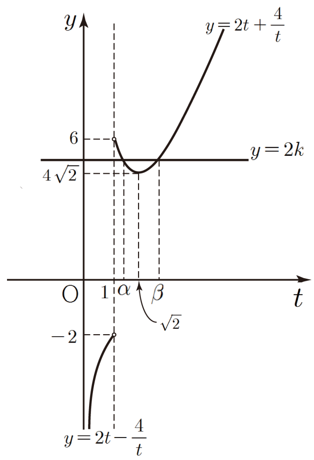
$y = \begin{cases} 2t - \dfrac{4}{t} & (0<t<1) \\ 2t + \dfrac{4}{t} & (t>1) \end{cases}$ 의 그래프와 $y=2k$의 그래프의 위치관계로 극값의 개수를 파악하자.

i) $2k \le 4\sqrt{2}$, 즉 $k \le 2\sqrt{2}$일 때,



$g(t)$는 $t=1$에서 유일한 극솟값을 가지고

ii) $4\sqrt{2} < 2k < 6$, 즉 $2\sqrt{2} < k < 3$일 때,



$g(t)$는 $t=1, \beta$에서 극솟값, $t=\alpha$에서 극댓값을 가진다.

따라서, 실수 a의 최댓값은 $2\sqrt{2}$이다.

〔참고〕 $t \ge 3$일 때도 $g(t)$는 극솟값만 1개를 가진다.

22. 17

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x-y}{x+2y}$ (단, $x+2y \ne 0$)이므로

점 (7, -3)에서의 접선의 기울기는 17

23. 46

$\dfrac{17}{17+12} = \dfrac{17}{29}$이므로 $17+29=46$

24. 18

$x-3 \le \dfrac{12}{x-2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+1)(x-6)}{x-2} \le 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x-6) \ge 0,\ x \ne 2$

$\Leftrightarrow x \le -1,\ 2 < x \le 6$

따라서, 자연수 해의 합은 $3+4+5+6=18$

25. 243

오일 A의 확산상수를 P_A, 점성상수를 U_A라 하고

오일 B의 확산상수를 P_B, 점성상수를 U_B라 하면

$kP_A^{0.4}U_A^{-0.25}=50-2=48$

$kP_B^{0.4}U_B^{-0.25}=34-2=32$

이므로

$$\left(\frac{P_A}{P_B}\right)^{0.4}\left(\frac{U_A}{U_B}\right)^{-0.25}=\frac{48}{32}=\frac{3}{2}$$

$\dfrac{U_A}{U_B}=16$이므로

$$\left(\frac{P_A}{P_B}\right)^{\frac{2}{5}}=\frac{3}{2}\times\left(\frac{U_A}{U_A}\right)^{\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}\times16^{\frac{1}{4}}=3$$

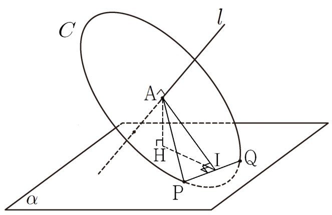
$$\therefore m^2=\left(\frac{P_A}{P_B}\right)^2=3^5=243$$

26. 240

$$\frac{6!}{2}-\frac{5\times2!\times4!}{2}=240$$

27. 52

원 C를 포함하는 평면을 β, 점 A에서 평면 α와 선분 PQ에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하고 평면 α의 법선벡터를 $\overrightarrow{h_1}=(1, 2, -2)$라 하자.



그림처럼 두 평면 α와 β가 이루는 각은 $\angle$AIH이고

평면 β의 법선벡터는 $\overrightarrow{h_2}=(2, 1, -1)$라 둘 수 있으므로

$\cos(\angle \mathrm{AIH})=\dfrac{\overrightarrow{h_1}\circ\overrightarrow{h_2}}{|\overrightarrow{h_1}||\overrightarrow{h_2}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$이다.

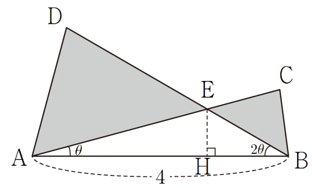
또한, $\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{|2+2-4-6|}{\sqrt{1+4+4}}=2$이므로

$\overline{\mathrm{AI}}=\dfrac{\overline{\mathrm{AH}}}{\sin(\angle \mathrm{AIH})}=\dfrac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=2\sqrt{3}$이고

$d=2\sqrt{\overline{\mathrm{AP}}^2-\overline{\mathrm{AI}}^2}=2\sqrt{25-12}=2\sqrt{13}$

$\therefore d^2=52$

28. 40



점 E에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면,

$\overline{\mathrm{AH}}+\overline{\mathrm{BH}}=\dfrac{\overline{\mathrm{EH}}}{\tan\theta}+\dfrac{\overline{\mathrm{EH}}}{\tan2\theta}=4$이므로 $\overline{\mathrm{EH}}=\dfrac{4}{\frac{1}{\tan\theta}+\frac{1}{\tan2\theta}}$ 이다.

$$\begin{aligned}\therefore S(\theta)&=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ABD}-2\triangle\mathrm{ABE}\\&=\frac{1}{2}\cdot4^2\cdot\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot4^2\cdot\sin2\theta-2\times\frac{1}{2}\cdot4\cdot\frac{4}{\frac{1}{\tan\theta}+\frac{1}{\tan2\theta}}\\&=8\sin\theta+8\sin2\theta-\frac{16}{\frac{1}{\tan\theta}+\frac{1}{\tan2\theta}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{\theta\to+0}\frac{3S(\theta)}{\theta}&=3\lim_{\theta\to+0}\left[\frac{8\sin\theta}{\theta}+\frac{8\sin2\theta}{\theta}-\frac{16}{\frac{\theta}{\tan\theta}+\frac{\theta}{\tan2\theta}}\right]\\&=3\left(8+16-\frac{32}{3}\right)=40\end{aligned}$$

29. 24

$\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)\ (0<\theta<\frac{\pi}{2})$라 두면 $\mathrm{Q}\ (\cos\theta, \frac{2}{5}\sin\theta)$이므로

점 P에서의 접선의 방정식은 $(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=1$

점 Q에서의 접선의 방정식은 $(2\cos\theta)x+(5\sin\theta)y=2$

두 접선의 방정식을 연립하면 $x=\dfrac{1}{\cos\theta}$, $y=0$이므로 $\mathrm{R}(\dfrac{1}{\cos\theta}, 0)$이다.

선분 PQ가 y축에 평행하고 두 접선의 기울기가 모두 음이므로

삼각형 PQR이 이등변 삼각형인 경우는 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}$ 뿐이다.

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sin\theta-\frac{2}{5}\sin\theta=\frac{3}{5}\sin\theta$$

$$\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{(\cos\theta-\frac{1}{\cos\theta})^2+(\frac{2}{5}\sin\theta)^2}$$

이므로

$$(\frac{3}{5}\sin\theta)^2=(\cos\theta-\frac{1}{\cos\theta})^2+(\frac{2}{5}\sin\theta)^2$$

정리하면

$6\cos^4\theta-11\cos^2\theta+5=0$

$\therefore \cos^2\theta=\dfrac{5}{6}$

$\therefore 120m^2=120\tan^2\theta=120(\dfrac{1}{\cos^2\theta}-1)=120\times\dfrac{1}{5}=24$

30. 105

$g(x)=x\int_1^x \frac{1}{t}f'(\ln t)dt-\int_1^x f'(\ln t)dt$이므로

$g'(x)=\int_1^x \frac{1}{t}f'(\ln t)dt+f'(\ln x)-f'(\ln x)=\int_1^x \frac{1}{t}f'(\ln t)dt$

$=[f(\ln t)]_1^x=f(\ln x)-f(0)=\frac{1}{2}(e^{\ln x}-e^{-\ln x})-0$

$=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$

이므로

곡선 $y=g(x)$의 $x=1$에서 $x=2e$ 까지의 길이는

$\int_1^{2e}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_1^{2e}\sqrt{1+\left\{\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})\right\}^2}\,dx$

$=\int_1^{2e}\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})dx$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2+\ln x\right]_1^{2e}=e^2+\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{4}$

$\therefore 60(a+b+c)=60(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})=105$