

정답	01 ②	02 ⑤	03 ①	04 ④	05 ①	06 ②	07 ④	08 ③	09 ③	10 ⑤
	11 ③	12 ④	13 ④	14 ②	15 ⑤	16 ③	17 ②	18 ⑤	19 ④	20 ①
	21 ①	22 126	23 35	24 13	25 10	26 12	27 65	28 24	29 32	30 39

해설

$$01 \quad A^{-1} = \frac{1}{1-0} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

따라서, 모든 성분의 합은 $1+2+1=4$ 이다.

$$02 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

03 확률변수 X 가 이항분포 $B(200, p)$ 를 따르고 $E(X) = 40$ 이므로

$$200 \times p = 40$$

$$p = \frac{1}{5} \text{이다.}$$

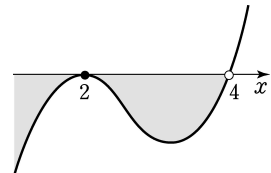
$$\text{따라서, } V(X) = 200 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = 32 \text{이다.}$$

$$04 \quad A = \left\{ x \mid \frac{(x-2)^2}{x-4} \leq 0 \right\}, \quad B = \{ x \mid x^2 - 8x + a \leq 0 \}$$

$A \cup B = \{ x \mid x \leq 5 \}$ 이므로 B 에서 $x^2 - 8x + a = 0$ 이 $x = 5$ 를 근으로 가져야 한다.

$$25 - 8 \cdot 5 + a = 0$$

$$\therefore a = 15$$



05 양 끝에 흰색이 놓이면, 가운데 5개는 흰색 깃발 3개, 파란색 깃발 5개를 일렬로 나열하는 방법의 수가 된다.

$$\therefore \frac{8!}{3!5!} = 56$$

06 $A'(3k, 0)$, $C'(0, 3k)$ 이므로 직선 $A'C'$ 의 방정식은 $x + y = 3k$

\overline{AB} 와 $\overline{A'C'}$ 의 교점을 $D(3, y)$ 라 하면 공통 부분의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \overline{BD}^2 = \frac{1}{2}$

$\therefore D(2, 3y)$

직선 $A'C'$ 의 방정식이 $x + y = 5$ 이므로 $3k = 5$

$$k = \frac{5}{3}$$

07 주어진 조건에 따라 다음 식을 만족한다.

$$\log a = A - \frac{1}{2} \log 1 - \frac{4K}{1} \dots \textcircled{㉠}$$

$$\log \frac{a}{2} = A - \frac{1}{2} \log 4 - \frac{d^2 K}{4} \dots \textcircled{㉡}$$

식 ㉠, ㉡를 정리하면

$$\log a = A - 4K \dots \textcircled{㉢}$$

$$\log a = A - \frac{d^2 K}{4} \dots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉢} - \textcircled{㉣} \text{ 하면 } \left(\frac{d^2}{4} - 4 \right) K = 0$$

$$\therefore d = 4 (\because d > 0, K > 0)$$

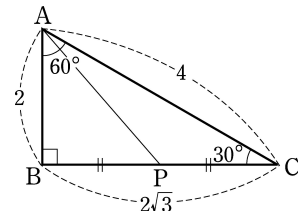
08 $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$ 에서

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AP} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$\therefore P$ 는 \overline{BC} 의 중점이다.

$$|\overrightarrow{AP}|^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2 = 7$$



09 음료수 한 병에 들어간 칼슘 함유량을 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따른다.

크기가 16인 표본의 평균은 $\bar{X} = 12.34$

따라서 신뢰도 95%로 모평균을 추정하면

$$12.34 - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{16}} \leq m \leq 12.34 + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{16}} \text{ 인데}$$

$$11.36 \leq m \leq a \text{ 이므로}$$

$$1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{16}} = 12.34 - 11.36$$

$$\therefore \sigma = 2 \text{ 이고 } a = 12.34 + 1.96 \frac{2}{4} = 13.32$$

$$\therefore a + \sigma = 13.32 + 2 = 15.32$$

10 f 가 각 θ 만큼의 회전변환이라 하면 f 를 나타내는 행렬은

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\therefore a^2 = \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = \frac{1}{4} \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$A \text{의 모든 성분의 합은 } 2\cos \theta = \sqrt{3} = b$$

$$\therefore b^2 = 3 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } a^2 + b^2 = \frac{13}{4}$$

11 마름모 ABCD를 오른쪽 그림처럼 놓고

점 A, D의 좌표를 각각 $(0, b), (a, 0)$ 이라 하자.

그리고 초점을 $F(k, 0)$ ($k > 0$)이라 하자.

$$\overline{AD} = 10 \text{이므로 } a^2 + b^2 = 100 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$k = 5\sqrt{2} \text{이므로 } (5\sqrt{2})^2 + b^2 = a^2 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

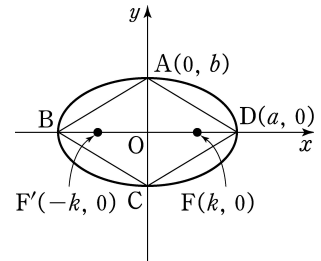
$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡}$ 에서

$$50 + 2b^2 = 100$$

$$\therefore b = 5, \quad a = 5\sqrt{3}$$

마름모 ABCD의 넓이는

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2} ab \right) = 50\sqrt{3} \text{이다.}$$



12 $f(-1) = f(3) = 0$ 에서

$$f(x) = p(x+1)(x-3) \quad (p > 0)$$

$$\frac{g(x)+2}{f(x)} = \frac{g(x)+2}{g(x)}$$

$$(g(x)+2) \left\{ \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} \right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \{g(x) = -2 \text{ 또는 } f(x) = g(x)\}$$

$$\text{그리고 } \{f(x)g(x) \neq 0\}$$

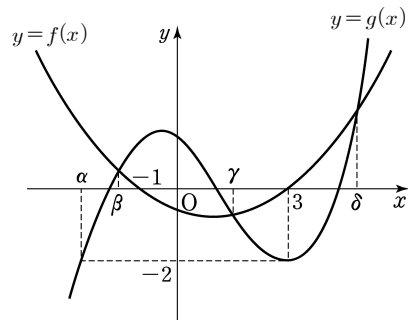
서로 다른 실근의 개수는

$$g(x) = -2 \text{인 것 : } x = 3 \text{ or } x = \alpha \text{의 2개}$$

$$f(x) = g(x) \text{인 것 : } x = \beta, x = \gamma, x = \delta \text{의 3개}$$

$$\text{이 중 } f(x)g(x) = 0 \text{인 것 : } x = 3$$

$$\therefore 2 + 3 - 1 = 4(\text{개})$$



13 주어진 실행에 의하여 상자 B에 있는 빨간 공의 개수가 1인 경우는 다음과 같다.

(i) 빨간 공 1개, 검은 공 1개를 뽑은 경우

$$\therefore \frac{{}_3C_1 \times {}_5C_1}{{}_8C_2} = \frac{15}{28}$$

(ii) 검은 공 2개 뽑은 후 빨간 공 1개, 검은 공 1개인 경우

따라서, $\frac{{}_5C_2}{{}_8C_2} \times \frac{{}_3C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_6C_2} = \frac{6}{28}$ 이므로 (i), (ii)에 의해 $\frac{15}{28} + \frac{6}{28} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$ 이다.

14 R_1 의 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각

$6a, 2a$ 라 하면

$$\overline{OA} = \sqrt{a^2 + 9a^2} = \sqrt{10} a = 1$$

$$\therefore a = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

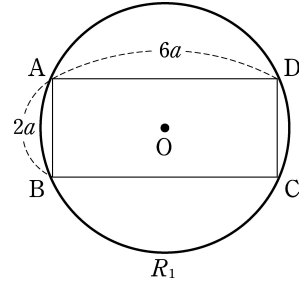
R_n 의 가장 작은 원의 반지름의 길이를 r_n 이라 하면

$$r_1 = 1, r_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}, r_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{10}} r_n$$

각 원에서 색칠된 부분의 넓이는 첫 항이 $\pi - \frac{12}{10}$, 공비가 $\frac{1}{10}$ 인 등비수열이고, 개수는 1개, 2개, 4개, ...의 등비수열을 이루므로

$$S_n = \left(\pi - \frac{6}{5} \right) + 2 \cdot \frac{1}{10} \cdot \left(\pi - \frac{6}{5} \right) + 2^2 \cdot \frac{1}{10} \cdot \left(\pi - \frac{6}{5} \right) \\ + \dots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{10^{n-1}} \cdot \left(\pi - \frac{6}{5} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} S_n = \frac{\pi - \frac{6}{5}}{1 - \frac{2}{10}} = \frac{5\pi - 6}{4} = \frac{5}{4}\pi - \frac{3}{2}$$



15 \neg . $A^2 + B = 3E$ 의 양변의 왼쪽과 오른쪽에 A 를 곱하면

$$A^3 + AB = 3A \quad \cdots \textcircled{\neg}$$

$$A^3 + BA = 3A \quad \cdots \textcircled{\cup}$$

$\textcircled{\neg} - \textcircled{\cup}$ 하면

$$AB = BA \text{ 이다. (참)}$$

\cup . $A^2 = 3E - B$ 를 $A^4 + B^2 = 7E$ 에 대입하면

$$(3E - B)^2 + B^2 = 7E$$

$$2B^2 - 6B + 2E = 0$$

$$B^2 - 3B + E = 0$$

$$B(3E - B) = E$$

따라서 $B^{-1} = 3E - B = A^2$ ($\because A^2 + B = 3E$)이다. (참)

\cap . \cup 에 의해 주어진 식은

$$B^{-1} + B = 3E, (B^{-1})^2 + B^2 = 7E \text{이고}$$

$$A^6 + B^3 = (B^{-1})^3 + B^3$$

$$\begin{aligned}
 &= (B^{-1} + B)\{(B^{-1})^2 - E + B^2\} \\
 &= 3E \cdot (7E - E) \\
 &= 18E \quad (\text{참})
 \end{aligned}$$

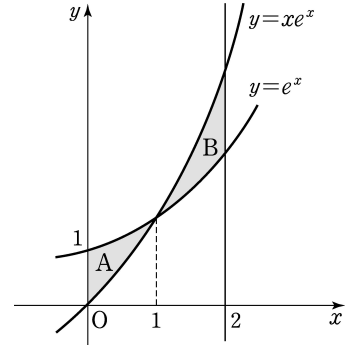
따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

16 두 곡선의 교점을 찾으면

$$xe^x = e^x \text{에서 } (x-1)e^x = 0 \quad \therefore x = 1$$

$$\begin{aligned}
 A \text{의 넓이는 } a &= \int_0^1 (e^x - xe^x) dx = \int_0^1 (1-x)e^x dx \\
 &= [(1-x)e^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx \\
 &= (-1) + e - 1 = e - 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B \text{의 넓이는 } b &= \int_1^2 (xe^x - e^x) dx = \int_1^2 (x-1)e^x dx \\
 &= [(x-1)e^x]_1^2 - \int_1^2 e^x dx \\
 &= e^2 - (e^2 - e) = e \\
 \therefore b - a &= e - (e - 2) = 2
 \end{aligned}$$



17 자연수 n 에 대하여 $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ 이므로

$$nS_{n+1} = (n+2)S_n + (n+1)^3 \text{에서}$$

$$n(S_n + a_{n+1}) = nS_n + 2S_n + (n+1)^3$$

$$\therefore na_{n+1} = 2S_n + (n+1)^3 \quad (n \geq 2) \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

이다. 2 이상의 자연수 n 에 대하여 ㉠의 식에 n 대신 $n-1$ 을 대입하면

$$(n-1)a_n = 2S_{n-1} + n^3 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

이고, ㉠에서 ㉡을 뺀 식으로부터

$$\begin{aligned}
 na_{n+1} - (n-1)a_n &= 2(S_n - S_{n-1}) + (n+1)^3 - n^3 \\
 &= 2a_n + 3n^2 + 3n + 1
 \end{aligned}$$

$$\therefore na_{n+1} = (n+1)a_n + \boxed{3n^2 + 3n + 1} \quad (\text{㉢})$$

를 얻는다. 양변을 $n(n+1)$ 로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{\boxed{3n^2 + 3n + 1}}{n(n+1)} = \frac{a_n}{n} + 3 + \frac{1}{n(n+1)}$$

이다. $b_n = \frac{a_n}{n}$ 이라 하면

$$b_{n+1} = b_n + 3 + \frac{1}{n(n+1)} \quad (\text{㉣}) \quad (n \geq 2)$$

$$\text{이므로 } b_n = b_2 + \sum_{k=2}^{n-1} \left(3 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = b_2 + \boxed{3(n-2) + \frac{1}{2} - \frac{1}{n}} \quad (\text{㉤}) \quad (n \geq 3)$$

이다.

$$\therefore f(n) = 3n^2 + 3n + 1, \quad g(n) = \frac{1}{n(n+1)}, \quad h(n) = 3n - \frac{11}{2} - \frac{1}{n} \text{ 이므로}$$

$$\frac{f(3)}{g(3)h(6)} = \frac{37}{\frac{1}{12} \times \left(18 - \frac{11}{2} - \frac{1}{6}\right)} = \frac{37}{\frac{1}{12} \times \frac{74}{6}} = \frac{37}{\frac{2 \times 37}{72}} = 36$$

18 \neg . $f(x) = 2x \cos x$ 에서 $f'(x) = 2 \cos x - 2x \sin x$

$$f'(a) = 2 \cos a - 2a \sin a = 0$$

$$\therefore \tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\sin a}{a \sin a} = \frac{1}{a} \quad (\text{참})$$

\sqsubset . $f'(x) = 2 \cos x (1 - x \tan x) = 0$ 에서

$$\cos x = 0 \text{ 또는 } \tan x = \frac{1}{x}$$

$$\tan x = \frac{1}{x} \text{의 근을 } a \text{라 하면 } 0 < a < \frac{\pi}{2}$$

증감표를 그려보면

	0		a		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	2	+	0	-	0	-	-2
$f(x)$	0	\nearrow	$2a \cos a$	\searrow	0	\searrow	-2π

$\therefore f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극댓값을 가진다.

구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 $y = \frac{1}{x}$ 은 감소함수,

$y = \tan x$ 는 증가함수이므로

$$g(x) = \tan x - \frac{1}{x} \text{은 증가함수 } g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{4}{\pi} < 0,$$

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - \frac{3}{\pi} > 0 \text{이므로}$$

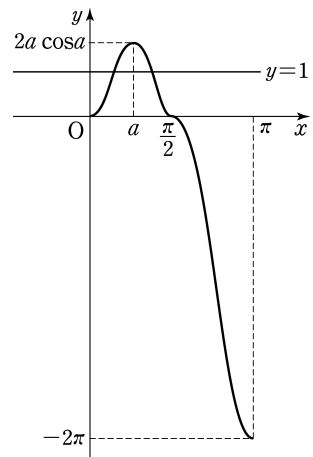
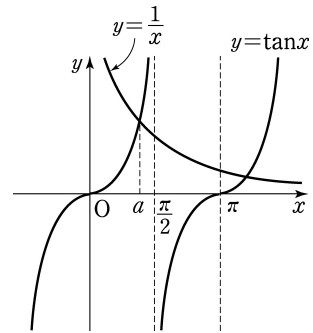
$$\text{중간값 정리에 의해 } \frac{\pi}{4} < a < \frac{\pi}{3} \quad \therefore (\text{참})$$

$$\sqsupset. f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{1}{2} > 1 \text{이므로 } f(a) > 1$$

$$\therefore \text{구간 } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{에서 } f(x) = 1 \text{은}$$

서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

따라서, \neg , \sqsubset , \sqsupset 모두 옳다.



19 $y = mx + 2$ 와 $y = x^3 - 3x^2 + 1$ 의 교점의 개수는

$$x^3 - 3x^2 - mx - 1 = 0,$$

$$x^2 - 3x - \frac{1}{x} = m \text{의 실근의 개수와 같다 } (\because x \neq 0)$$

$g(x) = x^2 - 3x - \frac{1}{x}$ 으로 놓고 미분하면

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x - 3 + \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{2x^3 - 3x + 1}{x^2} \\ &= \frac{(x-1)^2(2x+1)}{x^2} \end{aligned}$$

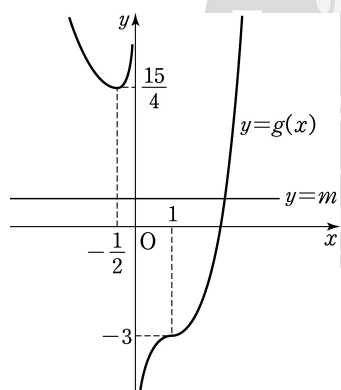
증감표를 그려보면

x		$-\frac{1}{2}$		(0)		1	
$g(x)$	-		+		+	+	+
$g'(x)$	\searrow	$\frac{15}{4}$	\nearrow		\nearrow	-3	\nearrow

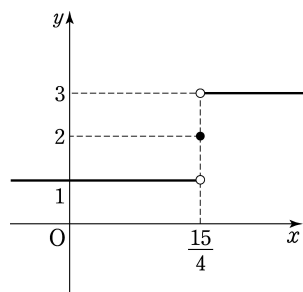
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -0} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} g(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

$y = g(x)$, $y = m$ 의 그래프를 그리면



$f(m)$ 은 $y = g(x)$ 와 $y = m$ 의 교점의 개수이므로



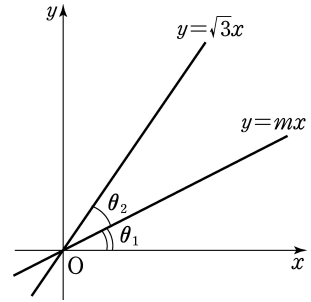
따라서, a 의 최댓값은 $\frac{15}{4}$ 이다.

20 $\tan(\theta_1 + \theta_2) = \sqrt{3}$

$$\therefore \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{3}$$

$\tan \theta_1 = m$ 이므로

$$\begin{aligned} \therefore 3\sin\theta_1 + 4\sin\theta_2 &= 3\sin\theta + 4\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) \\ &= 3\sin\theta_1 + 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta_1 - \frac{1}{2}\sin\theta_1\right) \\ &= \sin\theta_1 + 2\sqrt{3}\cos\theta_1 \\ &= \sqrt{13}\sin(\theta_1 + \alpha) \left(\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{13}}, \sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} \right) \end{aligned}$$



최대가 되는 $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$ 이므로

$$\begin{aligned} m = \tan\theta_1 &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ &= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

21 $\triangle ABC$ 의 법선단위벡터를 \vec{h} 라 하면 $\vec{h} = (a, b, c)$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

yz 평면의 법선단위벡터는 $\vec{h} = (1, 0, 0)$ 이다.

$$\therefore \cos\theta = |a| = \frac{1}{2}$$

$$\therefore b^2 + c^2 = \frac{3}{4}, \quad a = \pm \frac{1}{2}$$

$\triangle ABC$ 와 평면 $x - 2y + 2z = 1$ 사이의 예각을 α 이라 하면

$$\cos\alpha = \frac{1 \cdot a - 2b + 2c}{3 \cdot 1} = \frac{1}{3}(a - 2(b - c)) \quad \dots \textcircled{1}$$

$-2b + 2c = k$ 라 하면 $c = b + \frac{k}{2}$

이것을 $b^2 + c^2 - \frac{3}{4} = 0$ 에 대입하면

$$2b^2 + kb + \frac{k^2}{4} - \frac{3}{4} = 0$$

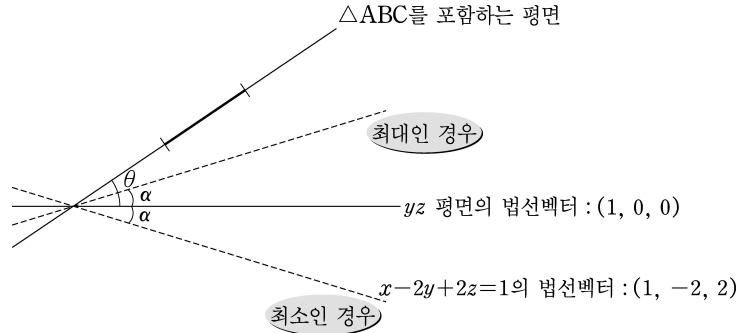
$$D = k^2 - 8\left(\frac{k^2}{4} - \frac{3}{4}\right) = -k^2 + 6 \geq 0$$

$$\therefore -\sqrt{6} \leq k \leq \sqrt{6}$$

$$|\cos\alpha| \leq \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{6}}{3} = \frac{1 + 2\sqrt{6}}{6}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{3}\right) = 6|\cos\alpha| \leq 1 + 2\sqrt{6}$$

[다른 풀이 1]



yz 평면과 $x-2y+2z$ 가 이루는 각을 α 이라 하면,

$$\cos \alpha = \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{최대값은 } 6 \cdot (\theta - \alpha) &= 6 \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \\ &= 6 \left\{ \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha \right\} = 6 \left(\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \\ &= 1 + 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

[다른 풀이 2]

㉠ 이후로 코시-슈바르츠 부등식에서 $(b^2 + c^2)(1^2 + (-1)^2) \geq (b - c)^2$

$$\therefore (b - c)^2 \leq \frac{3}{2}$$

$$\therefore \cos \alpha \leq \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2} + 2 \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \right) \right\} = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\therefore 6 \cos \alpha \text{의 최대값은 } 6 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{6}}{3} \right) = 1 + 2\sqrt{6}$$

$$22 \quad {}_3H_r = {}_{r+2}C_r = {}_{r+2}C_2 = {}_rC_2$$

$$\therefore r = 5$$

$${}_5H_r = {}_5H_5 = {}_9C_5 = {}_9C_4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$$

$$23 \quad 3 \cos 2x + 17 \cos x = 0$$

$$3(2 \cos^2 x - 1) + 17 \cos x = 0$$

$\cos x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)로 치환하면

$$6t^2 + 17t - 3 = 0$$

$$(t + 3)(6t - 1) = 0$$

$$\therefore t = \cos x = \frac{1}{6} \quad (\because -1 \leq t \leq 1)$$

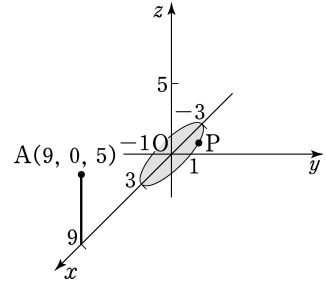
$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1 = 36 - 1 = 35$$

- 24 점 P의 좌표를 $(3\cos\theta, \sin\theta, 0)$ 이라 두면

$$\begin{aligned}\overline{AP} &= \sqrt{(9-3\cos\theta)^2 + \sin^2\theta + 5^2} \\ &= \sqrt{81 - 54\cos\theta + 9\cos^2\theta + (1 - \cos^2\theta) + 25} \\ &= \sqrt{107 - 54\cos\theta + 8\cos^2\theta} \\ &= \sqrt{8\left\{\cos^2\theta - \frac{54}{8}\cos\theta + \left(\frac{27}{8}\right)^2\right\} - \frac{27}{8^2} + 107} \\ &= \sqrt{8\left(\cos\theta - \frac{27}{8}\right)^2 + \frac{127}{8}}\end{aligned}$$

$\cos\theta = -1$ 일 때 최대가 되므로

$$\overline{AP} \leq \sqrt{107 + 54 + 8} = \sqrt{169} = 13$$



- 25 $a, a+b, 2a-b$ 가 등차수열이므로

$$2(a+b) = 3a-b \quad \therefore a = 3b$$

1, $a-1, 3b-1$ 이 등비수열이므로

$$(a-1)^2 = 3b+1, (a-1)^2 = a+1, a^2 - 3a = 0$$

$$\therefore a = 0 \text{ 또는 } a = 3$$

공비가 양수이므로 $a = 3, b = 1$

$$\therefore a^2 + b^2 = 3^2 + 1^2 = 10$$

- 26 포물선의 초점을 F라 하면

$$y^2 = 4 \cdot \frac{n}{4} \cdot x \text{에서 } F\left(\frac{n}{4}, 0\right)$$

$$\text{접선 } l \text{의 방정식은 } ny = \frac{n}{2}(x+n)$$

$$\therefore l : 2y = x + n$$

$$d = \frac{\left|0 - \frac{n}{4} - n\right|}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{5}{4}n}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{4}n \geq \sqrt{40}$$

$$\therefore n \geq \frac{4\sqrt{40}}{\sqrt{5}} = 8\sqrt{2} = \sqrt{128} = 11. \dots$$

따라서, n 의 최솟값은 12이다.

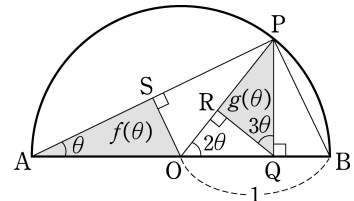
- 27 $\triangle AOS$ 에서

$$\overline{AS} = \cos\theta, \overline{OS} = \sin\theta$$

$$\therefore f(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta = \frac{1}{4}\sin 2\theta \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\triangle OPQ \text{에서 } \angle POQ = 2\theta \text{이므로 } \overline{PQ} = \sin 2\theta$$

$$\triangle PQR \text{에서 } \overline{PR} = \sin^2 2\theta, \overline{QR} = \sin 2\theta \cdot \cos 2\theta$$



$$\therefore g(\theta) = \frac{1}{2} \sin^3 2\theta \cdot \cos 2\theta \cdots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡에서

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\theta^2 f(\theta)}{g(\theta)} &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{4} \cdot \theta^2 \cdot \sin 2\theta}{\frac{1}{2} \cdot \sin^3 2\theta \cdot \cos 2\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta^2}{\sin^2 2\theta} \cdot \frac{1}{\cos 2\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{(2\theta)^2}{\sin^2 2\theta} \cdot \frac{1}{\cos 2\theta} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\therefore p^2 + q^2 = 64 + 1 = 65$$

28 $F(g(x)) = \frac{1}{2}F(x)$ 의 양변을 미분하면

$$f(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2}f(x)$$

$x = 2$ 대입하면

$$f(g(2)) \cdot g'(2) = \frac{1}{2}f(2) = 4 \cdots \textcircled{㉠}$$

이제 $g(2)$ 를 구하면 된다.

$$F(x) = \int_0^x (3x^2 - 6x + 8)dx = x^3 - 3x^2 + 8x$$

$$F(g(2)) = \frac{1}{2}F(2) = 6 \text{에서}$$

$g(2) = t$ 라 하면

$$t^3 - 3t^2 + 8t - 6 = 0, (t-1)(t^2 - 2t + 6) = 0$$

$$\therefore t = 1$$

이제 ㉠ 식에서

$$f(1) = 5, f(2) = 8 \text{이므로 } 5p = 4, p = \frac{4}{5}$$

$$\therefore 30p = 24$$

29 조건 (나)에서 구와 원기둥의 접점 F,

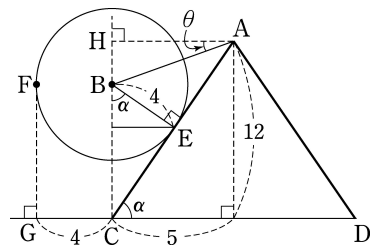
원뿔과 원기둥의 접점 D, A, B는 한 평면 위에 있다.

또, $2 \times 7 - 2 \times 5 = 4$ 에서, B에서 α 에 내린

수선의 발은 원기둥의 밑면 원주 위에 있다.

A, B, D를 지나는 평면으로 자른 단면을 그려보면,

$$\cos \alpha = \frac{5}{13} \text{이므로 } \overline{BC} = \frac{4}{\cos \alpha} = \frac{52}{5}$$



$$\begin{aligned}\therefore \tan \theta &= \frac{\overline{BH}}{\overline{AH}} \\ &= \frac{12 - \frac{52}{5}}{5} \\ &= \frac{\frac{8}{5}}{5} = \frac{8}{25}\end{aligned}$$

$$\therefore 100 \tan \theta = 32$$

30 $f(x) = a^{x+1} - b^x$ 라 하자.

$f(x) = b^x \left\{ a \left(\frac{a}{b} \right)^x - 1 \right\}$ 이므로, $a \geq b$ 이면 $x \geq 1$ 에서 $f(x)$ 는 증가함수

(i) $a \geq b$ 일 때,

$x \geq 1$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(1)$ 이고

$$f(1) = a^2 - b \geq a^2 - a > 0 \text{ 이므로}$$

$$\therefore a^2 - b \leq 10$$

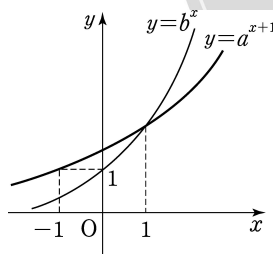
가능한 경우는 $a = 2$ 일 때 $b = 2$

$a = 3$ 일 때 $b = 2, 3$

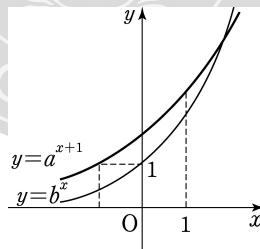
$a \geq 4$ 이면 $a^2 - b \geq a^2 - a \geq 12$

가능한 경우는 $(2, 2), (3, 2), (3, 3)$ 의 3가지

(ii) $a < b$ 일 때



[그림 1]



[그림 2]

$f(x) = 0$ 의 근을 α 라 하자.

$\alpha < 1$ 이면 [그림 1]에서 $|f(x)|$ 의 최솟값은 $f(1)$

$\alpha \geq 1$ 이면 [그림 2]에서 $|f(x)|$ 의 최솟값은 0

$\therefore f(1) < 0$ 이면 $-10 \leq f(1) < 0$ 이어야 하고,

$f(1) \geq 0$ 이면 항상 성립한다.

$\therefore f(1) \geq -10$ 이면 항상 성립한다.

그런데, $f(1) = a^2 - b \geq 2^2 - 10 \geq -10$ 이므로

$\therefore a < b$ 이면 항상 성립한다.

$2 \leq a < b \leq 10$ 에서 (a, b) 의 순서쌍은 ${}_9C_2 = 36$ (개)

따라서, (i), (ii)에서, 구하는 순서쌍은 $3 + 36 = 39$ (개)이다.