01. [예고된 로그 계산]

sol)

$\log_6 4 = a, \log_6 9 = b$라 치환하면 준 식은 $a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$이 되고, $a + b = 2$이므로 답은 4가 됩니다.

[2004년 08월 사관학교 수리(나형) 01번]

1. $(\log_{\sqrt{6}} 2)(\log_6 4) + (\log_{\sqrt{6}} 3)(\log_6 9) + (\log_{\sqrt{6}} 4)(\log_6 9)$ 의 값은 ? [2점]

① 3　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 9

02. [행렬 계산]

sol)

$$2A^2 + AB = A(2A + B) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

모든 성분을 다 더하면 1이 나옵니다.

03. [등차수열 계산]

sol)

공차를 d라 하면 $3d = 9$로 $r = 1 + 3d = 10$이 답입니다.

04. [조건부 확률 계산]

sol)

$P(A^c \cap B) = \frac{1}{5}$과 $P(B \cap A^c) = \frac{3}{7}P(A^c)$에서 $P(A^c) = \frac{7}{15}$이므로 $P(A) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$가 답입니다.

05. [확률분포표]

sol)

$\frac{1}{14} + 6a + \frac{3}{7} + a = 1$로부터 $a = \frac{1}{14}$를 얻고, 따라서 정답은

$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{14} + 1 \cdot 6a + 2 \cdot \frac{3}{7} + 3 \cdot a = 9a + \frac{6}{7} = \frac{9+12}{14} = \frac{3}{2}$

06. [삼차함수 개형]

sol)

최고차항 계수가 양수이므로 극값을 갖지 않으려면 증가함수여야 하므로,

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + a + 6 \geq 0$$

$$\rightarrow \ D/4 = a^2 - 3a - 18 = (a-6)(a+3) \leq 0$$

따라서, 이를 만족하는 정수 a의 개수는 $6 - (-3) + 1 = 10$개입니다.

07. [간단한 중복조합]

sol)

$abc = 2^{10}$으로 a, b, c가 10개의 2를 가져가는 수를 중복조합으로 헤아리면 됩니다. ${}_3H_{10} = {}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66$이 정답이 되네요. 그 흔한 낚시 요소 하나 없습니다.

※ 여기서 ${}_3H_{10}$인지 ${}_{10}H_3$인지 순간 위치가 헷갈릴 수도 있는데, 어차피 ${}_{10}H_3 = {}_{12}C_3$은 보기 중에 없는 너무 큰 수이고, 설령 헷갈린다 하더라도 만약 2^{10}이 아니라 2^1이었을 때 ${}_3H_1$인지 ${}_1H_3$인지를 이용해서 귀납적으로 중복조합 사용법을 확인할 수도 있습니다.

08. [지수로그 실생활]

sol)

$\log_2 P = C + \log_3 D - \log_9 S$에서 변화하는 수치에 주목하여 묶어내면

$C + \log_3 9D - \log_9 3S = \log_2 P + 2 - \frac{1}{2} = \log_2 2\sqrt{2}P$가 되어

$k = 2\sqrt{2}$가 정답이 됩니다.

09. [다항함수의 차수 추론]

sol)

다항함수의 대표적인 특징으로는, 모든 실수에서 연속이고, 미분 가능하며, $e^x, \sin x$와 같은 초월함수들과는 달리 '차수'라는 개념이 존재한다는 것입니다. 그리고 지금 이 문제에서도 여느 기출문제들에서처럼 다항함수의 차수에 관해 묻고 있습니다. (가), (나) 조건에서 모두 $x \to \infty$인 상황이므로 두 다항함수 $f(x), g(x)$의 최고차항을 위주로 추론하여야 합니다.

조건을 보니 (가) 에서는 $f(x) - 2g(x) = x^2 + \cdots$ 를,

(나) 에서는 $f(x) + 3g(x) = x^3 + \cdots$ 로 $5g(x) = x^3 - x^2 + \cdots$ 에서

$g(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{5}x^2 + \cdots$ 이므로 $f(x) = \frac{2}{5}x^3 + \frac{3}{5}x^2 + \cdots$ 가 되어

$f(x) + g(x) = \frac{3}{5}x^3 + \frac{2}{5}x^2 + \cdots$ 이므로 답은 $\frac{3}{5}$가 됩니다.

※ $\cdots$ 에 들어갈 부분은 일차 이하의 다항식인데 ,답 구하는 데에는 영향을 끼치지 않으니 대충 $\cdots$ 으로 처리하는게 시간을 절약하는데 도움 되겠죠?

10. [적분으로 정의된 함수]

sol)

늘 나오던 문제네요. 미분하기에 앞서 적분 구간의 길이를 0으로 만드는 $x = 1$을 양변에 대입하여 $0 = 1 + a + b$ 조건을 얻습니다. 그리고 양변을

x에 관해 미분해보면

$$2x\int_1^x f(t)dt + \cancel{x^2f(x)} - \cancel{x^2f(x)} = 4x^3+3ax^2+2bx$$

이고, 다시 양변에 $x=1$을 대입하여 $0=4+3a+2b$를 얻을 수 있습니다. 그리고 아까 구한 $0=1+a+b$와 연립해보면 $a=-2, b=1$이 나옵니다. 이제, 사실 여러 가지 방법이 있습니다만 다음과 같이

$$2x\int_1^x f(t)dt = 4x^3+3ax^2+2bx = 2x\left(2x^2+\frac{3a}{2}x+b\right)$$

로 묶어내면 $\int_1^x f(t)dt = 2x^2+\frac{3a}{2}x+b = 2x^2-3x+1$을 이끌어 낼 수 있습니다. 이제 여기서 한 번 더 미분하면 $f(x)=4x-3$이 되므로 $f(5)=17$이 정답입니다.

11. [함수의 연속성]

sol)

ㄱ. $1+1=2$로 참.

ㄴ. $\lim_{x\to+0} g(f(x)) = \lim_{f(x)\to+0} g(f(x)) = 1$이므로 거짓.

ㄷ.

x	$1-0$	1	$1+0$
$f(x)g(x)$	$1\times0=0$	$0\times1=0$	$0\times1=0$

따라서 ㄷ도 참이므로 ㄱ, ㄷ이 정답입니다.

12. [수열을 잘 다루는가]

sol)

S_{2n-1}은 홀수 항들만의 합이 아니라 $2n-1$번째 홀수 항까지의 합이고, S_{2n}에서도 마찬가지인데, 묻고 있는 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = a_1+a_3+a_5+\cdots$는 홀수 번째 항들만의 합입니다. 나아가, 고등학생(~삼수생) 수준에서 구할 수 있는 수렴하는 무한급수의 종류로는 크게 무한등비급수와 부분 분수 상쇄형이 있는데, 지금은 아무래도 부분 분수 꼴로 상쇄되는 형태임을 예측해야 합니다. 그런데 a_{2n-1}은 $S_{2n}-S_{2n-1}$로 얻을 수 없으니 약간 변형하여서

$$a_{2n+1} = S_{2n+1}-S_{2n} = \frac{2}{n+3}-\frac{2}{n+1} \quad (n\geq 1)$$

과 $a_1=S_1=\frac{2}{3}$을 이용하여 구하면 됩니다. 그러면,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = a_1+a_3+a_5+\cdots = \frac{2}{3}+\left(\cancel{\frac{2}{4}}-\boxed{\frac{2}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{2}{5}}-\boxed{\frac{2}{3}}\right)+\cancel{\cdots}$$

$$= \frac{2}{3}-\boxed{\frac{2}{2}}-\boxed{\frac{2}{3}} = -1$$ 이 정답임을 알 수 있습니다.

13. [Counting]

sol)

직사각형의 넓이는 가로와 세로 길이의 곱이므로

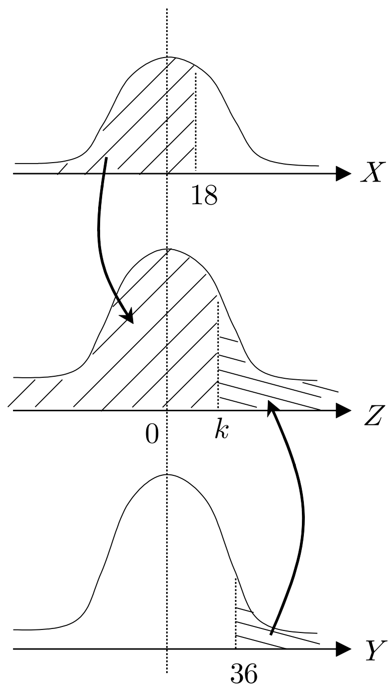
$S_k = 1\times(2^k+4-k-1) = 2^k-k+3$라 세운 후 시그마를 덮어씌우면

$$\sum_{k=1}^{8}(2^k-k+3) = \frac{2(2^8-1)}{2-1}-\frac{8\cdot9}{2}+8\cdot3$$
$$= 2^9-2-36+24 = 498$$

14. [생소함 속에서 익숙함을 찾아내기]

sol)

(나) 조건과 (다) 조건의 뉘앙스 차이를 느껴야 합니다. 얼핏 보기엔 비슷한 조건을 말하고 있는 것 같지만 자세히 들여다보면 확실히 정보가 다릅니다. 처음 등장한 4점 문제 치고 신선하네요! 차분하게 한 번 풀어보겠습니다. 첫 단추는 두 확률변수 X, Y 모두가 정규분포를 따른다는 것입니다. 그리고, (나) 조건과 정규분포곡선으로부터 다음 상황을 추론할 수 있고,



$Y=aX$에서 $18=\frac{36}{a}$가 되어야

$P(X\leq18)+P(Y\geq36) = P(X\leq18)+P\left(X\geq\frac{36}{a}\right)=1$을

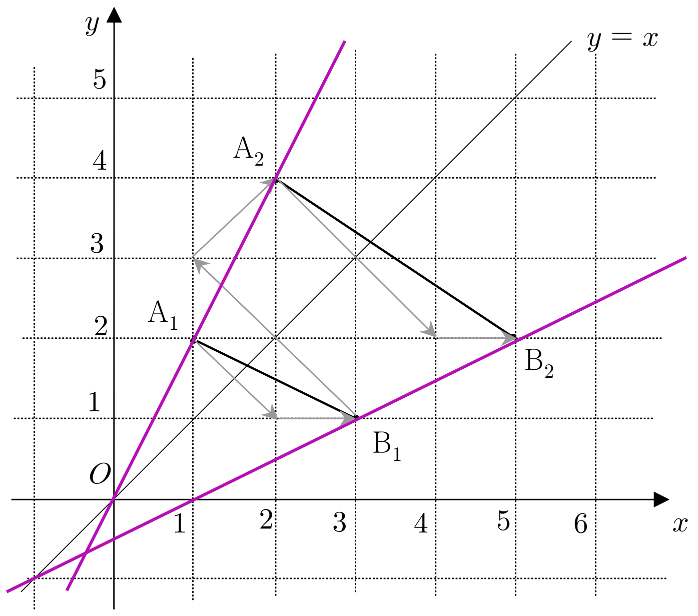
만족하므로 $a=2$임을 알 수 있습니다. 그리고 (다) 조건에서 $P(X\leq28)=P(2X\geq28)=P(X\geq14)$가 되어

$m=E(X)=\frac{14+28}{2}=21$임을 알 수 있습니다. 굳이 이걸 또 정규분포함수를 그리지 않아도 충분히 납득할 수 있겠죠? 그러므로 $E(Y)=E(2X)=2E(X)=42$가 답이 됩니다.

15. [같은 위상]

sol)

$\overline{A_nB_n}$은 n에 대한 일차식으로서 상황의 단조로움으로 미루어 보건데 아마도 등차수열일 것이라 예상할 수 있습니다. 그러니까 $\overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}$ 정도만 구해도 그 공차가 답이 될 것 같네요. 일단 그래프를 그려서 추론해보겠습니다. 이 문제는 그래프를 하나도 그려주지 않았네요!



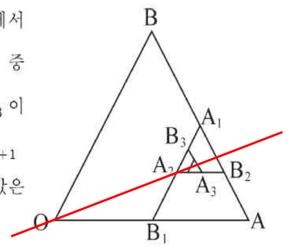
하지만 아쉽게도 $\overline{\mathrm{A_nB_n}}$ 이 n에 대한 일차식으로 나오는 형태는 아니네요! 몇 개 그어보니까 $\overline{\mathrm{A_nB_n}}$ 의 기울기가 다른 관계로 예상이 약간 빗나갔습니다. 대신에, $\mathrm{A_1, A_2}, \cdots$ 와 $\mathrm{B_1, B_2}, \cdots$ 라는 같은 위상의 점들끼리 쭈욱 이어보니 결국 직선 위에 놓여있고, 결국 $\overline{\mathrm{A_nB_n}} = \sqrt{an^2+bn+c}$ 와 같은 꼴이 되겠네요. 그러면 $\mathrm{A_n}(n, 2n), \mathrm{B_n}(2n+1, n)$ 에서

$$\overline{\mathrm{A_nB_n}}^2 = (n+1)^2 + n^2 = 2n^2+2n+1$$

이므로, 고로 답은 $\sqrt{2}$ 가 나옵니다.

[2004년 08월 사관학교 수리(나형) 22번]

22. 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 12인 정삼각형 OAB 에서 $\overline{\mathrm{AB}}, \overline{\mathrm{OA}}$ 의 중점을 각각 $\mathrm{A_1}, \mathrm{B_1}$ 이라 한다. 또 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}, \overline{\mathrm{AA_1}}$ 의 중점을 각각 $\mathrm{A_2}, \mathrm{B_2}$ 라 하고, $\overline{\mathrm{A_2B_2}}, \overline{\mathrm{A_1A_2}}$ 의 중점을 각각 $\mathrm{A_3}, \mathrm{B_3}$ 이라 한다. 이와 같이 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}, \overline{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n}$ 의 중점을 각각 $\mathrm{A}_{n+1}, \mathrm{B}_{n+1}$ 로 정하는 과정을 한없이 계속할 때, $\lim_{n\to\infty} \tan(\angle \mathrm{AOA}_n)$ 의 값은? [4점]



① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{5}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

이 문제도 역시 같은 위상의 점들을 이은 선으로 간단히 답을 구할 수 있었습니다. 빨간 직선 위에 A_∞ 가 맺히죠.

16. [적분 계산]

sol)

$$\begin{cases} S_1 + S_2 = \dfrac{1}{6}(4-0)^3 = \dfrac{32}{3} \\ \dfrac{S_2}{2} = \displaystyle\int_3^4 (4x - x^2)dx = \left[2x^2 - \dfrac{x^3}{3}\right]_3^4 = 14 - \dfrac{37}{3} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

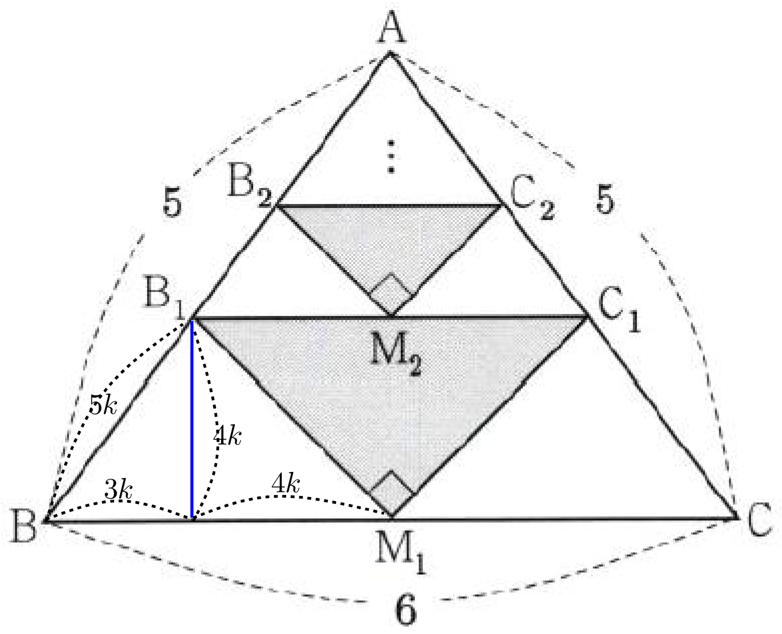
$$\rightarrow\ S_1 = S_3 = \frac{32-10}{3} = \frac{22}{3}$$

$$\therefore\ \frac{S_2}{S_1+S_3} = \frac{10}{22+22} = \frac{5}{22}$$

※ 딱 요만큼 샤프를 끄적이다 답을 도출해내면 적절하다고 생각합니다. 시험에선 엄연히 제한시간도 평가요소니까요!

17. [보조선은 심플하게]

sol)



$\overline{\mathrm{AM_1}} = 4$ 로 지금 이 문제에는 $3:4:5$ 의 직각 삼각형이 숨어 있습니다. 숨어있기는 커녕 이정도면 대놓고 손까지 흔들고 있는 것 같네요. 파란색 보조선과 닮음비를 적절히 활용하여 $\overline{\mathrm{BM_1}} = 3 = 7k$ 를 구할 수 있습니다.
그리고 무한등비급수에서의 초항은 $16k^2$ 이고, 공비로는 이등변삼각형의 밑변 길이비의 제곱인 $6^2 : (8k)^2$ 에서 $\left(\frac{4k}{3}\right)^2 = \frac{16k^2}{9}$ 가 됩니다. 따라서,

$$\frac{16k^2}{1-\frac{16k^2}{9}} = \frac{16\cdot\frac{9}{49}}{1-\frac{16}{9}\cdot\frac{9}{49}} = \frac{16\cdot 9}{49-16} = \frac{16\cdot 9}{33} = \frac{48}{11}$$ 이 답입니다.

18. [무엇을 계산하고 있는 중인지]

sol)

뻔한 상황, 뻔한 문제에서 돌려서 이야기 하고 있습니다. 점 P 에서 y좌표가 b인데 $\overline{\mathrm{OQ}} : \overline{\mathrm{OR}} = 3:1$ 라는 것은 접선의 y절편이 $-3b$라는 말입니다.
그런데 보기들이 하나같이 예쁘니까 대충 곡선 위의 점 잡고, 접선 그어서 찾아내도 $(a, b) = (3, 6)$ 로 완전 빨리 답을 쏙 빼낼 수 있겠네요.
곡선 위의 점 P 에서의 접선은

$$y - b = (a^2-1)(x-a)$$
$$\Leftrightarrow\ y = (a^2-1)x - a^2 + a + b$$

인데, y절편의 좌표는 $(0, -3b)$이므로

$$-a^3 + a + b = -3b$$

가 됩니다. 그리고, 점 P 도 엄연히 곡선 위의 점이므로서

$$b = \frac{1}{3}a^3 - a$$

를 만족하므로, 두 식을 연립하면

$$a^3 - a = 4b = \frac{4}{3}a^3 - 4a$$

$$\frac{1}{3}a^3 = 3a$$

에서 $a = 3, b = 6$ 을 얻습니다. 따라서 답은 $ab = 18$ 이 됩니다.

19. [행렬 퍼즐]

sol)

요즘 추세에 걸맞는 무난한 문제네요. ㄷ이라는 퍼즐을 ㄱ, ㄴ 그리고 자신의 개인 역량으로 어떻게 풀어낼 것인가를 고민해야 하는.

ㄱ. $(A+2B)(2A-B)=E$로부터 $AB=BA$이니 참입니다.

ㄴ. 다시 ㄱ을 이용하여 $(A+2B)(2A-B)=E=2A^2-2B^2$가 되고,

$A+B$의 역행렬은 $\frac{1}{2}(A-B)$로 엄연히 존재하므로 참입니다.

혹여나 이 타이밍에

이런 문제는 항상 ㄱ,ㄴ,ㄷ이 전부 답이었지 ^오^

하는 악마의 속삭임에 섣불리 넘어갔던 분은 없겠죠?

ㄷ. $A^2-B^2=\frac{1}{2}E$인데 $A^2+B^2=\frac{1}{2}E$라 추가로 가정하면

두 식을 연립하여 $B^2=O$를 얻습니다. 물론,

『 이차정사각행렬 B에 대하여 $B^2=O$이면 $B=O$』

라는 것은 이 문제와 관련 없이 독립적인 상황이라면 거짓 명제겠지만, 지금까지 훑어온 추가 조건들로 인해 섣부른 판단을 내릴 수는 없습니다.

하지만 $B^2=O$이면 $A^2=\frac{1}{2}E$로 A의 역행렬이 존재하고, 따라서

$AB=O$의 양변의 왼쪽에서 A의 역행렬을 가하면 $B=O$가 됩니다.

고로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참입니다.

20. [점화식 & 기하학적 해석]

sol)

직각삼각형 $\mathrm{OA_nB_n}$의 빗변 길이의 관점에서 계산해보면 $p=1$이 됩니다.

$$\overline{\mathrm{OD}_n}=\overline{\mathrm{OB}_n}+\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n}=\overline{\mathrm{OB}_n}+\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}$$
$$=a_n\sqrt{\boxed{\text{(가)}}+b_n^2}+a_nb_n-r_n$$
$$\overline{\mathrm{OE}_n}=a_n+r_n$$

$\overline{\mathrm{OD}_n}=\overline{\mathrm{OE}_n}$이므로

$$r_n=\frac{a_n\left(b_n-1+\sqrt{\boxed{\text{(가)}}+b_n^2}\right)}{2}$$

즉, $\overline{\mathrm{OD}_n}=\overline{\mathrm{OE}_n}$으로 등치한 후 다시 r_n에 대해 정리해 준 것입니다.

그리고 다음 식의 r_n 부분에 넣으면 됩니다.

$$\therefore\ a_{n+1}=a_n+2r_n=\left(\boxed{\text{(나)}}\right)\times a_n\quad(n\geq 1)$$

그러면 $a_n+a_n\left(b_n-1+\sqrt{1+b_n^2}\right)=a_n\left(b_n+\sqrt{1+b_n^2}\right)$와

$b_n=\frac{1}{2}\left(n+1-\frac{1}{n+1}\right)$로부터 (나)에 들어갈 식으로는

$$f(n)=\frac{1}{2}\left(n+1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(n+1+\frac{1}{n+1}\right)=n+1$$

이 됩니다. 마치, $\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+4=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2$로 바뀌는 것과 유사한

패턴입니다. 다음으로 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=n+1$에서 축차대입법을 적용하여 더 쉽게 구할 수도 있지만, 문제의 증명과정을 따라서 구해봅시다. 잘 보면 수치들이 다음과 같이 변하고 있습니다.

$$a_{n+1}=(n+1)a_n$$
$$a_n=na_{n-1}$$
$$\vdots$$

따라서, $a_n=na_{n-1}=n(n-1)a_{n-2}=\cdots=n(n-1)\cdots2\cdot a_1$이고,

$a_1=2$라 초기에 제시하였으므로(이 부분이 낚시일 수도 있겠네요.)

$a_n=2n!$이 되어 $g(n)=2n!$이 됩니다. 고로, 정답은

$p+f(4)+g(4)=1+(4+1)+(2\cdot4!)=1+5+48=54$입니다.

※ 보통 수능에선 다단 편집을 사용하기 때문에 이런 증명 문제에는 수식만을 채워 넣기도 빠듯해서 그림까지 넣기가 힘든데, 사관학교 시험은 아무래도 공간의 제약을 덜 받아서 그런지 이러한 실험적인 문제도 나옵니다. 이과 기출문제 중에서는 벡터문제 빈칸 채우기로도 몇 번 나왔었구요. 덧붙여, 빈칸 주위만 깔짝깔짝 살펴봐서 풀기는 힘들고, 증명 과정 전체를 이해하여야 합니다. 부분 부분 쓰인 수학적인 내용은 그다지 어려운 부분이 아닌데 정보량이 많아지다 보니까 시험장에서의 압박 속에서 풀어내기가 힘들었을 수도 있다고 봅니다.

21. [선택된 자들을 위한]

sol)

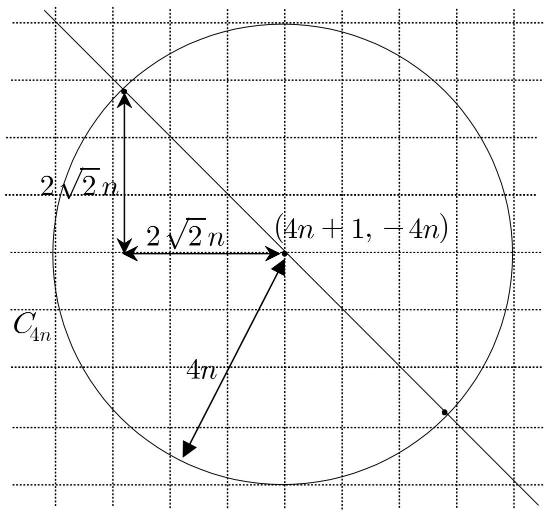
우선 제 1 사분면 위의 원들의 중심은 $y=x$상에 존재하며

$(4n-3, 4n-3)$의 꼴입니다. 같은 방식으로 나머지도 구해보면

원	중심을 지나는 직선	중심
C_{4n-3}	$y=x$	$(4n-3, 4n-3)$
C_{4n-2}	$y=-x-1$	$(-4n+2, 4n-3)$
C_{4n-1}	$y=x-2$	$(-4n+2, -4n)$
C_{4n}	$y=-x+1$	$(4n+1, -4n)$

이때, 원 C_{40}의 중심의 좌표는 $(41, -40)$이고 반지름은 40입니다. 그리고, 보다시피 중심에서 x, y축에 이르는 거리와 반지름이 거의 비슷하기 때문에 제 4 사분면에 속하는 원이 다른 사분면에 속하는 원의 중심을 포함할 수는 없습니다. 따라서, 제 4 사분면에 속하는 원들만을 생각해도 충분합니다!

그런데 원 C_{4n}을 관찰해보니



이와 같고, 해당 영역 안에 들어오는 다른 C_{4n}의 중심들만 헤아려주면 되겠군요!

그러면 원 C_{40}의 ↖ 방향 최대의 점은 $(41-20\sqrt{2},\ -40+20\sqrt{2})=(12.\times\times,\ -11.\times\times)$가 되어 원 C_{12}의 중심 $(13,\ -12)$가 해당 영역 내부로 들어오고, 원 C_{40}의 ↘ 방향 최대의 점은 $(41+20\sqrt{2},\ -40-20\sqrt{2})=(69.\times\times,\ -68.\times\times)$가 되어 원 C_{68}의 중심 $(69,\ -68)$이 해당 영역 내부로 들어오게 됩니다. 따라서, C_{12}과 C_{68}는 C_{4n} 중에서 각각 3번째와 17번째 이므로 $17-3+1=15$가 정답이 됩니다.

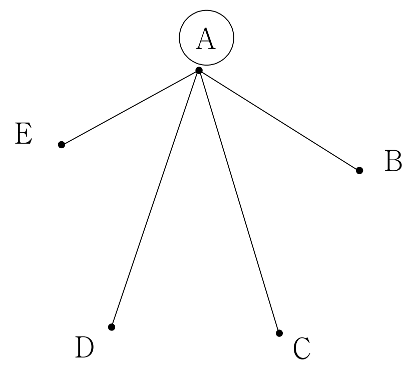
22. [쉬어가기]

sol)

$f(x)$가 다항함수이므로 $f(2)=3$이고, $f'(2)=4$가 됩니다. 이때 $g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$에서 $g'(2)=4\cdot3+4\cdot4=28$이 답입니다.

23. [행렬의 탈을 쓴 경우의 수]

sol)

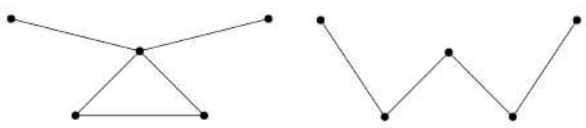


꼭짓점 A는 연결이 완료 되었다는 의미에서 동그라미로 구분하였습니다. 꼭짓점 B, C, D는 선택권이 하나 더 있는데, 꼭짓점 E는 아무런 제약 조건이 없네요! (물론 괄호에서 설명한 단순 그래프 조건은 만족해야 합니다.) 만약 꼭짓점 B, C, D간에 연결해버리면 변을 그을 수 있는 횟수가 줄어들게 되기에 꼭짓점 B, C, D는 모두 꼭짓점 E에 연결하여야 변의 개수가 최대가 됩니다. 그 때의 연결상태를 나타내는 행렬은 다음과 같고, 답은 14가 됩니다.

$$\begin{array}{c} \\ \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \\ \mathrm{D} \\ \mathrm{E} \end{array} \begin{array}{c} \mathrm{A\,B\,C\,D\,E} \\ \begin{pmatrix} 0&1&1&1&1 \\ 1&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&1 \\ 1&1&1&1&0 \end{pmatrix} \end{array}$$

[2015학년도 06월 포카칩 모의평가 수학 영역(A형) 12번]

12. 두 그래프 G, H가 다음 그림과 같다.



두 그래프 G, H를 나타내는 행렬을 각각 A, B라 할 때, 행렬 $A+B$의 성분 중 2의 개수의 최댓값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

괜찮은 문제라 소개합니다ㅎㅎ

24. [신뢰구간의 길이]

sol)

$b-a=2\times1.96\times\dfrac{1.2}{\sqrt{n}}\leq0.56$에서 $\sqrt{n}\geq8.4$이므로 $n\geq(8.4)^2=70.56$이므로 n의 최솟값은 71입니다. 신뢰구간의 길이로 등장한 0.56이라는 수치가 극적으로 양변을 적당하게 공통 부분으로 상쇄시키면서 계산을 간소화하는 것이 보이시는지요?!

25. [수열에서의 첨수]

sol)

$\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=a_1+a_2+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n}=S_{2n}$이라고 합시다.
그러면 $a_9+a_{12}=S_{12}-(S_8+a_{10}+a_{11})$에서 S_{12}과 S_8만 구해주면 되겠네요. 그러면 $S_{12}-S_8=(2\cdot6^2-6)-(2\cdot4^2-4)=38$이므로 $a_9+a_{12}=S_{12}-(S_8+a_{10}+a_{11})=38-20=18$이 답입니다.

26. [행렬 계산]

sol)

(가) 조건에 의해 $AB=BA$로 교환법칙이 보장됩니다. 그러면 역행렬들간에 상쇄되어서 $X_n=B+A$으로 항상 일정하고, 따라서

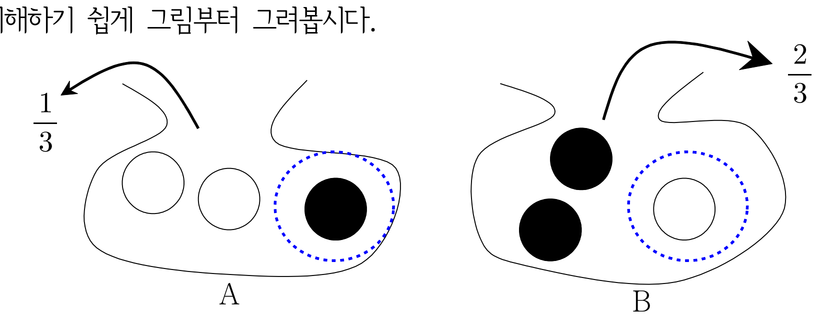
$$X_1+X_2+X_3+\cdots+X_{10}=10(A+B)$$

로 구하고자 하는 값은 $10(1+8)=90$이 됩니다.

27. [Killer?]

sol)

이해하기 쉽게 그림부터 그려봅시다.

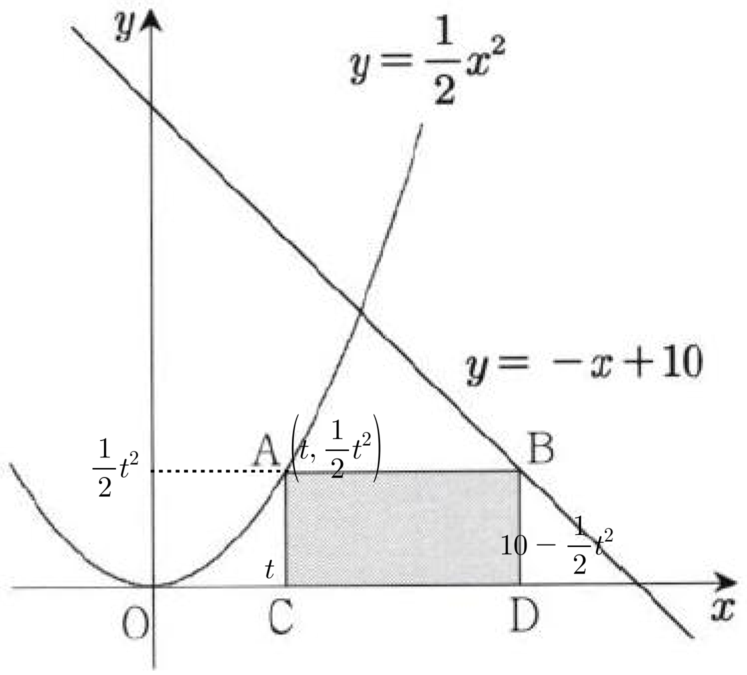


다행히 엄청 어려운 문제는 아니네요! 4번의 시행동안 각 주머니에서 두 번씩 두 개의 구슬을 꺼내야 하는데 A, A, B, B를 배열하는 가지수로 $\dfrac{4!}{2!2!}=6$개가 가능합니다. 만약 AABB순으로 구슬을 꺼냈을 때의 확률은 $\left(\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2^2}{3^6}$인데, AABB가 아닌 그 밖의 경우에도 확률도 $\dfrac{2^2}{3^6}$으로 동일합니다. 따라서, 구하고자 하는 확률은 $6\times\dfrac{2^2}{3^6}=\dfrac{2^3}{3^5}=\dfrac{8}{243}$로 $p+q=251$이 답입니다.

28. [미분]

sol)

직사각형의 넓이는 가로와 세로 길이를 곱하면 되고, 이의 최댓값을 구하려면 대개 미분을 하면 해결 됩니다. (더 복잡한 상황까지는 묻질 않았네요.)



이때 직사각형 ABCD의 넓이를

$$S(t)=\left(10-\frac{1}{2}t^2-t\right)\left(\frac{1}{2}t^2\right)=-\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^3+5t^2$$

라 하면

$$S'(t)=-t^3-\frac{3}{2}t^2+10t=-\frac{t}{2}\left(2t^2+3t-20\right)=0$$

에서 최댓값을 가질 유의미한 값으로

$$2t^2+3t-20=(2t-5)(t+4)=0$$

에서 $t=\frac{5}{2}$ 이므로 $10t=25$ 가 답이 됩니다.

[2007년 06월 평가원 수리(가형) 22번]

22. 그림과 같이 좌표평면 위에 네 점

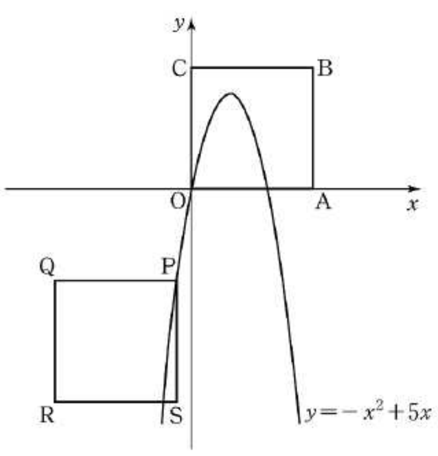
O(0, 0), A(8, 0), B(8, 8), C(0, 8)

을 꼭지점으로 하는 정사각형 OABC와 한 변의 길이가 8이고 네 변이 좌표축과 평행한 정사각형 PQRS가 있다.

점 P가 점 (−1, −6)에서 출발하여 포물선

$y=-x^2+5x$

를 따라 움직이도록 정사각형 PQRS를 평행이동시킨다. 평행이동시킨 정사각형과 정사각형 OABC가 겹치는 부분의 넓이의 최대값을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



29. [정적분으로 전환하기]

sol)

$x_k=1+\frac{2}{n}k$ 로 $dx_k=\frac{2}{n}$ 에 대응이 되고, 적분 시 아래 끝과 위 끝은 $n\to\infty$ 라는 전제에서 각각 $x_1=1$ 과 $x_n=3$ 으로 대응됩니다. 그리고

$$A_k=\frac{1}{2}x_kf(x_k)=\frac{1}{2}\left(-4x_k^3+12x_k^2+16x_k\right)=-2x_k^3+6x_k^2+8x_k$$

이므로 준 식은

$$2\int_1^3(-2x^3+6x^2+8x)dx=2\left[-\frac{1}{2}x^4+2x^3+4x^2\right]_1^3$$
$$=2(-40+52+32)=88$$

로 정리가 됩니다.

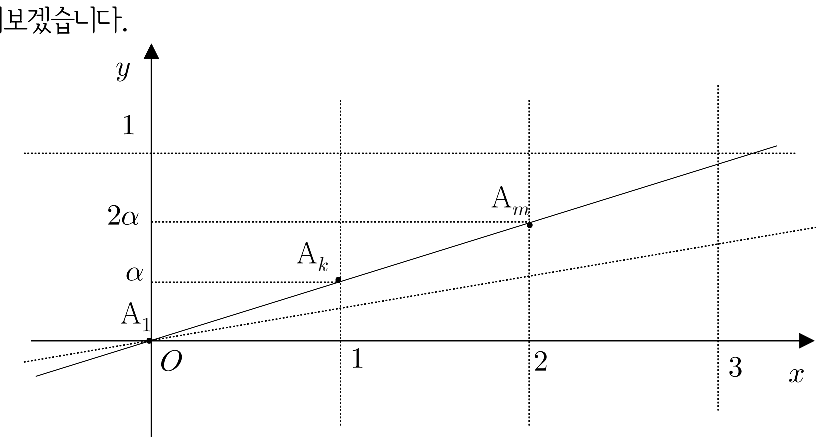
30. [상용로그의 지표와 가수의 의미]

sol)

$A_1(0,0)$이고 $A_k(f(k),g(k)), A_m(f(m),g(m))$인데,
$f(k)=1, f(m)=2$임은 쉽게 알 수 있습니다. 그리고 세 점이 한 직선 상에 있으려면 $g(k)=\alpha$ $(0\le\alpha<1)$라 했을 때 $g(m)=2\alpha$로

$0\le\alpha<\frac{1}{2}$ 가 되어야 합니다. 여기까지 조금 더 능동적으로

해석해보겠습니다.



여기서 상용로그의 지표는 자리수를 의미하므로 k는 두 자리 자연수, m은 세 자리 자연수여야 합니다. 다음으로 가수 α와 2α의 관계로 주의를 돌려봅시다. 만약 A_m 을 가장 큰 세 자리 자연수 999에 대응시켜 버렸을 때, $2\alpha=\log 9.99$에서 $\alpha=\log\sqrt{9.99}$ 가 되고,
$1+\log\sqrt{9.99}=\log\sqrt{999}=\log k$로 k가 두 자리 자연수라는 사실에 모순이 됩니다. 즉, 이를 최대의 상황으로 만족시키려면 처음부터 999가 아니라 가장 큰 세 자리 완전 제곱수인 $31^2=961$을 잡았어야 했습니다.
그러면 $m=961, k=31$이 되고, $k+m=992$가 정답이 됩니다.

[2013년 06월 평가원 수학 영역(A형) 30번]

30. 자연수 k에 대하여 $\log k$의 지표와 가수를 각각 x좌표와 y좌표로 갖는 점을 P_k라 하자. 다음 조건을 만족시키는 자연수 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $1\le m<n<100$
(나) $\overline{P_mP_n}=\sqrt{1+(\log 2)^2}$

이 문제와 풀이가 유사하네요!