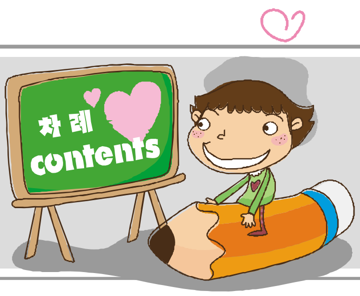
부산교육 2012-126

2012학년도 대학별

수리논술고사 분석

수리논술나침반 Ⅳ

부산광역시교육청
BUSAN METROPOLITAN CITY OFFICE OF EDUCATION



차　　례

발 간 사

21세기 지식정보화 시대는 많은 정보를 가지고 있는 양적(量的)인 인재보다 자신의 정보를 상황에 맞게 조직하고 현실에 적용하는 능력을 가진 질적(質的)인 인재를 필요로 합니다.

이러한 시대적 흐름에 따라 대학에서도 논술고사를 통해 다양한 문제 상황을 제시하고, 학생 스스로 자신이 가지고 있는 정보를 어떻게 논리적으로 조직하며 어떤 과정을 통해 이를 문제 해결에 활용하는지를 평가하고 있습니다.

이런 관점에서 볼 때, 자연계열의 입시 화두인 수리논술 또한 수학적인 개념이나 원리를 활용하여 문제 상황을 논리적으로 해결해가는 능력을 묻는 시험이라고 생각합니다.

우리교육청에서는 이러한 논술고사의 취지를 살리고 학생들의 논리적 표현력과 문제 해결력을 신장하기 위해 논술지원단 운영과 논술캠프 개최, 논술교재 발간 등의 사업을 펼쳐왔습니다. 그 중에서도 특히 수학교육강화프로그램의 일환으로, 대학 입시에서 매우 큰 비중을 차지하고 있는 수리논술 지도에 많은 지원을 해왔습니다.

예로부터 우리들은 길을 잃었을 때 나침반을 사용하여 바른 방향을 찾아가곤 하였습니다. 벌써 네 해째 발간하는『수리논술 나침반 Ⅳ』역시, 수리논술이라는 망망대해에서 우리 학생들을 올바른 항구로 이끌어주는 방향키이자 길잡이가 되었으면 합니다.

끝으로 바쁘신 중에도 자료 제작을 위해 애쓰신 우리교육청 논술교육지원단과 수학 나침반 동아리 선생님들께 진심으로 감사드립니다.

2012. 5. 21.

부산광역시교육감 **임 혜 경**

1 경희대학교 모의

제 시 문 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

[가] 수학적 귀납법은 어떤 주장이 모든 자연수에 대해 성립함을 증명하기 위해 사용되는 방법이다. 우선 첫번째 명제가 참임을 증명하고, 그 다음에는 명제들 중에서 어떤 하나가 참이면 언제나 그 다음 명제도 참임을 증명하는 방법으로 이루어진다. 수학적 귀납법은 도미노 게임에 비유될 수 있다. 잘 배열된 막대들은 다음 두 가지 사실을 만족하면 모두 무너뜨릴 수 있다. 첫째, 처음의 막대가 넘어지고, 둘째, 한 막대가 넘어지면 다음의 막대도 반드시 넘어진다.

[나] 뉴턴(Newton)과 라이프니쯔(Leibniz)가 독립적으로 체계화한 미분은 현대 과학 기술 발달의 중요한 기틀 중 하나이다. 미분의 과학과 공학에서의 활용에는 함수를 한 번 미분한 도함수 $f'(x)$ 뿐만 아니라 두 번 이상의 미분, 즉 고차도함수도 필요하다. 도함수의 도함수인 $f''(x)=(f'(x))'$를 이계도함수라 부르고, 이계도함수의 도함수 $f'''(x)=(f''(x))'$라 $f^{(3)}(x)$라 표기한다. 이와 같은 방법으로 $f^{(n)}(x)$를 정의할 수 있고 이것을 함수 $f(x)$의 n계 도함수라 한다. 미분을 정의하는데 극한을 사용하지만, 미분은 로피탈(L'Hospital) 정리를 이용하면 극한을 구하는데 도움을 줄 수 있다. 로피탈(L'Hospital) 정리는 $\dfrac{0}{0}$ 또는 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 형의 부정형을 갖는 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 모양의 함수의 극한을 구할 때 유용하며, 구체적으로, "a의 근방에서 f와 g가 미분가능하고 $g'(a)\neq 0$일 때, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ 이거나, 또는 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$이고, 극한값 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 이 존재하면, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 이 성립한다." 는 것이다. 로피탈이 1696년에 익명으로 출판한 책에는 "$\dfrac{0}{0}$ 의 법칙" 으로 이 정리가 소개되는데, 이 정리는 요한 베르누이에 의하여 발견되었다.

논제 Ⅰ 제시문 〔가〕와 〔나〕를 참조하여 다음 질문에 답하시오.

정의역의 구간에 따라 다양한 함숫값을 가지는 미분가능한 함수를 구성하는 것은 매우 흥미롭고 특히 이와 같은 함수를 이용하여 주어진 함수보다 미분가능한 범위가 확장된 새로운 함수를 생각할 수 있다는 사실이 알려져 있다. 이와 관련하여 다음과 같이 주어진 함수 $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ 을 생각해 보자(단, $\mathbb{R}$는 실수 전체의 집합이다).

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ e^{-\frac{1}{x}} & x>0\end{cases}$$

(1) 점 $x=0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 미분가능성을 미분계수의 정의를 이용하여 조사하고, 그 근거를 서술하시오.

(2) 수학적 귀납법을 이용하여 함수 $f(x)$ 의 n 계 도함수 $f^{(n)}(x)$ 의 $x=0$ 에서의 값을 확인하고, 그 근거를 서술하시오.

(3) 위에서 정의한 함수 $f(x)$ 를 이용하여 새로운 함수 $h:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ 를 $h(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}$ 와 같이 정의할 때, 이 함수 $h(x)$ 는 $\mathbb{R}$ 에서 미분가능하고, $x\in\mathbb{R}$ 에서는 $0\le h(x)\le 1$ 이며, $x\le 0$ 에서는 $h(x)=0$ 이고, $x\ge 1$ 에서는 $h(x)=1$ 이 됨을 확인하고 그 근거를 서술하시오.

(4) 위에서 정의한 함수 $h(x)$ 를 이용하여 새로운 함수 $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ 를 $g(x)=h\left(\dfrac{x+a}{a-b}\right)h\left(\dfrac{-x+a}{a-b}\right)$ 와 같이 정의할 때 (단, $a>b>0$), 이 함수 $g(x)$ 의 미분가능성을 확인하고 그 근거를 서술하시오. 그리고 $g(x)$ 의 함숫값이 0 이 되는 구간과 1 이 되는 구간에 대하여 조사하시오. 그리고 함수 $g(x)$ 의 그래프를 간단히 보이시오.

제시문분석

1. 제시문

(가) 수학적 귀납법의 원리에 대해 설명하고 있다.

(나) 함수 $f(x)$의 n계 도함수의 정의와 로피탈(L'Hospital) 정리를 제시하였다. 또, 미분을 극한을 이용해 정의한 뒤 극한을 구하는데 로피탈(L'Hospital) 정리를 이용하면 유용함을 설명하고 있다.

논제분석

논제 Ⅰ-1

구간에 따라 제시된 함수의 미분가능성을 미분계수의 정의를 이용해 설명하도록 하는 문항이다.

논제 Ⅰ-2

[논제 Ⅰ-1]을 이용해 $f^{(n)}(0)$ 값을 추측하고 이를 수학적귀납법을 이용하여 증명하는 문제이다. 제시문의 n계 도함수의 정의와 로피탈(L'Hospital) 정리를 이용하여 수학적 귀납법의 형식에 맞도록 서술하도록 한다.

논제 Ⅰ-3

주어진 함수를 이용하여 정의된 새로운 함수의 미분가능성과 구간별 함숫값을 구하여 함수의 특징을 파악하도록 하는 문항이다.

논제 Ⅰ-4

[논제 Ⅰ-3]에서 정의된 함수를 이용하여 새로운 함수를 다시 정의하고 이 함수의 미분가능성과 구간별 함숫값을 구하고 그래프를 그리도록 요구하고 있다.

배경지식쌓기

1. 미분계수의 정의

■ 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는

$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

(곡선상의 점$(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기)

■ 기호 : $f'(a)$, $y'_{x=a}$, $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$

2. 로피탈(L'Hospital) 정리

■ 점 a를 포함하는 어떤 구간에서 정의된 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$

이고 구간의 모든 점 x에서 $g(x)\neq0$일 때, 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $x=a$에서 $\frac{0}{0}$인 부정형이라 하고,

$\lim_{x\to a}f(x)=\infty$(또는 $-\infty$)이고, $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$(또는$-\infty$)일 때, 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $x=a$에서

$\frac{\infty}{\infty}$인 부정형이라고 한다.

또 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$(또는 $-\infty$)이고, $\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$(또는$-\infty$)일 때, 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $x=\infty$에서

$\frac{\infty}{\infty}$인 부정형이라고 한다.

■ 부정형 $\frac{0}{0}$에 대한 로피탈의 법칙

점 a를 포함하는 어떤 구간에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(a)=g(a)=0$ 이고,

극한값 $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$가 존재하면 극한값 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$가 존재하고, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 이다.

■ 부정형$\frac{\infty}{\infty}$에 대한 로피탈의 법칙

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

1. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ 이고, 극한값 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 가 존재하면 극한값 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 가 존재하고, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 이다.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\pm\infty$ 이고, 극한값 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 가 존재하면 극한값 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 가 존재하고, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 이다.

풀어보기

1. 함수 $f(x)$가 $f(x)=\begin{cases} 1-x & (x<0) \\ x^2-1 & (0\le x<1) \\ \dfrac{2}{3}(x^3-1) & (x\ge 1) \end{cases}$

일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (2007 수능)

보 기

ㄱ. $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.
ㄴ. $|f(x)|$는 $x=0$에서 미분가능하다.
ㄷ. $x^k f(x)$가 $x=0$에서 미분가능 하도록 하는 최소의 자연수 k는 2이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를

$$S=\{a \mid \text{함수 } |f(x)-t| \text{가 } x=a \text{에서 미분가능하지 않다.}\}$$

라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오.

(2010 수능)

3. 함수 $f(x)=(x+1)^{\frac{3}{2}}$과 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를 $h(x)=(g \circ f)(x)$라 하자. $h'(x)=15$일 때, $g'(1)$의 값을 구하시오.

(2011 6월 평가원)

읽기자료

미분계수의 활용[1]

$y=f(x)$ 에 대하여 도함수 $\frac{dy}{dx}$ 는 x 에 대한 y 의 변화율을 나타낸다. 모든 과학 분야에서 변화율이 다루어진다. 물리학에서 속도, 밀도, 전류, 힘, 열전도율, 온도변화율, 화학에서의 반응률과 압축률, 생물학에서의 성장률, 혈액의 속도변화율, 경제학에서의 한계비용, 한계이익, 지질학에서의 열전도율, 심리학에서의 성취증진율, 사회학에서의 유언비어 확산률 등은 단순한 수학적 개념인 도함수의 특별한 경우이다.

도함수와 같이 하나의 단순한 추상적인 수학의 개념이 여러 과학에서 서로 다른 의미를 가질 수 있다. 따라서 수학적 개념에 대한 여러 성질들이 개발되면, 그것들은 다른 과학의 모든 분야에 응용되어 적용될 수 있게 된다. 이것은 별개의 각 분야에서 특수한 개념들에 대한 성질들을 각각 개발하는 것보다 좀 더 효과적이다.

1. 선형밀도(물리)

막대나 전깃줄이 균일한 경우에 이들의 선형밀도는 일정하며 단위 길이 당 질량 $\left(\rho=\frac{m}{l}\right)$ 으로 정의된다. 여기에서 길이와 질량의 단위는 각각 미터와 킬로그램이다. 그러나 막대가 균일하지 않고, 아래 그림과 같이 왼쪽 끝에서 점 x 까지의 질량이 $m=f(x)$ 로 주어진다고 하자.

이제 $x=x_1$ 과 $x=x_2$ 사이에 놓이는 부분의 질량은 $\Delta m=f(x_2)-f(x_1)$ 이므로, 이 부분에 대한 평균 밀도는 다음과 같다.

$$\text{평균밀도}=\frac{\Delta m}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

이제 $\Delta x\to 0$ (즉, $x_2\to x_1$)일 때, 점점 작아지는 구간에서 평균 밀도를 계산하게 된다. x_1 에서의 선형밀도 ρ 는 $\Delta x\to 0$ 일 때 평균 밀도들의 극한이다. 즉, 선형밀도는 길이에 대한 질량의 변화율이고, 이를 기호로 나타내면

$$\rho=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x}=\frac{dm}{dx}$$

이다. 따라서 이 막대의 선형밀도는 길이에 대한 질량의 도함수이다.

1) James Stewart, 미분적분학(6판), 청문각, 2009.

(예제)

$m = f(x) = \sqrt{x}$ (x 의 단위는 미터, m 의 단위는 킬로그램)라고 하면, $1 \le x \le 1.2$ 에서 막대의 이 부분의 평균밀도는

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(1.2) - f(1)}{1.2 - 1} = \frac{\sqrt{1.2} - 1}{0.2} \fallingdotseq 0.48\,\mathrm{kg/m}$$

이고, $x = 1$에서의 밀도는

$$\rho = \left.\frac{dm}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=1} = 0.50\,\mathrm{kg/m}$$

이다.

2. 반응률 (화학)

A 와 B 는 반응물질이고 C 는 생성물일 때, 반응식

$$A + B \rightarrow C$$

를 생각하자. 반응물질 A 의 농도는 리터당 몰의 수이고, 이것을 $[A]$ 로 나타낸다. 화학반응이 이루어지는 동안 농도는 변하게 되고, 따라서 $[A], [B], [C]$ 는 모두 시간 t 에 대한 함수이다. 시간 구간 $t_1 \le t \le t_2$ 에서 생성물 C 의 평균 반응률은

$$\frac{\Delta[C]}{\Delta t} = \frac{[C](t_2) - [C](t_1)}{t_2 - t_1}$$

이다. 그러나 화학자들은 시간 구간 Δt 가 0 에 가까워짐에 따른 평균 반응률의 극한을 취해 얻어지는 순간반응율에 더욱 관심을 갖는다.

$$\text{반응율} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta[C]}{\Delta t} = \frac{d[C]}{dt}$$

이다.

3. 총비용과 한계비용(경제학)

한 회사가 어떤 상품을 x 단위 생산할 때 소요되는 총 경비를 총 비용이라하고, 이를 일반적으로 $C(x)$ 로 나타낸다. 또, 상품 한 단위를 추가로 생산할 때 필요한 총비용의 증가분을 한계비용(marginal cost)이라고 한다. 생산된 상품의 수가 x_1 에서 x_2 로 증가하면 총비용은

$\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$ 만큼 증가하므로 비용의 평균변화율은

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1}$$

상품 x_i (단위)를 생산할 때의 비용의 순간변화율, 즉 한계 비용은

$$C'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

4. 뉴턴의 방법 (방정식의 실근의 근삿값)[2)]

방정식 $f(x) = 0$ 의 근을 구하는 방법을 생각해보자. 적당한 한 점 x_0 를 정하고 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(x_0, f(x_0))$ 에서의 접선의 방정식을 구한다. 접선의 기울기는 $f'(x_0)$ 이므로 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \cdots ㉠$$

이 접선이 x 축과 만나는 점의 x 좌표는 x_1 이고 $f(x_1) \neq 0$ 이면 x_1 은 다음과 같다.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \cdots ㉡$$

이렇게 해서 얻어진 새로운 x_1 을 가지고 ㉠과 ㉡의 과정을 반복하여 얻어진 값을 x_2 라고 한다. 이러한 과정을 계속 반복하면 근에 수렴하는 수열

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ x_{n+1},\ \cdots$$

을 얻을 수 있고, 이를 통해 근의 근삿값을 구할 수 있다. 이 방법을 뉴턴의 방법이라고 한다. 실제로, 오차 이상의 방정식이나 다항방정식이 아닌 방정식은 근의 공식이 없으므로, 정확한 근을 구하는 대신에 근의 근삿값을 구하여 사용한다.

2) 류희찬 외12인, 미적분과 통계기본, (주)미래엔 컬처그룹, 2010.

예시답안

풀어보기

1. 정답 ③

ㄱ. $x=1$ 에서 두 함수의 함숫값이 $f(1)=0$ 이므로 연속이고

좌미분계수 : $\lim_{x \to 1-0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1-0} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1-0}(x+1)=2$

우미분계수 : $\lim_{x \to 1+0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{2}{3}\lim_{x \to 1+0} \frac{x^3-1}{x-1} = \frac{2}{3}\lim_{x \to 1+0}(x^2+x+1) = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$

$x=1$ 에서 미분계수

$$\therefore\ f'(1)=\lim_{x \to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2$$

따라서 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다. [참]

ㄴ. $x=0$ 에서 두 함수의 함숫값이 $|f(0)|=1$ 이므로 연속이고 $x<0$ 일 때 $f(x)>0$ 이므로 $|f(x)|=f(x)=1-x$ 이다.

좌미분계수 : $\lim_{x \to -0}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0} = \lim_{x \to -0}\frac{(1-x)-1}{x} = -1$

$0<x<1$ 일 때 $f(x)<0$ 이므로 $|f(x)|=-f(x)=1-x^2$

우미분계수 : $\lim_{x \to +0}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0} = \lim_{x \to +0}\frac{(1-x^2)-1}{x} = 0$

따라서 $\lim_{x \to -0}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0} \neq \lim_{x \to +0}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}$ 이므로 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

[거짓]

ㄷ. $g(x)=x^k f(x)$ 라 하면 $g(0)=0$ 이므로 연속이다.

좌미분계수 : $\lim_{x \to -0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \to -0}\frac{x^k(1-x)}{x} = \lim_{x \to -0}x^{k-1}(1-x)$

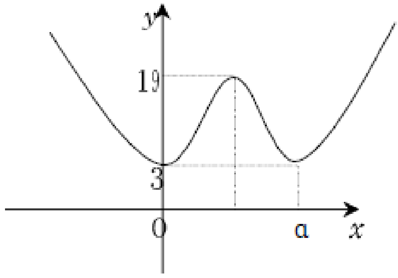
우미분계수 : $\lim_{x \to +0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \to +0}\frac{x^k(x^2-1)}{x} = \lim_{x \to +0}x^{k-1}(x^2-1)$

$\lim_{x \to -0}x^{k-1}(1-x) = \lim_{x \to +0}x^{k-1}(x^2-1)=0$에서 $k \geq 2$이므로

$x^k f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능 하도록 하는 최소의 자연수는 2 이다. [참]

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

2. 정답 147

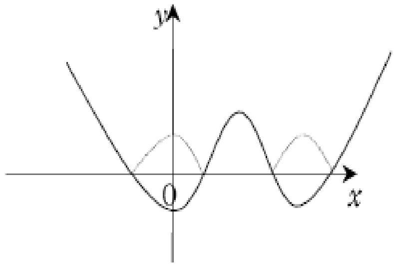


$x \to \pm\infty$ 일 때, $f(x) \to \infty$ 이므로 $|f(x)-t|$가 $t=3$ 에서 처음으로 미분불가능한 점이 생기려면 그림과 같이 $x=0,\ x=a$ 에서 극솟값을 갖고 $f(0)=f(a)$ 이어야 한다.

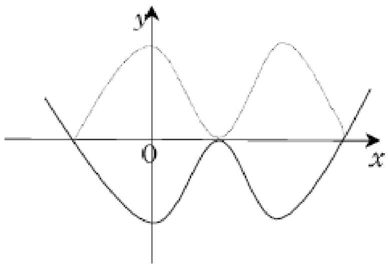
따라서 $f(x)=x^2(x-a)^2+3$ 으로 놓을 수 있다.

$t \le 3$ 일 때 $f(x)-t \ge 0$ 이므로 $|f(x)-t|$는 모든 실수 x 에 대하여 미분가능하다.

$$\therefore\ g(t)=0$$



$3 < t < 19$일 때, $|f(x)-t|$ 는 네 점에서 미분가능하지 않으므로 $g(t)=4$ 이다.



$t \ge 19$ 일 때, $|f(x)-t|$는 두 점에서 미분가능하지 않으므로 $g(t)=2$ 이다. 따라서 $f(x)$ 의 극댓값이 19 이어야 하므로

$f'(x)=2x(x-a)^2+2x^2(x-a)=2x(x-a)(2x-a)=0$

에서 $x=0,\ \dfrac{a}{2},\ a$ 이다.

$\therefore\ f\left(\dfrac{a}{2}\right)=19$ 에서 $a=4$ 이다.

따라서 $f(x)=x^2(x-4)^2+3$ 이므로 $f(-2)=147$ 이다.

3. 정답 10

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$ 이므로 $h'(0)=g'(f(0))f'(0)=g'(1)f'(0)=15$ 이다.

이때, $f'(x)=\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{3}}$ 이므로 $f'(0)=\frac{3}{2}$ 이다. 즉, $g'(1)\times\frac{3}{2}=15$ 이므로 $g'(1)=10$이다.

논제 Ⅰ-1

상수함수와 지수함수는 실수전체집합에서 미분가능하므로 $x\neq 0$ 에서 함수 f 는 미분가능하다. 따라서 $x=0$ 에서 미분가능임을 보이면 된다.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

이므로 $x=0$ 에서 좌미분계수와 우미분계수가 같음을 보이자.

좌미분계수 : $\lim_{x\to -0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to -0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to -0}\frac{0}{x}=0$

우미분계수 : $\lim_{x\to +0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

에서 $\frac{1}{x}=t$ 로 치환하면, $t\to\infty$ 이다.($\because x>0$) 그러므로 로피탈정리에 의해서

$$\lim_{x\to +0}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{t\to\infty}te^{-t}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t}=0$$

좌미분계수와 우미분계수가 같으므로 $x=0$에서 미분가능하고 $f'(0)=0$ 이다.

논제 Ⅰ-2

[논제 Ⅰ-1]로부터 $f'(0)=0$ 이므로 수학적 귀납법을 이용하여 $f^{(n)}(0)=0$ 임을 증명하자.

ⅰ) $n=1$일 때, [논제 Ⅰ-1]로부터 성립한다.

ⅱ) $n=k$일 때, 성립한다고 가정하자.

즉, $f^{(k)}(0)=0$이라 하면 $f^{(k+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(k)}(x)}{x}$ 에서

좌미분계수는 $\lim_{x\to -0}\frac{f^{(k)}(x)}{x}=\lim_{x\to -0}\frac{0}{x}=0$ 이고

우미분계수는 $\lim_{x\to +0}\frac{f^{(k)}(x)}{x}$ 에서 $f^{(k)}(x)$를 알기 위해 $e^{-\frac{1}{x}}$ 을 미분해보면

$$f'(x)=\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)'=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}},$$

$$f''(x)=\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)''=-\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}=(-2x^{-3}+x^{-4})e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\vdots$$

따라서 $f^{(k)}(x)=\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)^{(k)}=P(x^{-1})e^{-\frac{1}{x}}$ 꼴이다. (단, $P(x^{-1})$은 x^{-1}에 관한 다항식이다.)

여기서 $\frac{1}{x}=t$로 치환하면 $x>0$이므로 $t\to\infty$ 이고,

$$\lim_{x\to+0}\frac{f^{(k)}(x)}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{P(x^{-1})e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{P(t)t}{e^t}$$

이다.

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 로피탈의 정리를 반복하여 적용하면 $\lim_{t\to\infty}\frac{0}{e^t}=0$ 이다.

따라서 $f^{(k+1)}(0)=\lim_{x\to-0}\frac{f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}\frac{f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)}{x-0}=0$ 이다.

즉, $n=k+1$ 일 때도 성립한다.

ⅰ), ⅱ)에서 모든 자연수 n 에 대하여 $f^{(n)}(0)=0$ 이다.

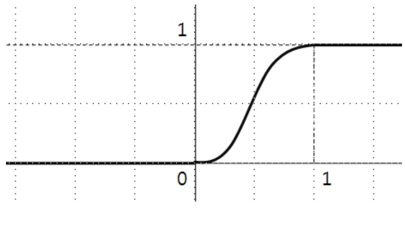
논제 Ⅰ-3

$h(x)=\frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}$ 에서 $f(x)$ 가 미분가능하고 $h(x)$ 의 분모는 $f(x)$ 의 함수정의에 의해 0이 아니므로 $h(x)$ 또한 $\mathbb{R}$ 에서 미분가능하다. 또한 $f(x)\geq 0$ 이므로 $0\leq h(x)\leq 1$ 이다.

ⅰ) $x\geq 1$에서 $f(1-x)=0$ 이므로 $h(x)=\frac{f(x)}{f(x)}=1$

ⅱ) $x\leq 0$에서 $f(x)=0$ 이므로 $h(x)=\frac{0}{f(1-x)}=0$

ⅲ) $0\leq x\leq 1$ 에서 $h'(x)=\frac{f'(x)f(1-x)+f(x)f'(1-x)}{\{f(x)+f(1-x)\}^2}\geq 0$이므로 $h(x)$ 의 그래프는



이다.

논제 Ⅰ-4

$$g(x)=h\left(\frac{x+a}{a-b}\right)h\left(\frac{-x+a}{a-b}\right)\ (\text{단, } a>b>0)$$

$a>b>0$이고 $h(x)$가 미분가능하므로 $g(x)$도 미분가능하다.

ⅰ) $|x|>a$일 때, $h\left(\frac{x+a}{a-b}\right)=0$ 또는 $h\left(\frac{-x+a}{a-b}\right)=0$이므로 $g(x)=0$이다.

ⅱ) $|x|<b$일 때, $h\left(\frac{x+a}{a-b}\right)=1$ 또는 $h\left(\frac{-x+a}{a-b}\right)=1$이므로 $g(x)=1$이다.

$g(x)$를 미분하면 $g'(x)=\frac{1}{a-b}\left\{h'\left(\frac{x+a}{a-b}\right)h\left(\frac{-x+a}{a-b}\right)-h'\left(\frac{-x+a}{a-b}\right)h\left(\frac{x+a}{a-b}\right)\right\}$ 이다.

구간 $(-a,\ -b)$ 에서 $0<\frac{x+a}{a-b}<1$, $\frac{-x+a}{a-b}>1$ 이고,

구간 $(b,\ a)$ 에서는 $\frac{x+a}{a-b}>1$, $0<\frac{-x+a}{a-b}<1$ 임을 알 수 있다.

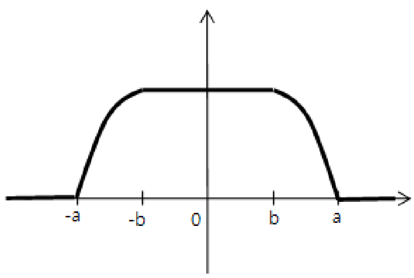
또, $h(x)$ 의 미분값을 조사해보면 구간 $(-\infty,\ 0)$, $(1,\ \infty)$ 에서 $h'(x)=0$ 이고 구간 $(0,1)$ 에서는 $h'(x)>0$ 이다. 따라서 구간 $(-a,\ -b)$ 에서

$$g'(x)=\frac{1}{a-b}h'\left(\frac{x+a}{a-b}\right)h\left(\frac{-x+a}{a-b}\right)\geq 0$$

이고, 구간 $(b,\ a)$ 에서는

$$g'(x)=-\frac{1}{a-b}h\left(\frac{x+a}{a-b}\right)h'\left(\frac{-x+a}{a-b}\right)\leq 0$$

이다. 따라서 g 의 그래프는 그림과 같이 구간 $(-a,\ -b)$ 에서 증가하고 구간 $(b,\ a)$ 에서 감소한다.



2 고려대학교 모의

제 시 문 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프는 그림 1-1과 같다. 이 곡선 위에 서로 다른 두 점 $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$를 잡고, 직선 AB와 평행이고 포물선 $y=f(x)$에 접하는 직선이 두 직선 $x=x_1$, $x=x_2$와 만나는 점을 각각 D, C라 하자.

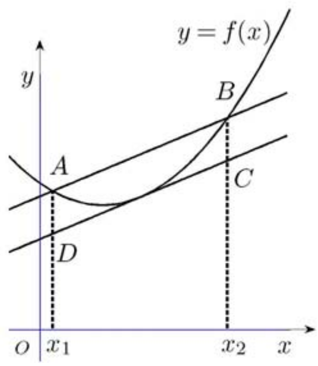


그림 1-1

(나) 다항함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림 1-2와 같다. 직선 $x=r$이 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점을 F, x축과 만나는 점을 G라 하고, 점 F를 지나고 x축에 평행한 직선이 y축과 만나는 점을 E라 하자. 영역 S와 직사각형 $OEFG$를 x축 둘레로 회전시켜서 얻어지는 회전체의 부피를 각각 A_1과 A_2라 하자.

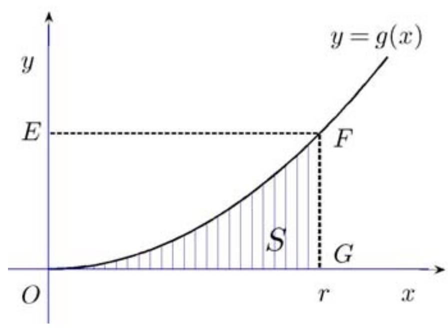


그림 1-2

논제 1

(a) 제시문 (가)의 그림 1-1에서, 직선 AB와 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 영역의 면적과 평행사변형 $ABCD$의 면적의 비를 구하시오.

(b) 제시문 (나)의 그림 1-2에서, 모든 양의 실수 r에 대하여 $5A_1=A_2$를 만족할 때, 다항함수 $y=g(x)$는 어떤 형태인지 설명하시오.

제 시 문 **다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.**

(다) 무한개의 집합 $A_1, A_2, A_3, \cdots$을 생각하자. 어떤 자연수 n에 대하여 $x\in A_n$을 만족하는 x들의 모임을 집합 $A_1, A_2, A_3, \cdots$의 합집합이라 하고 이 집합을 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$과 같이 나타낸다. 즉, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\{x\mid$어떤 자연수 n에 대하여 $x\in A_n\}$이다. 모든 자연수 n에 대하여 $x\in A_n$을 만족하는 x들의 모임을 집합 $A_1, A_2, A_3, \cdots$의 교집합이라 하고 이 집합을 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$과 같이 나타낸다.

즉, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=\{x\mid$모든 자연수 n에 대하여 $x\in A_n\}$이다.

논제 2

어떤 집합 X에 대하여 X의 모든 부분집합들의 집합을 Y라 하자. 집합 X에서 X로의 함수 $f: X \to X$에 대하여 집합 Y에서 Y로의 함수 $F: Y \to Y$를 $F(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ 와 같이 정의하자. 자연수 n에 대하여 B_n을 $B_1 = X$, $B_n = F(B_{n-1})$, $n = 2, 3, \cdots$과 같이 정의하고 $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$이라 하자.

(a) Y의 원소 C_1과 C_2가 $C_1 \subset C_2$를 만족할 때, $F(C_1) \subset F(C_2)$가 성립함을 설명하시오.

(b) Y의 원소 D가 $F(D) = D$를 만족할 때, $D \subset B$가 성립함을 설명하시오.

(c) X가 모든 실수들의 집합이고 $f(x) = -\sin\dfrac{x}{2}$ 일 때, $F(A) = A$를 만족하는 Y의 원소 A를 모두 찾으시오.

제시문분석

1. 제시문 (가), (나)

적분을 이용하여 면적과 회전체의 부피를 정확하게 구할 수 있는 것이 관건이다.

2. 제시문 (다)

각각의 집합을 정의역과 치역으로 가지는 $f(x)$와 $F(x)$가 주어져 있다. 전 문항에서 매우 중요한 역할을 하는 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid$어떤 자연수 n에 대하여 $x \in A_n\}$와 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid$모든 자연수 n에 대하여 $x \in A_n\}$의 정의를 정확하게 이해하는 것이 관건이다.

논제분석

논제 1

실제로 적분을 이용하여 여러 함수의 조건들에서 각각의 면적과 회전체의 부피를 구할 수 있는지 알아봄으로써 적분의 활용 능력을 평가하고자 한다.

논제 2

주어진 집합의 개념을 가지고 관련되는 함수를 정확하게 이해하는지를 평가하기 위한 문항이다. 또한 이어지는 문제들을 해결하는데 도움을 주기 위한 의도를 포함하고 있다.

배경지식쌓기

1. 두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 가 닫힌구간 $[a,\ b]$ 에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$ 와 $x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

2. 회전체의 부피

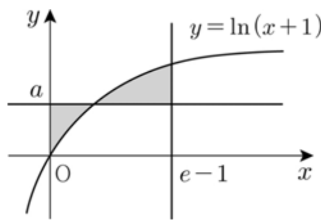
닫힌구간 $[a,\ b]$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 를 x 축을 회전축으로 하여 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피 V 는

$$V=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2\ dx$$

풀어보기

1. 곡선 $y=\ln(x+1)$ 과 두 직선 $x=0$, $y=a$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 곡선 $y=\ln(x+1)$ 과 두 직선 $x=e-1$, $y=a$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 서로 같을 때, 실수 a 의 값은?

(2010 전국연합)



① $\dfrac{1}{e-1}$ ② $\dfrac{2}{e-1}$ ③ $\dfrac{2}{e}$

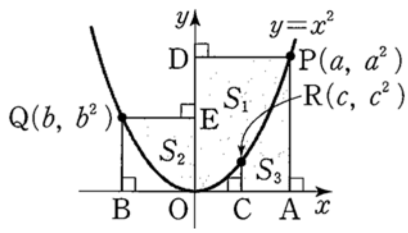
④ $\dfrac{1}{e+1}$ ⑤ $\dfrac{2}{e+1}$

2. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 모든 양수 x 에 대하여

$\int_0^x (x-t)\{f(t)\}^2 dt = 6\int_0^1 x^3 (x-t)^2 dt$ 를 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $x=1$, x 축, y 축으로 둘러싸인 도형을 x 축의 둘레로 회전시켜서 생기는 회전체의 부피를 $a\pi$ 라 할 때, a 의 값을 구하시오.

(2010 평가원)

3. 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 세 점 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$, $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$, $\mathrm{R}(c,\ c^2)$ 에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A, B, C 라 하고 두 점 P, Q 에서 y축에 내린 수선의 발을 각각 D, E 라 하자. 곡선 $y=x^2$ 과 y 축 및 선분 PD 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1, 곡선 $y=x^2$ 과 y축 및 선분 QE 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2, 곡선 $y=x^2$과 x축 및 두 선분 PA, RC 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_3 라고 할 때, $S_1 - S_2 = \frac{4}{3}S_3$ 인 관계가 성립한다. 세 실수 a, b, c 가 이 순서대로 공비가 $r(r<0)$ 인 등비수열을 이룰 때, r^3 의 값은?



(2011 EBS)

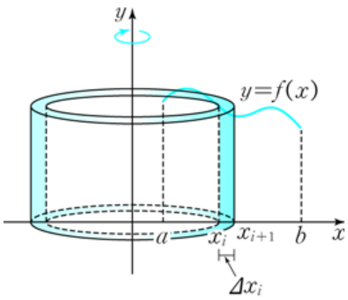
① $-\frac{2}{3}$　　② $-\frac{1}{2}$　　③ $-\frac{1}{3}$

④ $-\frac{1}{4}$　　⑤ $-\frac{1}{5}$

읽기자료

회전체의 부피와 겉넓이 3)

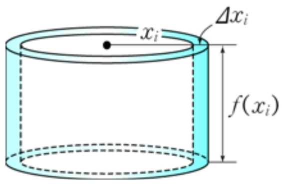
$f(x)$가 연속함수이고 $f(x) \geq 0$일 때, 곡선 $y=f(x)$, x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$ $(a<b)$로 둘러싸인 도형을 y축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피를 구하여 보자.



구간 $[a,\ b]$를 n개로 나누어

$a=x_1<x_2<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_{n+1}=b$라 하고 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$라 하자.

그러면 나누어진 작은 구간 $[x_i,\ x_{i+1}]$과 $y=f(x)$로 만들어진 영역을 y축의 둘레로 회전시켜 생기는 입체는 거의 그림과 같은 캔 모양이다.



캔 모양의 입체의 부피는

$$\pi(x_i+\Delta x_i)^2 f(x_i)-\pi(x_i)^2 f(x_i)=\pi(2x_i+\Delta x_i)\Delta x_i f(x_i)$$

이다. 따라서 회전체의 부피는 근사적으로

$$\sum_{i=1}^{n}\pi(2x_i+\Delta x_i)f(x_i)\Delta x_i$$

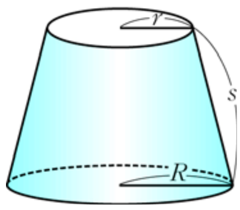
이다. 함수 $y=f(x)$가 연속인 도함수를 가지면, $n\to\infty$일 때 위의 합의 극한이 존재하며 그 극한값은 함수 $2\pi x f(x)$의 구간 $[a,\ b]$에서의 정적분과 같다. 즉,

$$\int_a^b 2\pi x f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\pi(2x_i)f(x_i)\Delta x_i$$

이다.

구간 $[a,\ b]$에서 연속인 도함수를 가지는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 둘레로 회전시켰을 때 생기는 회전체의 겉넓이를 구하여 보자.

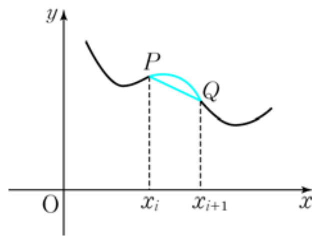
3) 서울대학교 국정도서 편찬위원회, 고급수학, 교육인적자원부, 2007



먼저, 구간 $[a,\ b]$를 n개로 나누어 작은 구간의 끝점을

$$a=x_1<x_2<\ldots<x_i<x_{i+1}<\ldots<x_{n+1}=b$$

라 하고 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$라 하고



위의 그림과 같이 곡선 상에서 점 $\mathrm{P}(x_i, f(x_i)), \mathrm{Q}(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$을 잡자. 곡선의 길이를 구할 때와 같은 방법에 의하여 선분 PQ의 길이는 거의 $\sqrt{1+\{f'(x_i)\}^2}\,\Delta x_i$와 같다. 또, 윗면의 반지름의 길이가 r, 밑면의 반지름의 길이가 R이고 모서리의 길이가 s인 원뿔대의 옆넓이는 $\pi(r+R)s$이다. 따라서 회전체에서 선분 PQ에 의하여 만들어지는 부분의 겉넓이는 거의

$\pi(2x_i+\Delta x_i)\sqrt{1+\{f'(x_i)\}^2}\,\Delta x_i$이다. n을 점점 증가시키고 Δx_i를 모두 0에 수렴시키면, 위의 근삿값들의 합은 극한값

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}2\pi x_i\sqrt{1+\{f'(x_i)\}^2}\,\Delta x_i$$

에 수렴하는 것이 알려져 있다. 이 극한값을 정적분으로 나타내면

$$\int_a^b 2\pi x\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

이다. 이 정적분의 값을 구간 $[a,\ b]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 둘레로 회전시켰을 때 생기는 회전체의 겉넓이라고 한다. 또, 같은 도형을 x축의 둘레로 회전시켰을 때는 원뿔대의 반지름의 길이만 달라지고 나머지는 y축의 둘레로 회전시켰을 때와 똑같다.

따라서 x축의 둘레로 회전시켰을 때 생기는 회전체의 겉넓이는

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

로 정의한다.

예시답안

풀어보기

1. $$\int_0^{e-1}\{\ln(x+1)-a\}dx=0 \quad \therefore\ a=\frac{1}{e-1}$$

2. $$\int_0^x (x-t)\{f(t)\}^2dt=6\int_0^1 x^3(x-t)^2dt \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$(㉠\text{의 좌변})=x\int_0^x\{f(t)\}^2dt-\int_0^x t\{f(t)\}^2dt$$

$$(㉠\text{의 우변})=6\int_0^1(x^5-2x^4t+x^3t^2)dt=6\left[x^5t-x^4t^2+x^3\cdot\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=6\left(x^5-x^4+\frac{1}{3}x^3\right)$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_0^x\{f(t)\}^2dt+x\{f(x)\}^2-x\{f(x)\}^2=6(5x^4-4x^3+x^2)$$

$$\therefore \int_0^x\{f(t)\}^2dt=6(5x^4-4x^3+x^2)$$

따라서 구하는 회전체의 부피 V는

$$V=\pi\int_0^1\{f(t)\}^2dt=6\pi(5-4+1)=12\pi \quad \therefore\ a=12$$

3. $$S_1=a\times a^2-\int_0^a x^2dx=a^3-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a=a^3-\frac{a^3}{3}=\frac{2}{3}a^3$$

$$S_2=(-b)\times b^2-\int_b^0 x^2dx=-b^3-\left[\frac{x^3}{3}\right]_b^0=-b^3+\frac{b^3}{3}=-\frac{2}{3}b^3$$

$$S_3=\int_c^a x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_c^a=\frac{1}{3}(a^3-c^3)$$

$b=ar,\ c=ar^2$이므로

$$S_2=-\frac{2}{3}(ar)^3=-\frac{2}{3}a^3r^3$$

$$S_3=\frac{1}{3}\{a^3-(ar^2)^3\}=\frac{1}{3}a^3(1-r^6)$$

$$S_1-S_2=\frac{4}{3}S_3\text{에서 } \frac{2}{3}a^3+\frac{2}{3}a^3r^3=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}a^3(1-r^6)$$

$$\frac{2}{3}a^3(1+r^3)=\frac{4}{9}a^3(1+r^3)(1-r^3)$$

$$\frac{3}{2}=1-r^3 \quad \therefore\ r^3=-\frac{1}{2}$$

논제 1

(a) 직선 AB와 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 영역의 면적을 S_1라 하면

$$S_1=\int_{x_1}^{x_2}\{-a(x-x_1)(x-x_2)\}dx=\frac{a}{6}(x_2-x_1)^3$$

이다. 직선 CD와 곡선 $y=f(x)$의 교점의 x좌표를 $x=t$라 하면

$$f'(t)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

에서 $t=\dfrac{x_1+x_2}{2}$이다. 평행사변형 $ABCD$의 면적을 S_2라 하면

$$S_2=S_1+\int_{x_1}^{x_2}a(x-t)^2dx$$

이고

$$\int_{x_1}^{x_2}a(x-t)^2dx=\frac{a}{3}\left[(x-t)^2\right]_{x_1}^{x_2}=\frac{a}{3}\left[\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\right]_{x_1}^{x_2}=\frac{a}{12}(x_2-x_1)^3$$

이므로 평행사변형 $ABCD$의 면적 S_2는

$S_2=S_1+\dfrac{1}{2}S_1=\dfrac{3}{2}S_1$

이다. 그러므로 직선 AB와 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 영역의 면적과 평행사변형 $ABCD$의 면적의 비는 $2:3$이다.

(다른 풀이)

평행사변형의 넓이는 다음과 같이 구할 수도 있다.

$h=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$라 두면 평행사변형의 넓이는 $(x_2-x_1)h$ 이다.

$$h=\frac{(ax_1^{\,2}+bx_1+c)+(ax_2^{\,2}+bx_2+c)}{2}-\left\{a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+b\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+c\right\}$$

$$=\frac{a}{4}(x_1^{\,2}-2x_1x_2+x_2^{\,2})=\frac{a}{4}(x_2-x_1)^2$$

이므로 평행사변형의 넓이는 $\dfrac{a}{4}(x_2-x_1)^3$ 이다. 따라서 면적의 비는

$$\frac{a}{6}(x_2-x_1)^3:\frac{a}{4}(x_2-x_1)^3=\frac{1}{6}:\frac{1}{4}=2:3$$

이다.

(b) 영역 S와 직사각형 $OEFG$를 x축 둘레로 회전시켜서 얻어지는 회전체의 부피를 각각 A_1과 A_2라 하면

$$A_1 = \pi \int_0^r g^2(x)dx,\ \ A_2 = \pi r g^2(r)$$

이고 $5A_1 = A_2$에서

$$5\pi \int_0^r g^2(x)dx = \pi r g^2(r)$$

이고 모든 양의 실수 r에 대하여 성립하고 $y=g(r)$는 다항함수이므로 모든 실수 r에 대하여 $y=g(r)$는 미분가능하다. 양변을 r에 대하여 미분하면

$$5g^2(r) = g^2(r) + 2rg(r)g'(r)$$

이고

$$g(r)\{2g(r) - rg'(r)\} = 0$$

이다. 모든 양의 실수 r에 대하여 $g(r)=0$이거나 $g(r)=\frac{1}{2}rg'(r)$이다. $y=g(x)$는 다항함수이므로 $y=g(x)$는

$$g(r) = \frac{1}{2}rg'(r)$$

을 만족한다.

좌변과 우변의 최고차항의 계수를 비교하면 다항식 $g(r)$은 2차 다항식임을 알 수 있고 좌변과 우변의 상수항을 비교하면 다항식 $g(r)$은 1차항의 계수와 상수항이 0인 2차 다항식임을 알 수 있다. 따라서 다항함수 $y=g(x)$는 $g(x)=ax^2$ 꼴의 2차 함수임을 알 수 있다.

논제 2

(a) $F(C_1)$의 임의의 원소 $f(a) \in F(C_1)$가 $F(C_2)$의 원소임을 보이면 충분하다.
$f(a) \in F(C_1)$에서 $a \in C_1 \subset C_2$이므로 $f(a) \in F(C_2)$이다. 따라서 $F(C_1) \subset F(C_2)$이다.

(b) D의 임의의 원소 x가 B의 원소임을 보이면 충분하다. 즉, 임의의 자연수 n에 대하여 D의 임의의 원소 x가 $x \in B_n$임을 증명하면 충분하다.
수학적 귀납법으로 증명하자.
(1) $n=1$일 때 성립함을 증명하자. 즉, $D \subset B_1$임을 증명하자.
$B_1 = X$이고 Y의 원소 D는 X의 부분집합이므로 $D \subset B_1$이다.

(2) $n=k$ $(k\geq 1)$일 때 성립한다고 가정하자. 즉, $D\subset B_k$ 라고 가정하자.

$F(D)$에 속하는 임의의 원소 $f(x)\in F(D)$ $(x\in D)$ 에서 수학적 귀납법의 가정에 의해 $x\in B_k$ 이고 집합 B_{k+1} 는 $B_{k+1}=F(B_k)=\{f(x)\mid x\in B_k\}$ 이므로 $f(x)\in B_{k+1}$ 이다.

즉, $F(D)\subset B_{k+1}$ 이다. 가정에 의해 $F(D)=D$이므로 $D\subset B_{k+1}$ 이다. 따라서 $n=k+1$ 일 때 성립한다. 그러므로 모든 자연수 n에 대하여 $D\subset B_n$ 이므로 $D\subset B$이다.

(c) 위 문제 (b)에서 $A\subset B$이다. 이제 집합 B가 $B=\{0\}$ 임을 증명하도록 하자.

(1) $0\leq x\leq 1$ 일 때, $g(x)=-\sin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}$ 에서 $g'(x)=-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-1\right)\geq 0$ 이고 $g(0)=0$ 이므로 $g(x)\geq 0$ 이다.

(2) $-1\leq x\leq 0$ 일 때, $h(x)=-\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}$ 에서 $h'(x)=-\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\leq 0$ 이고 $h(0)=0$ 이므로 $h(x)\leq 0$ 이다.

(1)과 (2)에 의해

$$-\frac{1}{2}|x|\leq f(x)\leq \frac{1}{2}|x|$$

이다.

$$B_1=\mathbb{R}$$
$$B_2=f(B_1)=[-1,\ 1]$$
$$B_3=f(B_2)=f([-1,\ 1])\subset\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$$
$$\vdots$$
$$B_{n+1}=f(B_n)\subset\left[-\frac{1}{2^{n-1}},\ \frac{1}{2^{n-1}}\right]$$

따라서 $\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{2^{n-1}},\ \frac{1}{2^{n-1}}\right]=\{0\}$ 이다.

그러므로 Y의 원소 A는 $\{0\}$ 뿐이다.

3 고려대학교 수시(오전)

제 시 문 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 두 함수 f와 g는 정의역과 공역이 모두 양의 실수 전체의 집합인 연속함수이다. 함수 f는 정의역의 모든 점에서 양의 미분계수를 갖는다. 그림 1과 같이 임의의 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{F}\,(t,\, f(t))$에서의 접선과 x축이 이루는 예각의 크기는 원점과 점 $\mathrm{G}\,(t,\, g(t))$를 잇는 선분과 y축이 이루는 예각의 크기와 같다.

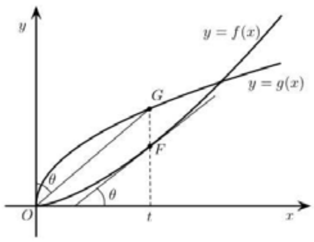


그림 1

(나) 세 양수 $a,\, b,\, c$가 $a<b<c$를 만족할 때 a와 b의 산술평균을 d 라 하고 b와 c의 산술평균을 e 라 하자. 그림 2와 같이 곡선 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 위의 세 점 $\mathrm{A}\left(a,\, \dfrac{1}{2}a^2\right)$, $\mathrm{B}\left(b,\, \dfrac{1}{2}b^2\right)$, $\mathrm{C}\left(c,\, \dfrac{1}{2}c^2\right)$에 대하여 두 직선 AB와 BC가 이루는 예각의 크기를 α라 하고, 직선 $y=1$ 위의 두 점 $\mathrm{D}\,(d,\, 1)$, $\mathrm{E}\,(e,\, 1)$에 대하여 두 직선 OD와 OE가 이루는 예각의 크기를 β라 하자.

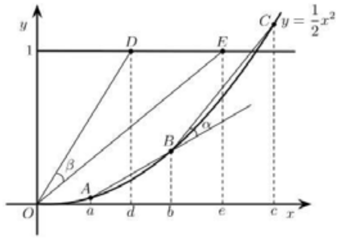


그림 2

(다) 그림 3과 같이 좌표공간에 중심이 $\mathrm{B}(t,\, 0,\, 1)$이고 반지름이 1인 구가 있다. 점 $\mathrm{A}(0,\, 0,\, 3)$에 고정된 점광원에 의해 xy평면에 그림자가 생긴다. 그림자의 가장자리의 한 점과 A를 잇는 직선 위의 한 점을 $\mathrm{P}(x,\, y,\, z)$라고 한다.

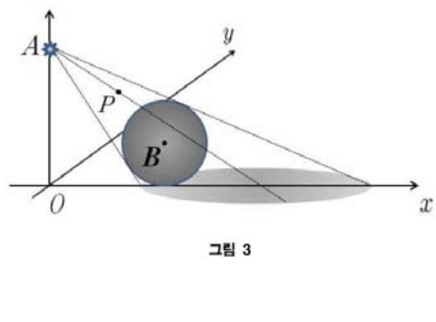


그림 3

논제 1 **위의 제시문 (가)와 (나)를 읽고 다음 질문에 답하시오.**

(a) 제시문 (가)에서의 두 함수 f와 g사이의 관계식을 구하고, 함수 g가 상수함수 $g(x)=1$ 일 때의 함수 f를 구하시오.

(b) 논제 (a)의 결과를 이용하여 제시문 (나)의 α와 β 사이의 관계를 도출하시오.

논제 2 **위의 제시문 (다)를 읽고 다음 질문에 답하시오.**

(a) P와 A가 서로 다른 점일 때, $\sin(\angle \mathrm{PAB})$를 t만의 식으로 나타내시오.

(b) 점 $\mathrm{P}(x, y, z)$의 좌표가 만족하는 방정식을 찾으시오.

(c) 구의 그림자의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t \to \infty}(S(t)-f(t))=0$을 만족하는 다항함수 $f(t)$를 찾으시오.

제시문분석

1. 제시문 (가)

정의역과 공역이 모두 양의 실수 전체의 집합인 두 함수 f, g의 관계를 미분계수와 직선의 기울기를 이용하여 설명하고 있다.

2. 제시문 (나)

제시문 (가)의 조건을 만족하는 두 함수에 대하여 각각의 함수 위에 점들을 이어서 만들어지는 두 각을 제시하고 있다.

3. 제시문 (다)

z축 위의 고정된 한 점광원에 의해 xy평면 상에 생긴 구의 그림자에 대해 설명하고 있다.

논제분석

논제 1

(a) 제시문 (가)의 조건을 만족하는 두 함수 f, g사이의 관계식을 구할 수 있는가?
미분계수와 직선의 기울기의 정의를 이용하여 구하면 된다.

(b) 제시문 (가)의 조건을 만족하는 두 함수에 대하여 각각의 함수 위에 점들을 이어서 만들어지는 두 각의 관계를 구할 수 있는가?
이차함수의 미분계수의 성질과 산술평균의 정의를 적절하게 조합하여 구하면 된다.

논제 2

(a) 점 A와 구의 중심 B를 이은 선분과 접선이 이루는 각을 t만의 식으로 나타낼 수 있는가?
두 점 사이의 거리, 접선의 성질, sin의 정의를 이용하면 된다.

(b) 점 P의 자취의 방정식을 구할 수 있는가?
주어진 상황을 벡터로 나타내고 공간좌표와 내적의 정의를 이용하면 된다.

(c) xy평면 위의 점 P의 자취의 방정식을 구하고 이를 이용한 함수의 극한을 이해할 수 있는가?
xy평면 위의 점들의 성질을 이용하여 자취의 방정식을 구하고, 함수의 극한이 0이 되기 위한 조건에 대해 생각해 보면 된다.

배경지식쌓기

1. 접선의 기울기와 미분계수

(1) 함수 $f(x)$가 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분 계수 $f'(a)$와 같다.

(2) $x=a$에서의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $f'(a)=\tan\theta$이다.

2. 벡터의 내적

(1) 정의

평면 또는 공간에서 $\vec{0}$가 아닌 두 벡터 $\vec{a},\ \vec{b}$가 이루는 각의 크기를 $\theta(0 \le \theta \le \pi)$라고 할 때 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 을 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적이라 하고, $\vec{a}\cdot\vec{b}$로 나타낸다. 즉

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

특히, $\vec{a}=\vec{b}$이면 $\cos\theta=\cos 0=1$이므로 $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$이 성립한다.

(2) 내적의 성분 표시

① 평면벡터의 내적

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2),\ \vec{b}=(b_1,\ b_2)\text{라 하면 } \vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

② 공간벡터의 내적

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3),\ \vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)\text{ 일 때, } \vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

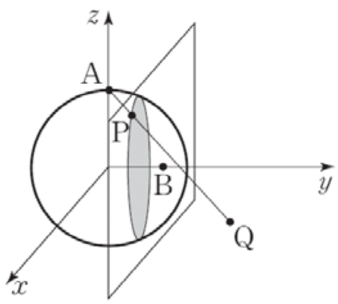
3. 타원의 넓이

타원 $\dfrac{(x-m)^2}{a^2}+\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1$의 넓이는 $ab\pi$이다.

풀어보기

1. 좌표공간에 $x^2+y^2+z^2=1$과 구 위의 점 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$이 있다.

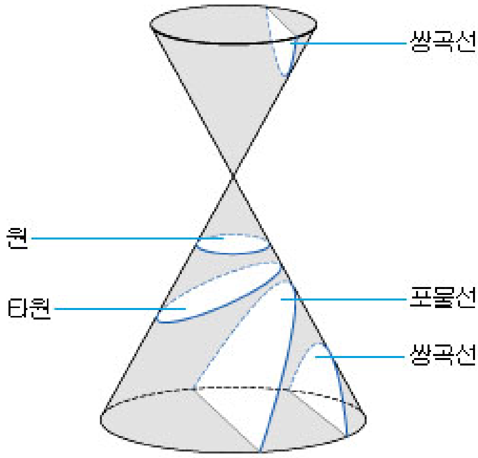
그림과 같이 점 $\mathrm{B}\left(0,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$을 지나고 y축에 수직인 평면으로 구를 잘랐을 때 생기는 원 위에 있는 점을 P라 하고, 직선 AP가 xy평면과 만나는 점을 Q라 하자. 점 P가 원 위의 점일 때 점 Q가 그리는 도형의 넓이를 구하시오.



2. 좌표공간에서 세 벡터 $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$에 대하여 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=2\vec{a}$이고 $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=2,\ |\vec{c}|=5$이다. 두 벡터 $\vec{a},\ \vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.

읽기자료

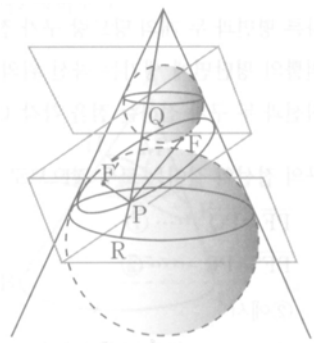
원뿔곡선



원, 포물선, 타원, 쌍곡선은 원뿔에 평면을 다양한 각도로 통과시켰을 때 나타나는 곡선이란 의미에서 원뿔곡선 또는 원추곡선이라고 부른다. 원뿔곡선에 대한 최초의 논문을 발표한 학자는 아폴로니우스(Apollonius, B.C. 262 ~ 200)이다. 유클리드의 제자였던 아폴로니우스는 그의 저서 '원뿔곡선론(Conics)'에서 원, 타원, 포물선, 쌍곡선에 대하여 논하였고, 그는 당시의 알렉산드리아의 수학을 집대성하였다. 이 책은 8권으로 되어 있는데, 그 마지막권은 전해지지 않는다. 아폴로니우스는 하나의 직원뿔을 여러 가지 평면으로 잘라 이 평면이 밑면과 이루는 각이 모선과 밑면이 이루는 각보다 작은가, 같은가, 큰가에 따라서 타원(ellipse), 포물선(parabola), 쌍곡선(hyperbola)의 이름을 붙였다. 타원의 경우 그리스어로 '부족하다'는 뜻의 ellipse를 썼고, 포물선은 '같다'는 뜻의 parabola를 썼으며, 쌍곡선은 '초과한다'는 뜻의 hyperbola를 썼다. 일반적으로 원뿔곡선을 이차곡선이라고 부르는데, 이는 원뿔곡선을 좌표평면 위에 나타내면 이차식이 되기 때문이다. 평면 위에 놓인 공의 그림자에서도 광원의 위치에 따라 다양한 이차곡선을 볼 수 있다.

원뿔곡선에 대한 연구는 그리스시대 이후에 계속 연구되어져 왔다. 1882년 벨기에의 수학자 당드랑(G.P Dandelin, 1794 ~ 1847)은 아래 그림과 같이 원뿔의 모든 모선에 접하면서 절단한 평면에도 접하는 구와 평면의 접점이 원뿔곡선의 초점이 됨을 증명하였다. 이때의 구를 '당드랑의 구'라고 한다. 즉, 당드랑의 구는 '원뿔의 모든 모선에 접하고 단면에도 접하는 구'이다.

1. 타원의 경우

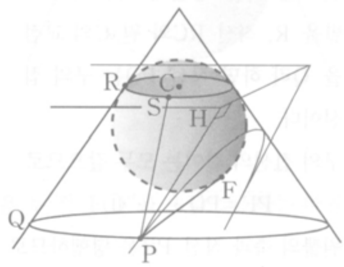


원뿔의 밑면과 이루는 각이 원뿔의 밑면과 모선이 이루는 각의 크기보다 작게 자른 평면과 두 개의 당드랑의 구의 접점을 각각 F, F′이라 하자. 단면 위에 생기는 곡선 위의 임의의 점 P에서 원뿔의 꼭지점을 이은 직선과 두 구가 접하는 점을 각각 Q, R이라 하면

$$\overline{PF}=\overline{PQ},\ \overline{PF'}=\overline{PR}\ (\because \text{구의 접선})$$
$$\therefore\ \overline{PF}+\overline{PF'}=\overline{PQ}+\overline{PR}=\overline{QR}$$

∴ 두 점 F, F′을 초점으로 하는 타원

2. 포물선의 경우

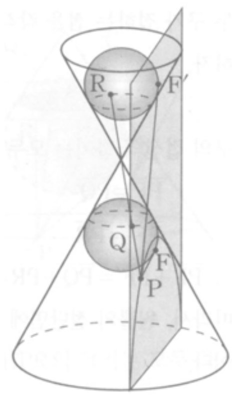


원뿔을 모선과 평행한 단면으로 잘랐을 때 단면 위에 생기는 곡선 위의 임의의 점을 P라 하고 당드랑의 구가 단면에 접하는 점을 F, 원뿔과 구의 교선을 원 C, 점 P에서 원 C를 포함하는 평면과 단면의 교선에 내린 수선의 발을 H라 하자. 또 점 P를 지나고 원뿔의 밑면에 평행한 평면 위의 임의의 점 Q에 대하여 원 C를 포함하는 평면과 점 Q를 지나는 모선과의 교점을 R, 점 P를 지나는 모선과의 교점을 S라 하자. 이 때,

$$\overline{PF}=\overline{PS}\ (\because\ \text{구의 접선}),\ \overline{PS}=\overline{QR}\ (\because\ \text{원뿔대의 모선}),$$
$$\overline{QR}=\overline{PH}\ (\because\ \text{자른 평면과 모선이 평행})$$
$$\therefore\ \overline{PF}=\overline{PH}$$

∴ 점 F를 초점으로 하고 두 평면의 교선을 준선으로 하는 포물선

3. 쌍곡선의 경우



원뿔의 밑면과 이루는 각이 원뿔의 밑면과 모선이 이루는 각의 크기보다 크게 자른 평면과 두 개의 당드랑의 구의 접점을 각각 F, F′이라 하자. 단면 위에 생기는 곡선 위의 임의의 점 P에서 원뿔의 꼭지점을 이은 직선과 두 구가 접하는 점을 각각 Q, R이라 하면

$$\overline{PF}=\overline{PQ},\ \overline{PF'}=\overline{PR}\ (\because\ \text{구의 접선})$$
$$\therefore\ \overline{PF'}-\overline{PF}=\overline{PR}-\overline{PQ}=\overline{QR}$$

∴ 두 점 F, F′을 초점으로 하는 쌍곡선

예시답안

풀어보기

1. 점 P 의 좌표를 $\left(x_0, \frac{1}{2}, z_0\right)$ 라 하면

$$x_0^2+z_0^2=\frac{3}{4} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

직선 AP 의 방정식은

$$\frac{x}{x_0}=2y=\frac{z-1}{z_0-1} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉡에 $z=0$ 을 대입하면 점 $Q(x, y, 0)$에 대하여 $\frac{x}{x_0}=2y=\frac{-1}{z_0-1}$ 이다. 따라서

$$x_0=\frac{x}{2y}, \quad z_0=1-\frac{1}{2y}$$

이고 ㉠에 대입하여 정리하면

$$x^2+(y-2)^2=3$$

그러므로 점 Q 가 그리는 도형은 중심이 $(0, 2)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 원이므로 넓이는 3π 이다.

2. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=2\vec{a}$ 에서 $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ 이므로 $|\vec{c}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta+|\vec{b}|^2$ 에서

$$\cos\theta=\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2}{2|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{9+4-25}{2\cdot 3\cdot 2}=-1$$

논제 1

(a) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{F}(t, f(t))$에서의 접선과 x축이 이루는 예각의 크기를 θ라고 하자. $f'(t)=\tan\theta$, $\dfrac{g(t)}{t}=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{1}{\tan\theta}$이므로 $f'(t)=\dfrac{t}{g(t)}$이다. 따라서 임의의 양수 x에 대하여

$$f'(x)=\frac{x}{g(x)}$$

이다. $g(x)=1$이면 $f'(x)=x$이므로

$$f(x)=\frac{x^2}{2}+C\ \ (C\text{는 상수})$$

이다.

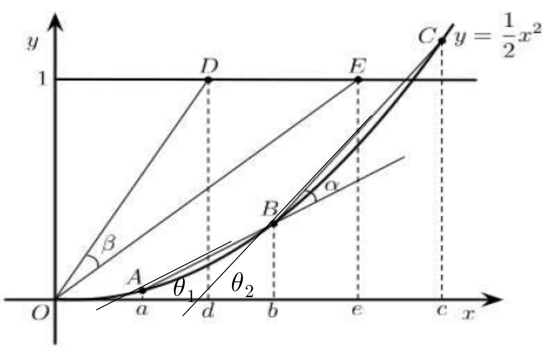
(b) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$, $g(x)=1$이라 하자. 논제 1의 (a)에 의해 두 함수 f, g는 제시문 (가)의 조건을 만족한다. 직선 AB와 x축이 이루는 예각의 크기를 θ_1, 직선 BC와 x축이 이루는 예각의 크기를 θ_2라고 하면

$$\alpha=\theta_2-\theta_1$$

이다. a와 b, b와 c의 산술평균이 각각 d와 e이므로

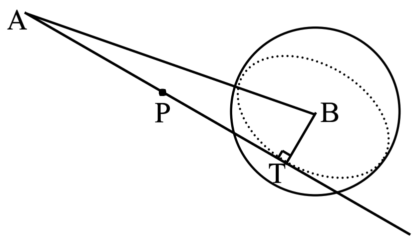
$$\tan\theta_1=\frac{\frac{1}{2}(b^2-a^2)}{b-a}=\frac{b+a}{2}=d,\ \tan\theta_2=\frac{\frac{1}{2}(c^2-b^2)}{c-b}=\frac{c+b}{2}=e$$

이다. 따라서 선분 OD와 y축이 이루는 예각의 크기는 θ_1, 선분 OE와 y축이 이루는 예각의 크기는 θ_2이다. 그러므로 $\beta=\theta_2-\theta_1$이므로 $\alpha=\beta$이다.



논제 2

(a) 직선 AP 와 구의 접점을 T 라고 하면 $\sin(\angle \mathrm{PAB}) = \dfrac{\overline{\mathrm{BT}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+4}}$



(b) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos(\angle \mathrm{PAB})$이므로

$$(t,\ 0,\ -2)\cdot(x,\ y,\ z-3) = \sqrt{t^2+4}\,\sqrt{x^2+y^2+(z-3)^2}\,\frac{\sqrt{t^2+3}}{\sqrt{t^2+4}}$$

이다. 따라서 점 $\mathrm{P}(x, y, z)$의 좌표가 만족하는 방정식은

$$tx-2(z-3) = \sqrt{t^2+3}\,\sqrt{x^2+y^2+(z-3)^2}$$

이다.

(c) 그림자가 xy평면 위에 생기므로 위의 방정식에 $z=0$을 대입하여 정리하면

$$\frac{(x-2t)^2}{t^2+3}+\frac{y^2}{3}=1$$

이다. 따라서 구의 그림자의 넓이 $S(t)=\pi\sqrt{3t^2+9}$이다.

$$\lim_{t\to\infty}(S(t)-f(t)) = \lim_{t\to\infty}(\pi\sqrt{3t^2+9}-f(t)) = \lim_{t\to\infty}\frac{3\pi^2t^2+9\pi^2-\{f(t)\}^2}{\pi\sqrt{3t^2+9}+f(t)} = 0$$

을 만족하기 위해서는 분모의 최고차항의 차수가 분자의 최고차항의 차수보다 커야하므로 $f(t)$는 일차함수이다. 이때 분모가 일차식이므로 분자는 상수가 되어야 한다. 따라서 $f(t)=\sqrt{3}\pi t$이다.

4 고려대학교 수시(오후)

제시문 1 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$은 다음의 식을 만족한다.

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_1 \cdot a_n + b_1 \cdot b_n \\ b_{n+1} = a_1 \cdot b_n + b_1 \cdot a_n \end{cases}$$

논제 1 (필수)

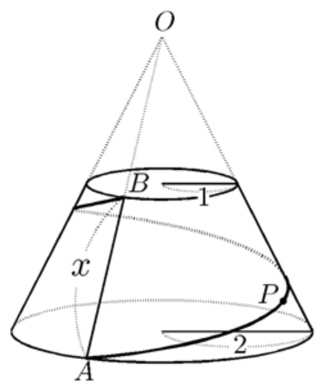
위의 제시문 (가)를 읽고 다음 질문에 답하시오.

(1) $a_n^2 - b_n^2$을 a_1과 b_1을 이용하여 나타내시오.

(2) 2×2 행렬 $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$에 대하여 A_1, A_n, A_{n+1}의 관계식을 구하고 이를 이용하여 A_m, A_n, A_{m+n}의 관계식을 구하시오. (단, m, n은 자연수)

제 시 문 2 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(나) 직원뿔의 꼭짓점 O에서 밑면의 둘레 위의 한 점 A를 잇는 모선의 중점을 B라 하자. 그림과 같이 B를 지나고 밑면과 평행한 평면으로 원뿔을 잘라 윗면의 반지름이 1, 밑면의 반지름이 2, 선분 AB의 길이가 x인 직원뿔대를 얻었다. 한 점 P가 점 A에서 출발하여 직원뿔대의 옆면을 한 바퀴 돌아 점 B에 도달할 때, 그 경로가 최단거리를 가지게 되는 경우를 생각해 보자.
(단, 경로는 윗면의 경계 또는 밑면의 경계의 일부를 포함할 수 있다.)



논제 2 (필수)

위의 제시문 (나)를 읽고 다음 질문에 답하시오.

(1) $x=2$일 때 경로의 최단거리를 구하시오.

(2) 경로의 최단거리를 x의 함수 $f(x)$로 나타내시오.

(3) 논제 2-(2)에서 구한 함수 $f(x)$에서 $x=6$에서의 연속성에 대하여 논하시오.

제시문분석

1. 제시문

두 수열의 점화식을 제시하고 있다. 점화식으로 표현된 수열을 행렬 사이의 관계로 나타낼 수 있는 것이 중요하다.

2. 제시문

직원뿔대에서 최단거리를 묻는 문제이다. 그림과 부연설명을 통해 논제에서 최단거리의 정확한 내용을 이해할 수 있어야 한다. 또한 직원뿔대의 전개도에서 최단거리를 유추할 수 있어야 한다.

논제분석

논제 1-1

두 수열의 점화식과 인수분해 공식을 이용하여 두 수열의 일반항 사이의 관계를 묻는 문제이다.

논제 1-2

주어진 점화식을 이차 정사각행렬들 사이의 관계식으로 나타내고 이를 이용하여 좀 더 일반적인 경우의 관계식을 유추하고 논리적으로 정확하게 설명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

논제 2-1

경로가 최단거리를 가지게 되는 특수한 경우 ($x=2$)를 생각해 봄으로써 주어진 문제에 구체적으로 접근할 수 있도록 도와준다. 문제를 풀기 위해서는 직원뿔대의 전개도를 그려보고 윗면과 밑면의 원주를 구하고 부채꼴의 각과 반지름 그리고 호의 길이의 관계를 이용하여 최단거리를 구한다.

논제 2-2

경로의 최단거리는 x의 함수로 x에 따라서 답의 형태가 달라진다. 이는 논제2-1을 푼 후에는 충분히 유추할 수 있는 문제이다.

논제 2-3

$x=6$에서 해의 형태가 달라진다는 것에 대한 힌트이다. 또한 해를 올바르게 유도하였는지 자가검토할 수 있는 문제이기도 하다.

풀어보기

1. $p \geq 2$ 인 자연수 p 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 세 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 = 0$	(나) $a_{k+1} = a_k + 1 (1 \leq k \leq p-1)$
(다) $a_{k+p} = a_k (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$	

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고르시오.

보 기

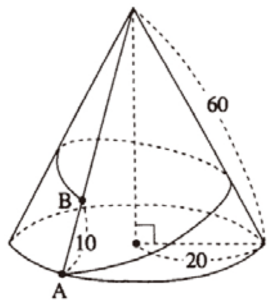
ㄱ. $a_{2k} = 2a_k$	ㄴ. $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_p = \dfrac{p(p-1)}{2}$
ㄷ. $a_p + a_{2p} + a_{3p} + \cdots + a_{kp} = k(p-1)$	

2. $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{21} = 2005$를 만족하는 21개의 수 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{21}$가 있다. 이 중 임의로 두 수 $a_m,\ a_n (m \neq n)$을 지우고 새로운 수 $a_{22} = a_m + a_n - 3$을 만든다. 이제 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{21}$중에서 $a_m,\ a_n$을 제외하고 a_{22}를 포함하는 20개의 수 중에서 임의로 두 수 $a_i,\ a_j (i \neq j)$를 지우고 새로운 수 $a_{23} = a_i + a_j - 3$을 만든다. 이와 같은 과정을 20번 반복하면 하나의 수 a_{41}이 남게 된다. 이 때 a_{41}의 값을 구하시오.

3. 원점과 직선 $(k+1)x+(k-2)y-4k-1=0$ 사이의 거리를 $f(k)$라고 할 때, $f(k)$의 최댓값을 구하여라.

4. 좌표공간에서 구 $(x-2)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=1$ 위를 움직이는 점 P와 xy평면 위의 원 $x^2+y^2=5$ 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이가 최소가 되는 P의 좌표를 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$라 하자. 이때 $3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$의 값을 구하시오.

5. 다음 그림과 같은 직원뿔 모양의 산이 있다. A지점을 출발하여 산을 한 바퀴 돌아 B지점으로 가는 관광열차의 궤도를 최단거리로 놓으면, 이 궤도는 처음에는 오르막길이지만 나중에는 내리막길이 된다. 이 내리막길의 길이를 구하시오.



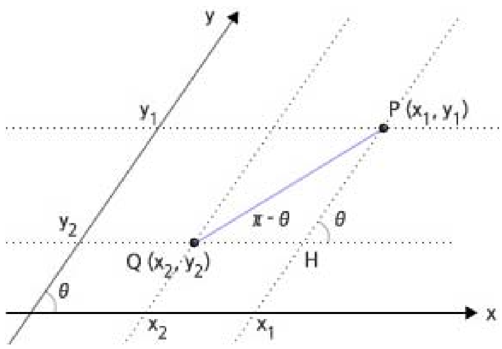
읽기자료

구면상의 최단 거리[4)]

지구의 임의의 두 점 사이의 거리를 어떻게 구할 수 있는지 알아보자. 우선 직교하지 않는 좌표에서의 거리를 확인해보고 구면(지구)의 임의의 두 점 사이의 거리를 구하여 보자.

➥ 두 축이 직교하지 않는 경우 - 코사인 법칙으로 구한다

평면좌표의 두 축은 원점에서 직교하지만, 두 축이 직교하지 않는 좌표도 존재한다. 그림과 같이 가로 축과 세로 축이 θ의 각으로 만나는 경우, 좌표평면 위에 존재하는 임의의 두 점 사이의 거리를 구하는 방법을 살펴보자.



두 축이 직교하지 않는 좌표평면 위의 두 점 $P(x_1,\ y_1)$, $Q(x_2,\ y_2)$가 주어져 있으면, 두 점 사이의 거리 d는 코사인 법칙을 이용하여 구할 수 있다. 실제로 삼각형 PQH의 한 내각의 크기가 $\pi-\theta$이므로, 코사인 법칙에 의해서 거리 d는

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+2(x_1-x_2)(y_1-y_2)\cos\theta}$$

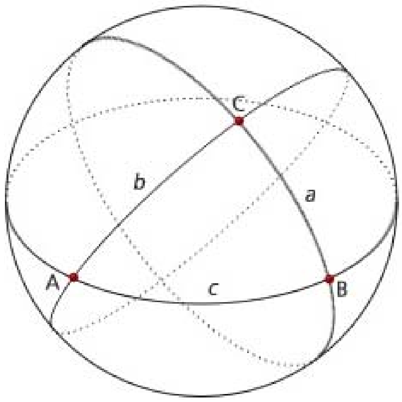
이다.

➥ 구면에서의 코사인 법칙은?

구면에 세 점 A, B, C가 결정이 되면 선분 AB는 구의 중심을 원의 중심으로 하는 대원의 일부분이 된다. 이렇게 만들어진 삼각형을 구면 삼각형이라고 하는데, 이를 이용하여 구면에서의 코사인 법칙을 이슬람 수학자들이 발견한 것이다. 중세 이슬람에 의한 구면에서의 코사인 법칙의 발견은 역사적으로 매우 가치 있는 발견이었다는 것을 명심하고, 구면 코사인 법칙에 대해 살펴보자.

4) 네이버캐스트. 구면상의 거리. 서보억

구면 코사인 법칙은 그림과 같은 구면 삼각형 ABC에서 다음이 성립한다는 것이다.

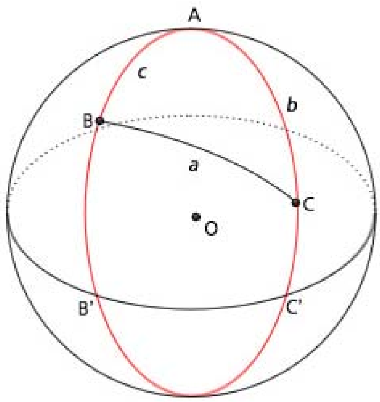


$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A$$

(단. $\angle A$는 변 b, c가 이루는 각이고 α, β, γ는 대원에서 세 변에 대한 중심각의 크기이다.)

➥ 지구 상의 두 지점 사이의 거리 구하기

구면 코사인 법칙의 증명은 뒤부분을 참고하도록 하고, 구면 코사인 법칙을 이용해 지구 상의 두 지점 사이의 거리를 구해 보자.



그림에서 점 B를 러시아의 수도 모스크바라 하고, 점 C를 경상북도 대구라 하자. 지구본의 경도와 위도를 통해, 모스크바는 동경37.42°, 북위55.45°에 위치하고, 대구는 동경128.35°, 북위35.52°에 위치함을 알 수 있다. 정확한 수치는 인터넷 검색을 활용해보자. 두 점 B, C사이의 최단거리는 두 점을 지나는 대원의 호 BC의 길이가 된다. 점 A를 북극점, 직선 AB가 적도와 만나는 점을 B′, 직선 AC가 적도와 만나는 점을 C′이라고 하자. 이제 구면 삼각형 ABC가 생겼고, 이 삼각형의 세 변의 길이를 a, b, c라고 하자. 구면 코사인 법칙을 이용하기 위해 $\angle A$, 변 b와 변 c의 중심각 β, γ를 각각 구해야 한다. 편의상 지구본의 반지름을 1로 보고 계산해 보자.

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A$$

첫째, $\angle A$ 의 크기는 대구의 경도에서 모스크바의 경도를 빼면 되므로, $128.35 - 37.42 = 90.93^\circ$ 이다.

둘째, 선분 AB 의 중심각 γ 는 90° 에서 모스크바의 위도를 빼면 되므로, 34.55° 이다.

셋째, 선분 AC 의 중심각 β 는 역시 90° 에서 대구의 위도를 빼면 되므로, 54.48° 이다.

이제 이 세 값을 구면의 코사인 법칙에 적용하면, $\cos\alpha = 0.4710$ 을 얻을 수 있다. 계산결과는 아래와 같다.

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos 54.48^\circ \cos 34.55^\circ + \sin 54.48^\circ \sin 34.55^\circ \cos 90.93^\circ \\ &= 0.4785 + (-0.0075) = 0.4710\end{aligned}$$

따라서, a 의 크기는 삼각표에 의해서 61.90° 임을 근사적으로 구할 수 있다.

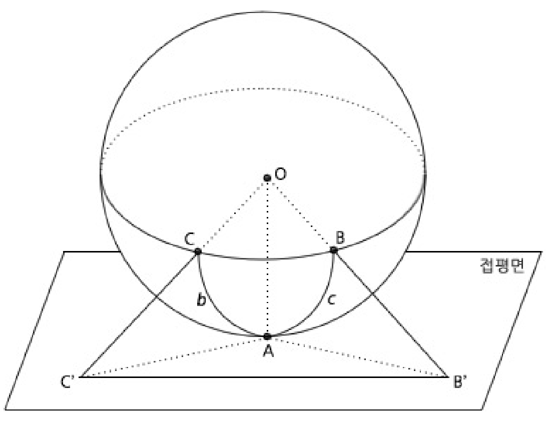
마지막으로, 모스크바로부터 대구 사이의 거리는 지구의 둘레 $40076\,km$ 에 대한 비례식 $360 : 40076 = 61.90 : d$ 에 의해서, $6890.84\,km$ 를 얻을 수 있다.

➥ 구면에서의 거리는 구면 코사인 법칙으로 구한다

두 점 사이의 거리는 기하학에서 가장 기본적인 개념 중의 하나이다. 평면의 직교좌표에서는 피타고라스 정리가 두 점 사이의 거리를 보장해 주지만, 직교하지 않는 좌표에서는 코사인 법칙이 두 점 사이의 거리를 구하게 해 준다는 사실을 알 수 있었다. 모두가 다 알고 있듯이 우리가 살고 있는 지구는 구면이다. 구면에서 두 점 사이의 거리를 구하기 위해서는 구면에서 성립하는 구면 코사인 법칙이 필요하다. 다행히 중세 이슬람인들에 의해 그것에 대한 공식화가 이루어져, 우리가 지구본에 있는 임의의 두 지점(혹은 위도와 경도를 아는 두 지점) 사이의 거리를 구할 수 있는 것이다.

➥ 구면 코사인 법칙의 증명

(서보억(2008)의 ‘코사인 법칙의 발달과정 분석 및 논증을 통한 확장에 대한 연구’ 참조)



구면삼각형 ABC 에서 꼭짓점 A 를 임의의 한 평면에 접하게 하고 두 점 B, C 를 지나는 대원을 그린다. 선분 OB 와 선분 OC 의 연장선이 접평면과 만나는 점을 각각 B′, C′이라고 하고, 구면삼각형의 세 변의 길이를 a, b, c 라 하자. 세 변들의 대원에 대한 중심각의 크기를 α, β, γ 라고 하면 다음이 성립한다.

$$\alpha = \frac{a}{R},\ \beta = \frac{b}{R},\ \gamma = \frac{c}{R}$$

이 때 두 삼각형 OB′C′과 AB′C′의 공통변 B′C′로부터 코사인 법칙을 적용하여 보자. 먼저, 네 변의 길이 OB′, OC′, AB′, AC′을 구해 보자. 결과는 다음과 같다.

$$\overline{OB'} = \frac{R}{\cos\gamma},\ \overline{OC'} = \frac{R}{\cos\beta},\ \overline{AB'} = R\tan\gamma,\ \overline{AC'} = R\tan\beta$$

이제, 두 삼각형에 코사인법칙을 적용하면 다음 두 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}(\overline{B'C'})^2 &= (\overline{OB'})^2 + (\overline{OC'})^2 - 2\overline{OB'}\cdot\overline{OC'}\cdot\cos\alpha \\ &= \left(\frac{R}{\cos\gamma}\right)^2 + \left(\frac{R}{\cos\beta}\right)^2 - 2\frac{R^2}{\cos\gamma\cdot\cos\beta}\cos\alpha \\ &= R^2(1+\tan^2\gamma) + R^2(1+\tan^2\beta) - 2\frac{R^2}{\cos\gamma\cdot\cos\beta}\cos\alpha \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\overline{B'C'})^2 &= (\overline{AB'})^2 + (\overline{AC'})^2 - 2\overline{AB'}\cdot\overline{AC'}\cdot\cos A \\ &= (R\tan\beta)^2 + (R\tan\gamma)^2 - 2R^2\tan\beta\cdot\tan\gamma\cdot\cos A \\ &= R^2(\tan^2\beta) + R^2(\tan^2\gamma) - 2R^2\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\cdot\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}\cdot\cos A \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

②식을 정리하면 아래를 얻는다.

$$1 - \frac{1}{\cos\gamma}\frac{1}{\cos\beta}\cos\alpha = -\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\cos A$$

양변에 $\cos\gamma\cos\beta$를 곱하여 $\cos\alpha$에 대해 정리하면, 구면 코사인 법칙이 나온다(증명 끝).

예시답안

풀어보기

1. ㄱ. (반례) $k=1$ 일 때, $a_2=a_1+1\neq 2a_1=0$ (거짓)

ㄴ. (가), (나)에서 $a_1=0$, $a_2=a_1+1=1$, $a_3=a_2+1=1$, $\cdots$, $a_p=a_{p-1}+1=p-1$

$$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_p=\frac{p(p-1)}{2}\ (\text{참})$$

ㄷ. $a_p=p-1$ 이므로 (다)에서 $a_{2p}=a_{p+p}=a_p=p-1$, $a_{3p}=a_{2p+p}=a_{2p}=a_p=p-1$, $\cdots$,

$a_{kp}=a_p=p-1$. $\therefore a_p+a_{2p}+a_{3p}+\cdots+a_{kp}=k(p-1)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

2. '임의의 두 수'를 빼고 '그 두 수의 합에 3을 뺀 새로운 수'를 더한다는 것은 달리 말하면, 2005에서 3을 뺀다는 것과 같다. a_1, a_2부터 지워나가는 과정을 생각해 보면

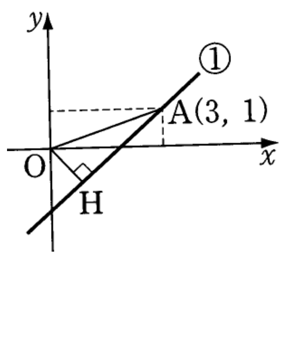
$a_3+a_4+\cdots+a_{22}=\sum_{k=1}^{21}a_k-3=2002$ 이다. 두 번째에서는 a_3, a_4가 지워지고

$a_{23}=a_3+a_4-3$가 생기므로 $a_5+a_6+\cdots+a_{23}=\sum_{k=1}^{21}a_k-2\cdot 3=1999$이다.

이와 같은 과정을 20번 반복하면 3을 20번 뺀 것과 같으므로

$a_{41}=\sum_{k=1}^{21}a_k-20\cdot 3=2005-60=1945$이다.

3.
$$(k+1)x+(k-2)y-4k-1=0 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

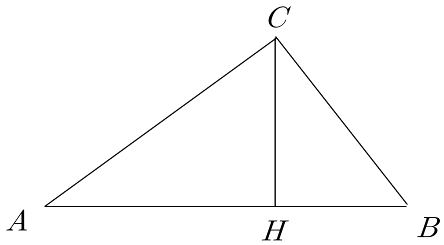


을 k에 관하여 정리하면 $(x+y-4)k+(x-2y-1)=0$이다. ①은 k의 값에 관계없이 두 직선 $x+y-4=0$, $x-2y-1=0$의 교점 A(3, 1)을 지난다. 원점에서 직선 ①에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $f(k)=\overline{\mathrm{OH}}\leq\overline{\mathrm{OA}}$ 이므로 $f(k)$의 최댓값은 $\overline{\mathrm{OA}}$이고, 이때 직선 ①은 직선 OA와 수직이다. 따라서 최댓값은 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

4. 구의 중심 C(2, 4, 2)에서 xy평면에 내린 수선의 발 H의 좌표는 (2, 4, 0)이고, $\overline{\mathrm{OH}}$와 원의 교점을 R 라 하면 $\overline{\mathrm{OR}}=\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{OH}}=2\sqrt{5}$ 이므로 R 은 $\overline{\mathrm{OH}}$의 중점이다. 따라서 R(1, 2, 0) $\overline{\mathrm{CR}}$과 구의 교점을 S 라 하면 $\overline{\mathrm{CR}}=\sqrt{1+4+4}=3$, $\overline{\mathrm{CS}}=1$ 이므로 S 는 $\overline{\mathrm{CR}}$를 1 : 2로 내분하는 점이다. 따라서 $\mathrm{S}\left(\frac{5}{3},\ \frac{10}{3},\ \frac{4}{3}\right)$이다.

$\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{QC}}\geq\overline{\mathrm{OR}}+\overline{\mathrm{RC}}$ 에서 $\overline{\mathrm{QC}}\geq\overline{\mathrm{RC}}=\overline{\mathrm{RS}}+\overline{\mathrm{SC}}$ 이고 $\overline{\mathrm{RP}}+\overline{\mathrm{PC}}\geq\overline{\mathrm{RS}}+\overline{\mathrm{SC}}$ 에서 $\overline{\mathrm{RP}}\geq\overline{\mathrm{RS}}$이다. 그러므로 $\overline{\mathrm{QC}}+\overline{\mathrm{RP}}\geq\overline{\mathrm{RC}}+\overline{\mathrm{RS}}$이다. 그런데 $\overline{\mathrm{QC}}\leq\overline{\mathrm{QP}}+\overline{\mathrm{PC}}$이고 $\overline{\mathrm{RP}}\leq\overline{\mathrm{PQ}}$이므로 $2\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PC}}\geq 2\overline{\mathrm{RS}}+\overline{\mathrm{SC}}$이고 $\overline{\mathrm{PQ}}\geq\overline{\mathrm{RS}}$이다. P 가 S 이고 Q 가 R 일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 가 최소이므로 구하는 값은 $3\left(\frac{25}{9}+\frac{100}{9}+\frac{16}{9}\right)=47$이다.

5. 원뿔의 옆면의 전개도를 생각하면 다음 그림과 같이 나타낼 수 있다.



이때 A에서 B까지 최단경로는 선분 AB이다. 점 C 에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H 라 하면 $\overline{\mathrm{AH}}$까지는 오르막길, $\overline{\mathrm{BH}}$는 내리막길이다. $\overline{\mathrm{AC}}=60$, $\overline{\mathrm{BC}}=50$, $\angle\mathrm{ACB}=\frac{2}{3}\pi$ 이므로

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=60^2+50^2-2\cdot 60\cdot 50\cos\frac{2}{3}\pi=9100$$

이다. 따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=10\sqrt{91}$ 이다. $\angle\mathrm{ABC}=\theta$라 하면 $\dfrac{10\sqrt{91}}{\sin\frac{2}{3}\pi}=\dfrac{60}{\sin\theta}$이므로

$\sin\theta=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}$이고, $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\dfrac{8}{\sqrt{91}}$이다. $\overline{\mathrm{BH}}=50\cdot\cos\theta=\dfrac{400}{\sqrt{91}}$이므로 내리막길의 길이는 $\dfrac{400\sqrt{91}}{91}$ 이다.

논제 1

(1) 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 점화식에서 $a_{n+1}+b_{n+1}$, $a_{n+1}-b_{n+1}$은

$$a_{n+1}+b_{n+1}=(a_n+b_n)a_1+(a_n+b_n)b_1=(a_n+b_n)(a_1+b_1)$$
$$a_{n+1}-b_{n+1}=(a_n-b_n)a_1-(a_n-b_n)b_1=(a_n-b_n)(a_1-b_1)$$

이다. 그러므로 $a_n+b_n=(a_1+b_1)^n$, $a_n-b_n=(a_1-b_1)^n$ 이다. 따라서

$$a_n^2-b_n^2=(a_1+b_1)^n(a_1-b_1)^n=(a_1^2-b_1^2)^n$$

이다.

(2) 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 점화식에서 행렬 A_{n+1}은

$$A_{n+1}=\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & a_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_na_1+b_nb_1 & b_na_1+a_nb_1 \\ b_na_1+a_nb_1 & a_na_1+b_nb_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}=A_nA_1$$

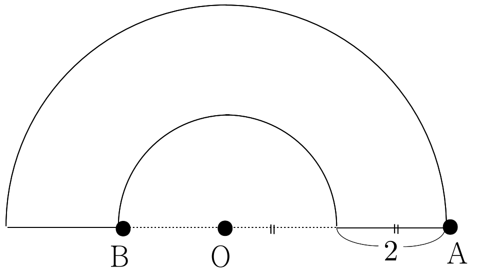
이다. 그러므로 $A_n=A_1^n$이다. 따라서

$$A_{m+n}=A_1^{m+n}=A_1^mA_1^n=A_mA_n$$

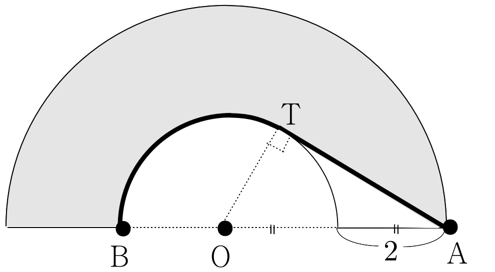
이다.

논제 2

(1) $x=2$일 때, 주어진 직원뿔대의 옆면의 전개도를 그리면 다음과 같다.



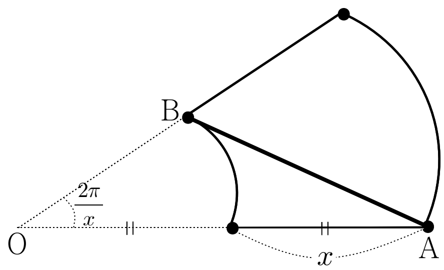
이때 점 A에서 점 B에 이르는 최단 경로를 찾아보자. 아래의 그림과 같이 점 A에서 작은 원에 접선을 그어 그 접점을 T라고 하면 최단경로는 $\overline{\mathrm{AT}}+\overset{\frown}{\mathrm{BT}}$이다.



$\angle\mathrm{AOT}=\dfrac{\pi}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{AT}}=2\tan\dfrac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$, $\overset{\frown}{\mathrm{BT}}=2\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{4}{3}\pi$이다. 따라서 $x=2$일 때 경로의 최단거리는 $2\sqrt{3}+\dfrac{4}{3}\pi$이다.

(2)

(i) $x \geq 6$일 때, $\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{2\pi}{x} \leq \dfrac{\pi}{3}$ 이므로 주어진 직원뿔대의 옆면의 전개도를 그리면 다음과 같다.

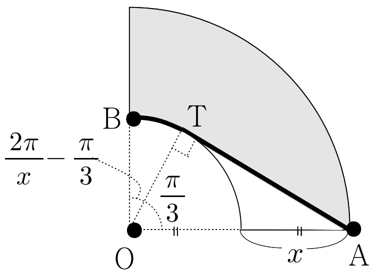


점 A에서 점 B에 최단경로는 $\overline{\mathrm{AB}}$ 이므로 경로의 최단거리 $f(x)$는

$$f(x)=\sqrt{x^2+(2x)^2-2\cdot x\cdot 2x\cos\frac{2\pi}{x}}=x\sqrt{5-4\cos\frac{2\pi}{x}}$$

이다.

(ii) $x<6$일 때, $\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{2\pi}{x}>\dfrac{\pi}{3}$ 이므로 주어진 직원뿔대의 옆면의 전개도를 그리면 다음과 같다.



점 A에서 점 B에 최단경로는 $\overline{\mathrm{AT}}+\widehat{\mathrm{BT}}$ 이다. $\angle\mathrm{AOT}=\dfrac{\pi}{3}$, $\angle\mathrm{BOT}=\dfrac{2\pi}{x}-\dfrac{\pi}{3}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AT}}=x\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}\,x$, $\widehat{\mathrm{BT}}=x\left(\dfrac{2\pi}{x}-\dfrac{\pi}{3}\right)=2\pi-\dfrac{\pi}{3}x$ 이다. 따라서 경로의 최단거리 $f(x)$는

$$f(x)=x\sqrt{3}+2\pi-\frac{\pi}{3}x$$

이다. (i), (ii)에 의해

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{3}\,x+2\pi-\dfrac{\pi}{3}x & (0<x<6)\\ x\sqrt{5-4\cos\dfrac{2\pi}{x}} & (x\geq 6)\end{cases}$$

이다.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 6+0}f(x)=\lim_{x\to 6+0}x\sqrt{5-4\cos\frac{2\pi}{x}}=6\sqrt{3}=\lim_{x\to 6-0}f(x)=\lim_{x\to 6-0}\left(\sqrt{3}\,x+2\pi-\frac{\pi}{3}x\right)$

이고 $f(6)=6\sqrt{3}$ 이다. 따라서 $x=6$일 때 $f(x)$는 연속이다.

5 국민대학교 수시

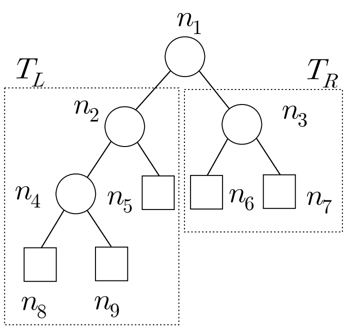
제시문 I 아래의 제시문을 읽고 다음 물음에 답하시오.

트리는 같은 꼭짓점으로 되돌아오는 경로가 없는 그래프이다. 트리의 꼭짓점은 **노드**라 하고, 변으로 연결된 두 노드 중 위의 노드는 **부모 노드**, 아래의 노드는 **자식 노드**라 한다. **루트(root) 기반 트리**는 **루트 노드**라 하는 특별한 1개의 노드가 존재한다. 루트 노드는 부모 노드가 없다.

루트 기반 트리의 일종인 **이진트리**는 컴퓨터 정보 처리를 위해 매우 유용하게 사용되는 트리로서 다음과 같이 구성된다.

1개의 노드를 가지는 트리는 이진트리이다.

1개보다 많은 노드를 가지는 이진트리는 루트 노드와 2개의 이진 부분트리-왼쪽 이진 부분트리, 오른쪽 이진 부분트리-로 구성된다.



따라서 이진트리는 각 노드가 0개나 2개의 자식 노드를 갖는 특성을 보인다. 왼쪽 그림은 9개의 노드를 갖는 이진트리의 예로서 루트 노드 n_1과 2개의 이진 부분트리 T_L과 T_R로 구성된다. T_L과 T_R도 각각 자신의 루트 노드와 2개의 이진 부분트리로 구성되는 이진트리이다.

자식 노드를 갖는 노드는 **내부 노드**, 자식 노드를 갖지 않는 노드는 **단말 노드**라 한다. 그림에서 원으로 나타낸 노드가 내부 노드, 사각형으로 나타낸 노드가 단말 노드이다.

모든 노드는 루트 노드로 연결된 하나의 **경로**가 있으며, 각 노드의 **경로의 길이**는 경로 상에 있는 변의 개수이다. 예를 들어 n_8의 경로의 길이는 3이며 n_3의 경로의 길이는 1이다. 최대 경로의 길이를 트리의 **높이**라 한다. 루트 노드에서 노드까지의 경로의 길이를 노드의 **깊이**라 하고, 깊이가 i인 모든 노드의 집합을 **레벨** i라 한다. 그러므로 레벨 i의 최대 노드 개수는 2^i이다. 가령 루트 노드는 깊이가 0이고 레벨 0에 속하며, n_4, n_5, n_6, n_7은 깊이가 2이고 레벨 2에 속한다.

논제 Ⅰ-1

높이가 h인 이진트리가 가질 수 있는 최대 노드의 개수를 구하시오.

논제 Ⅰ-2

높이가 h인 이진트리에서 레벨 i에 속한 내부 노드의 개수를 N_i라고 할 때, $0 \le i < h$인 i에 대해 레벨 $i+1$의 노드 개수가 $2N_i$임을 보이시오.

논제 Ⅰ-3

높이가 h인 이진트리에서 레벨 i에 속한 내부 노드의 개수를 N_i, 레벨 i에 속한 단말 노드의 개수를 L_i라고 할 때, $0 \le i < h$인 i에 대해 $N_i = \dfrac{N_{i+1} + L_{i+1}}{2}$이 성립함을 보이시오.

논제 Ⅰ-4

n개의 노드를 갖는 이진트리는 $n-1$개의 변을 가짐을 보이시오.

논제 Ⅰ-5

n개의 단말 노드를 갖는 이진트리는 $n-1$개의 내부 노드를 가짐을 보이시오.

논제 Ⅰ-6

n개의 단말 노드를 갖는 이진트리의 최대 높이가 $n-1$임을 보이시오.

제 시 문 Ⅱ 아래의 제시문을 읽고 다음 물음에 답하시오.5)

일년 내내 기온이 따뜻하고 천적이 없는 섬에 토끼 두 쌍을 풀어 놓고 2개월마다 토끼의 수를 조사하였다. 조사 결과 1992년 5월에 500마리, 1992년 9월에 2,000마리, 1993년 3월에 16,000마리였다(토끼의 수를 가능한 한 정확히 조사하였으나 약간의 오차는 있을 수 있다). 이 기간 동안 토끼가 번식하는 데에는 아무런 제약이 없었다.

논제Ⅱ-1

토끼를 처음 풀어 놓은 때부터 계속 같은 비율로 토끼의 수가 증가하였다면 토끼를 처음 풀어 놓은 시기는 몇 년 몇 월인지 말하시오.

논제Ⅱ-2

아무런 제약 없이 토끼가 번식하는 동안 관찰되는 개체 수의 변화를 수학적 모델로 나타내려고 한다. 토끼를 처음 풀어 놓은 시점을 $t=0$이라 하고 2개월 주기로 계산할 때, t시점의 개체 수 $R(t)$를 $R(t)=ka^t$ 형태로 나타내시오.

논제Ⅱ-3

토끼를 처음 풀어놓은 지 20년이 지난 2011년 현재시점에서 위의 수학적 모델 $R(t)=ka^t$이 현실적으로 적용될 수 있는지 설명하시오. (2^{10}은 1000으로 계산)

5) 국민대학교 입학처

제시문분석

1. 제시문 Ⅰ

컴퓨터에 응용되는 이진트리에 대한 정의와 속성을 제시하고 관련된 여러 가지 용어들을 설명하고 있다.

2. 제시문 Ⅱ

생물의 번식 행태를 수학적으로 모델화시키고 있다.

논제분석

논제 Ⅰ-1

이진트리와 트리의 높이를 정확히 이해하여 등비수열의 합을 이용하여 최대 노드의 개수를 구하는 문제로 제시문에서 이진트리의 구조를 잘 이해하면 간단히 해결할 수 있다.

논제 Ⅰ-2

이진 트리에서 부모 노드는 자식 노드를 두 개 가질 수 있음을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

논제 Ⅰ-3

내부 노드와 단말 노드의 개념을 이용하여 연속되어 있는 레벨에서의 노드 수의 관계식을 이해할 수 있는가는 묻는 문제이다.

논제 Ⅰ-4

이진트리의 노드의 수와 변의 수의 관계식에 대해 묻고 있다. 이진트리의 예를 몇 가지 그려놓고 잘 살펴보면 해결할 수 있을 것이다.

논제 Ⅰ-5

내부 노드와 단말 노드의 수의 관계를 묻고 있는 문제로 간단한 이진트리의 구조부터 출발하여 노드의 수가 늘어감에 따라 두 노드의 수는 각각 어떤 형태로 증가하는지 살펴보는 것이 필요하다.

논제 Ⅰ-6

단말 노드의 수가 정해져 있을 때 최대 높이는 단말 노드의 수보다 하나 적다는 것을 보이는 문제로 단말 노드의 수를 고정한 상태에서 최대의 높이를 갖도록 하는 이진트리의 구조를 생각해낼 수 있어야 한다.

논제 Ⅱ-1

경과 시간에 따른 개체수의 함수식을 세울 수 있는가를 묻고 있는 문제이다. 개체수가 같은 비율로 증가한다면, 복리법에 의한 원리합계의 계산 방법과 동일하다. 원금 a 에 대한 연이율 r 인 정기예금에서 n 년 후의 복리법에 의한 원리합계는 $a(1+r)^n$ 임을 생각해낼 수 있어야 한다.

논제 Ⅱ-2

[논제 Ⅱ-1]에서 세운 함수식을 묻고 있다. 생물의 번식 행태를 수학적으로 모델화시키는 과정이다.

논제 Ⅱ-3

[논제 Ⅱ-2]의 식이 현실적으로 타당성이 있는가를 묻고 있다.

배경지식쌓기

1. 수열의 귀납적 정의와 점화식

수열에서 첫째항과 임의의 이웃하는 두 항 사이의 관계식으로 수열을 정의하는 것을 수열의 귀납적 정의라고 한다. 특히 이웃하는 항들 사이의 관계식을 점화식(recurrence relation)이라고 한다. 수열을 귀납적 정의로 표현하면 좀 더 간결하고 엄밀하게 수열의 구조를 표현할 수 있다.

2. 원리합계

연이율 r, 1년마다 복리로 연금 a원을 예금했을 때, n년 후의 원리합계 P는

$$P=(1+r)^n$$

을 만족한다.

풀어보기

1. 두 개의 점을 하나의 선으로 연결하여 만든 도형을 I_1, I_1 을 복제한 J_1 을 만든 후 I_1 과 J_1 의 대응하는 점을 연결한 도형을 I_2 (그림 1), I_2 를 복제한 것을 J_2 라 하고 I_2 와 J_2 의 대응하는 점을 연결한 도형을 I_3 (그림 2), $\cdots$, 이러한 조작을 반복하여 I_n 을 만들어 갈 때, I_n 에 포함되어 있는 선의 개수를 a_n 이라 하자. 예를 들면 $a_1=1$, $a_2=4$, $a_3=12$ 이다.

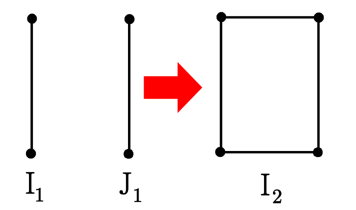


그림 1

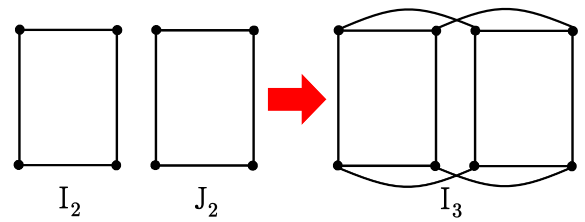


그림 2

이때, a_6 의 값을 구하면?[6)]

① 80　　② 112　　③ 138
④ 164　　⑤ 192

2. 다음은 어느 회사의 연봉에 관한 규정이다.

> (가) 입사 첫째 해 연봉은 a 원이고, 입사 19 년째 해까지의 연봉은 해마다 직전 연봉에서 8% 씩 인상된다.
>
> (나) 입사 20 년째 해부터의 연봉은 입사 19 년째 해 연봉의 $\frac{2}{3}$ 로 한다.

이 회사에 입사한 사람이 28년 동안 근무하여 받는 연봉의 총합은? (단, $1.08^{18}=4$ 로 계산한다.) [4점]

(2007 평가원)

① $\frac{101}{2}a$　　② $\frac{111}{2}a$　　③ $\frac{121}{2}a$
④ $\frac{131}{2}a$　　⑤ $\frac{141}{2}a$

6) 수학거미 수학 I (하), 화인미디어, 2005

읽기자료

최첨단 기술 세계와 아주 간단한 수[7)]

우리가 컴퓨터, 웹 사이트, 멀티미디어, CD, CD-ROM을 이용한 게임을 할 수 있는 것은 단 2개의 기초 숫자 덕분이다. 그 숫자는 바로 0과 1이다.

옛날 아프리카의 산(San)이라는 부족은 셈을 할 때 이진법을 사용하였다. 여기에 그들이 1부터 10까지 사용한 방법이 있다.

산(San)의 이진법	십진법
하나	1
하나의 쌍	2
하나의 쌍과 하나	3
두 개의 쌍	4
두 개의 쌍과 하나	5
세 개의 쌍	6
세 개의 쌍과 하나	7
네 개의 쌍	8
네 개의 쌍과 하나	9
다섯 개의 쌍	10

이 부족 외에 남아메리카의 자무코 인디언, 오스트레일리아의 가우랄갈인, 뉴기니 섬의 파푸아인들도 이진법을 사용하였다. 이들의 공통점은 아주 오래된 문화를 갖고 있다는 것이다. 어떤 학자들은 이진법이 세계적으로 가장 오래된 숫자 체계라고 말하기도 한다. 살아가는 방법이 변화함에 따라 셈을 하는 방법도 바뀌어 왔으나 수세기 동안 삶에 있어 변천을 이루지 못한 몇몇 고립된 민족들은 오래 된 셈법을 사용해왔다. 사회가 더욱 커지고 복잡해짐에 따라 숫자 체계도 복잡해지고 대형화되었다. 그러나 어떤 민족들은 그들의 오래된 숫자 체계, 즉 2개의 기본 숫자를 사용하는 방법을 계속 이어왔다. 또 어떤 민족들은 다른 숫자 체계를 썼는데, 메이얀이라는 인디언들은 5개의 기본 숫자를 가지고 셈을 표현하는 오진법을 사용하였다. 현재 우리가 사용하는 숫자 체계는 10을 기본 단위로 사용하는 십진법이다. 모든 자릿수가 10의 거듭제곱꼴로 이루어져 있다.

이진법은 오직 2개의 숫자만을 사용하기 때문에 단순해 보이지만 각각의 자릿수를 조합해보면 수는 매우 길게 표현이 된다. 예를 들어, 32는 이진법으로 100000이 된다.

7) 크리스티 매간지니, 마법의 수학나라, 박영호 역, 맑은소리, 2000

오늘날 우리가 아는 이진법은 1600 년 말경 독일의 수학자인 고트프리드 빌헬름 라이프니츠가 창안해낸 것이다. 당시만 해도 생소하게 여겨졌던 이진법은 사람들에게 환영받지 못했다. 이 이상하고 길게 늘어진 이진수는 만들어진 지 300년이 지난 후에야 컴퓨터 프로그래머에 의하여 사용되기 시작했다.

프로그래머들은 컴퓨터가 이진수를 완벽하게 이해할 수 있음을 깨달았다. 전원으로 연결되어 있는 컴퓨터는 오로지 ‘꺼짐’, 또는 ’켜짐‘의 두 가지 의미만을 이해할 수 있다. 프로그래머는 컴퓨터가 이 두 가지 의미를 숫자화할 수 있다는 것을 알아차렸다. ‘켜짐’은 숫자 1 로 ‘꺼짐’은 숫자 0 으로 바꿀 수 있었던 것이다. 그리고 이진법을 이용하여 컴퓨터와 대화를 나눌 수 있게 되었는데 이것이 컴퓨터 시대의 시작이다.

예시답안

풀어보기

1. 정답 ⑤

I_n 의 꼭지점이 2^n 개이므로

$$a_{n+1}=2a_n+2^n\text{ , 즉, }\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$$

이다. 그러므로 $\frac{a_6}{2^6}=\frac{a_1}{2}+5\times\frac{1}{2}=3$ 에서 $a_6=192$ 이다.

2. 정답 ④

입사 후 19 년째 해까지의 연봉의 합은

$$a+a(1+0.08)+a(1+0.08)^2+\cdots+a(1+0.08)^{18}$$
$$=\frac{a\{(1.08)^{19}-1\}}{1.08-1}=\frac{a\{4\times1.08-1\}}{1.08-1}=\frac{a\{4\times108-100\}}{8}=\frac{83}{2}a$$

20 년째 해부터 28 년째 해까지 9 년 동안의 연봉의 합은

$$a(1+0.08)^{18}\times\frac{2}{3}\times9=4a\times6=24a$$

그러므로 구하는 연봉의 총합은 $\frac{83}{2}a+24a=\frac{131}{2}a$ 이다.

논제 Ⅰ-1

레벨 i의 최대 노드 개수는 2^i이므로 높이가 h인 이진트리의 최대 노드의 개수는

$$\sum_{i=0}^{h} 2^i = 1+2+2^2+\cdots+2^h = \frac{2^{h+1}-1}{2-1} = 2^{h+1}-1$$

이 된다.

논제 Ⅰ-2

이진트리에서 N_i개의 내부노드는 각각 2개의 자식 노드를 갖게 된다. 따라서, 레벨 $i+1$의 노드의 개수는 $2\times N_i$이다.

논제 Ⅰ-3

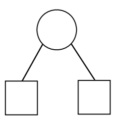
레벨 $i+1$의 모든 노드의 개수는 $N_{i+1}+L_{i+1}$로서 짝수이다. 이것은 모두 레벨 i의 내부 노드에서 나온 자식 노드이므로 $2N_i = N_{i+1}+L_{i+1}$이다. 따라서, $N_i = \dfrac{N_{i+1}+L_{i+1}}{2}$이 성립한다.

논제 Ⅰ-4

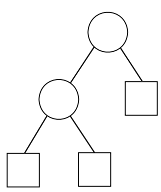
루트 노드를 제외한 모든 노드들은 위쪽으로 하나의 변이 연결되어 있다. 따라서 변의 수는 루트 노드를 제외한 노드의 수와 일치하므로 총 $n-1$개의 변을 가진다.

논제 Ⅰ-5

단말노드가 2개일 때 내부 노드는 1개이고 이진트리의 모양은 그림과 같다.



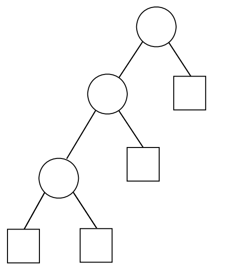
여기서 단말노드 1개가 내부 노드로 바뀌면 단말 노드 2개가 더 생기게 되고 다음과 같은 모양이 된다.



이처럼 단말노드 1개가 내부 노드 1개로 바뀌면 단말 노드 2개가 더 생기게 되어 항상 내부 노드의 수는 단말 노드의 수보다 1이 적게 된다.

논제 Ⅰ-6

n개의 단말 노드를 마지막 레벨에 2개를 배치하고 각 레벨에 하나씩만 배치시킬 수 있다. 예를 들어, 4개의 단말 노드가 있다면 최대 높이를 가지도록 그림과 같은 이진트리를 생각할 수 있다. 따라서 최대높이는 항상 단말 노드의 수보다 1이 적다.



논제 Ⅱ-1

일정한 비율 r로 토끼의 수가 증가한다고 했을 때, $2n$개월 후의 토끼의 수는 $4(1+r)^n$으로 표현할 수 있다. 따라서, 조사 결과는 다음과 같은 식으로 적을 수 있다.

$$4(1+r)^n = 500\ ,\ 4(1+r)^{n+2} = 2000$$

여기서, $(1+r)^2 = 4$, $r = 1$이고, 이것을 이용하면, $n \div 7$, 즉 처음 토끼를 풀어 놓은 시점은 약 14개월 전, 1991년 3월임을 알 수 있다.

논제 Ⅱ-2

위 [논제 Ⅱ-1]을 통해 $R(t) = 4 \cdot 2^t$ 임을 알 수 있다.

논제 Ⅱ-3

개체 수가 계속 증가한다면, 20년 후 개체 수는

$$R(120) = 4 \cdot 2^{120} = 4 \cdot (2^{10})^{12} = 4 \cdot 1000^{12} = 4 \cdot 10^{36}$$

으로 어마어마한 수가 되어야 한다. 그러나 아무런 제약 없이 개체수가 증가한다는 것이 쉽지 않을 뿐 아니라 토끼의 수명, 즉 사망률을 고려하지 않았으므로 현실적으로 적용될 수 없다.

6 서강대학교 수시(화공, 컴공)

제시문 1 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

[가] 금세기에 들어와 처리할 자료의 양이 많아짐에 따라 자료의 처리와 계산을 위하여 컴퓨터에 대한 의존도가 높아지고 있다. 컴퓨터는 연산과 메모리 사용에 있어서 본질적으로 이진법을 사용한다고 볼 수 있다. 이는 정수뿐만 아니라 유리수도 컴퓨터로 연산할 수 있는 대상이 됨을 의미한다. 더 나아가 무리수에 대해서도 연산의 대상으로 파악되기를 원한다. 무리수의 경우, 적당한 유리수의 극한으로서, 주어진 무리수에 대해 그 차이(오차)가 충분히 작은 유리수를 찾아 그 무리수의 근사적 대안으로 사용한다. 따라서 컴퓨터를 이용한 계산 가능한 수 또는 대상이 무엇인지 연구할 필요가 있다.

[나] 임의의 실수 x를 고정하자. 음이 아닌 정수 n에 대하여 $x \in I_{n+1} \subset I_n$이고, n이 커짐에 따라 I_n의 길이가 0으로 수렴하는 유리수 끝점인 닫힌구간들의 열 $\{I_0,\ I_1,\ I_2,\ \cdots\}$이 존재할 때, 실수 x는 계산가능하다고 말하고 $\{I_0,\ I_1,\ I_2,\ \cdots\}$을 x의 코드(code)라고 부른다. 평면 $\mathbb{R}^2$의 점 $(x,\ y)$에 대하여 $x,\ y$가 계산가능한 수이면, x의 코드 $\{I_0,\ I_1,\ I_2,\ \cdots\}$와 y의 코드 $\{J_0,\ J_1,\ J_2,\ \cdots\}$이 존재한다. 이때 사각형들의 열 $\{I_0 \times J_0, I_1 \times J_1, I_2 \times J_2, \cdots\}$을 $(x,\ y)$의 코드라고 말하고, $(x,\ y)$는 계산가능하다고 한다.

[다] 계산가능성의 개념을 함수 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$의 경우로 확장한다. 계산가능한 실수들의 부분집합에서 실수로의 함수 f를 생각하자. 그리고 f의 정의역에 속하는 임의의 원소를 x라 하자. 적당한 x의 코드 $\{I_0,\ I_1,\ I_2,\ \cdots\}$에 대하여, $\{f(I_0),\ f(I_1),\ f(I_2),\ \cdots\}$이 $f(x)$의 코드가 될 때, f는 계산가능하다고 정의한다. 이때, 정의역이 동일한 계산가능한 두 함수 f와 g에 대하여 두 함수의 합과 차는 계산가능한 함수가 된다. 예컨대, 계산가능하고 동일한 정의역을 갖는 두 함수 f와 g를 생각하자. 임의의 x의 적당한 코드 $\{I_0,\ I_1,\ I_2,\ \cdots\}$에 대하여 $f(x)$와 $g(x)$의 코드 $\{f(I_0),\ f(I_1),\ f(I_2),\ \cdots\}$와 $\{g(I_0),\ g(I_1),\ g(I_2),\ \cdots\}$를 각각 찾을 수 있다. $f(I_n)$과 $g(I_n)$의 끝점들 중, 값이 작은 점들의 합과 큰 점들의 합, 이 두 점으로 만들어지는 닫힌구간을 $f(I_n)+g(I_n)$이라고 정의한다. 예를 들면 $[1,2]+[3,4]$는 $[1+3, 2+4]=[4,6]$이 된다. 그러면

$$\{f(I_0)+g(I_0), f(I_1)+g(I_1), f(I_2)+g(I_2), \cdots\}$$

은 $f(x)+g(x)$의 코드가 됨을 보일 수 있다. 따라서 $f+g$는 계산가능하다.

[라] 평면에서 정의된 함수 $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$를 생각한다. 계산가능한 $\mathbb{R}^2$의 부분집합에서 실수로의 함수 F를 생각하자. 그리고 F의 정의역에 속하는 임의의 원소를 $(x,\ y)$라 하자. 만약 $(x,\ y)$의 적당한 코드 $\{I_0 \times J_0,\ I_1 \times J_1,\ I_2 \times J_2,\ \cdots\}$ 에 대하여, $\{F(I_0 \times J_0), F(I_1 \times J_1), F(I_2 \times J_2), \cdots\}$ 이 $F(x,y)$ 의 코드가 될 때, F는 계산가능하다고 정의한다. 여기서 $I_n \times J_n$은 카르테시안 곱으로서 $\{(a,b) | a \in I_n,\ b \in J_n\}$ 을 나타낸다.

논제 1-1

임의의 실수 x는 계산가능한 수임을 증명하라.

논제 1-2

함수 $f(x) = \sqrt{x}$ 는 계산가능함을 증명하라.

논제 1-3

실수 곱하기 함수 $f(x, y) = xy$ 는 계산가능함을 증명하라.

논제 1-4

함수 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$를

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

로 정의할 때, f의 계산가능 여부를 보이라.

제 시 문 2 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

[가] 미리 정해진 길이의 시간구간 동안 지정된 영역으로 들어가는 방사선 물질로부터 방출되는 알파입자의 수를 검출하는 실험으로부터 다음 결과를 얻는다.

(a) 양수 h가 매우 작을 때, 길이가 h인 임의의 시간구간에서 알파입자가 한 개 검출될 확률은 근사적으로 λh이다.

(b) 양수 h가 매우 작을 때, 길이가 h인 임의의 시간구간에서 알파입자가 두 개 이상 검출될 확률은 근사적으로 0이다.

(c) 겹치지 않는 두 시간구간에 대하여 알파입자가 검출될 사건은 항상 독립적이다.

[나] 제시문 [가]의 내용을 수리적인 모형으로 나타내고자 한다. 먼저 기호 $o(h)$를 도입하자. $o(h)$는 $\lim\limits_{h\to0}\frac{o(h)}{h}=0$ 을 만족하는 함수들을 총칭한다. 쉬운 예들로 $h^2=o(h)$, $h^3=o(h)$이지만, $h\neq o(h)$이다. $\lim\limits_{h\to0}\frac{o(h)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{h}{h}=1\neq0$ 이기 때문이다. 길이 h인 구간에서 알파입자가 x개 검출될 확률을 $g(x,\ h)$라고 하자. $g(x,\ h)$와 $o(h)$를 이용하여 제시문 [가]의 (a), (b), (c)를 각각 다음과 같이 쓸 수 있다.

(a') $g(1,\ h)=\lambda h+o(h)$ (λ는 고정된 상수값)

(b') $\sum\limits_{x=2}^{\infty}g(x,\ h)=o(h)$

(c') 임의의 양수 h와 w에 대하여 $g(0,w+h)=g(0,w)g(0,h)$,
$g(1,\ w+h)=g(1,\ w)g(0,\ h)+g(0,\ w)g(1,\ h)$ 등으로 나타낼 수 있다.

[다] 제시문 [나]의 법칙들 (a'), (b'), (c')을 만족시키는 $g(x,h)$는

$$g(x,w)=\frac{(\lambda w)^x e^{-\lambda w}}{x!},\ x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

임을 얻을 수 있다. 지수함수 e^m는 무한급수 $1+m+\frac{m^2}{2!}+\frac{m^3}{3!}+\cdots=\sum\limits_{x=0}^{\infty}\frac{m^x}{x!}$ 으로 표현된다는 것이 잘 알려져 있으며, 이로부터 $\sum\limits_{x=0}^{\infty}g(x,w)=1$이 된다. 즉 주어진 w에 대한 위 실험치를 확률변수 X라 할 때, $g(x,w)$는 X에 관한 확률질량함수가 된다.

[라] 일반적으로 확률변수 X의 함수 $f(X)$에 대하여, $f(X)$의 기댓값을

$$E(f(X)) = \sum_{x=0}^{\infty} f(x)g(x,w)$$

로 정의한다. 특별히 $f(X)=X$일 때, $E(X)$는 확률변수 X의 기댓값이라고 부르며, $f(X)=(X-E(X))^2$일 때 $E((X-E(X))^2)$을 확률변수 X의 분산이라고 정의한다.

논제 2-1

$o(h)+o(h)=o(h)$ 임과 $o(h)^2=o(h)$ 임을 보이라.

논제 2-2

제시문 [다]에서 유도된 확률질량함수 $g(x,w)$의 공식을 이용하지 않고, 제시문 [나]의 (a'), (b'), (c')로부터 $x=0$에서 미분계수 $\frac{d}{dw}g(0,w)$를 계산하라.

논제 2-3

실수 t에 대하여 함수 $f(X)=e^{tX}$에 대한 기댓값 $E(f(X))$를 유도하라.

논제 2-4

$E(e^{tX})$를 t에 관한 함수로 이해하여 확률변수 X의 평균과 분산을 구하라.

제시문분석

1. 제시문

수직선 위에서 계산가능한 수를 정의하고 이를 좌표평면과 함수까지 확장하고 있다.

2. 제시문

포아송 분포에 관하여 설명하고 기댓값과 분산을 정의하고 있다.

논제분석

논제 1-1

임의의 실수가 계산가능함을 보이기 위해 길이가 0으로 수렴하는 유리수 끝점인 축소된 닫힌구간들의 열이 존재함을 보이면 된다.

논제 1-2

무리함수가 계산가능함을 보이기 위해 정의역의 임의의 원소에 대한 적당한 코드가 함수에 의해 코드로 보존됨을 보이면 된다.

논제 1-3

좌표평면 위의 점을 수직선 상의 점에 대응시키는 함수가 계산가능함을 보이기 위해 정의역의 임의의 원소에 대한 적당한 코드가 함수에 의해 코드로 보존됨을 보이면 된다.

논제 1-4

$x \geq 0$인 경우와 $x < 0$인 경우로 나누어 정의역의 임의의 원소에 대한 적당한 코드가 함수에 의해 코드로 보존됨을 보이면 된다.

논제 2-1

$o(h)$의 정의를 이용하여 합과 곱이 $o(h)$가 됨을 보이면 된다.

논제 2-2

미분계수의 정의와 제시문 (나)를 이용하면 된다.

논제 2-3

제시문 (라)의 기댓값의 정의와 제시문 (다)에서 지수함수가 무한급수로 표현된다는 것을 이용하면 된다.

논제 2-4

제시문 (라)의 기댓값과 분산의 정의를 이용하면 된다.

배경지식쌓기

1. 확률변수

변수 X가 취할 수 있는 모든 값이 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$이고, X가 이들 값을 취할 확률 $p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_n$이 정해져 있을 때, 이 변수 X를 이산확률변수 또는 확률변수라 한다.

$X=x_1$	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
$P(X=x_1)$	p_1	p_1	p_1	$\cdots$	p_1

2. 확률질량함수

확률변수 X가 취할 수 있는 값이 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$일 때, X의 각 값에 X가 이 값을 취할 확률 $p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_n$을 대응시키는 함수

$$\mathrm{P}(X=x_1)=p_i\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$$

를 확률변수 X의 확률질량함수라고 하며 다음의 성질을 만족한다.

(1) $0 \le \mathrm{P}(X=x_1) \le 1$

(2) $\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(X=x_i)=1$

(3) $\mathrm{P}(a \le X \le b)=\sum_{x=a}^{b}\mathrm{P}(X=x)$

3. 이산확률변수 X의 기댓값(평균)

이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_1)=p_i\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$일 때, X의 기댓값(평균)은

$$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$$

4. 이산확률변수 X의 분산과 표준편차

이산확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x_1)=p_i\ (i=1, 2, 3, \cdots, n)$$

이고 $E(X)=m$일 때,

(1) 분산

$$V(X)=E((X-m)^2)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i$$

(2) 표준편차

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

풀어보기

1. 확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	-1	0	1	2	계
$P(X=x)$	$\frac{3-a}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3+a}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$P(0 \le X \le 2) = \frac{7}{8}$ 일 때, 확률변수 X의 평균 $E(X)$의 값을 구하시오.

(2011 대수능)

2. 표는 $k=0, 1, 2, 3, 4$일 때, $p_k = {}_{30}\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{30-k}$ 의 값을 소숫점 아래 셋째자리까지 나타낸 것이다.

k	0	1	2	3	4
p_k	0.004	0.025	0.073	0.137	0.185

주사위를 30번 던져 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 할 때, 위의 표를 이용하여 $\sum_{r=3}^{30} r\,\mathrm{P}(X=r)$ 의 값을 구하시오.

(2009 전국연합)

3. 이산확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x) = \frac{ax+2}{10} \quad (x=-1,\ 0,\ 1,\ 2\ )$$

일 때, 확률변수 $3X+2$의 분산 $V(3X+2)$ 의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

(2011 대수능)

읽기자료

포아송분포(Poisson Distribution)


Simeon Denis Poisson
(1781~1840)

포아송분포는 프랑스의 물리학자이며, 수학자였던 포아송(Simeon Denis Poisson, 1781~1840)의 업적을 기려 이름지어졌다. 그는 운반수단으로 노새를 이용하고 있던 육군의 한 부대에서 노새에 채여서 사망한 사람들의 수를 연구하다가 시간과 공간 같은 연속적인 측정자원에 걸쳐 이산적인 사상의 모양을 설명해 주는 이산분포를 알아냈다고 전해진다.

다시 말해서 포아송분포는 특정시간 동안 특정사상이 발생했던 평균을 근거로 하여 특정사상의 발생 횟수에 대한 확률을 나타내 주는 분포이다. 다음과 같은 상황들이 대표적으로 포아송분포가 적용될 수 있는 경우들이다.

(1) 시간당 병원에 오는 환자의 평균 수에 근거하여 특정수의 환자가 병원에 올 확률
(2) 특정공장에서 매월 발생하는 산업재해의 수
(3) 생산제품의 표면에 나타나는 불량항목의 수
(4) 경리과에서 발송된 100장의 송장당 발견되는 수학적인 실수의 수
(5) 매일매일 생명보험회사에 접수되는 생명보험금 청구건수
(6) 매월 컴퓨터가 고장나는 횟수

포아송분포를 정의해 주는 매개변수는 그리스문자 λ로 표시되는 분포의 평균이다. 이때 포아송분포의 분산은 λ이고, 표준편차는 $\sqrt{\lambda}$이다. 다음은 포아송분포의 특징이다.

1. 실험은 특정사상이 특정시간 동안이나 면적, 무게, 거리, 부피와 같은 특정공간 내에서 발생하는 횟수를 세는 것으로 구성된다.
2. 특정사상이 주어진 시간이나 공간 내에서 발생하는 횟수는 시간이나 공간의 단위에 비례한다.
3. 특정사상이 단위 시간이나 공간 내에서 발생할 확률은 나머지 단위들에 대하여 독립적이다.
4. 주어진 시간이나 공간은 아주 작은 단위구간으로 나누어질 수 있으며, 그 작은 단위구간에서 특정사상이 두 번 이상 발생할 확률은 아주 작아 무시할 수 있다.
5. 특정시간이나 공간의 단위 동안 발생할 수 있는 특정사상의 평균 혹은 기대치는 그리스문자 λ로 표시된다.
6. 분산은 λ이며, 표준편차는 $\sqrt{\lambda}$로 주어진다.

예를 들어 2시에서 3시 사이에 걸려오는 화재신고전화 횟수가 포아송분포가 되기 위해서는 위의 2, 3, 4 조건이 성립하여야 한다. 만약 이 시간대에 평균 6번의 전화가 온다면 30분 동안에는 평균 3번의 전화, 10분 동안에는 평균 1번의 전화가 온다고 가정할 수 있어야 한다. 이 시간대의 전화 횟수는 다른 시간대에 오는 전화 횟수와는 아무런 상관이 없어야 하고, 이 시간대를 1초라는 아주 작은 단위구간으로 나눌 수 있고, 이 1초 동안에 전화가 2번 이상 올 확률은 거의 없어야 한다.

평균이 λ인 포아송분포에 의해 분포된 확률변수에 대하여, 특정 횟수(X)의 성공적인 사상이 발생할 확률은 다음과 같은 공식에 의하여 구해질 수 있다.

포아송분포방정식(Poisson Equation) $P(X=x\|\lambda)=\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ (λ는 평균발생횟수 또는 기대되는 발생횟수이다.)

예시답안

풀어보기

1. $\mathrm{P}(0 \le X \le 2) = \dfrac{7}{8}$ 이므로

$$\mathrm{P}(X=-1) = \frac{3-a}{8} = \frac{1}{8}$$

$$\therefore\ a=2$$

$$E(X) = -1\times\frac{1}{8}+0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{5}{8}+2\times\frac{1}{8} = \frac{3}{4}$$

2. X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(30,\ \dfrac{1}{6}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{r=0}^{30} r\mathrm{P}(X=r) = 30\times\frac{1}{6} = 5$$

$$\therefore\ \sum_{r=3}^{30} r\mathrm{P}(X=r) = 5-0.025-0.146 = 4.829$$

3. $\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=1$ 에서

$$\frac{-a+2}{10}+\frac{2}{10}+\frac{a+2}{10}+\frac{2a+2}{10}=1$$

$$\frac{2a+8}{10}=1 \qquad \therefore a=1$$

$$E(X)=-1\times\frac{1}{10}+0\times\frac{2}{10}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{4}{10}=1$$

$$E(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{10}+0^2\times\frac{2}{10}+1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{4}{10}=2$$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=1$$

$$\therefore V(3X+2)=3^2\cdot V(X)=9$$

논제 1-1

임의의 실수 x에 대하여 $[x]$를 x보다 크지 않은 최대의 정수라고 하면 $x=[x]+\alpha$ (단, $0\le\alpha<1$)로 나타낼 수 있다. 음이 아닌 정수 n에 대하여 $x_n=[x]+\alpha_n$이라 두자. (단, α_n은 α의 값을 소숫점 아래 n자리까지만 나타낸 것이다.)

$I_n = \left[x_n,\ x_n + \dfrac{1}{10^n}\right]$ 라 하면 $x_n \le x_{n+1} \le x < x_{n+1} + \dfrac{1}{10^{n+1}} \le x_n + \dfrac{1}{10^n}$ 이므로 음이 아닌 모든 정수 n 에 대하여 $x \in I_{n+1} \subset I_n$ 이다. 또한 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{10^n} = 0$ 이므로 I_n 의 길이는 0 으로 수렴한다.

따라서 유리수 끝점인 닫힌구간들의 열 $\{I_0,\ I_1,\ I_2,\ \cdots\}$가 x 의 코드가 되므로 x 는 계산가능하다.

(다른 풀이)

$i)$ x가 유리수일 때

$I_n = \left[x - \dfrac{1}{n+1},\ x + \dfrac{1}{n+1}\right]$ 라 두면 음이 아닌 정수 n에 대해 $x \in I_{n+1} \subset I_n$이고 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2}{n+1} = 0$ 이므로 n이 커짐에 따라 I_n의 길이는 0으로 수렴한다. 따라서 유리수 끝점인 닫힌구간들의 열 $\{I_0,\ I_1,\ I_2,\ \dots\}$이 x의 코드가 되므로 x는 계산가능하다.

$ii)$ x가 무리수일 때

적당한 정수 n이 존재하여 $n < x < n+1$ 이다. $I_0 = [n,\ n+1]$ 이라 하자. 구간 I_0의 길이는 1 이다. 구간 I_0를 이등분하여 무리수 x가 속한 구간을 I_1 이라 하자.

구간 I_1의 길이는 $\dfrac{1}{2}$ 이다. 같은 방법으로 I_1을 이등분하여 무리수 x가 속한 구간을 I_2라 하자. 구간 I_2의 길이는 $\dfrac{1}{2^2}$ 이다. 이와 같이 하여 I_{n-1}을 이등분하여 무리수 x가 속한 구간을 I_n 이라 하자. 구간 I_n의 길이는 $\dfrac{1}{2^n}$ 이다.

$\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ 이므로 n이 커짐에 따라 구간 I_n의 길이는 0으로 수렴한다. 따라서 유리수 끝점인 닫힌구간들의 열 $\{I_0,\ I_1,\ I_2,\ \dots\}$이 x의 코드가 되므로 x는 계산가능하다.

$i)$, $ii)$에 의해 임의의 실수 x는 계산가능한 수이다.

논제 1-2

$x \ge 0$ 인 임의의 실수 x 에 대하여 $\sqrt{x} = [\sqrt{x}] + \alpha$ (단, $0 \le \alpha < 1$)로 나타낼 수 있다. 음이 아닌 정수 n 에 대하여 $x_n = [\sqrt{x}] + \alpha_n$ 이라 두자. (단, α_n 은 α의 값을 소수점 아래 n자리까지만 나타낸 것이다.)

음이 아닌 정수 n 에 대하여 $I_n = \left[(x_n)^2,\ \left(x_n + \dfrac{1}{10^n}\right)^2\right]$ 로 두면 $x \in I_{n+1} \subset I_n$ 이고

$\lim_{n\to\infty} \left\{\left(x_n + \dfrac{1}{10^n}\right)^2 - x_n^2\right\} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{10^n}\left(2x_n + \dfrac{1}{10^n}\right) = 0$ 이므로 닫힌구간들의 열 $\{I_0,\ I_1,\ I_2,\ \cdots\}$은 x 의 코드가 된다.

함수 $f(x)=\sqrt{x}$ 는 증가함수이고 $x_n^2 \le x_{n+1}^2 \le x < \left(x_n+\frac{1}{10^n}\right)^2 \le \left(x_{n+1}+\frac{1}{10^{n+1}}\right)^2$ 이므로 음이 아닌 모든 정수 n 에 대하여 $f(x) \in f(I_{n+1}) \subset f(I_n)$이다.

또한 $\lim_{n\to\infty}\left\{f\left(\left(x_n+\frac{1}{10^n}\right)^2\right)-f(x_n^2)\right\}=\lim_{n\to\infty}\left(x_n+\frac{1}{10^n}-x_n\right)=0$ 이므로 $f(I_n)$ 의 길이는 0 으로 수렴한다. 따라서 유리수 끝점인 닫힌구간들의 열 $\{f(I_0), f(I_1), f(I_2), \cdots\}$은 $f(x)$ 의 코드가 되므로 $f(x)$ 는 계산가능하다.

(다른 풀이1)

임의의 음이 아닌 실수 x 에 대해 $\sqrt{x}$ 는 [논제1-1]에 의해 계산가능한 수이다. 그러므로 $\sqrt{x}$ 의 적당한 코드 $\{I_0,\ I_1,\ I_2,\ \ldots\}$이 존재한다. 코드 $\{I_0,\ I_1,\ I_2,\ \ldots\}$의 모든 닫힌구간의 양끝점을 음이 아닌 실수로 만들기 위해 다음과 같은 닫힌구간들의 열을 생각하자.

$$\{J_0,\ J_1,\ J_2,\ \ldots\},\ J_n = I_n \cap \{x \mid x \ge 0\}$$

코드 $\{I_0,\ I_1,\ I_2,\ \ldots\}$의 정의에 의해 닫힌구간들의 열 $\{J_0, J_1, J_2, \ldots\}$도 $\sqrt{x}$ 의 코드이다.
닫힌구간 J_n 을 $J_n=[a_n,\ b_n]$ $(a_n,\ b_n \ge 0)$이라 두고 다음의 닫힌구간들의 열을 생각하자.

$$\{K_0, K_1, K_2, \ldots\},\ K_n=\left[(a_n)^2,\ (b_n)^2\right]$$

$(a_n)^2 \le (a_{n+1})^2 \le x < (b_n)^2 \le (b_{n+1})^2$ 이므로 음이 아닌 모든 정수 n 에 대하여 $x \in K_{n+1} \subset K_n$ 이다. 또한 $\lim_{n\to\infty}(b_n^2-a_n^2)=\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)(b_n+a_n)=0$ 이므로 K_n 의 길이는 0 으로 수렴한다. 따라서 유리수 끝점인 닫힌구간들의 열 $\{K_0,\ K_1,\ K_2,\ \ldots\}$은 x 의 코드이다. $f(K_n)=J_n$ 이므로 적당한 x 의 코드 $\{K_0,\ K_1,\ K_2,\ \ldots\}$에 대하여 닫힌구간들의 열 $\{f(K_0),\ f(K_1),\ \cdots\}$ 은 $\sqrt{x}$ 의 코드이다. 그러므로 함수 $f(x)=\sqrt{x}$ 는 계산가능하다.

(다른 풀이2)

함수 $f(x)=\sqrt{x}$ $(f:\mathbb{R}\to\mathbb{R})$의 정의역은 $\{x\in\mathbb{R} \mid x \ge 0\}$.

$i)$ $\sqrt{x}$가 유리수일 때

$x=0$일 때, $I_n=\left[0,\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]$ 으로 두자. 그러면 0의 코드 $\{I_0,\ I_1,\ I_2,\ \cdots\}$에 대하여, $\{f(I_0),\ f(I_1),\ f(I_2),\ \cdots\}$이 $f(0)$의 코드가 된다. 또한 $\sqrt{x}$가 0이 아닌 유리수일 때는 $I_n=\left[x,\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 x\right]$로 두자. 그러면 $x \in I_{n+1} \subset I_n$이고, n이 커짐에 따라 I_n의 길이가 0으로 수렴한다. 또한 $f(I_n)=\left[\sqrt{x},\ \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\sqrt{x}\right]$이므로 $\{f(I_0),\ f(I_1),\ f(I_2),\ \cdots\}$이 $f(x)$의 코드가 된다.

$ii)$ $\sqrt{x}$가 무리수일 때

$\sqrt{x}>0$이고 $\lim_{k\to\infty}k=\infty$이므로 $k<\sqrt{x}<k+1$를 만족하는 음이 아닌 정수 k가 존재한다. 이제 $I_0=[k^2,\ (k+1)^2]$로 두자. $k<\sqrt{x}<k+1$인 무리수이므로 $\sqrt{x}$는 닫힌구간 $\left[k,\ k+\frac{1}{2}\right]$, 닫힌구간 $\left[k+\frac{1}{2},\ k+1\right]$ 중 하나에만 속한다. 이때 $\sqrt{x}$가 닫힌구간 $\left[k,\ k+\frac{1}{2}\right]$에 속하면 $I_1=\left[k^2,\ \left(k+\frac{1}{2}\right)^2\right]$으로 두고 $\sqrt{x}$가 닫힌구간 $\left[k+\frac{1}{2},\ k+1\right]$에 속하면 $I_1=\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)^2,\ (k+1)^2\right]$으로 두자. 마찬가지로 $\sqrt{x}$는 닫힌구간 $\left[k,\ k+\frac{1}{4}\right]$, $\left[k+\frac{1}{4},\ k+\frac{1}{2}\right]$, $\left[k+\frac{1}{2},\ k+\frac{3}{4}\right]$, $\left[k+\frac{3}{4},\ k+1\right]$ 중의 하나에만 속한다. 여기서 $\sqrt{x}$가 속하는 그 닫힌구간이 $\left[k+\frac{j}{4},\ k+\frac{j+1}{4}\right]$이면 $I_2=\left[\left(k+\frac{j}{4}\right)^2,\ \left(k+\frac{j+1}{4}\right)^2\right]$로 두자. 계속되는 자연수 n에 대하여 이러한 방식으로 I_n을 정하면 I_n은 다음의 형태를 가진다;

$$I_n=\left[\left(k+\frac{j}{2^n}\right)^2,\ \left(k+\frac{j+1}{2^n}\right)^2\right]\ (j\text{는 } 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n-1 \text{ 중의 하나})$$

이때, $(I_n\text{의 길이})=\left(k+\frac{j+1}{2^n}\right)^2-\left(k+\frac{j}{2^n}\right)^2=\frac{1}{2^n}\left(2k+\frac{j+1}{2^n}+\frac{j}{2^n}\right)<\frac{1}{2^n}(2k+2)=\frac{k+1}{2^n}$이므로 n이 커짐에 따라 I_n의 길이가 0으로 수렴한다. 또한 I_n을 정한 방식에 의하여 음이 아닌 정수 n에 대하여 $x\in I_{n+1}\subset I_n$이고 $\{f(I_0),\ f(I_1),\ f(I_2),\ \cdots\}$이 $f(x)$의 코드가 된다.

$i)$, $ii)$ 에 의해서 함수 $f(x)=\sqrt{x}$는 계산가능하다.

논제 1-3

임의의 두 실수 x,y에 대하여 $x=[x]+\alpha$, $y=[y]+\beta$ (단, $0\le\alpha<1$, $0\le\beta<1$)로 나타낼 수 있다. 음이 아닌 정수 n에 대하여 $x_n=[x]+\alpha_n$, $y_n=[y]+\beta_n$이라 두자. (단, α_n, β_n은 각각 α,β의 값을 소숫점 아래 n자리까지만 나타낸 것이다.) $I_n=\left[x_n,\ x_n+\frac{1}{10^n}\right]$, $J_n=\left[y_n,\ y_n+\frac{1}{10^n}\right]$라 하면 $\{I_0\times J_0,\ I_1\times J_1,\ \cdots\}$은 $(x,\ y)$의 코드이다. 따라서 $\{f(I_0\times J_0),f(I_1\times J_1),\cdots\}$가 $f(x,y)$의 코드임을 증명하면 된다.

$i)$ $x=0,y=0$인 경우

$I_n=\left[0,\frac{1}{10^n}\right]$, $J_n=\left[0,\frac{1}{10^n}\right]$으로 두면 $\{I_0,I_1,I_2,\cdots\}$, $\{J_0,J_1,J_2,\cdots\}$은 각각 x,y의 코드이

고 $f(I_n \times J_n) = \left[0, \dfrac{1}{10^n}\right]$ 라 두면 $\{f(I_0 \times J_0),\ f(I_1 \times J_1),\ \cdots\}$ 은 $xy=0$ 의 코드가 되므로 $f(x,y)=xy$ 는 계산가능하다.

$ii)$ x, y 둘 중 하나만 0 인 경우

만약 $x=0$ 이고 $y \neq 0$ 라면 ⅰ)과 유사한 방법으로 $I_n = \left[0, \dfrac{1}{10^n}\right]$, $J_n = \left[y_n,\ y_n + \dfrac{1}{10^n}\right]$ 으로 두면 $\{I_0,\ I_1,\ I_2,\ \cdots\}$, $\{J_0,\ J_1,\ J_2,\ \cdots\}$은 각각 x, y 의 코드이고

$f(I_n \times J_n) = \left[0,\ \dfrac{1}{10^n}\left(y_n + \dfrac{1}{10^n}\right)\right]$라 두면 $\{f(I_0 \times J_0), f(I_1 \times J_1), \cdots\}$ 은 $xy=0$ 의 코드가 되므로 $f(x,\ y)=xy$는 계산가능하다.

$iii)$ x, y 의 부호가 같은 경우

만약 $x>0, y>0$ 이면 x_n, y_n 의 정의에 의해 $x_n y_n \le xy < \left(x_n + \dfrac{1}{10^n}\right)\left(y_n + \dfrac{1}{10^n}\right)$이므로

$f(x,y) \in f(I_n \times J_n) = \left[x_n y_n, \left(x_n + \dfrac{1}{10^n}\right)\left(y_n + \dfrac{1}{10^n}\right)\right]$ 이다. 또한 $x_n \le x_{n+1}$, $y_n \le y_{n+1}$ 에서

$x_n y_n \le x_{n+1} y_{n+1}$ 이고, $x_{n+1} + \dfrac{1}{10^{n+1}} \le x_n + \dfrac{1}{10^n}$, $y_{n+1} + \dfrac{1}{10^{n+1}} \le y_n + \dfrac{1}{10^n}$ 에서

$\left(x_{n+1} + \dfrac{1}{10^{n+1}}\right)\left(y_{n+1} + \dfrac{1}{10^{n+1}}\right) < \left(x_n + \dfrac{1}{10^n}\right)\left(y_n + \dfrac{1}{10^n}\right)$이므로,

$$f(I_{n+1} \times J_{n+1}) \subset f(I_n \times J_n)$$

또 $f(I_n \times J_n)$의 구간 길이는 $\left(x_n + \dfrac{1}{10^n}\right)\left(y_n + \dfrac{1}{10^n}\right) - x_n y_n = \dfrac{1}{10^n}(x_n + y_n) + \dfrac{1}{10^{2n}}$ 으로 n 이 커지면 0 으로 수렴한다. 따라서 $\{f(I_0 \times J_0),\ f(I_1 \times J_1),\ \cdots\}$ 은 $xy=0$ 의 코드가 되므로 $f(x,y)=xy$ 는 계산가능하다.

$x<0,\ y<0$ 인 경우도 위와 같은 방법으로 보여줄 수 있으므로 $f(x,y)=xy$ 는 계산가능하다.

$iv)$ x, y 의 부호가 다른 경우

$x<0,\ y>0$의 경우만 생각해도 일반성을 잃지 않는다.

그러면 x_n, y_n 의 정의에 의해 $x_n\left(y_n + \dfrac{1}{10^n}\right) < xy < y_n\left(x_n + \dfrac{1}{10^n}\right)$이므로

$f(x,y) \in f(I_n \times J_n) = \left[x_n\left(y_n + \dfrac{1}{10^n}\right), y_n\left(x_n + \dfrac{1}{10^n}\right)\right]$ 이다.

또, $x_{n+1} \ge x_n$, $x_{n+1} + \dfrac{1}{10^{n+1}} < x_n + \dfrac{1}{10^n}$, $y_{n+1} \ge y_n$, $y_{n+1} + \dfrac{1}{10^{n+1}} < y_n + \dfrac{1}{10^n}$ 로부터

$f(I_{n+1} \times J_{n+1}) \subset f(I_n \times J_n)$ 이고 $f(I_n \times J_n)$의 구간의 길이는 $\dfrac{1}{10^n}(y_n - x_n)$ 으로 n 이 커지면

0 으로 수렴한다.

따라서 $\{f(I_0\times J_0), f(I_1\times J_1), f(I_2\times J_2), \cdots\}$ 는 $f(x,y)$ 의 코드가 된다.

$i)\sim iv)$로부터 $f(x,y)=xy$ 는 계산가능하다.

(다른 풀이1)

(1) $x>0$일 때

$\{I_0, I_1, I_2, \cdots\}$ 을 x의 코드라 하고 $J_n = I_n \cap \{x \mid x \ge 0\}$이라 하면 $\{J_0, J_1, J_2, \cdots\}$ 도 x의 코드이다. 모든 음이 아닌 정수 n에 대하여 $f(J_n)=\{1\}$이고 구간 $f(J_n)$의 길이는 0이다. 따라서 x의 코드 $\{J_0, J_1, J_2, \cdots\}$ 에 대하여,

$\{f(J_0), f(J_1), f(J_2), \cdots\}$ 이 $f(x)$의 코드가 되므로 함수 $f(x)$는 계산가능하다.

(2) $x=0$일 때

$I_n = \left[0, \dfrac{1}{n}\right]$이면 닫힌구간들의 열 $\{I_0, I_1, I_2, \cdots\}$ 은 x의 코드가 된다.

모든 음이 아닌 정수 n에 대하여 $f(I_n)=\{1\}$이고 구간 $f(I_n)$의 길이는 0이다. 따라서 x의 코드 $\{I_0, I_1, I_2, \cdots\}$ 에 대하여, $\{f(I_0), f(I_1), f(I_2), \cdots\}$ 이 $f(x)$의 코드가 되므로 함수 $f(x)$는 계산가능하다.

(3) $x<0$일 때

음의 유리수 끝점을 갖는 닫힌구간들의 열 $\{I_0, I_1, I_2, \cdots\}$ 을 x의 코드라 하자. 모든 음이 아닌 정수 n에 대하여 $f(I_n)=\{0\}$이고 구간 $f(I_n)$의 길이는 0이다. 따라서 x의 코드 $\{I_0, I_1, I_2, \cdots\}$ 에 대하여, $\{f(I_0), f(I_1), f(I_2), \cdots\}$ 이 $f(x)$의 코드가 되므로 함수 $f(x)$는 계산가능하다.

(다른 풀이2)

$i)$ $xy=0$일 때

$x=0$경우만 생각해도 일반성을 잃지 않는다.

닫힌구간들의 열 $\{I_0, I_1, I_2, \cdots\}$, $I_n = \left[0, \dfrac{1}{n}\right]$와 $\{J_0, J_1, J_2, \cdots\}$, $J_n = [a_n, b_n]$을 각각 x와 y의 코드라 하자. [논제 1-2]의 닫힌구간들의 열 양끝점을 음이 아닌 실수로 만드는 방법처럼 y가 음이 아닌 실수이면 양끝점이 음이 아닌 실수인 닫힌구간들의 열로, y가 음수이면 양끝점이 음수인 닫힌구간들의 열로 구성된 코드를 만드는 것이 항상 가능하다. 그러므로 $a_n b_n \ge 0$라 두어도 괜찮다.

$0 \le x \le \dfrac{1}{n}$과 $a_n \le y \le b_n$ 에서 $0 \le xy (= f(I_n \times J_n)) \le \dfrac{b_n}{n}$ 또는

$\frac{a_n}{n} \le xy(=f(I_n \times J_n)) \le 0$ 이고 코드의 정의에 의해 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n} = 0$ 이다. 따라서 닫힌구간들의 열 $\{f(I_0 \times J_0), f(I_1 \times J_1), f(I_2 \times J_2), \cdots\}$ 은 $f(x,\ y) = xy = 0$ 의 코드가 된다.

$ii)$ $xy > 0$ 일 때

$x > 0,\ y > 0$ 경우만 생각해도 일반성을 잃지 않는다.

닫힌구간들의 열 $\{I_0, I_1, I_2, \cdots\}$, $I_n = [a_n,\ b_n]$ 와 $\{J_0, J_1, J_2, \cdots\}$, $J_n = [c_n,\ d_n]$ 을 각각 x 와 y 의 코드라 하자. [논제 1-2]의 닫힌구간들의 열의 양끝점을 음이 아닌 실수로 만드는 방법처럼 x 가 양수이면 양끝점이 양수인 닫힌구간들의 열로 구성된 코드를 만드는 것이 항상 가능하다. 그러므로 $a_n < 0$, $b_n < 0$, $c_n > 0$, $d_n > 0$ 라 두어도 괜찮다.

$a_n \le x \le b_n$ 과 $c_n \le y \le d_n$ 에서 $a_n c_n \le xy(=f(I_n \times J_n) \le b_n d_n$ 이고 코드의 정의에 의해 $\lim_{n\to\infty}(b_n d_n - a_n c_n) = \lim_{n\to\infty}\{b_n(d_n - c_n) + c_n(b_n - a_n)\} = 0$이다. 따라서 닫힌구간들의 열 $\{f(I_0 \times J_0),\ f(I_1 \times J_1),\ f(I_2 \times J_2),\ \ldots\}$은 $f(x,\ y) = xy$ 의 코드가 된다.

$iii)$ $xy < 0$ 일 때

$x < 0,\ y > 0$ 경우만 생각해도 일반성을 잃지 않는다.

닫힌구간들의 열 $\{I_0, I_1, I_2, \ldots\}$, $I_n = [a_n,\ b_n]$ 와 $\{J_0, J_1, J_2, \ldots\}$, $J_n = [c_n,\ d_n]$ 을 각각 x 와 y 의 코드라 하자. [논제 1-2]의 닫힌구간들의 열의 양끝점을 음이 아닌 실수로 만드는 방법처럼 x 가 음수이면 양끝점이 음수인 닫힌구간들의 열로 구성된 코드를 만드는 것이 항상 가능하다. 그러므로 $a_n,\ b_n < 0,\ c_n,\ d_n > 0$ 라 두어도 괜찮다.

$a_n \le x \le b_n$ 과 $c_n \le y \le d_n$ 에서 $a_n d_n \le xy(=f(I_n \times J_n)) \le b_n c_n$ 이고 코드의 정의에 의해 $\lim_{n\to\infty}(a_n d_n - b_n c_n) = \lim_{n\to\infty}\{a_n(d_n - c_n) - c_n(b_n - a_n)\} = 0$이다. 따라서 닫힌구간들의 열 $\{f(I_0 \times J_0), f(I_1 \times J_1), f(I_2 \times J_2), \ldots\}$은 $f(x,\ y) = xy$ 의 코드가 된다.

(다른 풀이3)

$i)$ $x = 0$일 때

$I_n = \left[0, \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$으로 두면 $\{I_0, I_1, I_2, \cdots\}$가 $x = 0$의 코드가 된다.

$ii)$ $x > 0$인 유리수일 때

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x}{2^{k+1}} = x$ 이므로 $I_n = \left[\sum_{k=0}^{n}\frac{x}{2^{k+1}},\ 2x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x}{2^{k+1}}\right]$으로 두면 $\{I_0, I_1, I_2, \cdots\}$가 x의 코드가 된다.

$iii)$ $x > 0$인 무리수일 때

임의의 두 무리수 사이에는 유리수가 존재한다는 것을 이용하자. 그러면 임의의 음이 아닌

정수 n에 대하여,

$\sum_{k=0}^{n}\frac{x}{2^{k+1}} < x_n < \sum_{k=0}^{n+1}\frac{x}{2^{k+1}}$이고 $2x-\sum_{k=0}^{n+1}\frac{x}{2^{k+1}} < x'_n < 2x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x}{2^{k+1}}$인 유리수 x_n, x'_n이 각각 존재한다. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x}{2^{k+1}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{x}{2^{k+1}} = x$이므로 $I_n = [x_n, x'_n]$으로 두면 $\{I_0, I_1, I_2, \cdots\}$가 x의 코드가 된다.

$iv)$ $x<0$인 실수일 때

$ii)$, $iii)$ 방법으로 만든, $-x>0$의 코드를 이루고 있는 닫힌구간이 $I_n = [a_n, b_n]$이라고 두자. 그러면 $I'_n = [-b_n, -a_n]$으로 두면 $\{I'_0, I'_1, I'_2, \cdots\}$이 x의 코드가 된다.

정리하면 임의의 실수 x에 대하여 코드가 존재한다. 더 나아가 양의 실수의 코드는 양의 실수구간들로만 이루어진 닫힌구간들로 구성되었고 음의 실수의 코드는 음의 실수구간들로만 이루어진 닫힌구간들로 구성되었다. 이제 $\{[a_n,\ b_n] \mid n$은 음이 아닌 정수$\}$, $\{[c_n,\ d_n] \mid n$은 음이 아닌 정수$\}$를 각각 위의 $i)$~$iv)$ 방법에 의하여 만든 두 실수 x, y의 코드라고 하자. 그러면 음이 아닌 정수 n에 대하여

$f\{[a_n, b_n]\times[c_n, d_n]\} = [\min\{a_nc_n, a_nd_n, b_nc_n, b_nd_n\}, \max\{a_nc_n, a_nd_n, b_nc_n, b_nd_n\}]$

이므로 $\{f(I_0\times J_0), f(I_1\times J_1), f(I_2\times J_2), \cdots\}$이 $f(x,y)$의 코드가 되므로 함수 $f(x,y)=xy$는 계산가능하다.

※ $\min\{a, b, c, d\} =$ (a, b, c, d 중 최솟값), $\max\{a, b, c, d\} =$ (a, b, c, d 중 최댓값)

논제 1-4

임의의 실수 x에 대하여 $x=[x]+\alpha$ (단, $0\le\alpha<1$)로 나타낼 수 있다. 음이 아닌 정수 n에 대하여 $x_n = [x]+\alpha_n$이라 두자. (단, α_n은 α의 값을 소숫점 아래 n자리까지만 나타낸 것이다.) $I_n = \left[x_n,\ x_n+\frac{1}{10^n}\right]$라 할 때 [논제1-1]에서 $\{I_0, I_1, I_2, \cdots\}$가 x의 코드가 됨을 증명하였다.

이제 $\{f(I_0), f(I_1), f(I_2), \cdots\}$이 $f(x)$의 코드가 됨을 보이자.

$i)$ $x\ge 0$일 때

음이 아닌 정수 n에 대하여 $f(I_n)=\{1\}$이고 $f(I_n)$의 구간길이는 0이다.

따라서 $f(x)=1\in f(I_{n+1})\subset f(I_n)$이 성립하므로 $\{f(I_0), f(I_1), f(I_2), \cdots\}$는 $f(x)$의 코드가 된다. 그러므로 $f(x)$는 계산가능하다.

$ii)$ $x<0$일 때

$x< -\frac{1}{10^k}$를 만족하는 최소의 음이 아닌 정수 k를 생각하자.

만약 $n<k$ 인 경우는 $I_n=[x_n,0]$ 이므로 $f(I_n)=\{0,1\}$ 이 되고

$n \ge k$ 이면 $x_n+\dfrac{1}{10^n} \le x+\dfrac{1}{10^k}<0$ 이므로 $I_n=\left[x_n,x_n+\dfrac{1}{10^n}\right]$ 에 대해 $f(I_n)=\{0\}$ 이다.

따라서 $f(x)=0 \in f(I_{n+1}) \subset f(I_n)$ 이 성립하고 $f(I_n)$ 의 구간의 길이는 n 이 충분히 커지면 0 에 수렴하므로 $\{f(I_0),f(I_1),f(I_2),\cdots\}$는 $f(x)$ 의 코드가 된다. 그러므로 $f(x)$ 는 계산가능하다.

$i)$, $ii)$ 에 의해서 함수 f 는 계산가능하다.

(다른 풀이)

$i)$ $x=0$일 때

$I_n=\left[0,\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$으로 두면 $\{I_0,I_1,I_2,\cdots\}$ 가 $x=0$의 코드가 된다. 또한, $f(I_n)=\{1\}$ 이므로 $\{f(I_0),f(I_1),f(I_2),\ldots\}$은 $f(x)$의 코드가 된다.

$ii)$ $x>0$인 유리수일 때

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x}{2^{k+1}}=x$ 이므로 $I_n=\left[\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x}{2^{k+1}},\, 2x-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x}{2^{k+1}}\right]$으로 두면 $\{I_0,I_1,I_2,\cdots\}$가 x의 코드가 된다. 또한, $f(I_n)=\{1\}$ 이므로 $\{f(I_0),f(I_1),f(I_2),\cdots\}$ 은 $f(x)$의 코드가 된다.

$iii)$ $x>0$인 무리수일 때

임의의 두 무리수 사이에는 유리수가 존재한다는 것을 이용하자. 그러면 임의의 음이 아닌 정수 n에 대하여,

$\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x}{2^{k+1}}<x_n<\sum\limits_{k=0}^{n+1}\dfrac{x}{2^{k+1}}$ 이고 $2x-\sum\limits_{k=0}^{n+1}\dfrac{x}{2^{k+1}}<x'_n<2x-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x}{2^{k+1}}$ 인 유리수 x_n, x'_n이 각각 존재한다. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x}{2^{k+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n+1}\dfrac{x}{2^{k+1}}=x$이므로 $I_n=[x_n,x'_n]$으로 두면 $\{I_0,I_1,I_2,\cdots\}$가 x의 코드가 된다. 또한, $f(I_n)=\{1\}$ 이므로 $\{f(I_0),f(I_1),f(I_2),\cdots\}$ 은 $f(x)$의 코드가 된다.

$iv)$ $x<0$인 실수일 때

$ii)$, $iii)$ 방법으로 만든, $-x>0$의 코드를 이루고 있는 닫힌구간이 $I_n=[a_n,b_n]$이라고 두자. 그러면 $I'_n=[-b_n,-a_n]$으로 두면 $\{I'_0,\ I'_1,\ I'_2,\ \cdots\}$이 x의 코드가 된다. 또한, $f(I_n)=[0,0]$이므로 $\{f(I_0),\ f(I_1),\ f(I_2),\ \cdots\}$ 은 $f(x)$의 코드가 된다.

$i)\sim iv)$에 의해서 f는 계산가능하다.

논제 2-1

제시문 [나]에서 $o(h)$는 $\lim_{h\to 0}\left[\frac{o(h)}{h}\right]=0$을 만족하는 함수들을 총칭이다.

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{o(h)+o(h)}{h}\right]=0,\ \lim_{h\to 0}\left[\frac{o(h)^2}{h}\right]=\lim_{h\to 0}\left[\frac{o(h)}{h}\right]^2\times h=0$$

이므로 $o(h)+o(h)=o(h)$, $o(h)^2=o(h)$이다.

논제 2-2

$$\begin{aligned}\frac{d}{dw}g(0,\ w)&=\lim_{h\to 0}\frac{g(0,\ w+h)-g(0,\ w)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{g(0,\ w)g(0,\ h)-g(0,\ w)}{h}\\&=g(0,\ w)\lim_{h\to 0}\frac{g(0,\ h)-1}{h}\end{aligned}$$

이다. $g(0,\ h)=1-\left\{g(1,\ h)+\sum_{x=2}^{\infty}g(x,h)\right\}=1-\lambda h-o(h)-o(h)=1-\lambda h-o(h)$이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{g(0,\ h)-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\lambda h-o(h)}{h}=-\lambda$이다.

따라서 $x=0$에서 미분계수 $\frac{d}{dw}g(0,w)=-\lambda g(0,w)$이다.

논제 2-3

제시문 [나]에서 함수 $f(X)$의 기댓값 $E(f(X))=\sum_{x=0}^{\infty}f(x)g(x,w)$이므로

$E(f(X))=E(e^{tX})=\sum_{x=0}^{\infty}e^{tx}\frac{(\lambda w)^x e^{-\lambda w}}{x!}=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda we^t)^x e^{-\lambda w}}{x!}=e^{-\lambda w}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda we^t)^x}{x!}=e^{-\lambda w}\times e^{\lambda we^t}$

이다. 따라서 $E(f(X))=e^{\lambda w(e^t-1)}$이다.

논제 2-4

확률변수 X의 평균 $E(X)$는 $E(X)=\sum_{x=0}^{\infty}x\,g(x,\ w)$이다. 그러므로 $E(X)$는

$$E(X)=\sum_{x=0}^{\infty}x\frac{(\lambda w)^x e^{-\lambda w}}{x!}=\sum_{x=1}^{\infty}x\frac{(\lambda w)^x e^{-\lambda w}}{x!}=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda w)^{x-1}e^{-\lambda w}}{(x-1)!}\lambda w=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{(\lambda w)^x e^{-\lambda w}}{x!}\lambda w$$

$$=e^{\lambda w}\times e^{-\lambda w}\times\lambda w=\lambda w$$

이다.

확률변수 X의 분산 $V(X)$는 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$ 이다. $E(X^2)$ 은

$$\begin{aligned}E(X^2)&=\sum_{x=0}^{\infty}x^2\frac{(\lambda w)^x e^{-\lambda w}}{x!}=\sum_{x=1}^{\infty}x^2\frac{(\lambda w)^x e^{-\lambda w}}{x!}\\&=\lambda w\sum_{x=1}^{\infty}x\frac{(\lambda w)^{x-1}e^{-\lambda w}}{(x-1)!}=\lambda w\sum_{x=0}^{\infty}(x+1)\frac{(\lambda w)^x e^{-\lambda w}}{x!}\\&=\lambda w\left\{\sum_{x=0}^{\infty}x\frac{(\lambda w)^x e^{-\lambda w}}{x!}+\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda w)^x e^{-\lambda w}}{x!}\right\}=\lambda w\{E(X)+1\}\\&=(\lambda w)^2+\lambda w\end{aligned}$$

이다. $\{E(X)\}^2=(\lambda\omega)^2$ 이므로 확률변수 X의 분산 $V(X)$는

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=(\lambda\omega)^2+\lambda\omega-(\lambda\omega)^2=\lambda\omega$$

이다.

(다른 풀이)

【2-3】에서 $E(e^{tX})=\sum_{x=0}^{\infty}e^{tx}g(x,\,w)=e^{\lambda w(e^t-1)}$이다. 이제 $E(e^{tX})=M(t)$라고 두자. 그러면

i) $M(0)=1$

ii) $\frac{dM}{dt}=M'(t)=\sum_{x=0}^{\infty}xe^{tx}g(x,\,w)=\lambda we^t e^{\lambda w(e^t-1)}=\lambda we^t M(t)$이므로

$$M'(0)=E(X)=\lambda w$$

iii) $M''(t)=\sum_{x=0}^{\infty}x^2e^{tx}g(x,\,w)=\lambda we^t M(t)+\lambda we^t M'(t)$이므로

$$M''(0)=E(X^2)=\lambda w+(\lambda w)^2$$

iv) $V(X)=E(X-E(X))^2=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\lambda w+(\lambda w)^2-(\lambda w)^2=\lambda w$

따라서 $E(X)=V(X)=\lambda w$이다.

7 서강대학교 수시(자연, 전자, 기계)

제 시 문 1 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

[가] 좌표평면 위의 임의의 점 $P(x, y)$를 그 좌표평면 위의 점 $P'(x', y')$으로 옮기는 함수를 변환이라고 하고 $f:(x, y) \to (x', y')$으로 나타낸다. 좌표평면의 원점을 O로 표시하자. 그러면 평면 위의 한 점 P는 원점 O에 대한 점 P의 위치벡터 $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$와 일대일대응이다. 따라서 변환 f는 위치벡터 $\vec{p}$를 위치벡터 $\vec{p'}$으로 옮기는 함수로 볼 수 있고 이것을

$$f:\vec{p} \to \vec{p'} \text{ 또는 } \vec{p'} = f(\vec{p})$$

로 나타낸다. 일반적으로 임의의 위치벡터 $\vec{p}, \vec{q}$에 대하여

$$|f(\vec{p}) - f(\vec{q})| = |\vec{p} - \vec{q}|$$

를 만족시키는 변환 f를 합동변환이라고 한다. 여기서 $|\vec{p} - \vec{q}|$는 벡터 $\vec{p} - \vec{q}$의 크기, 즉 두 위치벡터 $\vec{p}, \vec{q}$의 종점의 거리를 의미한다. 따라서 합동변환이란 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 보존하는 변환을 말한다. 합동변환의 대표적인 예로는 평행이동, 회전이동 및 대칭이동을 들 수 있다. 또한 변환 $f:\vec{p} \to \vec{p'}$와 $g:\vec{p'} \to \vec{p''}$가 합동변환이면 f와 g의 합성변환 $g \circ f:\vec{p} \to \vec{p''}$도 합동변환이다.
한편, 변환 $f:(x,y) \to (x',y')$에서 대응하는 점의 좌표 사이에

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy \quad (a, b, c, d \text{는 상수})$$

와 같이 상수항이 없는 일차식의 관계가 성립할 때, 변환 f를 일차변환이라고 하고 행렬 $[f] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$를 일차변환 f의 행렬이라고 한다. 두 일차변환 f와 g의 합성변환 $g \circ f$도 일차변환이고 세 일차변환의 행렬 사이에는 $[g \circ f] = [g][f]$의 관계가 있다.

[나] 원점 O를 중심으로 θ만큼 회전하는 회전이동을 R_θ라고 하고, 좌표평면 위의 세 점 $P(x,\ y)$, $Q(x,\ 0)$, $R(0,\ y)$가 R_θ에 의하여 각각 P', Q', R'으로 옮겨진다고 하자. 두 점 Q', R'의 좌표는 $Q'(x\cos\theta,\ x\sin\theta)$, $R'(-y\sin\theta,\ y\cos\theta)$이다. 또한 사각형 $OQ'P'R'$이 직사각형이므로 P'의 좌표를 $P'(x',\ y')$이라 하면 $(x',\ y')=(x\cos\theta-y\sin\theta,\ x\sin\theta+y\cos\theta)$이 성립한다. 따라서 회전이동 R_θ는 행렬이 $[R_\theta]=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$인 일차변환이다.

원점 O를 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각이 $\theta/2$인 직선에 대한 대칭이동을 $M_{\theta/2}$라고 하자. 좌표평면 위의 점 $P(x,\ y)$가 $M_{\theta/2}$에 의하여 점 $P'(x',\ y')$으로 옮겨진다고 하면 점 $P'(x',\ y')$은 점 $P(x,\ y)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점 $P''(x,\ -y)$를 원점 O를 중심으로 θ만큼 회전이동한 점과 일치하므로 $(x',y')=(x\cos\theta+y\sin\theta,\ x\sin\theta-y\cos\theta)$가 된다. 따라서 대칭이동 $M_{\theta/2}$는 행렬이 $[M_{\theta/2}]=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$인 일차변환이다.

[다] 영벡터 $\vec{0}$은 원점 O의 위치벡터이다. $f(\vec{0})=\vec{0}$인 합동변환 f를 생각하자. 합동변환 f는 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 보존하므로 임의의 위치벡터 $\vec{p}$에 대하여

$$|f(\vec{p})|=|\vec{p}|$$

가 성립한다. 즉, 변환 f는 위치벡터의 크기를 보존한다. 그런데 두 위치벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$의 내적은 두 벡터의 크기와 거리를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=\frac{1}{2}\left[|\vec{p}|^2+|\vec{q}|^2-|\vec{p}-\vec{q}|^2\right]$$

따라서 임의의 위치벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$에 대하여

$$f(\vec{p})\cdot f(\vec{q})=\vec{p}\cdot\vec{q}$$

가 성립한다. 즉, 변환 f는 위치벡터의 내적도 보존한다. 그러므로 두 점 $E_1(1,\ 0)$, $E_2(0,\ 1)$의 위치벡터 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$가 변환 f에 의하여 각각 $\overrightarrow{e_1'}$, $\overrightarrow{e_2'}$으로 옮겨진다고 하면 두 벡터 $\overrightarrow{e_1'}$, $\overrightarrow{e_2'}$은 서로 수직인 단위벡터이다.

논제 1-1

제시문 [가]와 [나]를 참고하여, 회전이동 R_α 와 대칭이동 $M_{\beta/2}$ 에 대한 합성변환 $R_\alpha \circ M_{\beta/2}$ 와 $M_{\beta/2} \circ R_\alpha$ 가 어떤 합동변환이 되는지 밝히고, 이를 기하학적으로 설명하라.

논제 1-2

합동변환 f 가 $f(\vec{0}) = \vec{0}$ 을 만족시킨다고 하자. 제시문 [다]를 참고하여, 임의의 위치벡터 $\vec{p}$ 에 대한 다음의 등식이 성립하는 이유를 설명하라.

$$f(\vec{p}) = (\vec{p} \cdot \vec{e_1})\overrightarrow{e_1{}'} + (\vec{p} \cdot \vec{e_2})\overrightarrow{e_2{}'}$$

또한, 이를 이용하여 변환 f 가 일차변환임을 증명하라.

논제 1-3

제시문 [가]와 [나]로부터, 회전이동 R_θ 와 대칭이동 $M_{\theta/2}$ 가 일차변환인 합동변환임을 알았다. 역으로, 일차변환인 합동변환은 반드시 회전이동 또는 대칭이동이라는 것을 제시문 [다]를 참고하여 증명하라.

제 시 문 2 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

[가] 이산확률변수 X가 가질 수 있는 값이 x_1, x_2, $\cdots$, x_n이고 각각의 i에 대하여 X가 값 x_i를 가질 확률이 p_i라고 할 때, X가 가질 수 있는 값 x_i와 X가 그 값 x_i를 가질 확률 p_i의 대응 관계를 X의 확률분포라고 한다. 이산확률변수 X의 확률분포는 확률질량함수

$$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i \qquad (i=1,\ 2,\ ,\cdots,\ n) \qquad (☆)$$

또는 확률분포표

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

에 의해 주어진다. X의 확률분포가 이와 같을 때,

$$m=E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i\,\mathrm{P}(X=x_i)$$

를 X의 평균(또는 기댓값)이라고 하고

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2\,\mathrm{P}(X=x_i)$$

를 X의 분산이라고 한다. **그러므로 이산확률변수 X의 평균과 분산을 구하기 위해서는 확률질량함수 또는 확률분포표로 주어지는 X의 확률분포를 알고 있어야 한다.** 이 사실에 기초하여, 이산확률변수 $Y=X-m$의 평균과 분산을 구할 수 있다. X의 확률분포표로부터 Y의 확률분포표는

Y	x_1-m	x_2-m	x_3-m	$\cdots$	x_n-m	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

이다. 따라서 Y의 평균과 분산은 각각 다음과 같다.

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)\,\mathrm{P}(Y=x_i-m)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)p_i=0$$

$$V(Y)=\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-m)-E(Y)\right]^2\,\mathrm{P}(Y=x_i-m)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i=V(X)$$

[나] 어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 $p(0<p<1)$이고 따라서 일어나지 않을 확률이 $q=1-p$이다. 이 시행을 독립적으로 n번 반복할 때, 사건 A가 일어나는 횟수를 X라고 하면 X는 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)={}_nC_x\, p^x q^{n-x} \quad (x=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

으로 주어지는 이산확률변수이다. 이와 같은 X의 확률분포를 이항분포라고 하고 $B(n,p)$로 나타낸다. 제시문 [가]의 정의를 이용하여, X의 평균과 분산을 구하면 다음과 같다.

$$E(X)=np, \quad V(X)=npq$$

[다] 랜덤워크(random walk)는 액체 또는 기체 속에 있는 입자의 불규칙적인 운동이나 예측하기 어려운 주식의 가격변화를 설명하는 데 이용될 수 있는 수리적 모형이다. 가장 간단한 랜덤워크의 예로는 수직선상의 한 점 P가 원점에서 출발하여 오른쪽 또는 왼쪽으로 한 칸씩 임의로 움직이는 것을 들 수 있다. 점 P가 오른쪽으로 움직일 확률을 $p(0<p<1)$, 왼쪽으로 움직일 확률을 $q=1-p$라고 하자. 또한, 점 P가 원점 0의 위치에서 출발하여 독립적으로 n번 임의이동한 후 도착한 위치를 W라고 하자. 그러면 변수 W는 가질 수 있는 값이 유한개이며 각 값에 대하여 확률이 정해져 있는 이산확률변수이다. 예를 들어, 점 P가 다섯 번 이동한다면 W는 $-5, -3, -1, 1, 3, 5$ 중의 하나의 값을 가질 수 있고 각각의 확률은 다음과 같다.

W	-5	-3	-1	1	3	5	합계
$\mathrm{P}(W=w)$	q^5	$5pq^4$	$10p^2q^3$	$10p^3q^2$	$5p^4q$	p^5	1

이 예로부터 W의 확률분포가 이항분포와 밀접한 관계가 있음을 알 수 있다.

논제 2-1

확률질량함수가 제시문 [가]의 (☆)로 주어지는 이산확률변수 X에 대하여,

$$Y=aX+b \quad (a,\ b\text{는 상수이고 } a\neq 0)$$

로 정의된 이산확률변수 Y를 생각하자. Y의 확률질량함수를 구하고, 이를 이용하여 Y의 평균과 분산을 X의 평균과 분산으로 표현하라.

논제 2-2

이산확률변수 X에 대하여, X^2의 평균 $E(X^2)$을 아래 식을 이용하여 구할 수 있는지를 제시문 [가]의 밑줄 친 부분을 근거로 하여 논하라.

$$E(X^2) = V(X) + [E(X)]^2$$

논제 2-3

제시문 [다]에서 정의된 이산확률변수 W의 확률분포가 이항분포 $B(n,p)$와 어떤 관계가 있는지를 설명하고, 이를 이용하여 $E(W)$, $V(W)$ 그리고 $E(W^2)$ 을 구하라.

제시문분석

1. 제시문 1

(가) 변환의 정의부터 시작하여 두 점 사이의 거리를 보존하는 합동변환과 일반적인 일차변환의 정의와 성질에 대하여 설명하고 있다.

(나) 점 $\mathrm{P}(x, y)$ 를 원점을 중심으로 각 θ 만큼 회전하는 회전이동과 원점 O 를 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각이 $\dfrac{\theta}{2}$ 인 직선에 대한 대칭이동은 모두 일차변환이고 각각 행렬 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ 로 나타낼 수 있음을 보이고 있다.

(다) 합동변환은 위치벡터의 크기와 내적도 보존함을 보이고 있다.

2. 제시문 2

(가) 이산확률변수 X의 확률분포를 정의하고 확률분포는 확률질량함수 또는 확률분포표를 이용하여 나타냄을 보이고 있다. 또한 이산확률변수 X에 대하여 평균과 분산을 구하는 방법에 대하여 설명하고 있다.

(나) 이항분포에서의 확률분포, 평균, 분산을 제시하고 있다.

(다) 랜덤워크(random walk)를 이항분포와 연결하여 그 예를 보이고 있으며, 이항분포에서의 평균과 분산을 구하는 방법을 제시하고 있다.

논제분석

논제 1-1

행렬을 이용하여 두 변환의 합성변환을 구하고 기하학적 의미를 설명하도록 하고 있다.

논제 1-2

$f(\vec{0})=\vec{0}$ 을 만족하는 합동변환 f가 일차변환임을 보이는 과정이다.

논제 1-3

일차변환인 합동변환은 반드시 회전이동 또는 대칭이동임을 보이도록 하고 있다.

논제 2-1

이산확률변수 X에 대하여 $Y=aX+b$(a, b는 상수이고 $a\neq 0$)의 확률질량함수와 평균, 분산을 구하도록 하고 있다.

논제 2-2

평균과 분산을 이용하여 확률변수를 제곱했을 때의 평균을 구할 수 있는가를 묻고 있다.

논제 2-3

이항분포에서의 평균과 분산, 제곱의 평균을 묻고 있다.

배경지식쌓기

1. 일차변환의 뜻과 성질

좌표평면 위의 변환 $f:(x, y) \to (x', y')$ 에서

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy \quad (a, b, c, d \text{ 는 상수})$$

와 같이 x', y' 이 상수항이 없는 x, y 에 대한 일차식으로 나타내어질 때, 이 변환 f 를 일차변환이라 하고 이를 행렬로 나타내면

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

이다. 이때 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 를 일차변환 f 를 나타내는 행렬이라 한다.

일차변환 $f: X \to AX$, 즉 $f(X) = AX$ 에서 2×1 행렬 P, Q 에 대하여 다음과 같은 성질이 성립한다.

$$f(P+Q) = f(P) + f(Q)$$
$$f(kP) = kf(P) \quad (k \text{ 는 실수})$$
$$f(kP+hQ) = kf(P) + hf(Q) \quad (k, h \text{ 는 실수})$$

2. 여러 가지 일차변환

(1) 항등변환과 닮음변환

항등변환을 나타내는 행렬 E 는 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이고 k 가 0 이 아닌 실수일 때 원점을 중심으로 하는 k배 닮음변환 K 는 $K = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ 이다.

(2) 대칭변환

x축, y축, 원점, 직선 $y=x$, 직선 $y=-x$ 에 대한 대칭변환을 나타내는 행렬을 각각 X, Y, P, Q, R 라고 하면

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

이다.

(3) 회전변환

원점을 중심으로 각 θ 만큼 회전이동하는 회전변환을 나타내는 행렬은

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

이다.

3. 일차변환의 합성

점 P를 점 Q로 옮기는 변환을 f, 점 Q를 점 R로 옮기는 변환을 g라고 할 때 점 P를 점 R로 옮기는 변환을 합성변환이라 하고 기호로 $g \circ f$로 나타내며 합성변환을 나타내는 행렬은 각 변환을 나타내는 두 행렬의 곱으로 표현한다. 세 일차변환 f, g, h에 대하여 f, g를 나타내는 행렬을 각각 A, B라고 할 때, 다음과 같은 성질이 성립한다.

① 합성변환 $g \circ f$는 일차변환이다.
② 합성변환 $g \circ f$를 나타내는 행렬은 BA이다.
③ $g \circ f \neq f \circ g$
④ $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
⑤ $f \circ i = i \circ f = f$ (i는 항등변환)

풀어보기

1. 두 일차변환 f, g를 나타내는 행렬이 각각 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$일 때, 합성변환 $g \circ f$에 대해 바르게 설명한 것은?

[EBS 수능특강 기하와 벡터 p.36, 2011]

① 원점에 대한 대칭이동
② x축에 대한 대칭이동
③ 직선 $y = x$에 대한 대칭이동
④ 직선$y = -x$에 대한 대칭이동
⑤ 원점을 중심으로 90° 만큼 회전이동

2. 직선 $y = 2x$에 대한 대칭이동을 나타내는 행렬을 구하여라.

[홍성대, 수학의 정석 기하와 벡터, p.74, 2010]

읽기자료

여러 가지 변환

점이나 선 또는 도형과 같은 기하학적인 도형은 일차변환, 대칭변환 등과 같은 여러 가지 기하학적 변환에 의해서 다시 기하학적 도형으로 옮겨진다. 여기서는 일정한 방향으로 비추는 광선으로 한 평면 위에 있는 도형을 비추었을 때 처음 도형과 스크린에 생긴 도형의 관계를 알아본다.

가. 합동변환

평행이 되게 비추는 광선으로 한 평면에 있는 도형을 그 평면과 평행인 평면에 비추었을 때 생긴 도형으로 이 경우 두 도형은 크기와 모양이 똑같다. 이와 같은 변환을 합동변환이라고 한다.

나. 닮음 변환

한 점에서 발사되는 광선으로 한 평면 위에 있는 도형을 그 평면과 평행인 평면에 비추었을 때 생기는 도형으로 처음 평면에 있는 도형과 크기는 다르지만 모양은 같다. 이 경우 두 도형을 닮음인 도형이라 하고 이러한 변환을 닮음변환이라고 한다. 닮음변환에서는 각의 크기는 불변이지만 변의 길이는 일정한 비율로 새로 만들어진다. 축도나 확대도를 만드는 것은 하나의 도형에 닮음변환을 행하는 것이다.

다. 아핀(Affine)변환

평행이 되게 비추는 광선으로 한 평면 위에 있는 도형을 그 도형과 평행이 아닌 평면 위에 비추었을 때 생긴 도형으로 이 경우 모눈은 일정한 비율로 확대되어 평행사변형이 되고 처음의 직각삼각형은 일반 삼각형이 된다. 이와 같은 변환을 아핀변환이라고 한다.

라. 사영변환

한 점에서 발사되는 광선으로 한 평면 위에 있는 도형을 그 평면과 평행이 아닌 평면 위에 비추었을 때 생긴 도형으로의 변환을 사영변환이라고 한다. 이 경우 정삼각형은 일반 삼각형으로 확대된다.

마. 위상변환[8)]

한 점에서 발사되거나 또는 평행인 광선으로 한 평면 위에 있는 도형을 그 평면과 성질이 다른 면(곡면 등)에 비추었을 때 생긴 도형을 생각해보자. 이 경우 생긴 도형과 처음 도형은 모양과 크기가 모두 처음 도형과 다르다.

8) 일반적으로 어떤 도형을 늘이거나 줄이거나 구부리는 것은 가능하나 그 연결 상태는 변하지 않도록 하는 변환을 위상변환이라고 한다.

	합동변환	닮음변환	아핀변환	사영변환	위상변환
점의 위치 관계	○	○	○	○	○
선분 → 선분	○ (길이도 같다)	○ (길이는 변함)	○	○	×
선분의 비	○	○	○ (같은직선에 있을때만)	×	×
각의 크기	○	○	○	×	×
평행 관계	○	○	○	×	×

(○ : 유지한다 × : 유지하지 않는다.)

예시답안

풀어보기

1. 정답 : ⑤

일차변환 f 를 나타내는 행렬을 A, 일차변환 g 를 나타내는 행렬을 B 라고 하면 $g \circ f$ 를 나타내는 행렬은

$$BA=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 90^\circ & -\sin 90^\circ\\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ\end{pmatrix}$$

이므로 합성변환 $g \circ f$는 원점을 중심으로 90° 만큼 회전이동하는 회전변환이다.

2. 점 $\mathrm{P}(x, y)$ 와 직선 $y=2x$ 에 대하여 대칭인 점을 $\mathrm{P}'(x', y')$ 이라고 하면 직선 PP' 은 직선 $y=2x$ 와 수직이므로

$$\frac{y'-y}{x'-x}=-\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

$$\therefore x'+2y'=x+2y$$

한편, 선분 PP' 의 중점을 $y=2x$ 위의 점이므로

$$\frac{y'+y}{2}=2\times\frac{x'+x}{2} \qquad \cdots\cdots ②$$

①, ②를 x', y' 에 관하여 풀면

$$x'=-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y,\ y'=\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y$$

따라서, 구하고자 하는 행렬은 $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & 4\\4 & 3\end{pmatrix}$ 이다.

논제 1-1

$[R_\alpha]=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$, $[M_{\beta/2}]=\begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ \sin\beta & -\cos\beta\end{pmatrix}$ 이므로,

$$[R_\alpha\circ M_{\beta/2}]=[R_\alpha][M_{\beta/2}]=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ \sin\beta & -\cos\beta\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & -\cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}=[M_{(\alpha+\beta)/2}]$$

따라서 합성변환 $R_\alpha\circ M_{\beta/2}$은 대칭변환 $M_{(\alpha+\beta)/2}$와 같다.

이것은 $\mathrm{P}(x, y)$ 를 x축에 대해 대칭이동시킨 후, 그 점을 다시 원점을 중심으로 $\alpha+\beta$만큼 회전이동하는 변환과 일치한다.(그림1)

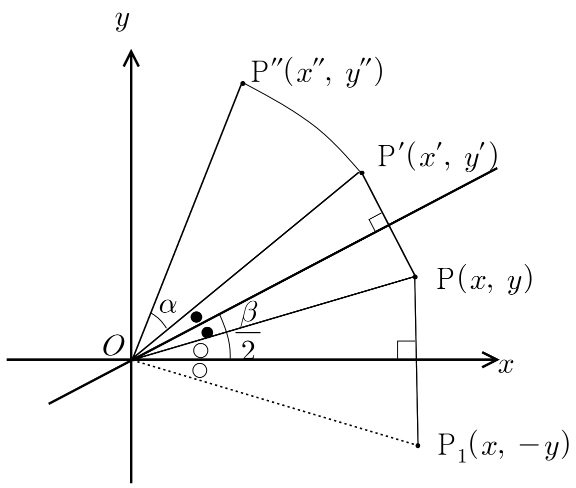


그림 1

마찬가지로, $M_{\beta/2}\circ R_\alpha$를 생각해보면,

$$[M_{\beta/2}\circ R_\alpha]=[M_{\beta/2}][R_\alpha]=\begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ \sin\beta & -\cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta & \sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha\\ \sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha & -\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos(\beta-\alpha) & \sin(\beta-\alpha)\\ \sin(\beta-\alpha) & -\cos(\beta-\alpha)\end{pmatrix}=[M_{(\beta-\alpha)/2}]$$

따라서 합성변환 $M_{\beta/2}\circ R_\alpha$은 대칭변환 $[M_{(\beta-\alpha)/2}]$와 같다.

이것은 $\mathrm{P}(x, y)$ 를 x축에 대해 대칭이동시킨 후, 그 점을 다시 원점을 중심으로 $\beta-\alpha$ 만큼 회전이동하는 변환과 일치한다.(그림2)

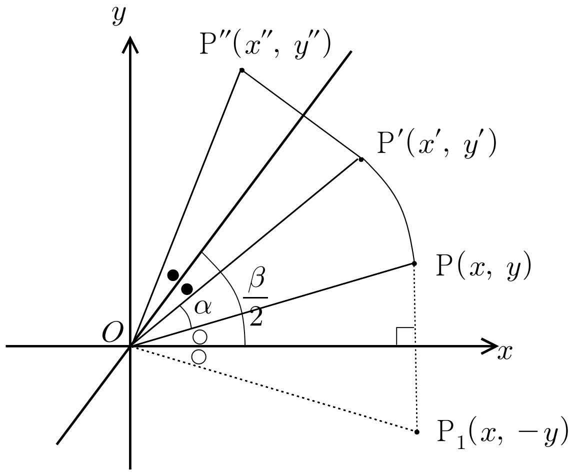


그림 2

논제 1-2

평면위의 $\overrightarrow{P}=(x,\ y)$는 수직인 두 단위벡터 $\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}$에 의해

$$\overrightarrow{P}=(x,\ y)=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}=(\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{e_1})\overrightarrow{e_1}+(\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{e_2})\overrightarrow{e_2}$$

로 나타낼 수 있다. 따라서

$$f(\overrightarrow{P})=(f(\overrightarrow{P})\cdot\overrightarrow{e'_1})\overrightarrow{e'_1}+(f(\overrightarrow{P})\cdot\overrightarrow{e'_2})\overrightarrow{e'_2}$$

이고, 제시문 (다)에 의하면

$$f(\overrightarrow{p})\cdot\overrightarrow{e_1'}=f(\overrightarrow{p})\cdot f(\overrightarrow{e_1})=\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{e_1}\ ,\ f(\overrightarrow{p})\cdot\overrightarrow{e_2'}=f(\overrightarrow{p})\cdot f(\overrightarrow{e_2})=\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{e_2}$$

이므로

$$f(\overrightarrow{p})=\left(f(\overrightarrow{p})\cdot\overrightarrow{e'_1}\right)\overrightarrow{e'_1}+\left(f(\overrightarrow{p})\cdot\overrightarrow{e'_2}\right)\overrightarrow{e'_2}=\left(\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{e_1}\right)\overrightarrow{e_1'}+\left(\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{e_2}\right)\overrightarrow{e_2'}$$

이다. 여기서 $f(\overrightarrow{p})=(x',\ y'),\ \overrightarrow{e_1'}=(a,\ b),\ \overrightarrow{e_2'}=(c,\ d)$ 라고 두면

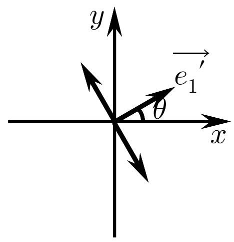
$$(x',y')=x(a,\ b)+y(c,\ d)=(ax+cy,\ bx+dy)$$

그러므로 $x'=ax+cy,\ y'=bx+dy$. 따라서 변환 f는 일차변환이다.

논제 1-3

일차변환 f가 합동변환이고 위치벡터 $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$가 변환 f에 의하여 각각 $\overrightarrow{e_1'},\ \overrightarrow{e_2'}$으로 옮겨진다고 하자. 그러면 두 벡터 $\overrightarrow{e_1'},\ \overrightarrow{e_2'}$은 서로 수직인 단위벡터이므로

$\overrightarrow{e_1'}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$라고 둘 수 있고, 이때



$\overrightarrow{e_2'}=(\cos(\theta+\frac{\pi}{2}),\ \sin(\theta+\frac{\pi}{2}))=(-\sin\theta,\ \cos\theta)$ 또는

$\overrightarrow{e_2'}=(\cos(\theta-\frac{\pi}{2}),\ \sin(\theta-\frac{\pi}{2}))=(\sin\theta,\ -\cos\theta)$.

한편, f가 일차변환이므로 $f(\vec{0})=\vec{0}$이다. 그러므로 [논제 I-2]의 결과에 의해서
$f(\vec{p})=(\vec{p}\cdot\overrightarrow{e_1})\overrightarrow{e_1'}+(\vec{p}\cdot\overrightarrow{e_2})\overrightarrow{e_2'}$이다. 즉,
$(x',y')=x(\cos\theta,\ \sin\theta)+y(-\sin\theta,\ \cos\theta)=(x\cos\theta-y\sin\theta,\ x\sin\theta+y\cos\theta)$ 또는
$(x',y')=x(\cos\theta,\ \sin\theta)+y(\sin\theta,\ -\cos\theta)=(x\cos\theta+y\sin\theta,\ x\sin\theta-y\cos\theta)$. 따라서

$$[f]=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \text{ 또는 } [f]=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}.$$

따라서 일차변환인 합동변환은 반드시 회전이동 또는 대칭이동임을 알 수 있다.

논제 2-1

이산확률변수 Y의 확률질량함수는 $\mathrm{P}(Y=y_i)=p_i\ (y_i=ax_i+b,\ i=1,2,,\ldots,n)$이고 확률분포표는 아래와 같다.

Y	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

Y의 평균 $E(Y)$는 $m=E(Y)=\sum_{i=1}^{n}y_i\mathrm{P}(Y=y_i)=a\sum_{i=1}^{n}x_i\mathrm{P}(X=x_i)+b\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(X=x_i)$이므로
$E(Y)=aE(X)+b$이다. 또한 Y의 분산 $V(Y)$는 $V(Y)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-m)^2\mathrm{P}(Y=y_i)$에서

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-m)^2\mathrm{P}(Y=y_i)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-aE(X)-b)^2\mathrm{P}(X=x_i)=a^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2\mathrm{P}(X=x_i)$$

이므로 $V(Y)=a^2V(X)$이다.

논제 2-2

이산확률변수 X의 분산 $V(X)$는 $V(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2\mathrm{P}(X=x_i)$에서

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2mx_i+m^2)\mathrm{P}(X=x_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\mathrm{P}(X=x_i)-2m\sum_{i=1}^{n}x_i\mathrm{P}(X=x_i)+m^2\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(X=x_i)$$

이므로 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이다. 따라서 $E(X^2)=V(X)+[E(X)]^2$이다.

그러므로 이산확률변수 X의 평균과 분산을 구하기 위해서는 확률질량함수 또는 확률분포표로 주어지는 X의 확률분포를 알고 있어야 한다.

논제 2-3

이산확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따른다고 하자. 그러면 $W=2X-n$이고

$$\mathrm{P}(W=2X-n)=\mathrm{P}(X=x)={}_nC_x\, p^x q^{n-x} \quad (x=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

이다. 따라서,

$$E(W)=2E(X)-n=2(np)-n=2np-n\ ,$$

$$V(W)=2^2\,V(X)=4(npq)=4np(1-p)\ ,$$

$$E(W^2)=V(W)+[E(W)]^2=4np(1-p)+(2np-n)^2=4n(n-1)p^2-4n(n-1)p+n^2$$

8 서울대학교 정시

제 시 문 1 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $\log_2$를 정의하려면 우선 지수함수 $h(t)=2^t$과 그 성질을 알아야 한다.
지수함수의 특성 중 하나는, 양수 a가 주어졌을 때, t에 관한 방정식 $2^t=a$의 근이 하나만 존재하는 것이다. 만약 $2^b=a$이면, $b=\log_2(5)$로 표기하고 b를 2를 밑으로 하는 a의 로그라고 부른다. $y=\log_2 x$는 함수이지만 $\log_2 5$의 근삿값을 구하는 것도 쉬운 일이 아니다. 그럼에도 불구하고 우리는 함수 $\log$의 성질을 지수함수 h의 성질로부터 이끌어낼 수 있다.

(나) 우리는 일상생활에서 '기하급수적으로 증가한다' 또는 '지수함수적으로 증가한다' 라는 표현을 자주 사용한다. 이러한 표현은 지수함수가 다항함수보다 매우 빠르게 증가한다는 뜻을 내포하고 있다. 예를 들어, 짧은 기간에는 이자율이 높은 단리 예금이 더 유리할 수도 있겠지만, 많은 경우에는 단리예금보다 복리예금이 유리할 것으로 기대한다. 이러한 선택의 이면에 있는 수학적인 문제를 생각해 보자.
지수함수와 다항함수의 크기를 비교할 때, 우리는 다음 식

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^a}{e^t}=0 \quad (\text{단, } a\text{는 양의 실수})$$

을 먼저 떠올리게 된다. 이 식의 의미는 주어진 a가 아무리 크더라도 큰 t에 대해서 e^t은 t^a에 비해 비교할 수 없을 정도로 크다는 것이다.
그렇지만 $a>0$가 주어졌을 때, e^t이 t^a보다 작은 경우도 있다는 점에 조심해야 한다 (예: $e^2<2^5$). 따라서 자연스럽게 다음과 같은 미완성 명제를 생각해 볼 수 있다.
미완성 명제: $a>0$일 때, $t>(\quad\quad)$이면, $e^t>t^a$이다.
위의 괄호 안에는 a에 관한 표현이 들어가야 할 것이다.

(다) $a>0$가 주어졌을 때, t에 관한 방정식 $e^t=t^a$의 양의 근이 존재하면(논제 1 참조), 그 중 가장 큰 근을 $f(a)$라고 하자. 즉 b가 $e^b=b^a$을 만족시키는 가장 큰 양수이면 $b=f(a)$이다. 그러면 f를 적당한 실수의 구간을 정의역으로 갖는 함수로 인식할 수 있을 것이다(논제 2 참조). 함수 f를 생각하는 이유는 제시문 (나)의 미완성 명제의 괄호 안에 들어갈 최선의 답이 $f(a)$이기 때문이다. 그러나 $f(a)$를 a의 식으로 달리 표현하는 방법을 모를 뿐만 아니라, 계산기 없이는 $f(5)$의 근삿값을 구하는 것도 쉬운 일이 아니다.

논제 1

$a>0$일 때 t에 관한 방정식 $e^t=t^a$이 몇 개의 양의 근을 갖는 지 설명하시오.

(도움말 : 물론 양의 근의 수는 a에 따라 다를 것이다. $\dfrac{\ln t}{t}$ 또는 $\dfrac{t}{\ln t}$ 또는 $\dfrac{t^a}{e^t}$의 그래프를 생각하시오.)

논제 2

제시문 (다)의 함수 f의 정의역 I를 찾고, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리시오. 만약 변곡점이 존재한다면 변곡점의 좌표를 찾으시오.

논제 3

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x\ln x}=1$임을 보이고, $x\in I$이면 $1\le\dfrac{f(x)}{x\ln x}\le\dfrac{e}{e-1}$임을 설명하시오.

논제 4

$\displaystyle\lim_{A\to\infty}\int_e^A\left(\frac{1}{x\ln x}-\frac{1}{f(x)}\right)dx$를 찾으시오.

제시문분석

1. 제시문

지수함수와 그 역함수인 로그함수는 자연과학 전반은 물론 공학, 사회과학 등 거의 모든 분야에서 중요한 역할을 하고 있다. 일상생활에서도 우리는 '기하급수적으로 증가' 또는 '지수함수적으로 증가' 등의 표현을 자주 사용한다. 상식적으로 이러한 표현은 지수함수가 다항함수보다 매우 크다는 뜻을 내포하고 있다. 그렇지만 경우에 따라서는 지수함수의 함숫값이 다항함수의 함숫값보다 오히려 작을 수도 있다. 이를 분석하기 위해 제시문에서 f라는 이름의 새로운 함수를 정의한다. 함수 f의 성격은 $\log$함수를 처음 정의했을 때와 매우 유사하다. 즉 $\log$함수에 관한 모든 정보를 역함수인 지수함수로부터 이끌어 내는 것처럼, 함수 f도 역함수에 대한 정보만이 주어진 상태이고 이를 통해 함수 f의 성질을 분석할 수 있어야 한다.

논제분석

논제 1

함수 f를 정의하기 위한 사전준비이다. 그래프를 이용해 주어진 방정식의 근의 개수를 조사할 수 있는가를 묻는 문제이다.

논제 2

함수 f의 역함수의 존재를 파악하고, 역함수의 그래프를 이용해 f의 그래프를 그릴 수 있다.

논제 3

함수 f의 성질을 이용하여 부등식과 극한값을 구하는 문제이다.

논제 4

역함수를 이용한 치환 적분을 묻고 있는 논제로서 수학적 개념의 응용력을 측정하고자 하였다.

배경지식쌓기

1. 이계도함수와 미분법

함수 $f(x)$ 에서 $f''(a)=0$ 이고 $x=a$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌면 점 $(a,\ f(a))$ 는 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이다.

2. 치환적분

가. $g(x)=t$ 라 하면 $\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(t)dt$

나. $F(x)$ 가 $f(x)$ 의 부정적분일 때 $\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$(단, $a\neq 0$)

다. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln|f(x)|+C$

라. 특수한 형태의 치환적분

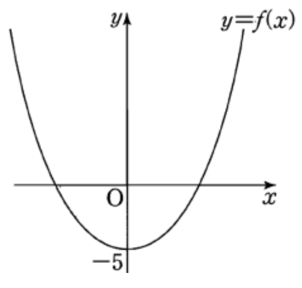
1) $\sqrt{a^2-x^2}$ 꼴의 적분은 $x=a\sin\theta$로 치환

2) $\sqrt{a^2+x^2}$, $\frac{1}{x^2+a^2}$ 꼴의 적분은 $x=a\tan\theta$로 치환

3) $\sqrt{x^2-a^2}$ 꼴의 적분은 $x=a\sec\theta$로 치환

풀어보기

1. 꼭짓점의 좌표가 $(0,-5)$인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 방정식 $|f(x)|-2=\sqrt{4-f(x)}$ 의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.



2. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\dfrac{f'(5)}{f'(3)}$의 값을 구하시오.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다. (나) 함수 $\lvert f(x)-f(1)\rvert$은 오직 $x=a$ $(a>2)$에서만 미분가능하지 않다.

3. 실수 전제의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 모든 실수 x에 대하여 $f(2x)=2f(x)f'(x)$이고, $f(a)=0$, $\displaystyle\int_{2a}^{4a}\frac{f(x)}{x}dx=k$ $(a>0,\ 0<k<1)$ 일 때, $\displaystyle\int_{a}^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx$의 값을 k로 나타낸 것은?

① $\dfrac{k^2}{4}$　　② $\dfrac{k^2}{2}$　　③ k^2

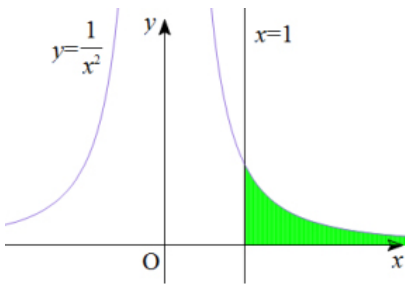
④ k　　⑤ $2k$

읽기자료

이상적분(improper integral)[9)]

"적분과 통계"에서 유한 닫힌구간 $[a, b]$에서 정의된 연속함수 $y=f(x)$에 대하여 정적분 $\int_a^b f(x)\,dx$를 정의하였다. 이번에는 정적분의 개념을 정의역이 무한이거나 f가 구간 $[a, b]$에서 불연속점을 갖는 경우로 확장하여 보자. 이러한 함수의 적분을 이상적분(improper itegral)이라 한다. 이러한 생각의 가장 중요한 응용 가운데 하나는 확률분포이다. 이제 이상적분에 대하여 알아보자.

그림과 같이 곡선 $y=\frac{1}{x^2}$, $x=1$과 x축으로 둘러싸인 영역처럼 정의역이 유한이 아닌 영역의 넓이를 구하는 방법을 알아보자.



무한급수에서 무한히 많은 수들의 합 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$를 부분합 $s_n=\sum_{i=1}^{n} a_i$의 극한으로 정의하여 급수의 합을 구하였다. 이와 같은 생각으로 위의 그림의 도형의 넓이를 다음과 같이 정의한다.

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}dx$$

이 극한값은 $\int_1^t \frac{1}{x^2}dx=[-x^{-1}]_1^t=1-\frac{1}{t}$이므로 $\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}dx=\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)=1$이다. 이 극한값을 함수 $y=\frac{1}{x^2}$의 구간 $[1, \infty)$에서 이상적분이라고 하고, 적분의 상단에 무한대의 기호를 써서 다음과 같은 기호로 나타낸다.

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$$

일반적으로 함수 $f(x)$가 구간 $[a, \infty)$에서 연속이고, 구간 $[a, t]$에서 정적분의 극한

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$$

이 존재할 때, 이 극한값을 함수 $f(x)$의 구간 $[a, \infty)$에서의 이상적분이라고 하고 기호로

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

9) 참조 : 1. calculus 미분적분학. James Stewart
2. 심화수학. 서울대학교.
3. 고급수학. 교육과학기술부.

로 나타낸다. 이때 이상적분 $\int_a^{\infty} f(x)dx$ 는 수렴한다고 한다. 또 극한값이 존재하지 않을 때, 이상적분은 발산한다고 한다. 같은 방법으로 $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$로 정의하고, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$는 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx$로 정의한다.

[예]

구간 $[1,\ \infty)$에서 $s > 1$일 때 $f(x) = \dfrac{1}{x^s}$의 이상적분은 수렴하지만, $g(x) = \dfrac{1}{x}$의 이상적분은 발산함을 보여라.

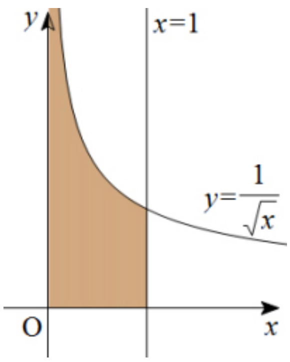
[풀이]

$t \geq 1$인 t에 대하여 $\lim_{t \to \infty} \int_1^t \dfrac{1}{x^s} dx = \dfrac{1}{1-s} \lim_{t \to \infty} (t^{1-s} - 1) = \dfrac{1}{s-1}$ 이다.

따라서 f의 이상적분은 수렴하고, $\int_1^{\infty} \dfrac{1}{x^s} dx = \dfrac{1}{s-1}$ 이다.

또 $\int_1^t \dfrac{dx}{x} = [\ln x]_1^t = \ln t$ 이고 $\lim_{t \to \infty} \ln t = \infty$ 이므로 g의 이상적분은 발산한다.

그림은 함수 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$의 그래프이다. 이 곡선과 $x=1$, x축 그리고 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 방법을 알아보자. 이 경우, 구간은 유한구간이지만 함수 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$은 $x=0$에서 불연속이며 $\lim_{x \to +0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \infty$ 이다. 따라서 정적분으로 $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x}} dx$를 정의할 수는 없다. 그러나 함수 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$은 임의의 양수 ε에 대하여 닫힌구간 $[\varepsilon,\ 1]$에서 연속이고, 이 구간에서 정적분은 $\int_{\varepsilon}^1 \dfrac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_{\varepsilon}^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$ 이다. 그런데,



$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon}^1 \dfrac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2$ 이므로, 비록 함수 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$은 구간 $(0,\ 1]$에서 유한인 함수는 아니지만 이상적분을 다음과 같이 정의하면 된다.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$$

일반적으로 $a<t<b$인 모든 t에 대하여 $\int_t^b f(x)dx$가 존재하고, 극한 $\lim_{t\to a+}\int_t^b f(x)dx$가 존재할 때, 그 극한값을 구간 $(a, b]$에서 함수 $y=f(x)$의 이상적분이라 하고 기호로

$$\int_a^b f(x)dx$$

로 나타낸다. 이때 이상적분 $\int_a^b f(x)dx$는 수렴한다고 한다. 또 극한값이 존재하지 않을 때, 이상적분은 발산한다고 한다. 구간 $[a, b)$와 구간 (a, b)에서도 같은 방법으로 이상적분을 정의한다.

예시답안

풀어보기

1. (i) $f(x)\ge 0$일 때, 주어진 방정식은 $f(x)-2=\sqrt{4-f(x)}$ $\cdots$ ㉠

양변을 제곱하면 $\{f(x)\}^2-4f(x)+4=4-f(x)$, $\{f(x)\}^2-3f(x)=0$, $f(x)=0$ 또는 $f(x)=3$이다.

$f(x)=0$이면 ㉠에서 $-2=2$가 되어 모순이다. $\therefore f(x)=3$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3$은 서로 다른 두 점에서 만나고 교점의 x좌표를 α, β라 하면 방정식 $f(x)=3$의 실근은 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$이다.

(ii) $f(x)<0$일 때, 주어진 방정식은 $-f(x)-2=\sqrt{4-f(x)}$ $\cdots$ ㉠

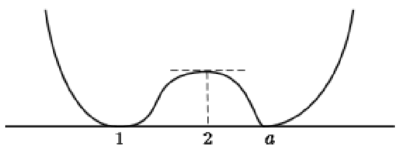
양변을 제곱하면 $\{f(x)\}^2+4f(x)+4=4-f(x)$, $\{f(x)\}^2+5f(x)=0$이다.

$f(x)<0$이므로 $f(x)=-5$이고, 이는 방정식 ㉠을 만족한다.

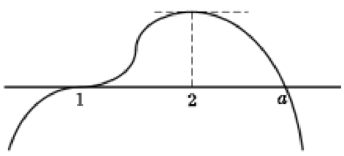
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-5$는 점 $(0,-5)$에서 접하므로 방정식 $f(x)=-5$의 실근은 $x=0$이다.

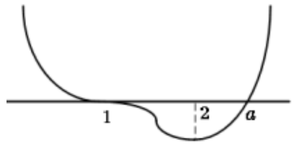
(i), (ii)에서 주어진 방정식의 실근은 α, β, 0의 3개다.

2. $g(x)=f(x)-f(1)$이라 하면 $g(1)=g'(1)=0$, $g'(2)=0$이고 $y=|g(x)|$는 $x=1$에서 극값을 갖는다. 따라서 (나)의 조건에 맞도록 $y=|g(x)|$의 그래프를 그려 보면 아래 그림과 같다.



$y=g(x)$ 의 그래프는 다음 두 가지 경우에 해당한다.





$\therefore\ g'(x)=a(x-1)^2(x-2)=f'(x)\ (a\neq 0).\ \dfrac{f'(5)}{f'(3)}=\dfrac{48a}{4a}=12$

3. 조건에서 $f(a)=0$이고 $f(2x)=2f(x)f'(x)$이므로 $f(2a)=2f(a)f'(a)=0$ 또한 $f(4a)=2f(2a)f'(2a)=0$이다.

$$\int_a^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx=\int_a^{2a}x^{-2}\{f(x)\}^2dx=[-x^{-1}\{f(x)\}^2]_a^{2a}-\int_a^{2a}-x^{-1}\cdot 2f(x)f'(x)dx$$
$$=0+\int_a^{2a}x^{-1}\cdot 2f(x)f'(x)dx=\int_a^{2a}\frac{2f(x)f'(x)}{x}dx=\int_a^{2a}\frac{f(2x)}{x}dx$$

여기서 $2x=t$로 치환하면 $\displaystyle\int_{2a}^{4a}\frac{1}{2}\frac{f(t)}{\frac{1}{2}t}dt=\int_{2a}^{4a}\frac{f(t)}{t}dt=k$

논제 1

$t=1$ 이면 $e=1$ 이 되어야하므로 성립하지 않는다. 따라서 $0<t<1$ 또는 $t>1$의 경우만 생각한다. $e^t=t^a$의 양변에 자연로그를 취하여 정리하면 $a=\dfrac{t}{\ln t}$ 이다. $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ 라 두면 $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$ 이므로 함수 f는 $x=e$에서 극솟값 $f(e)=e$를 갖는다.

또한 $f''(x)=-\dfrac{\ln x-2}{x(\ln x)^3}$ 이므로 함수 f의 변곡점은 점$\left(e^2,\ \dfrac{e^2}{2}\right)$이다.

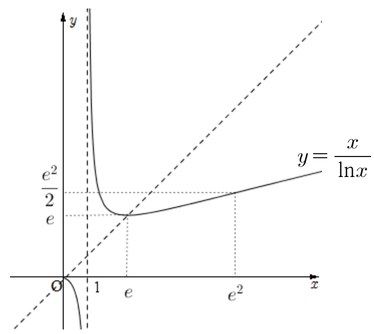
x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	e	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$		$-$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\times$		$\times$		e		$\dfrac{e^2}{2}$	

함수 $y=\dfrac{x}{\ln x}$의 그래프의 개형은 그림과 같고,

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}=\infty\cdots$ ㉠,

$\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{x}{\ln x}=\infty,\ \lim_{x\to 1-0}\frac{x}{\ln x}=-\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{x}{\ln x}=0$이다.



따라서 $e^t=t^a\,(a>0)$에서 양수인 근 t의 개수는 $0<a<e$일 때 0개, $a=e$이면 1개, $a>e$ 이면 2개다.

[$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0\cdots$ ㉠]의 증명

[증명 1] $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

$\ln x=t$ 라 두면 $x=e^t$ 이고 $x\to\infty$ 일 때, $t\to\infty$ 이다. 따라서 준식은 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t}{e^t}$ 를 구하는 문제이다. 그런데 $t>0$ 일 때, $e^t>1+t+\dfrac{t^2}{2}$ 이다. 왜냐하면 $f(t)=e^t-1-t-\dfrac{t^2}{2}$ 라 두면 $f'(t)>0\ (\because e^t>1+t)$이므로 증가함수이다. 따라서 $0=f(0)<f(t)$이다. 즉,

$$0<\frac{t}{e^t}<\frac{t}{1+t+\dfrac{t^2}{2}}\ \to 0\ \ (t\to\infty)$$

따라서 조임 정리에 의해 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t}{e^t}=0$ 이다.

[증명 2]

$f(x)=2\sqrt{x}-\ln x\ (x\ge 1)$라 하자. $f(1)=2>0$이고 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}>0$이므로 $\ln x\le 2\sqrt{x}$ 이다. 따라서 $x\ge 1$에서 부등식 $-2\sqrt{x}\le\ln x\le 2\sqrt{x}$ 이 성립한다. 각 변을 x로 나누면 $-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\le\dfrac{\ln x}{x}\le\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ 이고 $x\to\infty$ 이면 조임 정리에 의해

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

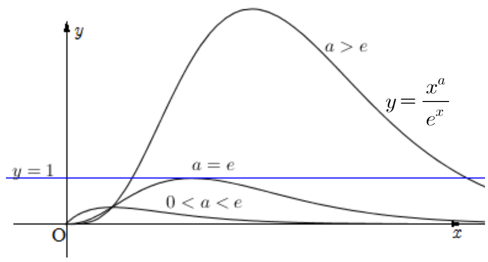
이다.

(논제1 다른 풀이)

$e^t=t^a$에서 $\dfrac{t^a}{e^t}=1$ 이므로 t에 관한 방정식 $e^t=t^a\ \ (t>0)$의 실근의 개수는 $y=\dfrac{x^a}{e^x}\ (x>0)$의 그래프와 $y=1$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

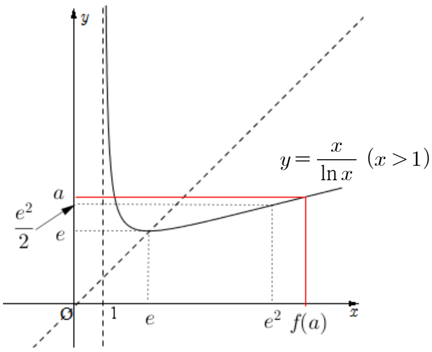
$f(x)=\dfrac{x^a}{e^x}$ 라 두면 $f'(x)=\dfrac{x^{a-1}(a-x)}{e^x}$이므로 $x=a$에서 극댓값 $\left(\dfrac{a}{e}\right)^a$를 갖는다.

그러므로 $0<a<1$일 때 교점의 개수 0개, $a=e$일 때 1개, $a>e$일 때 2개



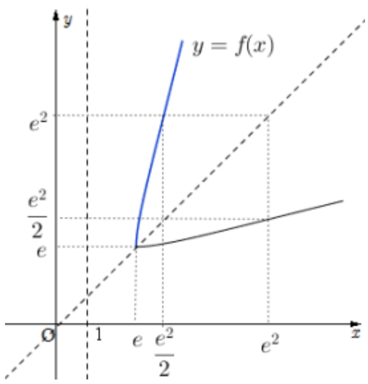
논제 2

제시문(다)에 의해 방정식 $e^t = t^a\,(a>0)$의 양의 실근이 존재해야 하므로 $a \ge e$ 이다. $f(a)$는 양의 실근 중 가장 큰 값이므로 $a=\dfrac{f(a)}{\ln f(a)}$ 이다.



$a \ge e$일 때, $a=\dfrac{f(a)}{\ln f(a)}$ 이므로 함수 f는 함수 $y=\dfrac{x}{\ln x}\,(x \ge e)$의 역함수이다. 따라서 함수 f의 그래프는 함수 $y=\dfrac{x}{\ln x}\,(x \ge e)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시키면 되므로 다음과 같은 그래프를 얻을 수 있다. 이때 $y=\dfrac{x}{\ln x}$ 의 그래프의 변곡점이 $\left(e^2,\ \dfrac{e^2}{2}\right)$이므로 함수 f의 그래프의 변곡점은 $\left(\dfrac{e^2}{2},\ e^2\right)$이다.

그러므로 함수 f의 정의역 I는 $I=\{x|x \ge e\}$이고, 변곡점은 $\left(\dfrac{e^2}{2},\ e^2\right)$이다.



논제 3

① $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x\ln x} = 1$

[논제2]에서 $x = \frac{f(x)}{\ln f(x)}$ 이므로 $f(x) = x\ln f(x)$ 이다. $\ln f(x) = t$ 라 두면 $f(x) = e^t = xt$ 이므로 $\ln x = t - \ln t$ 이다. 따라서

$$\frac{f(x)}{x\ln x} = \frac{x\ln f(x)}{x\ln x} = \frac{\ln f(x)}{\ln x} = \frac{t}{t - \ln t}$$

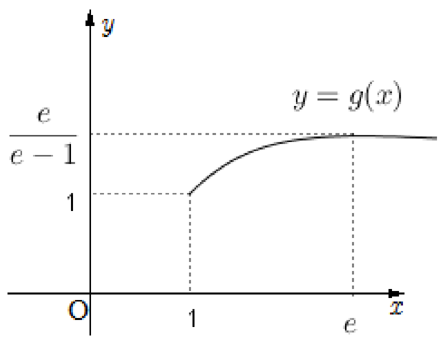
이고, [논제1]의 ㉠에서 $\lim_{t \to \infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ 이므로

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x\ln t} = \lim_{t \to \infty} \frac{t}{t - \ln t} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{1 - \frac{\ln t}{t}} = 1$$

② $1 \leq \frac{f(x)}{x\ln x} \leq \frac{e}{e-1}$

①에서 $\frac{f(x)}{x\ln x} = \frac{t}{t - \ln t}$ 이므로 $y = \frac{f(x)}{x\ln x}\ (x \geq e)$의 그래프와 $y = \frac{x}{x - \ln x}\ (x \geq 1)$의 그래프는 같다. 함수 $g(x) = \frac{x}{x - \ln x}\ (x \geq 1)$ 의 그래프를 그려보자. 도함수

$g'(x) = \frac{x - \ln x - x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(x - \ln x)^2} = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}$ 이고 함수 g는 $x = e$에서 극댓값(최댓값) $\frac{e}{e-1}$ 을 갖는다. $\lim_{x \to \infty} g(x) = 1$ 이므로 함수 g의 그래프는 $y = 1$을 점근선으로 가진다. 그러므로 함수 g의 그래프는 아래와 같다.



그러므로 $1 \leq \frac{f(t)}{t\ln t} \leq \frac{e}{e-1}$ 이다.

논제 4

$$\int_e^A\left(\frac{1}{x\ln x}-\frac{1}{f(x)}\right)dx=\int_e^A\frac{1}{x\ln x}dx-\int_e^A\frac{1}{f(x)}dx$$

에서 $\int_e^A\frac{1}{x\ln x}dx$ 은 $\ln x=t$ 로 치환하면 $\frac{1}{x}dx=dt$이므로

$$\int_1^{\ln A}\frac{1}{t}dt=\ln(\ln A)$$

이고 $\int_e^A\frac{1}{f(x)}dx$ 은 $x=\frac{e^t}{t}$ 로 치환하면

$$\begin{aligned}\int_1^B\frac{1}{e^t}\left(\frac{e^tt-e^t}{t^2}\right)dt&=\int_1^B\left(\frac{t-1}{t^2}\right)dt=\int_1^B\frac{1}{t}dt-\int_1^B\frac{1}{t^2}dt\\&=\ln B+\frac{1}{B}-1\ (\text{단, } A=\frac{e^B}{B})\end{aligned}$$

이다.

$$\lim_{A\to\infty}\int_e^A\left(\frac{1}{x\ln x}-\frac{1}{f(x)}\right)dx=\lim_{A\to\infty}\left\{\ln(\ln A)-\ln B-\frac{1}{B}+1\right\}$$

이고 $A=\frac{e^B}{B}$ 에서 $\ln A=B-\ln B$이므로

$$\lim_{A\to\infty}\left\{\ln(\ln A)-\ln B-\frac{1}{B}+1\right\}=\lim_{B\to\infty}\left\{\ln\left(\frac{B-\ln B}{B}\right)-\frac{1}{B}+1\right\}$$

이다. 그러므로 $\lim_{B\to\infty}\left\{\ln\left(\frac{B-\ln B}{B}\right)-\frac{1}{B}+1\right\}=1$ 이다. 따라서

$$\lim_{A\to\infty}\int_e^A\left(\frac{1}{x\ln x}-\frac{1}{f(x)}\right)dx=1$$

이다.

(다른 풀이)

$$\begin{aligned}\int_e^A\frac{1}{x\ln x}dx&=\int_1^{\ln A}\frac{1}{t}dt\ \left(\ln x=t\text{로 치환하면 }\frac{1}{x}dx=dt\text{이므로}\right)\\&=[\ln t]_1^{\ln A}=\ln(\ln A)\end{aligned}$$

$f(x)=t$ 라 치환하면 $f'(x)dx=dt$ 이고 역함수의 미분법에 의해 $f'(x)=\frac{\{\ln f(x)\}^2}{\ln f(x)-1}$ 이므로

$dx=\frac{dt}{f'(x)}=\frac{\ln t-1}{(\ln t)^2}dt$ 이다. 따라서 $\int_e^A\frac{1}{f(x)}dx=\int_e^{f(A)}\frac{\ln t-1}{t(\ln t)^2}dt$이다.

여기서 $\ln t=m$이라 두면 $\frac{dt}{t}=dm$ 이므로

$$\int_e^A \frac{1}{f(x)}dx = \int_e^{f(A)} \frac{\ln t - 1}{t(\ln t)^2}dt = \int_1^{\ln f(A)} \frac{m-1}{m^2}dm$$

$$= \left[\ln m + \frac{1}{m}\right]_1^{\ln f(A)} = \ln(\ln f(A)) + \frac{1}{\ln f(A)} - 1$$

즉,

$$\int_e^A \left(\frac{1}{x\ln x} - \frac{1}{f(x)}\right)dx = \int_e^A \frac{1}{x\ln x}dx - \int_e^A \frac{1}{f(x)}dx = \ln(\ln A) - \ln(\ln f(A)) - \frac{1}{\ln f(A)} + 1$$

이다. 여기서 $A = \dfrac{f(A)}{\ln f(A)}$ 이므로 $\ln(\ln A) - \ln(\ln f(A)) = \ln\dfrac{\ln A}{\ln f(A)} = \ln\dfrac{A\ln A}{f(A)}$ 이다.

따라서 $\displaystyle\lim_{A\to\infty}\int_e^A \left(\frac{1}{x\ln x} - \frac{1}{f(x)}\right)dx = \lim_{A\to\infty}\left\{\ln\frac{A\ln A}{f(A)} - \frac{1}{\ln f(A)} + 1\right\}$이고 [논제 3]에서

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x\ln x} = 1$ 임으로 보였으므로 $\displaystyle\lim_{A\to\infty}\ln\frac{A\ln A}{f(A)} = 0$이고 [논제 1]에서 $f(x)$가 증가함수임을

보였으므로 $\displaystyle\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\ln f(A)} = 0$이다. 따라서 구하는 극한값은 1이다.

9 성균관대학교 모의

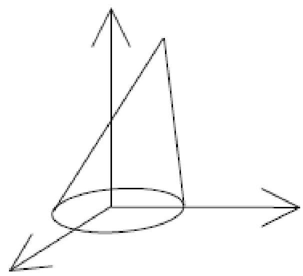
제 시 문 1-1 다음 <제시문1-1>을 읽고 [문제1- i]에 답하시오.

좌표공간에서 y 축에 수직인 평면으로 자른 입체의 단면의 넓이가 $S(y)$ 일 때, $c \le y \le d$ 범위에서 입체의 부피 V는 다음과 같이 적분으로 표현된다.

$$V = \int_c^d S(y)\,dy$$

논제 1- i

좌표 공간에서 밑면의 반지름의 길이가 2 이고 높이가 2 인 비스듬한 원뿔 꼴 A 가 주어져 있다. 원뿔 꼴 A 의 부피를 구하여라.(A 를 $xy-$좌표평면에 평행한 평면, 즉 z 축에 수직인 평면으로 자른 단면은 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \le (2-z_0)^2$ 인 원판이 되고 이 원판의 중심 (x_0, y_0, z_0) 은 직선 $x=\frac{z}{3}$, $y=0$ $(0 \le z \le 2)$ 위에 있다.)



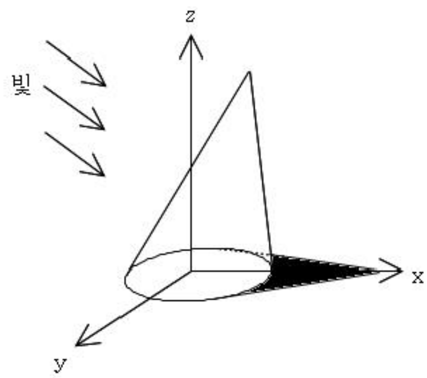
제 시 문 2-1 다음 <제시문2-1>을 읽고 [문제2- i]에 답하시오.

빛은 곧은 직선을 따라 움직인다. 그림자는 빛의 경로에 물체가 있을 때, 빛이 직진하기 때문에 물체에 빛이 통과하지 못하여 생기는 어두운 부분을 말한다.

예를 들어 공간에서 평행한 빛에 의하여 삼각형의 그림자는 삼각형이 되고, 원의 그림자는 원이나 타원이 된다.

논제 2- i

그림과 같이 광원이 무한히 멀리 있어서 빛이 직선 $z=-\frac{3}{5}x$, $y=0$ 과 평행하게 입사하고 있을 때, 원 $\left(x-\frac{z_0}{3}\right)^2+y^2=\left(2-z_0\right)^2$, $z=z_0$의 평면 $z=0$에 비치는 그림자가 만족하는 방정식을 구하여라. 또한 이를 이용하여 [문제1- i]에서 주어진 불투명한 원뿔꼴 A 모양의 입체에 의해 평면 $z=0$ 에 생기는 그림자의 모양을 xy평면위에 그리시오.



제시문분석

1. 제시문<1-1>

축에 수직인 평면에 의해 잘린 입체의 단면의 넓이를 알 때 부피를 구할 수 있는 적분공식을 제시하고 있다.

2. 제시문<2-1>

빛의 직진하는 성질을 언급하고 빛에 의해 생기는 도형의 그림자에 대해 설명하고 있다.

논제분석

논제 1－ⅰ

z 축에 수직인 평면으로 자른 단면에 대한 조건을 제시함으로써 단면의 넓이를 구하게 하고 제시문<1-1>의 식을 이용해 부피를 구하도록 요구하는 문항이다.

논제 2－ⅰ

주어진 직선을 따라 입사하는 빛의 성질을 이용해 주어진 원의 xy-평면위로의 그림자의 모양을 추측하게 하고 이를 구하도록 요구하고 있다. 또 이를 이용해 [문제1-ⅰ]의 원뿔꼴 A 의 $z=0$ 위에 나타나는 그림자 모양을 z_0범위에 따라 도시하라는 문항이다.

배경지식쌓기

1. 직선의 방정식

가) 한 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ 을 지나고 $\vec{u}=(a,\ b,\ c)$ 에 평행한 직선의 방정식 :

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}\ \ (a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0)$$

이고 이때 $\vec{u}$ 를 직선의 방향벡터라고 한다.

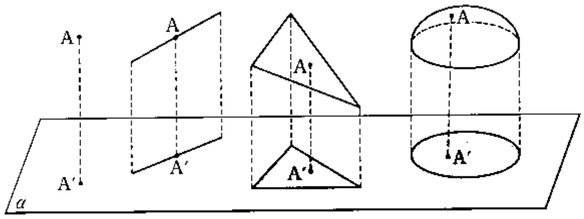
나) 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 를 지나는 직선의 방정식 :

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\qquad (x_1\neq x_2,\ y_1\neq y_2,\ z_1\neq z_2)$$

2. 정사영

평면 α 위에 있지 않는 점 A에서 평면 α에 내린 수선의 발 A′을 점 A의 평면 α 위로의 정사영이라 한다.

일반적으로 공간도형 F의 각 점에서 평면 α에 내린 수선의 발이 그리는 평면도형 F′은 도형 F의 평면 α 위로의 정사영이다.



풀어보기

1. 좌표공간에 두 점 $\mathrm{A}(0,\ -1,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ 1,\ 0)$ 이 있고, xy 평면 위에 원 $x^2+y^2=13$ 이 있다. 이 원 위의 점 $(a,\ b,\ 0)$ $(a<0)$ 을 지나고 z 축에 평행한 직선이 직선 AB 와 만날 때, $a+b$ 의 값은?

(2012 평가원)

① $-\dfrac{47}{10}$　② $-\dfrac{23}{5}$　③ $-\dfrac{9}{2}$

④ $-\dfrac{22}{5}$　⑤ $-\dfrac{43}{10}$

2. 좌표공간에 x축, y축 및 z축에 접하는 구

$$S:\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$$

가 있다. 점 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 3)$에서 구 S에 그은 접선들과 xy평면의 교점으로 이루어진 도형에서 두 점 P, Q를 잡는다. 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값을 M이라 할 때, M^2 의 값을 구하시오.

(2011 대전교육청)

읽기자료

공간도형에서 평면도형으로의 변환 찾기

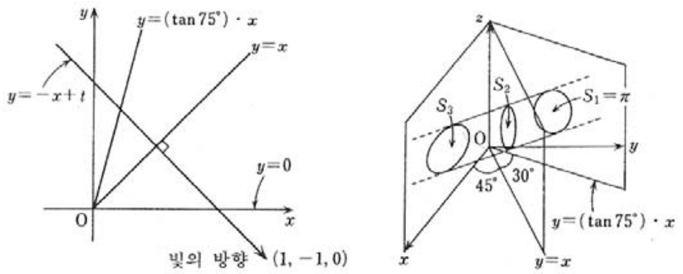
공간도형에 빛을 비출 때에, 어떤 평면 위에 나타나는 그림자의 모양은 완전히 무작위로 비춰지는 것은 아니다. 공간 안의 물체의 점과 그 그림자로 되는 점은 어떤 규칙에 따라 일대일 대응, 또는 다대일 대응하고 있다. 따라서 어떤 물체의 그림자를 조사할 때에는 물체 위의 점과 그림자 위의 점 사이에 성립하는 대응규칙을 찾아보면 된다.

[문제] 매개평면을 이용한 정사영 측정하기

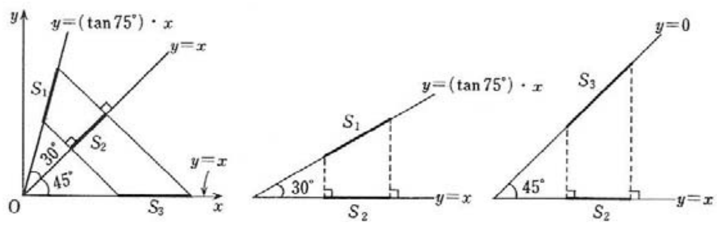
xyz 공간에서 평면 $y=(\tan 75^\circ)x$ 위에 있는 반지름이 1인 원판 A 를 벡터 $(1,\ -1,\ 0)$ 에 평행한 광선 B 로서 평면 $y=0$ 에 비춘다. 이 때, 평면 $y=0$ 위에 나타난 도형 C 의 넓이를 구하여라.

[풀이]

그림자를 생기게 하는 도형이 존재하는 평면이나 그림자가 나타난 평면 모두가 광선에 대해 수직이 아니므로 광선에 수직인 평면을 도입, 그 평면을 매개로 정사영의 넓이를 구한다. 벡터 $(1,\ -1,\ 0)$ 을 법선벡터로 하는 평면의 하나는 $y=x$ 이므로 이 평면을 이용하여 생각한다. 평면 $y=(\tan 75^\circ)x$ 위에 존재하는 반지름 1인 원판 A 의 넓이를 S_1, 광선 B 에 의한 원판 A 의 평면 $y=x$ 로의 정사영의 넓이를 S_2, 도형 C 의 넓이를 S_3 라 한다. 이 때, 넓이 S_1 과 S_2, S_3 사이에 정사영의 관계를 이용할 수 있다.



평면 $y=(\tan 75^\circ)x$ 와 평면 $y=x$ 가 이루는 각이 30°, 평면 $y=x$ 와 평면 $y=0$가 이루는 각이 45° 인 것에 주의하면



$$S_1 = \pi$$

$$S_2 = S_1 \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

$$S_3 = \frac{S_2}{\cos 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}\pi$$

이다.

☛ 점광원에 의한 공간도형 - 점광원으로부터의 빛은 점광원을 중심으로 360° 모든 방향으로 골고루 퍼지는 것이라고 생각하면 된다. 특히, 점광원으로부터 빛을 받게 되는 공간도형이 구나 원인 경우 그림자의 빛은 광원을 꼭짓점으로 하는 원뿔면을 만들어 낸다. 따라서 점광원의 빛에 의한 공간도형의 어떤 평면 α 로의 그림자는 원뿔면을 평면 α 로 자른 단면이 된다. 축과 각 θ 를 이룬 원뿔면을 평면으로 자를 때의 단면은 θ 의 크기에 따라 포물선, 타원, 쌍곡선이 나타난다.

예시답안

풀어보기

1. 정답 ②

직선 AB의 방정식은 $\frac{x-0}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$ 즉, $x=\frac{y+1}{2}=1-z$, 점 $(a,\ b,\ 0)$을 지나고 z축에 평행한 직선 l의 방정식은 $x=a, y=b$이므로 직선 AB와 직선 l의 교점의 좌표를 $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$로 놓을 수 있다.

점 C는 직선 AB 위의 점이므로 $a=\frac{b+1}{2}=1-c$ 이다.

따라서 $a=\frac{b+1}{2}$ 에서 $b=2a-1$이고, 점 $(a,\ b,\ 0)$이 원 $x^2+y^2=13$ 위의 점이므로

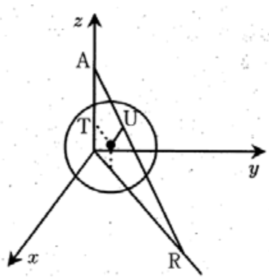
$a^2+b^2=13$이다. $\therefore a^2+(2a-1)^2=13$, $5a^2-4a-12=0$, $(a-2)(5a+6)=0$

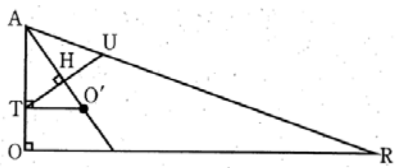
$a<0$이므로 $a=-\frac{6}{5}$ 이고 $b=2a-1=2\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)-1=-\frac{17}{5}$ 이다.

따라서 $a+b=-\frac{6}{5}+\left(-\frac{17}{5}\right)=-\frac{23}{5}$

2. 정답 72

꼭짓점이 A이고 구에 접하는 접선들로 이루어진 직원뿔을 xy평면으로 자른 단면은 타원이므로, 두 점 P, Q는 타원 위의 점이다. 따라서 타원의 장축은 직선 $x=y, z=0$ 위에 존재하고, 장축의 한 끝점은 원점이다. 그림과 같이 원점을 O, 구의 중심을 O′, O′에서 z축에 내린 수선의 발을 T, 원점이 아닌 장축의 다른 끝점을 R, $\overline{\mathrm{AR}}$와 구의 접점을 U, 점 T에서 $\overline{\mathrm{AO'}}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.





$\overline{\mathrm{OT}}=1$, $\overline{\mathrm{AT}}=\overline{\mathrm{AU}}=2$, $\overline{\mathrm{AO'}}=\sqrt{6}$이므로 직각삼각형 ATO′에서 $\overline{\mathrm{TH}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$이고 $\triangle\mathrm{ATU}$에서 제이코사인법칙에 의하여 $\cos(\angle T)=\frac{1}{3}$이다. 직각삼각형 AOR에서 최댓값 $M=\overline{\mathrm{OR}}=6\sqrt{2}$이므로 $M^2=72$이다.

논제 1－ i

밑면의 넓이는 4π 이고 높이는 2 인 비스듬한 원뿔이므로 부피는 $\frac{8}{3}\pi$이다.

(다른 풀이)

z축에 수직인 평면으로 잘랐을 때, 그 단면의 넓이는 문제에서 주어진 바와 같이 $2-z$ $(0 \le z \le 2)$ 를 반지름으로 갖는 원판이 되고 <제시문1-1>에 의하여 부피는

$$V=\int_0^2 \pi(2-z)^2 dz=\frac{8}{3}\pi$$

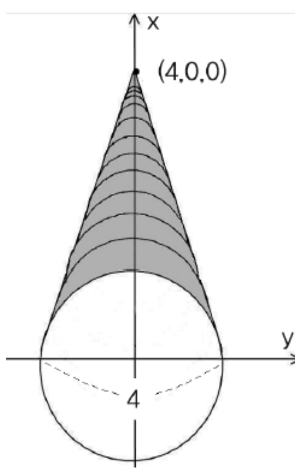
가 된다.

논제 2－ i

먼저 빛이 직선을 따라 움직이므로 $xy-$평면에 평행한 원의 xy평면으로의 그림자가 원이 됨을 알 수 있다.

① 원 $\left(x-\frac{z_0}{3}\right)^2+y^2=(2-z_0)^2$, $z=z_0$ 위의 점 $(x_1,\ y_1,\ z_0)$ 을 지나며 주어진 직선과 평행한 방정식은 $z-z_0=-\frac{3}{5}(x-x_1)$, $y=y_1$ 이 된다. 이 직선이 xy평면과 만나는 점들을 구하면 $x=x_1+\frac{5}{3}z_0$, $y=y_1$, $z=0$ 이 되고 이를 원의 방정식에 대입하면 $(x-2z_0)^2+y^2=(2-z_0)^2$, $z=0$ 이 된다.

② 원뿔꼴의 꼭짓점은 $z_0=2$ 인 경우이므로 이 그림자는 $(4,0,0)$ 이 되고 원뿔꼴의 그림자는 각각의 단면인 원에 의해 생기는 그림자, 즉 반원 $(x-2z_0)^2+y^2=(2-z_0)^2$, $z=0$, $x \ge 2z_0$ 을 $0 \le z_0 \le 2$ 인 범위에서 그린 모양이 된다.



10 성균관대학교 수시(자연1)

제시문 1 다음 제시문을 읽고 [논제 1-1]과 [논제 1-2]에 대해 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

n개의 야구공이 한 상자 안에 들어있고, 이 중에 p개의 공은 결함이 있는 공이다. 야구공의 숫자와 같은 n명의 사람들이 순서대로 공을 하나씩 뽑아서 자기 것으로 가진다고 한다. 한 번 공을 뽑은 사람은 그 공을 다시 상자 안에 넣을 수 없고, 공을 뽑기 전에는 그 공의 결함 여부를 확인할 수 없다. 이 n명의 사람들 중에 민수가 포함되어 있다고 하자.

논제 1-1

$n=7,\ p=4$이고, 민수가 세 번째로 공을 뽑는다고 하자. 첫 번째 사람이 결함이 있는 공을 뽑았을 때, 민수가 결함이 없는 공을 뽑을 확률이 얼마가 되는지 논하시오.

논제 1-2

임의의 n과 p에 대해, 민수가 결함이 없는 야구공을 뽑기 위해서 몇 번째에 야구공을 뽑는 것이 더 유리한지 혹은 순서에 상관이 없는지를 수학적으로 논하시오.

제 시 문 2 다음 제시문을 읽고 [논제 2-1]과 [논제 2-2]에 대해 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

음이 아닌 정수 n 에 대해 수열 θ_n 과 r_n 을 아래와 같이 정의하자.

$$\theta_0 = 0,\ \theta_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\ (n \geq 1)$$

$$r_0 = 1,\ r_n = r_{n-1}\cos\left(\frac{1}{n}\right)\ (n \geq 1)$$

이 두 개의 수열을 이용하였을 때, $xy-$ 좌표평면 위의 점 z_n 이 $\left(r_n\cos\theta_n,\ r_n\sin\theta_n\right)$의 좌표를 가진다고 하자.

논제 2-1

모든 실수 x 에 대해 다음의 부등식이 성립함을 증명하시오.

$$\cos^2 x - 1 + x^2 \geq 0$$

논제 2-2

모든 음이 아닌 정수 n 에 대해 <제시문 2>에서 주어진 점 z_n 이 아래와 같이 정의된 영역 A 에 포함되어 있음을 [논제 2-1]을 이용하여 논하시오.

$$A = \left\{(x,y) \mid \frac{1}{8} \leq x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

제시문분석

1. 제시문1

상자 안에서 한 사람씩 공을 뽑는 규칙을 제시하고 있다.

2. 제시문2

반지름과 각의 수열을 제시하고 이를 이용하여 만든 점의 좌표를 설명하고 있다.

논제분석

논제 1-1

첫 번째 사람이 결함이 있는 공을 뽑았을 때, 세 번째로 뽑는 민수가 결함이 없는 공을 뽑을 확률을 구하라는 문제이다. 두 번째 뽑은 사람이 결함이 있는 공을 뽑은 경우와 결함이 없는 공을 뽑은 경우를 나누어 계산한다.

논제 1-2

임의의 n 과 p 에 대해 민수가 결함이 없는 공을 뽑기 위해서 몇 번째에 야구공을 뽑는 것이 유리한지 혹은 상관이 없는지를 계산하는 문제이다. 상황을 첫 번째 사람이 결함이 있는 공을 뽑은 경우와 그렇지 않은 경우를 나누어 점화식을 만들고 수학적 귀납법을 사용하여 증명한다.

논제 2-1

절대부등식이 성립하는 가를 묻고 있다. y 축에 대칭인 함수의 특징과 미분을 이용하면 풀 수 있다.

논제 2-2

제시문의 z_n 이 영역A 에 포함되어 있음을 설명하는 문제이다. $x^2+y^2={r_n}^2$ 에서 r_n 은 중심이 원점인 원의 반지름이므로 $\frac{1}{8} \le {r_n}^2 \le 1$ 을 보이면 z_n 은 A 영역에 포함된다.

배경지식쌓기

1. 수학적 귀납법

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 (i),(ii)를 보이면 된다.

(i) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면
$n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

이와 같은 방법으로 자연수에 대한 어떤 명제가 참임을 증명하는 것을 수학적 귀납법이라 한다.

2. 확률의 곱셈정리

$\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$일 때, 두 사건 A, B가 동시에 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\cdot\mathrm{P}(A|B)$$

3. 함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능할 때, 그 구간의 모든 x에 대하여

① $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

풀어보기

1. 함수 $f(x)=x^3+6x^2+15|x-2a|+3$이 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값은?

(2010 전국연합)

① $-\dfrac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\dfrac{3}{2}$

④ -1 ⑤ $-\dfrac{1}{2}$

2. 1부터 9까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 주머니에 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수 a, b, c $(a<b<c)$가 다음 조건을 만족시킬 확률은?

(2009 평가원)

(가) $a+b+c$는 홀수이다. (나) abc는 3의 배수이다.

3. 검은 공 3개, 흰 공 2개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 한 개의 공을 꺼내어 색을 확인한 후 다시 넣지 않는다. 이와 같은 시행을 반복할 때, 흰 공 2개가 나올 때까지의 시행 횟수를 X라 하면 $\mathrm{P}(\mathrm{X}>3)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

(2007 평가원)

4. 자연수 N에 대하여 수열 $\{a_n\}$을 $a_n = n(n+1)(n+2)\cdots(n+N-1)$이라 하자.

모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{N+n}{N+1} a_n \quad \cdots\cdots\cdots \ (\bigstar)$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

(1) $n=1$일 때,

(좌변)$= \sum_{k=1}^{1} a_k = a_1 = \boxed{\text{(가)}}$ (우변)$= \frac{N+1}{N+1} a_1 = a_1 = \boxed{\text{(가)}}$

이므로 (★)이 성립한다.

(2) $n=m$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면 $\sum_{k=1}^{m} a_k = \frac{N+m}{N+1} a_m$이다.

$n=m+1$일 때, (★)이 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \frac{N+m}{N+1} a_m + \boxed{\text{(나)}} = \frac{1}{N+1} \times \frac{(m+N)!}{(m-1)!} + \boxed{\text{(나)}}$$

$$= \frac{1}{N+1}\left\{ \boxed{\text{(다)}} \right\} = \frac{N+m+1}{N+1} a_{m+1}$$

그러므로 $n=m+1$일 때도 (★)이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 (★)이 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

(2009 전국연합)

	(가)	(나)	(다)
①	$N!$	$\frac{(m+N)!}{m!}$	$\frac{(m+N-1)!}{m!}$
②	$(N+1)!$	$\frac{(m+N-1)!}{m!}$	$\frac{(m+N)!}{m!}$
③	$N!$	$\frac{(m+N)!}{m!}$	$\frac{(m+N+1)!}{m!}$
④	$(N+1)!$	$\frac{(m+N)!}{m!}$	$\frac{(m+N+1)!}{m!}$
⑤	$N!$	$\frac{(m+N-1)!}{m!}$	$\frac{(m+N)!}{m!}$

읽기자료

1. 심프슨의 역설[10)]

영국의 통계학자인 심프슨(Simpson, E. ; 1910～1961)은 1951년에 여러 개의 그룹을 합쳐 놓았을 때 각 그룹의 우열 관계가 뒤바뀌는 현상에 대하여 주목하였다.

예를 들어 새로 나온 어떤 약이 남녀 모두에게 이전의 약보다 더 좋은 효능을 보인다. 그러나 그 약은 전체적으로 볼 때 효능이 더 떨어진다. 혹은 어떤 회사는 직원을 채용할 때 남자보다 여자를 선호한다. 그러나 전체적으로 볼 때 여성의 채용 비율이 남성에 비하여 더 낮다.

이와 같이 동일하지 않은 가중치를 적용함에 따라 부분에 대한 분석 결과와 전체에 대한 분석 결과가 일치하지 않는 현상을 '심프슨의 역설(Simpson's paradox)'이라고 한다.

어느 대학에서 신입생의 합격률(지원자 수에 대한 합격자 수의 비율)을 조사한 결과, 남학생보다 여학생의 합격률이 더 낮다는 사실을 발견하였다. 학교 당국에서는 이와 같은 결과의 원인이 여학생의 합격률이 더 현저하게 낮은 특정 학과가 있을 것이라고 생각하였으나 실제로 모든 학과에서 여학생의 합격률이 남학생의 합격률보다 높게 나타났다. 통계 처리 과정에서 계산 착오나 정보 누락이 있었을 것 같지만 이와 같은 현상이 실제로 발생할 수 있다.

예를 들어 어느 대학에서 2개 학과의 합격률이 다음과 같다고 하자.

학과	여학생		남학생	
	지원자 수	합격자 수(비율)	지원자 수	합격자 수(비율)
A	50	20(40%)	30	10(33%)
B	40	30(75%)	70	50(71%)
전체	90	50(56%)	100	60(60%)

이 표로부터 다음을 알 수 있다.

- A 학과에서는 여학생의 합격률이 40%로서 남학생의 합격률 33%보다 높다.
- B 학과에서도 여학생의 합격률이 75%로서 남학생의 합격률 71%보다 높다.

그런데 2개 학과를 합하면 전체 여학생의 합격률은 56%로서 전체 남학생의 합격률인 60%보다 낮다. 이와 같이 확률 문제와 관련해서는 사람들의 직관과 반대되는 역설적 상황이 흔히 발생한다.

10) 좋은 책 신사고 '미적분과 통계기본'

2. 인공지능과 조건부 확률[11)]

조건부 확률(conditional probability)을 구하는 공식을 처음 발견한 사람은 영국의 목사이자 수학자인 베이즈(Bayes, T.; 1702～1761)이다. 그가 사망한 후인 1763년에 친구인 철학자 프라이스(Price, R.; 1723～1791)가 베이즈의 연구 결과를 정리하여 책으로 펴내면서 이 공식을 '베이즈의 정리'라고 부르게 되었다.

베이즈가 생각해 낸 이 확률 이론은 컴퓨터 공학 분야 및 수리 통계학자들에 의해 폭넓게 사용되고 있으며 그 개념은 계속해서 확장되고 있다.

이 이론을 바탕으로 한 '베이지안 기계 학습(Bayesian Machine Learning)'이란 것은 조건부 확률 개념을 기반으로 하는 컴퓨터의 독자적 학습 능력을 의미한다.

기존의 컴퓨터는 사람이 프로그램을 한 그대로 동작하였다. 그러나 1990년대 말 컴퓨터에 에이전트(agent)라는 개념이 도입되면서부터 기존의 틀을 벗어나기 시작했다. 에이전트란 컴퓨터가 스스로 학습을 통하여 새로운 지식 데이터베이스를 구축하는 프로세스를 의미한다.

예를 들어 개인용 컴퓨터에 메일을 관리하는 에이전트를 구축해 두면 이것이 사용자의 동작을 관찰하면서 어떤 메일은 열지도 않고 버리는지, 혹은 어떤 메일은 답장을 하는지에 대한 정보를 데이터베이스로 구축할 수 있게 된다. 이렇게 구축된 데이터베이스를 기반으로 메일 관리 에이전트는 사용자가 손쉽게 사용할 수 있도록 받은 메일을 스스로 분류하게 된다. 이런 식으로 컴퓨터도 경험에 의한 학습을 하여 사람이 직접 데이터를 입력하거나 프로그래밍하지 않더라도 새로운 동작이 가능하다.

SF영화의 소재로 컴퓨터가 인간을 지배하는 상황이 자주 등장하는데, 이런 영화가 현실적으로 가능하기 위해서는 컴퓨터가 스스로 인지하고 발전하는 능력이 있어야 한다. 특히 사람이 해낼 수 없는 한계 상황을 극복하며 사람 대신에 여러 가지 역할을 수행하도록 할 목적으로 인공 지능(artificial intelligent)을 갖춘 로봇을 개발하고 있으며, 이 분야에서도 베이지안 기계 학습 이론이 접목되고 있다.

11) 좋은 책 신사고 '미적분과 통계기본'

예시답안

풀어보기

1. 정답 ①

(1) $x > 2a$일 때, $f'(x) = 3x^2 + 12x + 15 > 0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

(2) $x \le 2a$일 때, $f'(x) = 3(x+5)(x-1)$이므로

함수 $f(x)$가 증가하려면 $2a \le -5$, $a \le -\frac{5}{2}$

따라서 실수 a의 최댓값은 $-\frac{5}{2}$이다.

2. $a < b < c$로 순서가 정해져 있기 때문에, 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 가짓수는 ${}_9C_3$이다.

(가) $a+b+c$가 홀수이려면, {짝, 짝, 홀} 또는 {홀, 홀, 홀}

(나) abc가 3의 배수이려면, 적어도 하나는 3의 배수이어야 한다.

이 두 조건을 모두 만족시키기 위해 다음과 같이 생각한다.

i) {짝, 짝, 홀}의 경우

-6이 포함된 경우 홀수는 아무 수나 가능

-6이 포함되지 않은 경우 홀수는 3이나 9만 가능

$\therefore$ (2, 6), (4, 6), (6, 8)에 들어갈 홀수는 5가지 $\rightarrow 3 \times 5 = 15$

(2, 4), (2, 8), (4, 8)에 들어갈 홀수는 2가지 $\rightarrow 3 \times 2 = 6$

ii) {홀, 홀, 홀}의 경우

- 3이 포함되는 경우 나머지 두 개의 공을 꺼내는 가짓수는 ${}_4C_2$
- 9가 포함되는 경우 나머지 두 개의 공을 꺼내는 가짓수는 ${}_4C_2$
- 3, 9가 동시에 포함되는 경우 나머지 한 개의 공을 꺼내는 가짓수는 ${}_3C_1$

$$\therefore {}_4C_2 + {}_4C_2 - {}_3C_1 = 9$$

따라서 i)과 ii)의 가짓수를 모두 더하면 $15+6+9=30$이므로

$$\text{전체 확률} = \frac{30}{{}_9C_3} = \frac{5}{14}$$

3. $P(X>3)=1-P(X\le 3)$에서 $P(X\le 3)=P(X=2)+P(X=3)$

$$P(X=2)=\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10},\ P(X=3)=\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{10}$$

$$\therefore P(X>3)=1-\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{10}\right)=\frac{7}{10}$$

$$\therefore p=10\quad q=7\quad p+q=17$$

4. (1) $n=1$일 때,

$$(\text{좌변})=\sum_{k=1}^{1}a_k=a_1=\boxed{N\,!}\ ,\ (\text{우변})=\frac{N+1}{N+1}a_1=a_1=\boxed{N\,!}$$

이므로 (★)이 성립한다.

(2) $n=m$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면 $\sum_{k=1}^{m}a_k=\frac{N+m}{N+1}a_m$이다.

$n=m+1$일 때, (★)이 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1}a_k=\frac{N+m}{N+1}a_m+\ \ a_{m+1}=\frac{N+m}{N+1}a_m+\boxed{\frac{(m+N)!}{m!}}$$

$$=\frac{1}{N+1}\times\frac{(m+N)!}{(m-1)!}+\boxed{\frac{(m+N)!}{m!}}=\frac{1}{N+1}\left\{\boxed{\frac{(m+N+1)!}{m!}}\right\}=\frac{N+m+1}{N+1}a_{m+1}$$

논제 1-1 [12)]

문제에서 구하고자 하는 확률은 $n=6$, $p=3$일 때, 민수가 두 번째로 야구공을 선택할 때 결함이 없는 야구공을 선택할 확률과 같다. 이 상황의 확률을 구하자.

첫 번째 사람이 결함이 있는 야구공을 선택하고 민수가 결함이 없는 야구공을 선택할 확률은 $\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}$이고, 첫 번째 사람이 결함이 없는 야구공을 선택했을 경우에 확률은 $\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}$이다. 이 둘의 합은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이다.

12) 성균관대 예시답안 참조

논제 1-2

$A_{n,p}(k)$ 를 n 개의 야구공 중에서 p 개의 공에 결함이 있는 상황에서, k 번째 사람이 결함이 있는 공을 뽑을 확률이라고 하자. $A_{n,0}(k)=0$ 이다.

이제 모든 n, p 에 대해, $A_{n,p}(k)=\dfrac{p}{n}$ 라는 사실을 k 에 대한 수학적 귀납법을 사용하여 증명하자.

(i) $k=1$ 인 경우, $A_{n,p}(1)=\dfrac{p}{n}$ 임은 자명하다.

(ii) $k=k_0$ 일 때, 위의 사실이 성립한다고 가정하자.

이때, $A_{n,p}(k_0+1)$ 는 첫 번째 사람이 결함이 있는 야구공을 뽑는 경우와 그렇지 않은 경우로 나뉜다. 각각의 경우가 발생할 확률은 $\dfrac{p}{n}$ 와 $\dfrac{n-p}{n}$ 이다.

첫 번째 경우에 남은 사람의 수는 $n-1$, 남은 결함을 가진 야구공은 $p-1$ 개, 그리고 원래 k_0+1 번째 뽑기로 한 사람은 k_0 번째 뽑게 된다. 이 때 그 사람이 결함이 있는 야구공을 뽑을 확률은 $A_{n-1,p-1}(k_0)$ 이다.

이와 마찬가지로, 두 번째 경우에 원래의 k_0+1 번째에 공을 뽑기로 한 사람이 결함이 있는 야구공을 뽑을 확률은 $A_{n-1,p}(k_0)$ 이다.

따라서 아래의 식이 성립한다.

$$A_{n,p}(k_0+1)=\frac{p}{n}A_{n-1,p-1}(k_0)+\frac{n-p}{n}A_{n-1,p}(k_0)$$

가정에 의해 $A_{n-1,p-1}(k_0)=\dfrac{p-1}{n-1}$ 이고 $A_{n-1,p}(k_0)=\dfrac{p}{n-1}$ 이다.

따라서, $A_{n,p}(k_0+1)=\dfrac{p}{n}\dfrac{p-1}{n-1}+\dfrac{n-p}{n}\dfrac{p}{n-1}=\dfrac{p}{n}$ 이다. 이로부터 우리는 결함이 있는 야구공을 뽑을 확률이 순서에 상관없이 항상 일정함을 알 수 있다.

논제 2-1

$f(x)=\cos^2 x-1+x^2$ 이라고 하면, 이 함수는 y 축에 대칭이므로 $x\ge 0$ 일 때 $f(x)\ge 0$ 임을 보여주면 된다. $f(0)=0$ 이고, $f'(x)=-2\cos x\sin x+2x=2x-\sin(2x)$ 이다. 따라서 $f'(x)\ge 0$ 을 보이면 충분하다. (혹은 $f(x)=x^2-\sin^2 x$ 이므로 $x\ge\sin x$ 임을 보이면 충분하다.) $f'(0)=0$ 이고, $f''(x)=2-2\cos(2x)\ge 0$ 이므로 $f'(x)\ge 0$ 이다.

논제 2-2

주어진 관계식에서 $r_n = \cos(1)\cos\left(\frac{1}{2}\right)\cdots\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ 이다.

우선, $|\cos(x)| \le 1$ 이므로 ${r_n}^2 \le 1$ 이다.

그리고 $1 < \frac{\pi}{3} = 1.04\cdots$이므로 $\cos(1) > \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ 이다.

[논제 2-1]의 결과를 이용하면

$$
\begin{aligned}
{r_n}^2 &\ge \cos^2(1)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)\cdots\left(1-\left(\frac{1}{n}\right)^2\right) \\
&\ge \cos^2(1)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = \cos^2(1)\frac{n+1}{2n} > \frac{1}{2}\cos^2(1) > \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

따라서 ${r_n}^2 \ge \frac{1}{8}$ 이고, 점 z_n 은 영역 A 에 포함되어 있다.

11 성균관대학교 수시(자연2)

제시문 1 다음 <제시문 1-1>부터 <제시문 1-2>를 읽고 물음에 답하시오.

〈제시문 1-1〉 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 다항식일 때, 이 함수를 다항함수라 하고, $f(x)$가 x에 대한 분수식일 때, 이 함수를 분수함수라 한다.

〈제시문 1-2〉 분수함수는 두 다항함수의 몫으로 나타나므로 분모를 0으로 하지 않는 모든 실수에서 연속이다.

〈제시문 1-3〉 다항함수 $p(x)=\sum_{n=0}^{5} a_n x^n = \left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)(x-4)(x-\alpha)(x-\beta)$라고 하자. 여기서 α와 β는 0이 아닌 실수이다.

〈제시문 1-4〉 다항함수 $q(x)=\sum_{n=0}^{5} a_{5-n} x^n$이라고 하자.

논제 1 – i

2가 아닌 모든 실수 c에 대하여 $\lim_{x \to c} \frac{p(x)}{q(x)}$가 존재하도록 <제시문 1-3>의 α와 β의 값을 구하시오.

논제 1 – ii

위에서 구한 α와 β를 대입한 후, $\lim_{x \to 3} \frac{p(x)}{q(x)}$의 값을 구하시오.

제시문 2 다음 <제시문 2-1>을 읽고 물음에 답하시오.

〈제시문 2-1〉 $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$이고 $T=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$라고 하자.

논제 2- i

$Te_1 = e_1 + e_2$, $Te_2 = e_2 + e_3$, $Te_3 = e_3$ 일 때, 행렬 T를 구하시오.

논제 2- ii

$D = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, 0 \le x_i \le 1, \; i = 1, \; 2, \; 3 \right\}$ 일 때, [문제 2-i]에서 구한 행렬 T에 대하여

$T(D) = \{ Ty \mid y \in D \}$ 의 부피를 구하시오.

제시문분석

제시문 1

분수함수의 정의, 연속성, 다항함수 $p(x)$와 $q(x)$의 관계에 대하여 설명하고 있다.

제시문 2

표준단위벡터와 3×3행렬에 대하여 설명하고 있다.

논제분석

논제 1- i

두 방정식 $p(x) = 0$, $q(x) = 0$의 근들 사이의 관계를 알아내고, 문제의 조건을 이용하여 α, β의 값을 구하면 된다.

논제 1- ii

$p(x)$와 $q(x)$의 공통인수를 약분하여 극한값을 구하면 된다.

논제 2－ⅰ

간단한 행렬 곱의 계산으로 구하면 된다.

논제 2－ⅱ

3×3행렬은 공간상의 함수로 생각할 수 있다. $T(D)$를 z축에 평행한 평면으로 자른 단면을 이용하여 부피를 구하면 된다.

배경지식쌓기

1. 함수의 극한에 대한 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$($\alpha$는 실수)일 때,

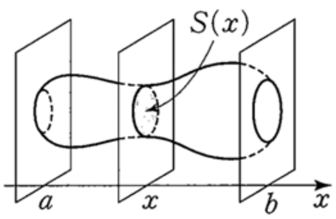
(1) $\lim_{x\to a}g(x)=0$ 이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$ 이다.

(2) $\alpha\neq0$ 이고 $\lim_{x\to a}f(x)=0$ 이면 $\lim_{x\to a}g(x)=0$ 이다.

2. 표준단위벡터

$\mathbb{R}^n$ 에서 단위벡터들 $e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n$ 을 정의할 수 있는데, 여기서 e_i는 i번째 성분은 1이고 그 외의 성분을 0으로 갖는 벡터이다. 이 벡터들을 표준단위벡터(standard unit vector)라고 한다.

3. 입체도형의 부피



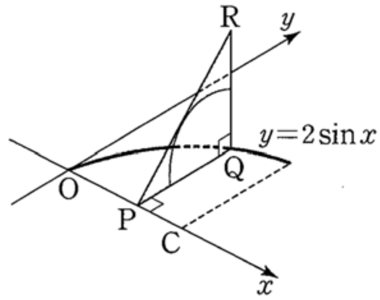
닫힌구간 $[a, b]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 연속함수 $S(x)$로 표현되는 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_a^b S(x)dx$$

풀어보기

1. 다항함수 $f(x)$ 가 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-2x^3}{x^2}=1$, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오.

2. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(x,\ 0)$, $\mathrm{Q}(x,\ 2\sin x)$를 이은 선분을 한 변으로 하고, 좌표평면에 수직으로 세운 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}$을 만족하는 직각이등변삼각형 PQR의 내부중에서 점 Q가 중심이고 변 PR에 접하는 사분원을 제외한 색칠한 도형을 S라 하자. 점 P가 x축 위를 원점에서 점 $\mathrm{C}\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$까지 움직일 때, 도형 S가 그리는 입체도형의 부피를 구하시오.



3. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$과 $\mathrm{B}(0,\ 1,\ 0)$을 잇는 선분 AB를 z축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 곡면과 두 평면 $z=0$, $z=1$로 둘러싸인 부분의 부피를 구하시오.

읽기자료

일차변환과 고유벡터

2차원 벡터 (x,y)를 2×1행렬로 보아 $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$로 나타내자.

그리고 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 $T(X)=AX$로 정의되는 평면에서 평면으로 가는 함수 $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$을 생각하자.

일차함수 $f(x)=ax$는 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$이며, 실수 α에 대하여 $f(\alpha x)=\alpha f(x)$를 만족시킨다. 이 두 성질이 함수 T에 대하여도 성립하는지 조사하여 보자.

함수 $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$이 임의의 n차원 벡터 $\vec{u}, \vec{v}$와 스칼라 α에 대하여

$$(1)\ T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

$$(2)\ T(\alpha\vec{u}) = \alpha T(\vec{u})$$

를 만족시킬 때, 함수 T를 일차변환이라고 한다. 일차변환에 의하여 두 벡터의 합의 함숫값은 함숫값의 합과 같고 스칼라 곱은 일차변환에 의하여 변하지 않는다. 즉, 일차변환은 덧셈과 스칼라 곱을 변하지 않게 하는 함수이다.

여기에서는 일차변환 T를 $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 또는 $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$인 경우만 생각하기로 하자.

또, 행렬과 벡터를 곱할 때에는 2차원 또는 3차원 벡터를 2×1 또는 3×1행렬로 생각하여 벡터를 행렬의 오른쪽에 곱하는 것으로 생각하기로 하자.

행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$를 $AX=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$로 보내는 함수를 T라 하면, $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$는 일차변환임을 쉽게 알 수 있다.

또, 3차 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$과 $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$에 대하여 $T(X)=AX$로 정의하면, $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$도 일차변환임을 쉽게 알 수 있다.

그러면, 역으로 모든 일차변환이 어떤 행렬과 벡터의 곱으로 표현되는지 알아보자.

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$를 임의의 일차변환이라고 하자. 또, 벡터 (x_1, x_2)를

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

로 나타내자. 그러면, T는 일차변환이므로

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

이다.

그런데 $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$로 놓으면

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

이다. 즉, 일차변환 T에 의하여 결정되는 행렬은 $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$을 1열, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$을 2열로 하여 만든 행렬이다. 3차원 유클리드 공간에서 정의된 일차변환 $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$도 어떤 행렬에 의하여 만들어지는 일차변환으로 나타낼 수 있다. 이때의 행렬은

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

을 각각 1열, 2열, 3열로 하여 만든 행렬인 것을 위와 같은 방법으로 쉽게 증명할 수 있다.

[예제]

2차원 유클리드 공간에서 임의의 벡터를 θ만큼 회전시킨 벡터로 보내는 함수는 일차변환임을 증명하고, 이 일차변환을 나타내는 행렬을 구하여라.

[풀이]

θ만큼 회전시키는 함수를 R_θ라 하자. 그러면, 두 벡터 $\vec{u}, \vec{v}$가 평행사변형을 만든다고 할 때, 이들을 함수 R_θ에 의하여 θ만큼 회전시킨 두 벡터 $R_\theta(\vec{u}), R_\theta(\vec{v})$가 만드는 평행사변형은 처음 평행사변형과 합동이다.

따라서 처음 평행사변형의 대각선은 R_θ에 의하여 대각선으로 회전된다.

또, 스칼라곱은 회전에는 영향을 미치지 않는다.

즉, 임의의 두 벡터 $\vec{u}, \vec{v}$와 스칼라 α에 대하여

$$R_\theta(\vec{u} + \vec{v}) = R_\theta(\vec{u}) + R_\theta(\vec{v}),$$

$$R_\theta(\alpha\vec{u}) = \alpha R_\theta(\vec{u})$$

이므로 $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$은 일차변환이다. 그런데 x축의 단위벡터 (1, 0)을 θ만큼 회전시킨 벡터의 좌표는 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$이고 y축의 단위벡터 (0, 1)을 θ만큼 회전시킨 벡터의 좌표는 $(-\sin\theta,\ \cos\theta)$ 이므로, 구하고자 하는 행렬은

$$R_\theta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix},\ R_\theta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

를 각 1열과 2열로 하는 행렬

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

이다.

행렬 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$에 의하여 유도되는 일차변환 $T(X)=AX$를 생각하자.

우리는 이미 행렬 A의 고윳값은 1과 3이고 이들 고윳값에 대한 고유벡터는 각각 (1, -1)과 (1, 1)임을 알고 있다. 그런데 두 고유벡터는 서로 직교하며 일차독립이다.

임의의 평면벡터를 두 고유벡터의 일차결합으로 나타내면,

$$(x,y)=\frac{x-y}{2}(1,\ -1)+\frac{x+y}{2}(1,\ 1)$$

이다.

따라서

$$\begin{aligned}T(X)&=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\left\{\frac{x-y}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\frac{x+y}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}\\&=\frac{x-y}{2}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\frac{x+y}{2}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\\&=\frac{x-y}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\frac{x+y}{2}\cdot 3\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

이다.

그러므로

$$\mid T(X)\mid^2=\left(\frac{x-y}{2}\right)^2\cdot 2+\left\{\frac{3(x+y)}{2}\right\}^3\cdot 2\ =5(x^2+y^2)+8xy$$

이다. 크기가 1인 벡터 X 중에서 $|T(X)|$는 $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 최대이고 최댓값은 3이며, $x=\frac{\sqrt{2}}{2},y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 최소이며 최솟값은 1이다.

그런데 최댓값과 최솟값을 취하는 벡터는 단위 고유벡터임을 알 수 있고, 최댓값과 최솟값은 고윳값 중에서 최대, 최소인 것을 확인할 수 있다. 행렬 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$에 의하여 유도되는 일차변환은 고윳값이 큰 고유벡터의 방향으로 가장 크게, 그리고 고윳값이 작은 고유벡터의 방향으로 가장 작게 변환한다고 말할 수 있다.

[참고]

일반적으로, n차 정사각행렬 $A=(a_{ij})$의 원소 사이에 모든 i,j에 대하여, $a_{ji}=a_{ij}$인 행렬을 대칭행렬이라고 한다. n차 대칭행렬은 n개의 서로 수직인 고유벡터를 가지며, 일차변환 $T(x)=Ax$는 고윳값 중에서 절댓값이 최대인 고윳값에 대한 고유벡터의 방향으로 가장 크게 변화하며 고윳값의 절댓값이 가장 작은 고윳값에 대응하는 고유벡터의 방향으로 가장 적게 변화한다는 사실이 알려져 있다.

즉, 고윳값 α_i가 $|\alpha_1|\le\cdots\le|\alpha_n|$이고 α_i에 대응하는 고유벡터를 $\overrightarrow{v_i}$라 할 때, 임의의 단위벡터 $\overrightarrow{x}$에 대하여

$$|\alpha_1|\le\ \mid T(\overrightarrow{x})\mid\ \le|\alpha_n|,\ \mid T(\overrightarrow{v_n})\mid\ =|\alpha_n|,\ \mid T(\overrightarrow{v_1})\mid\ =|\alpha_1|$$

이다.

예시답안

풀어보기

1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=1$ 에서 $f(x)=2x^3+x^2+ax+b$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1} \text{ 에서 } \lim_{x\to1}f(x)=2+1+a+b=0$$

$$\therefore\ b=-(a+3) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2x^3+x^2+ax-(a+3)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x^2+3x+a+3)}{x-1}$$

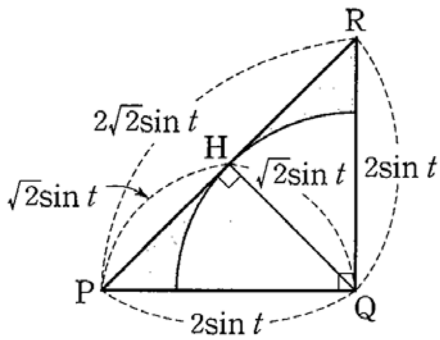
$$=\lim_{x\to1}(2x^2+3x+a+3)=8+a=1$$

$$\therefore\ a=-7$$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=4$

따라서 $f(x)=2x^3+x^2-7x+4$ 이므로 $f(2)=10$ 이다.

2.



점 P의 x좌표가 $t\left(0\le t\le\dfrac{\pi}{2}\right)$일 때 $\overline{\mathrm{PR}}=2\sqrt{2}\sin t$이고 점 H를 접점이라 하면

$$\overline{\mathrm{QH}}=\overline{\mathrm{PH}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{2}\sin t$$

$x=t$일 때 도형 S의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}\times(2\sin t)^2-\frac{\pi}{4}\times(\sqrt{2}\sin t)^2=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sin^2 t$$

따라서 입체도형의 부피 V는

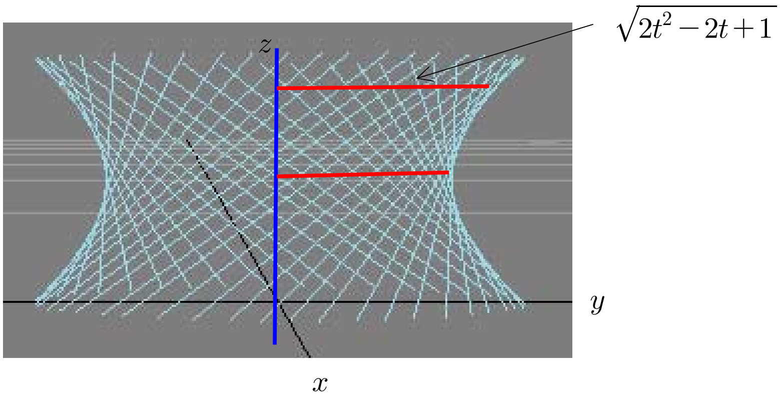
$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}S(t)dt=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=\frac{1}{2}\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\left[t-\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{8}$$

3. 직선 AB의 방정식은 $1-x=y=z$이다. 직선 AB와 $z=t(0\le t\le 1)$의 교점 은 $\mathrm{P}(1-t,\,t,\,t)$이고 점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발은 $\mathrm{Q}(1-t,\,t,\,0)$이다. 이때 이 입체를 $z=t$란 평면으로 잘랐을 때 생기는 단면은 반지름의 길이가 $\sqrt{(1-t)^2+t^2}$인 원이므로 구하려는 입체의 부피는

$$\pi\int_0^1(2t^2-2t+1)dt=\frac{2}{3}\pi$$

이다.



논제 1－ⅰ

$\alpha\beta\ne 0$이므로 $p(0)\ne 0$이다.

우선 $p(x)=0$과 $q(x)=0$의 근들 사이의 관계를 알아보자.

$$p(c)=0 \;\Rightarrow\; a_0+a_1c+a_2c^2+a_3c^3+a_4c^4+a_5c^5=0,\quad c\ne 0$$

$$\Rightarrow c^5\left(a_5+a_4\frac{1}{c}+a_3\frac{1}{c^2}+a_2\frac{1}{c^3}+a_1\frac{1}{c^4}+a_0\frac{1}{c^5}\right)=0$$

$$\Rightarrow q\left(\frac{1}{c}\right)=0$$

따라서 $q(x)=0$의 근들은 2, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$이다.

$c\ne 2$인 모든 실수에 대하여 극한값이 존재하므로

$\left\{\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta}\right\}=\{\alpha,\ \beta,\ 3,\ 4\}$이며, 따라서 $\left\{\frac{1}{3},\ \frac{1}{4}\right\}=\{\alpha,\ \beta\}$ 이다.

논제 1－ii

$q(x)$의 5차항의 계수$=p(x)$의 상수항의 계수$=-\dfrac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)(x-4)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)}{-\frac{1}{2}(x-2)(x-3)(x-4)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)}=\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}(x-2)}$$

이다. 따라서

$$\lim_{x\to 3}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}(x-2)}=-5$$

이다.

논제 2－ i

$$Te_1=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix}=e_1+e_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a=1,\ d=1,\ g=0$$

$$Te_2=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix}=e_2+e_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow b=0,\ e=1,\ h=1$$

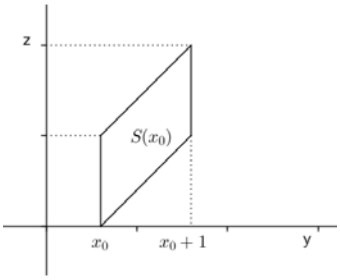
$$Te_3=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix}=e_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow c=0,\ f=0,\ i=1$$

따라서 $T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 이다.

논제 2－ii

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1+x_2 \\ x_2+x_3 \end{pmatrix}$ 라고 하면

$0\le x\le 1$이고 고정된 $x_0\in[0,\ 1]$에 대하여 $x_0\le y\le x_0+1$이다. 따라서 $T(D)$를 평면 $x=x_0$로 자른 단면 $S(x_0)$는 다음과 같다.

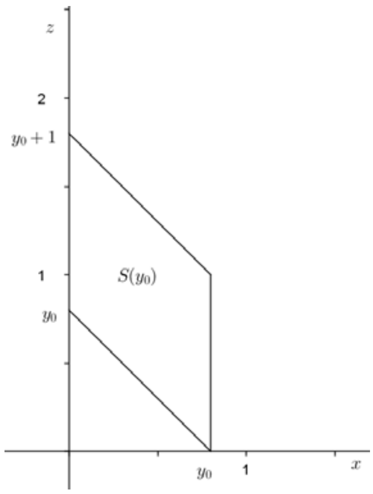


$S(x_0)$의 면적은 1로 일정하므로, $T(D)$의 부피는 1이다.

(다른 풀이)

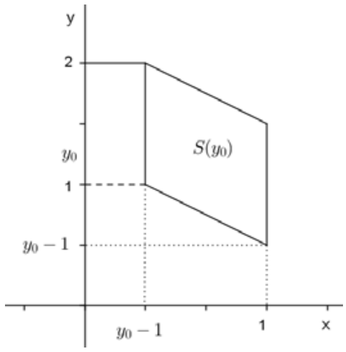
$0 \le y \le 2$이고 고정된 $y_0 \in [0,\ 2]$에 대하여 $T(D)$를 평면 $y=y_0$로 자른 단면 $S(y_0)$는 다음과 같다.

ⅰ) $0 \le y_0 \le 1$인 경우



따라서 $S(y_0)=y_0$이다.

ⅱ) $1 \le y_0 \le 2$인 경우



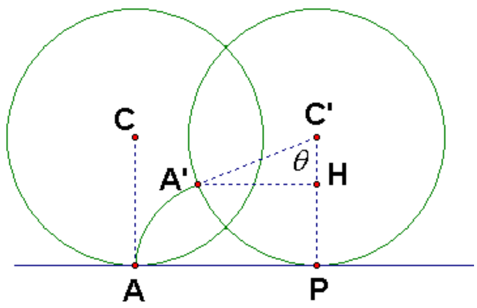
따라서 $S(y_0)=2-y_0$이다.

ⅰ), ⅱ)에 의해 $T(D)$의 부피는 $\int_0^1 y\,dy+\int_1^2 (2-y)dy=1$ 이다.

12 아주대학교 모의

제시문 1

바퀴에 야광패널이 붙은 자전거가 어둠 속에서 지나가면 이 야광패널이 매우 독특한 곡선을 그리게 된다. 이 곡선을 수학적으로 정의하면 싸이클로이드(cycloid)곡선이 된다. 싸이클로이드곡선은 직선 위를 미끄러지지 않고 굴러가는 원 위의 한 점이 그리는 곡선이다. 싸이클로이드곡선을 방정식으로 나타낼 때는 매개변수를 이용한 방정식으로 나타내는 것이 편리하다.



위 그림에서, 원점에서 x 축에 접하고 있는 반지름 r 인 원 C 가 x 축을 따라 오른쪽으로 굴러 이동하여 점 P 에서 접하는 원 C' 이 되었다고 하자, 그리고 원점과 접한 원 위의 점 A 는 이 이동으로 인해 접점 P 로부터 시계방향으로 θ 만큼 돌아간 A' 의 위치에 오게 되었다고 하자. A' 의 좌표를 (x, y) 라 하면 이 싸이클로이드곡선의 방정식은 매개변수방정식

$$x = r(\theta - \sin\theta),\ y = r(1 - \cos\theta)$$

로 주어진다. 이것은 선분 AP 와 원호 $A'P$ 의 길이가 같고 $r\theta$ 이기 때문에

$$x = AP - A'H = r\theta - r\sin\theta = r(\theta - \sin\theta)$$

이고,

$$y = C'P - C'H = r - rcos\theta = r(1 - \cos\theta)$$

이기 때문이다. 이 방정식에 적절하게 적분을 적용하면, 싸이클로이드 곡선의 길이나 싸이클로이드곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구할 수 있다.

미적분학이 개발되기 전인 17세기 초반에 로베르발(Roberval)은 카발리에리(Cavalieri)의 원리를 적용하여 싸이클로이드곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구했다.

카발리에리의 원리. 이탈리아의 수학자 카발리에리가 발견한 원리로서, 두 입체 V_1, V_2 를 정해진 한 평면과 평행인 임의의 평면으로 자를 때, V_1, V_2 의 잘린 부분의 넓이의 비가 항상 $s:t$이면 두 입체 V_1, V_2 의 부피의 비도 $s:t$가 된다.

이 카발리에리의 원리는 두 평면도형 S_1, S_2 와 그 넓이에 대해서도 다음과 같이 성립한다: 정해진 한 직선에 평행인 임의의 직선으로 두 도형 S_1, S_2를 자를 때, S_1, S_2의 잘린 두 선분의 길이의 비가 항상 $s:t$이면 S_1, S_2 넓이의 비도 $s:t$이다.

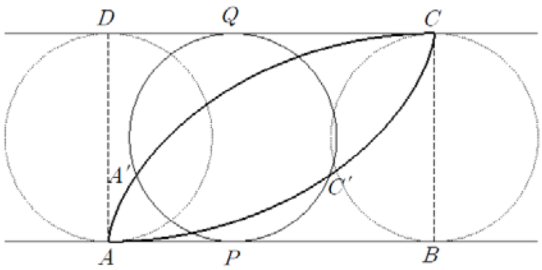
논제 1-1 (10점)

반지름이 a인 원 C와 장축과 단축이 각각 a와 b인 타원 E(예컨대, 방정식 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$로 주어지는 타원)에 대해 카발리에리의 원리를 적용하여 타원 E의 넓이를 구하라.

논제 1-2 (15점)

원이 한 바퀴 돌아 만들어진 싸이클로이드곡선은 모두 닮은꼴임을 보여라.
(두 곡선 S_1과 S_2가 닮은꼴이라 함은, S_1과 S_2를 적당히 위치시키고 적당한 점 O를 잡으면 O에서 시작하는 임의의 반직선이 곡선 S_1, S_2와 각각 만나는 점 P, Q에 대해 비 $OP:OQ$가 일정하게 됨을 뜻한다.)

※ 다음 그림을 참조하여 〔문제 1-3, 4〕에 답하라.



위 그림에서, 곡선 $AA'C$는 A에서 접하고 있던 반지름 r인 원이 선분 AB를 따라 B까지 굴러갈 때 원 위의 점 A가 그린 싸이클로이드 곡선이고, 곡선 $CC'A$는 C에서 접하고 있던 반지름 r인 원이 선분 CD를 따라 D까지 굴러갈 때 원 위의 점 C가 그린 싸이클로이드 곡선이다. 단, AD와 BC는 이 원들의 지름이고, A'과 C'은 그림과 같이 P와 Q에 동시에 접하는 반지름 r인 원 위에 있다.

논제 1-3 (15점)

선분 $A'C'$이 선분 AB에 평행함을 보여라.

논제 1-4 (10점)

카발리에리의 원리와 [문제 1-3]의 결과를 이용하여 싸이클로이드 곡선 $AA'C$와 선분 AB그리고 원의 지름 BC로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하라.

제시문 2

17세기의 수학자 베르누이(Jacob Bernoulli)는 연속한 정수들의 거듭제곱의 합에 대한 일반 공식을 찾으려던 과정 중에 매우 특별한 성질을 갖는 다항식들을 발견했다. 이 다항식들은 그의 이름을 따라 명명되었고, 수학의 여러 분야와 깊게 관련되어 있음이 밝혀졌다.

먼저, 0차 베르누이 다항식은 $B_0(x)=1$이다. $m\geq 1$이라고 하자. m차 베르누이 다항식 $B_m(x)$는 다음과 같이 귀납적으로 정의된다. 만일 $(m-1)$차 베르누이 다항식 $B_{m-1}(x)$가 알려져 있으면, m차 베르누이 다항식 $B_m(x)$는 조건

$$(1)\ \frac{d}{dx}B_m(x)=mB_{m-1}(x) \text{ 와}$$

$$(2)\ \int_0^1 B_m(x)=0$$

을 만족하도록 결정된다. $B_1(x)$를 구해 보자. $m=1$일 때 식 (1)을 적용하면 $B_1(x)$는 $B_0(x)$의 원시함수이므로, 적당한 상수 b_1에 대하여 $B_1(x)=x+b_1$으로 쓸 수 있다. 식 (2)에 의하여 $B_1(x)$의 적분값이 0이므로 $b_1=-\frac{1}{2}$임을 계산할 수 있다. 따라서 $B_1(x)=x-\frac{1}{2}$이다.

같은 과정을 반복하여 차례대로

$$B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6}$$

$$B_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$$

$$B_4(x)=x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30}$$

$$B_5(x)=x^5-\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{6}x$$

등을 구할 수 있다. 베르누이 다항식의 상수항을 m번째 베르누이 수라 하고

b_m으로 쓴다. 다시 말하면, $b_m=B_m(0)$이다. 예를 들면, $b_0=1, b_1=-\frac{1}{2}$, $b_2=\frac{1}{6}$, $b_3=0, b_4=-\frac{1}{30}, b_5=0$ 등이다. 수학적 귀납법을 사용하면

$$(3)\ b_m(x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}b_kx^{m-k} \text{을 보일 수 있다.}$$

여기서 $0!=1$이다. 증명은 생략한다.

논제 2-1 (10점)

구간 $0 \le x \le 1$에서 3차 베르누이 다항식 $B_3(x)$의 최댓값과 최솟값을 구하라.

논제 2-2 (10점)

6차 베르누이 다항식 $B_6(x)$를 계산하여라.

논제 2-3 (15점)

(a) 모든 정수 $m \ge 2$에 대하여 $B_m(0) = B_m(1)$임을 보여라.

(b) $m \ge 1$이면, $b_m = -\sum_{k=0}^{m-1} \frac{m!}{k!(m-k)!} \frac{b_k}{m-k+1}$가 성립함을 보여라.

논제 2-4

(a) 모든 정수 $m \ge 0$에 대하여

$B_{m+1}(x+1) - B_{m+1}(x) = (m+1)x^m$이 성립함을 보여라.

(b) 일반적으로 모든 자연수 n과 m에 대하여 다음 식이 성립함을 증명하여라.

$$1^m + 2^m + \cdots + n^m = \frac{1}{m+1}\left(B_{m+1}(n+1) - b_{m+1}\right)$$

제시문분석

1. 제시문

<제시문 1>에서는 싸이클로이드 곡선의 정의에 관한 정확한 이해와 카발리에 원리에 대한 정확한 이해가 매우 중요하다. 카발리에리의 원리를 정확하게 이해한다는 것은 카발리에 원리를 문제 상황에 적용할 수 있는 능력을 묻는 것이다.

<제시문 2>에서는 베르누이 다항식과 베르누이수를 이해하는 것이 매우 중요하다. 그리고 베르누이 다항식의 구체적인 의미를 이해하는 것이 중요하다.

논제분석

논제 1-1

평면도형에서 카발리에리의 원리를 적용할 수 있는지를 묻는 문제이다.

논제 1-2

닮은 도형의 정의를 문제 상황에 적용할 수 있는지를 묻는 문제이다.

논제 1-3

사이클로이드의 정의를 이용하여 문제해결을 할 수 있는지를 묻는 문제이다.

논제 1-4

카발리에리의 원리를 적용하여 사이클로이드 곡선으로 둘러싸인 곡선의 넓이를 구하는 문제이다.

논제 2-1

3차 베르누이 다항식의 최댓값, 최솟값을 묻는 문제이다.

논제 2-2

주어진 5차 베르누이 다항식을 이용하여 6차 베르누이 다항식을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

논제 2-3

(a) 주어진 베르누이 다항식의 성질을 이용하여 m차 베르누이 다항식과 $m-1$차 다항식의 관계를 묻는 문제이다.

(b) (a)에서 증명된 내용을 <제시문 2>의 조건(3)에 적용할 수 있는지를 묻는 문제이다.

논제 2-4

(a) 베르누이 다항식 $B_m(x+1)$과 $B_m(x)$ 사이의 관계를 수학적 귀납법을 사용하여 증명할 수 있는지를 묻는 문제이다.

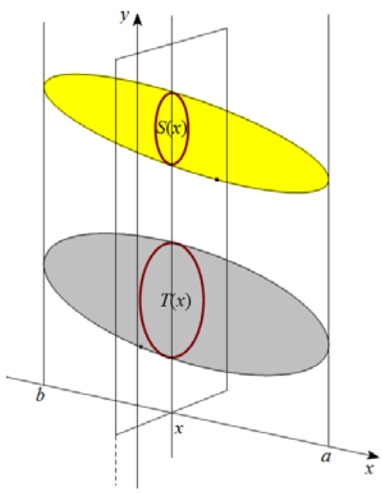
(b) (a)를 이용하여 $\sum_{k=1}^{n} k^m$을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

배경지식쌓기

1. 카발리에리의 원리의 증명

카발리에리(Cavalieri)의 원리는 발표 당시(1685)에는 논리적 엄밀성을 갖춘 증명이라기보다는 직관에 의존한 원리였다. 당시에는 미적분학이 완성되지 않은 시기라서 엄격한 증명을 해야 할 대상이라고 판단하기보다는 분명한 원리라고 여겼다. 그러나 오늘날 미적분학의 도움을 받아 카발리에리의 원리는 증명이 완성되었다.

그림과 같이 두 입체도형을 일정한 면에 평행한 도형으로 잘랐을 때, 두 단면의 면적의 비가 언제나 $m:n$ 이면 이들의 도형의 부피의 비는 $m:n$ 이다.



증명)

일정한 평면에 수직인 한 직선을 x 축이라 하자. 또, 일정한 평면에 평행이면서 입체를 끼고 있는 두 평면이 x축과 만나는 점의 좌표를 각각 $a, b(a< b)$라고 하자.

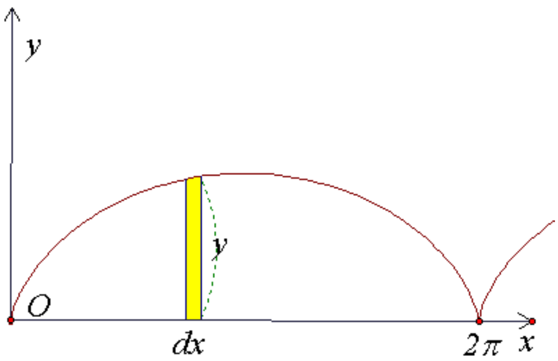
이제, x 축 상의 좌표가 x인 점을 지나 x 축에 수직인 평면이 두 입체를 자른 단면의 넓이를 각각 $S(x)$, $T(x)$라고 하고 v를 포함하는 입체의 부피를 V_S, $T(x)$를 포함하는 입체의 부피를 V_T 라고 하자.

그러면 $V_S = \int_a^b S(x)\,dx$ 이고, $V_T = \int_a^b T(x)\,dx$ 이다.

이때 $S(x) : T(x) = m : n$ 즉, $nS(x) = m\,T(x)$, 따라서, $n\int_a^b S(x)\,dx = m\int_a^b T(x)\,dx$.

즉, $V_S : V_T = m : n$를 의미한다. 평면도형에서도 같은 방법으로 증명한다.

2. 매개변수로 표현된 도형의 넓이



그림과 같이 $x = r(\theta - \sin\theta)$, $y = r(1-\cos\theta)$으로 표현된 싸이클로이드 곡선과 x축으로 둘러 싸인 도형의 넓이를 구해보자. 넓이를 구하는 기본은 $S = \int_0^{2\pi} y\,dx \cdots$①이다.

그런데 $x = r(\theta - \sin\theta)$, $y = r(1-\cos\theta)$ 이므로 $x = 0$일 때 $\theta = 0$이고, $x = 2\pi r$일 때 $\theta = 2\pi$이다.

또 $\frac{dx}{d\theta} = r(1-\cos\theta)$이므로 $dx = r(1-\cos\theta)d\theta$ 이다. 이것을 ①식에 대입하면

$$S = \int_0^{2\pi} r^2(1-\cos\theta)^2 d\theta = r^2\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)d\theta$$

여기서 $\cos^2\theta = \frac{1+\cos2\theta}{2}$ 를 대입하면

$$S = r^2\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos\theta + \frac{1+\cos2\theta}{2}\right)d\theta = 3\pi r^2$$

읽기자료

귀납적 패턴으로 자연수의 거듭제곱의 합을 구하기

자연수의 거듭제곱으로 이루어진 수열의 첫째 항부터 n항까지의 합을 구해보자.

$S_k = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$ 라고 하자. 그러면 $S_0 = n$ 임은 당연하다. 이제 S_1 을 구하자.

$(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$에서	$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$에서
$2^2 - 1^2 = 2 \cdot 1 + 1$	$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$
$3^2 - 2^2 = 2 \cdot 2 + 1$	$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$
$\vdots$	$\vdots$
$(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$	$(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$
위의 식을 변변 더하여 정리하면	위의 식을 변변 더하여 정리하면
$S_1 = \dfrac{(n+1)^2 - 1 - S_0}{2}$	$S_2 = \dfrac{(n+1)^3 - 1 - 3S_1 - S_0}{3}$
$S_1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$	$S_2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$(n+1)^{k+1} = n^{k+1} + {}_{k+1}C_1 n^k + {}_{k+1}C_2 n^{k-1} + \cdots + 1$ 을 이용하여

위와 같은 방법을 계속 적용하면

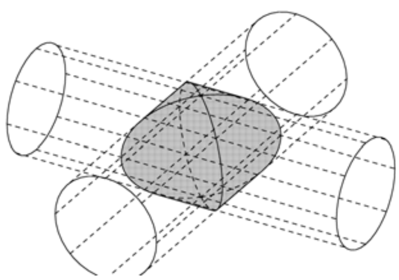
$(n+1)^{k+1} - 1 = {}_{k+1}C_1 S_k + {}_{k+1}C_2 S_{k-1} + \cdots + S_0$ 을 얻을 수 있고, 따라서

$$S_k = \frac{(n+1)^{k+1} - 1 - {}_{k+1}C_1 S_{k-1} - {}_{k+1}C_2 S_{k-2} - \cdots - S_0}{k+1} \text{ 이다.}$$

풀어보기

1. 함수 $f(x)=\dfrac{a}{3}x^3-ax+a\ (a>0)$이 있다. 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=g'(x)$를 만족시키고 $g(0)=a+1$이다. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=-1, x=1$로 둘러싸인 부분을 x축 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피가 34π일 때, a의 값은?[13)]

2. 그림과 같이 반지름이 r이고 서로 수직으로 교차하는 두 원기둥이 있다. 이 때 두 원기둥의 공통부분의 부피를 구하시오.
(힌트, 카발리에리의 원리를 적용하면 비교적 쉽게 해결됨.)



13) 2010.09 평가원 모의고사 문항을 변형한 것임.

예시답안

풀어보기

1. 문제의 조건에서 $g(x)=f(x)+1$ 임을 알 수 있다. 따라서 $g(x)$, $f(x)$, $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는 카발리에리의 원리를 이용하면 2×1인 직사각형의 넓이와 같음을 알 수 있다. 한편, $y=f(x)$ 위의 임의의 점 (x_1, y_1)에 대해서,

$2a+1-y_1=\frac{a}{3}(-x_1)^3-a(-x_1)+a+1$이 성립한다. 따라서 $g(x)$, $f(x)$, $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 중심은 $\left(0, \frac{2a+1}{2}\right)$이다. 따라서 구하는 부피는 단면이 넓이가 2인 직사각형이고 회전반경이 $\frac{2a+1}{2}$인 토러스의 부피와 같다. 따라서 구하고자 하는 부피 V는

$V=2\pi\times\frac{2a+1}{2}\times2=34\pi$에서 $a=8$임을 알 수 있다.

다른 풀이)

문제의 조건에서 $g(x)=f(x)+1$임을 알 수 있다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{5}{3}a$	↘	$\frac{a}{3}$	↗

따라서, $-1\le x\le1$에서 $f(x)\ge\frac{a}{3}>0$이다. 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$와 두 직선 $x=-1, x=1$로 둘러싸인 부분을 x축 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피 V는

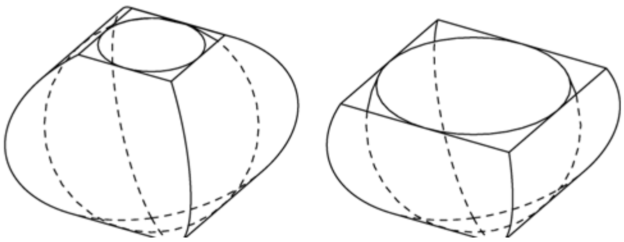
$$V=\pi\int_{-1}^{1}[\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2]\,dx=\pi\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}\{f(x)+g(x)\}\,dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{3}ax^3-2ax+2a+1\right)dx=2\pi\int_{0}^{1}(2a+1)\,dx=2\pi\Big[\ (2a+1)x\Big]_0^1$$

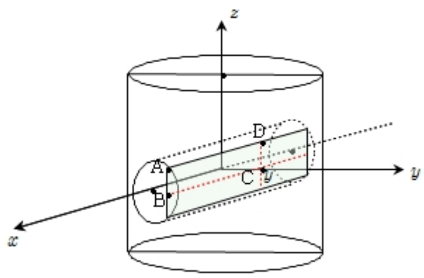
$$=2(2a+1)\pi$$

그러므로, $2(2a+1)\pi=34\pi$에서 $2a+1=17$이다. 따라서 $a=8$이다.

2. 그림과 같이 두 원기둥이 직교할 때, 교차하는 입체의 단면은 그림처럼 정사각형이 된다.

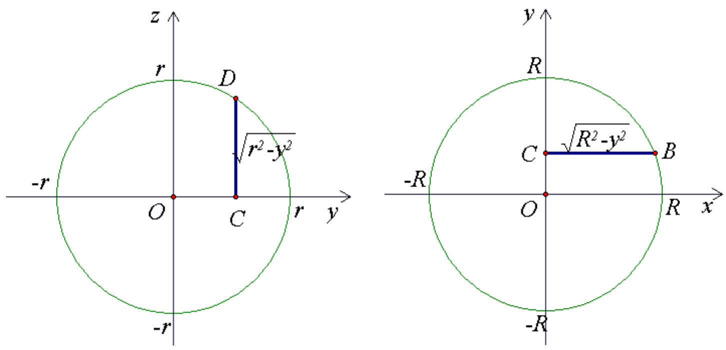


이해를 돕기 위해 그림과 같이 반지름이 다른 두 원기둥이 직교할 때 교차하는 부분의 단면을 살펴보자.



〈 원기둥 교차단면〉

두 원기둥이 교차하는 공통부분을 xz 평면에 평행하게 절단하면 직사각형의 단면이 발생한다. 이 단면의 넓이는 y 의 값에 따라 변하므로 $A(y)$ 라 둘 수 있다.



이때 $\overline{CD}=\sqrt{r^2-y^2}$, $\overline{BC}=\sqrt{R^2-y^2}$ 이다. 그런데 반지름이 같은 경우는 $r=R$이므로 $\overline{BC}=\overline{CD}$이다. 따라서 교차하는 단면은 정사각형임을 알 수 있다. 정사각형 단면의 한 변의 길이를 a라고 하면 그에 내접하는 원의 반지름의 길이는 $\frac{a}{2}$가 된다. 따라서

(정사각형의 넓이) : (원의 넓이) $=a^2:\frac{\pi}{4}a^2=4:\pi$ 이다.

그런데 교차하는 부분에 반지름 r인 구가 내접하므로 교차하는 부분의 부피는 구의 부피의 $\frac{4}{\pi}$ 배가 된다. 따라서 교차하는 부분의 부피를 V라 하면

$V=\frac{4}{3}\pi r^3\times\frac{4}{\pi}=\frac{16}{3}r^3$ 이 된다.

(다른 풀이)

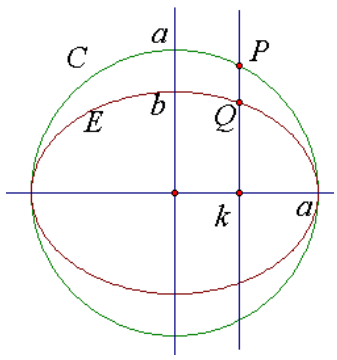
위의 그림에서 반지름이 r로 일정하므로

정사각형의 넓이 $A(y)$는 $A(y)=2\sqrt{r^2-y^2}\cdot 2\sqrt{r^2-y^2}=4(r^2-y^2)$ 이다. 따라서

$V=\int_{-r}^{r}A(y)dy=2\int_{0}^{r}A(y)dy=8\int_{o}^{r}(r^2-y^2)dy=\frac{16}{3}r^3$ 이다.

논제 1-1

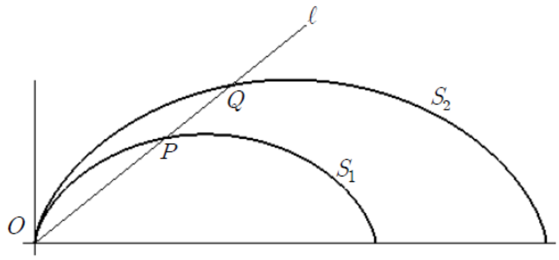
문제의 원 C와 타원 E를 함께 좌표평면에 그려보면 아래와 같다.



y축에 평행한 직선 $x=k$가 원 C와 타원 E와 만나는 점을 각각 P,Q라 하면 P의 좌표는 $\left(k,\sqrt{a^2-k^2}\right)$이고, Q의 좌표는 $\left(k,\frac{b}{a}\sqrt{a^2-k^2}\right)$이다. 그러므로 y축에 평행한 직선 $x=k$에 의해 원 C와 타원 E의 잘린 선분의 길이는 각각, $2\sqrt{a^2-k^2}$과 $\frac{2b}{a}\sqrt{a^2-k^2}$이고 그 비는 $a:b$로 일정하다. 따라서 카발리에리의 원리에 의해 원 C와 타원 E의 넓이의 비도 $a:b$이다. 그런데 원 C의 넓이는 πa^2이므로 타원 E의 넓이는 $\frac{b}{a}\times\pi a^2=\pi ab$이다.

논제 1-2

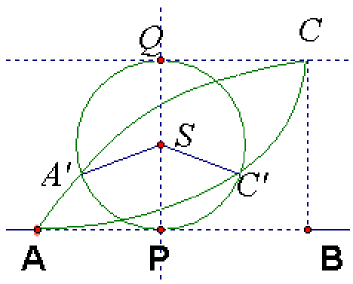
원점에서 x축에 접하고 반지름이 각각 1과 $r(r\geq 1)$인 원에 의해 생성된 싸이클로이드 곡선 S_1과 S_2가 다음 그림과 같이 위치하고 있다고 하자.



원점 O에서 시작하는 임의의 반직선 l이 S_1, S_2와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고 점 P의 좌표가 $(t-\sin t,\ 1-\cos t)$라 하자. 그러면, 좌표가 $(r(t-\sin t),\ r(1-\cos t))$인 점은 직선 l 위에 있으면서 동시에 싸이클로이드곡선 S_2위에 있게 된다. 즉, Q의 좌표가 $(r(t-\sin t),\ r(1-\cos t))$가 된다. 따라서 $\overline{OP}:\overline{OQ}=1:r$이 되어 일정하므로 S_1과 S_2가 닮은 꼴이다.

논제 1-3

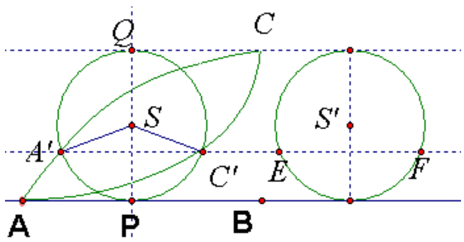
그림에서 $\theta=\angle PSA'$이라고 하면 $\overline{AP}=r\theta$이다.



그러면, $\overline{CQ}=\overline{AB}-\overline{AP}=\pi r-r\theta=r(\pi-\theta)$가 되므로 $\angle QSC'=\pi-\theta$가 된다. 따라서, $\angle PSC'=\pi-\angle QSC'=\pi-(\pi-c)=\theta=\angle PSA'$이 되어 $\overline{A'C'}$이 $\overline{AB}$에 평행하게 된다.

논제 1-4

[문제 I -3]에 의하여 다음 그림의 $\overline{A'C'}$은 $\overleftrightarrow{AB}$에 평행인 직선에 의해 두 사이클로이드 곡선 $AA'C$와 $CC'A$으로 둘러싸인 영역이 잘린 부분이면서 동시에 원 S가 잘린 부분이기도 하다.



그러므로, $\overleftrightarrow{AB}$에 평행인 직선으로 원 S와 S'을 가각 자른 선분 $\overline{A'C'}$과 선분 $\overline{EF}$는 길이가 같게 된다. 그러면 카발리에리의 원리에 의해 두 싸이클로이드곡선 $AA'C$와 $CC'A$으로 둘러 싸인 영역의 넓이는 원 S'의 넓이와 같은 πr^2이 된다.
따라서 싸이클로이드 곡선 $AA'C$ 와 선분 AB 그리고 원의 지름 BC로 둘러싸인 영역의 넓이는 곡선 $AA'C$와 $CC'A$으로 둘러싸인 영역의 넓이의 반에 $\triangle ABC$의 넓이를 더하면 되므로 $\frac{1}{2}\pi r^2 + \frac{1}{2} \cdot \pi r \cdot 2r = \frac{3}{2}\pi r^2$이다.

논제 2-1

$B_3{}'(x) = 3x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0$으로부터 $x_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$과 $x_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$을 얻는다.

$x_1, x_2 \in (0,1)$이고 $B_3(x)$는 $x = x_1$에서 극댓값 $B_3(x_1) = \frac{\sqrt{3}}{36}$과 $x = x_2$에서 극솟값 $B_3(x_2) = -\frac{\sqrt{3}}{36}$을 갖는다. 그런데 $B_3(0) = 0$이고 $B_3(1) = 0$이므로 주어진 구간 $0 \le x \le 1$에서 최댓값은 $\frac{\sqrt{3}}{36}$이고 최솟값은 $-\frac{\sqrt{3}}{36}$이다.

논제 2-2

$B_6(x)$는 $6B_5(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 - x$의 원시함수이므로

$$B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + b_6$$

이다. 조건 $\int_0^1 B_6(x)dx = 0$을 만족해야 하므로 $b_6 = \frac{1}{42}$를 얻는다. 따라서

$$B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}$$

이다.

논제 2-3

(a) $m \ge 2$이면, 식 (1)과 (2)를 이용하여

$$0 = \int_0^1 B_{m-1}(x)dx = \frac{1}{m}\left(B_m(1) - B_m(0)\right)$$

이다. 그래서 $B_m(0) = B_m(1)$가 성립한다.

(b) $m \geq 1$이면, (a)에서 증명된 사실과 본문의 식 (3)을 이용하여

$$b_{m+1} = B_{m+1}(0) = B_{m+1}(1) = \sum_{k=0}^{m+1} \frac{(m+1)!}{k!(m-k+1)!} b_k$$

을 얻는다. 양변에서 b_{m+1}을 소거하면,

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(m+1)!}{k!(m-k+1)!} b_k = 0$$

이 된다. 한편 위의 식에서 좌변은

$$(m+1)b_m + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m+1)!}{k!(m-k+1)!} b_k = (m+1)b_m + (m+1)\sum_{k=0}^{m-1} \frac{m!}{k!(m-k)!} \frac{b_k}{m-k+1}$$

이므로 원하는 식 $b_m = -\sum_{k=0}^{m-1} \frac{m!}{k!(m-k)!} \frac{b_k}{m-k+1}$ 을 얻는다.

논제 2-4

(a) 수학적 귀납법을 사용한다. $m = 0$인 경우

$$B_1(x+1) - B_1(x) = (x+1) - \frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right) = 1$$

이므로 사실이다. $B_{m+1}(x+1) - B_{m+1}(x) = (m+1)x^m$ 이 성립한다고 가정하자.

$B_{m+2}(x)$ 는 $(m+2)B_{m+1}(x)$ 의 원시함수이므로 이제

$$\begin{aligned} B_{m+2}(x+1) - B_{m+2}(x) &= \int (m+2)B_{m+1}(x+1)dx - \int (m+2)B_{m+1}(x)dx \\ &= (m+2)(m+1)\int x^m dx \\ &= (m+2)x^{m+1} + C \end{aligned}$$

이고, 여기서 C는 적분상수이다. $x = 0$을 대입하면 $B_{m+2}(1) - B_{m+2}(0) = 0$이므로 $C = 0$이다.

(b) (a)의 식에 $x = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$을 차례대로 대입하여 합하면,

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{m+1}\left(B_{m+1}(k+1) - B_{m+1}(k)\right) = \frac{1}{m+1}\left(B_{m+1}(n+1) - B_{m+1}(1)\right)$$

이 된다. $B_{m+1}(1) = b_{m+1}$ 이므로 원하던 식이 증명되었다.

13 연세대학교 수시

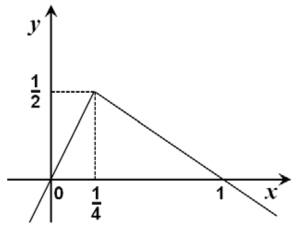
제 시 문 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

함수 $f(x)$는 실수의 집합 $\mathbb{R}$ 을 정의역과 공역으로 갖는 연속함수이다. 집합 A와 B는 주어진 함수 $f(x)$에 의하여 결정되며 다음과 같이 정의한다.

$A=\{t\in(0,\ 1)\,|\,$어떤 실수 a가 존재하여 부등식 $f(x)\le f(t)+a(x-t)$이 모든 실수 $x\in[0,\ 1]$에 대하여 성립한다. $\}$
$B=\{a\in\mathbb{R}\,|\,$어떤 실수 $t\in(0,\ 1)$가 존재하여 모든 실수 $x\in[0,1]$가 부등식 $f(x)\le f(t)+a(x-t)$을 만족한다. $\}$

논제 Ⅰ-1

함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같을 때 집합 A와 B를 구하여라.



논제 Ⅰ-2

함수 $f(x)$가 $x\le 0$이거나 $x\ge 1$일 때 $f(x)=0$이라고 하자. 또한 주어진 자연수 k에 대하여 $0=c_0<c_1<c_2<\cdots<c_k<c_{k+1}=1$을 만족하는 점 $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_k$에서 얻어지는 닫힌구간 $[c_i,\ c_{i+1}]\ (i=0,\cdots,k)$ 각각에서 함수 $f(x)$의 그래프는 선분이라고 가정하자. 이러한 성질을 만족하고 집합 B의 길이가 2π이며, $k=2$인 경우의 모든 함수 $f(x)$에 대하여 이들 함수의 최댓값 중에서 가장 큰 값 Q를 구하시오. 그리고 그 최댓값 Q를 갖는 함수 $f(x)$에 의하여 결정되는 모든 집합 A를 구하시오.

논제 Ⅰ-3

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 모든 실수에서 존재하고 연속이라고 하자. 이 함수 $f(x)$에 의하여 결정되는 집합 A가 닫힌구간 $\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4}\right]$일 때, 집합 B를 구하시오.

논제 Ⅰ-4

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$와 이계도함수 $f''(x)$가 모든 실수에서 존재하고 연속이라고 하자. 또한 함수 $f(x)$에 의하여 결정되는 집합 A가 열린구간 $(0,\ 1)$이고 $\int_0^1 |f''(x)|dx = \frac{4}{3}\pi$이며, $f(0)=f(1)=0$이라고 하자. 이러한 성질을 만족하는 모든 함수 $f(x)$의 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 최댓값의 집합을 C라고 할 때, 집합 $\{b \in \mathbb{R} \mid$모든 $m \in C$에 대하여 $m \le b\}$의 최솟값 S를 구하시오.

제시문분석

연속함수 $f(x)$와 서로 다른 두 집합 A, B가 주어져 있다. [논제 1-1]부터 [논제 1-4]까지 전 문항에서 매우 중요한 역할을 하는 두 집합 A, B의 정의를 정확하게 이해하는 것이 관건이다.

논제분석

논제 Ⅰ-1

주어진 집합의 개념을 정확하게 이해하는지를 평가하기 위한 문항이다. 또한 이어지는 문제들을 해결하는데 도움을 주기 위한 의도를 포함하고 있다.

논제 Ⅰ-2

[논제 Ⅰ-1]을 확장하여 제시문에서 정의한 집합과 새로운 개념의 함수의 그래프 사이의 이해력, 분석력, 적응력을 측정하는 문제이다.

논제 Ⅰ-3

함수가 최댓값을 가지는 점에서의 도함수의 값이 0이라는 것을 응용하여 제시문에서 주어진 집합과의 관계를 유추하는 문제이다.

논제 Ⅰ-4

함수의 미분에서 등장하는 여러 가지 개념을 주어진 문제에 적용할 수 있는지를 확인하는 문제이다. 즉, 도함수의 연속성, 정적분, 함수의 최댓값의 범위 등의 복합적인 문제를 미적분의 기본적인 정리에 대한 개념 이해와 창의적인 사고력으로 해결해야하는 문제이다.

배경지식쌓기

1. 최대최소의 정리

함수 $y=f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

2. 평균값의 정리

$y=f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

3. 곡선의 오목과 볼록

함수 $y=f(x)$가 어떤 구간에서

① $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다.

② $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.

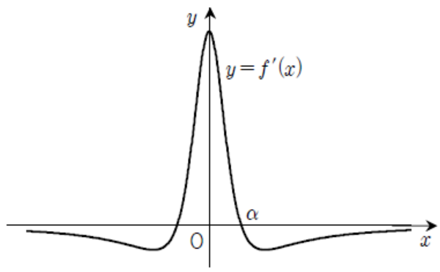
4. 단조감소함수

함수 $y=f(x)$의 정의역의 임의의 원소 $x_1,\ x_2$에 대하여 $x_1<x_2$의 관계가 만족할 때 $f(x_1)\geq f(x_2)$이면 함수 $y=f(x)$는 단조감소함수이다.

풀어보기

1. 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같고, $f'(\alpha)=0$, $f'(-x)=f'(x)$이다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, x축은 $y=f'(x)$의 점근선이다.)

[2011 대전지역 모의고사]



보 기

ㄱ. $f(\alpha)$는 함수 $f(x)$의 극댓값이다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 양수 β에 대하여 $f''(\beta)=0$이면 $0<x<\beta$에서 $f(x)$는 위로 볼록이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=1,\ f(1)=2$
(나) $f'(x)>0,\ f''(x)>0$ (단, $0<x<1$)

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[2011 전국연합]

보 기

ㄱ. 함수 $y=\{f(x)\}^2$의 그래프는 구간 $(0,\ 1)$에서 아래로 볼록하다.
ㄴ. $\int_0^1 \{f(x)+f(1-x)\}dx<3$
ㄷ. $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\left\{f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}^2+\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}^2}{2}\cdot\dfrac{1}{n} \geq \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

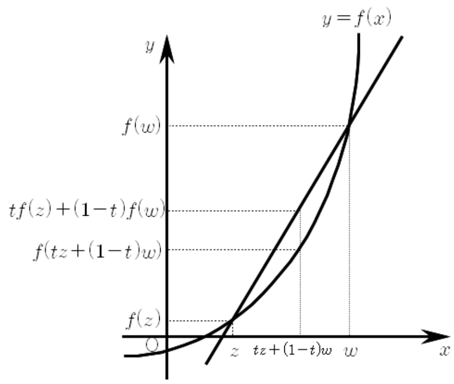
읽기자료

곡선의 볼록과 그 성질[14)]

어떤 구간에서 곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록(또는 위로 오목, convex, concave up)하다는 것은 $y=f(x)$ 위의 임의의 두 점 P, Q에 대하여 이 두 점 사이에 있는 곡선 부분이 선분 PQ보다 항상 아래에 있거나 같은 위치에 있다는 것이다. 다만 수식으로 나타낼 때에는 이 정의를 그대로 수식으로 옮겨서 정의하지는 않고 다음과 같이 간단하게 표현한다.

> 열린구간 $(a,\ b)$에 속하는 임의의 실수 z, w와 닫힌구간 $[0,\ 1]$에 속하는 임의의 실수 t에 대하여 $f(tz+(1-t)w) \le tf(z)+(1-t)f(w)$를 만족할 때, 함수 f는 열린구간 $(a,\ b)$에서 아래로 볼록하다고 한다. ($y=-f(x)$가 아래로 볼록할 때, 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하다고 한다.)

이것을 그림으로 나타내면 아래와 같다.



한편, $0 \le t \le 1$이므로 $tz+(1-t)w = t(z-w)+w$의 최솟값은 z, 최댓값은 w이다. 이때 점 $(tz+(1-t)w,\ f(tz+(1-t)w))$가 그리는 자취는 두 점 $(z,\ f(z))$, $(w,\ f(w))$를 잇는 곡선의 호[15)]가 된다. 마찬가지로 $tf(z)+(1-t)f(w)=t(f(z)-f(w))+f(w)$가 그리는 자취는 두 점 $(z,\ f(z))$, $(w,\ f(w))$를 잇는 선분이 된다. 따라서 이 사실을 이용하여 나타낸 곡선의 볼록에 대한 정의는 이 글의 처음에 소개한 정의와 동치임을 알 수 있다.

그런데 위에서 소개한 정의들은 교과서에서 실제로 사용되는 정의와는 다르다. 실제로 사용되는 것은 '순볼록(strictly convex)'인데, 교과서에서는 '아래로 볼록'이라고 표현한다. 순볼록은 호가 선분보다 항상 아래에 있는 경우로서, 임의의 실수 $z, w(z \ne w)$와 닫힌구간 $[0,\ 1]$에 속하는 임의의 실수 t에 대하여

14) 내용출처 : http://extratype.tistory.com/246
15) 곡선의 일부분

$$f(tz+(1-t)w)<tf(z)+(1-t)f(w)$$

가 성립하는 것으로 정의한다. 하지만 이 글에서는 순볼록을 따로 구분하기로 하고, 처음의 ‘아래로 볼록’의 정의를 그대로 사용하기로 한다. 이는 사전(辭典)의 정의를 따른 것이다.

이제 곡선의 볼록에 관련된 성질들을 살펴보자.

[성질 1] 접선의 위치와 곡선의 볼록

함수 $f:(a,\,b)\to\mathbb{R}$가 미분가능하다고 하자. 열린구간 $(a,\,b)$에 속하는 임의의 실수 $x,\,y$에 대하여 $f(x)\ge f(y)+f'(y)(x-y)$가 성립하면 함수 f는 아래로 볼록하다. 또 그 역도 성립한다.

[성질 2] 도함수와 곡선의 볼록

함수 $f:(a,\,b)\to\mathbb{R}$가 미분가능하다고 하자. 그러면 열린구간 $(a,\,b)$에서 함수 f가 아래로 볼록할 필요충분조건은 f'이 열린구간 $(a,\,b)$에서 단조증가하는 것이다. 또, 함수 f가 두 번 미분가능하다고 하면 함수 f가 열린구간 $(a,\,b)$에서 아래로 볼록일 필요충분조건은 임의의 실수 $x\in(a,\,b)$에 대하여 $f''(x)\ge 0$인 것이다.

[성질 3] 산술평균과 곡선의 볼록

함수 $f:(a,\,b)\to\mathbb{R}$가 연속이고 임의의 $x,\,y\in(a,\,b)$에 대하여 $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\le\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$가 성립하면 함수 f는 아래로 볼록하다. 또 그 역도 성립한다.

[성질 4] 젠센의 부등식

함수 $f:(a,\,b)\to\mathbb{R}$가 아래로 볼록이라고 하자. 임의의 $x_n\in(a,\,b)$와 임의의 $\mu_n\in(0,\,\infty)$에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.

$$f\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}\mu_k x_k}{\sum_{k=1}^{n}\mu_k}\right)\le\frac{\sum_{k=1}^{n}\mu_k x_k}{\sum_{k=1}^{n}\mu_k}$$

이때 $\lambda_k=\dfrac{\mu_k}{\sum_{k=1}^{n}\mu_k}$라 두면 $0<\lambda_k\le 1$이고 $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=1$이다. 그리고 위 부등식은 아래와 같이 간단하게 된다.

$$f\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right)\le\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k.$$

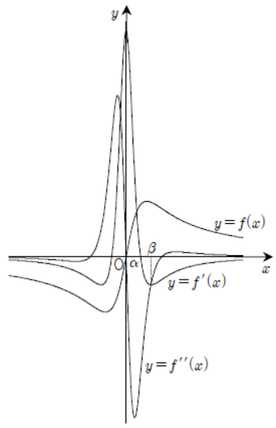
예시답안

풀어보기

1. ㄱ. $f'(\alpha)=0$이고 $f(x)$가 $x=\alpha$를 기준으로 증가하다가 감소하므로 $f(\alpha)$는 극댓값이다. (참)

ㄴ. $f(0)=0$일 때는 홀수 개의 실근을 갖는다. (거짓)

ㄷ. $0<x<\beta$이면 $f''(x)<0$이므로 $f(x)$는 위로 볼록이다. (참)



2. ㄱ. 구간 $(0,\,1)$에서 $\dfrac{d\{f(x)\}^2}{dx}=2f(x)f'(x)$,

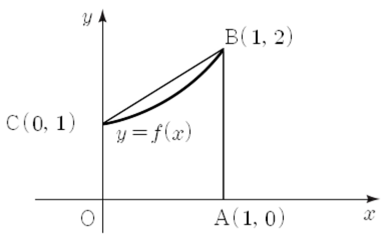
$\dfrac{d^2\{f(x)\}^2}{dx^2}=2\{f'(x)\}^2+2f(x)f''(x)$이므로 $\dfrac{d^2\{f(x)\}^2}{dx^2}>0$

따라서, 함수 $y=\{f(x)\}^2$의 그래프는 구간 $(0,\,1)$에서 아래로 볼록하다. (참)

ㄴ. $1-x=t$라 하면 $\displaystyle\int_0^1 f(1-x)dx=\int_0^1 f(t)dt$이므로

$$\int_0^1\{f(x)+f(1-x)\}dx=2\int_0^1 f(x)dx.$$

조건에 의해 구간 $(0,\,1)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같고 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$의 값은 사다리꼴 COAB의 넓이보다 작다.



$\therefore\ \displaystyle\int_0^1\{f(x)+f(1-x)\}dx<3$ (참)

ㄷ. ㄱ과 ㄴ에 의해

$$\frac{\left\{f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}^2+\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}^2}{2}\cdot\frac{1}{n}\geq\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\{f(x)\}^2dx$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\left\{f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}^2+\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}^2}{2}\cdot\frac{1}{n}\geq\int_0^1\{f(x)\}^2dx \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

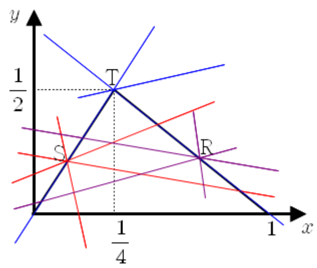
논제 Ⅰ-1

$t\in(0,1)$인 어떤 실수 t에 대해서 $g(x)=f(t)+a(x-t)$라고 두면 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$를 지나고 기울기가 a인 직선이다. 그러므로 모든 실수 $x\in[0,1]$에 대하여 부등식 $f(x)\leq f(t)+a(x-t)$가 성립할 필요충분조건은 닫힌구간 $[0,1]$에서 직선 $y=g(x)$가 $y\geq f(x)$의 영역에 있어야 한다는 것이다. 그러므로

i) $0<t<\frac{1}{4}$일 때 $a=2$

ii) $t=\frac{1}{4}$일 때 a는 $-\frac{2}{3}\leq a\leq 2$인 모든 실수

iii) $\frac{1}{4}<t<1$일 때는 $a=-\frac{2}{3}$이다.

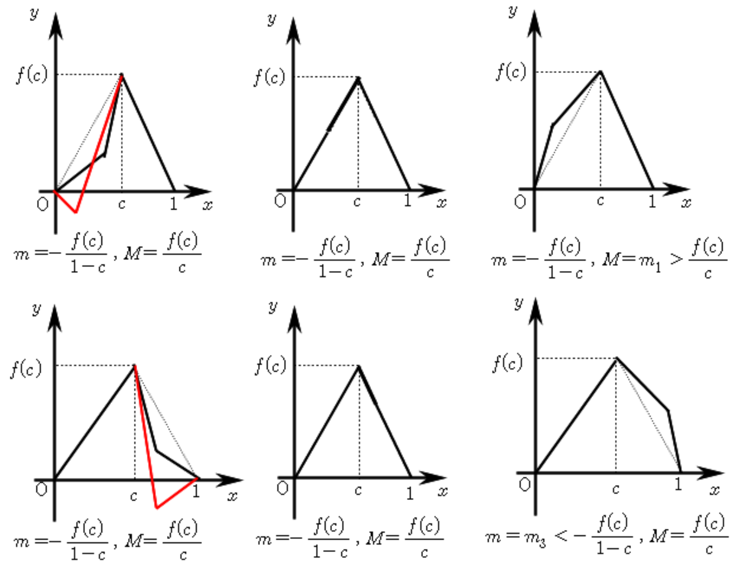


따라서 $A=\{t\in R\mid 0<t<1\}$, $B=\left\{a\in R\mid -\frac{2}{3}\leq a\leq 2\right\}$.

논제 Ⅰ-2

B의 길이가 2π이므로 $x_1\in(0,\ 1)$이고 $f(x_1)>0$인 실수 x_1이 존재한다. 또한 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)$가 연속이므로 $f(c)$가 $f(x)$의 최댓값이 되는 $c\in(0,\ 1)$인 실수 c가 존재한다.

$B=[m,\ M]$, 함수 $y=f(x)$의 그래프를 이루는 세 선분의 기울기를 순서대로 각각 m_1, m_2, m_3이라 두고, 그들의 대소 관계에 따라 경우를 나눠 $y=f(x)$의 그래프 개형을 그리고 m, M의 값을 구하면 [그림 1-2-①]과 같다.

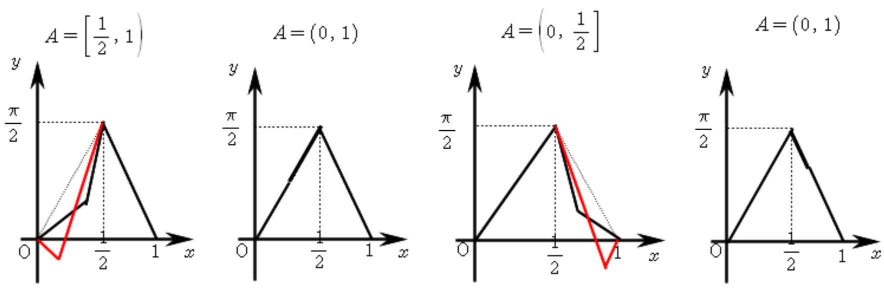


〔그림 1-2-①〕

$c(1-c)\le\frac{1}{4}$, $m\le-\frac{f(c)}{1-c}$이고 $M\ge\frac{f(c)}{c}$이므로,

$$2\pi=M-m\ge\frac{f(c)}{c}+\frac{f(c)}{1-c}=\frac{f(c)}{c(1-c)}\ge 4f(c),\ f(c)\le\frac{\pi}{2}$$

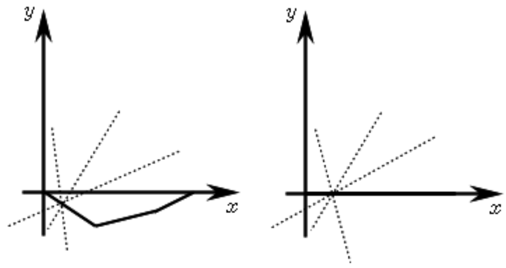
여기서 등호는 $c=\frac{1}{2}$, $f(c)=\frac{\pi}{2}$, $m=-\frac{f(c)}{1-c}$, $M=\frac{f(c)}{c}$일 때만 성립한다. 따라서 주어진 조건을 만족하는 모든 함수 $y=f(x)$에 대하여 이들 함수의 최댓값 중에서 가장 큰 값 Q는 $\frac{\pi}{2}$이고 그 최댓값 $Q=\frac{\pi}{2}$를 갖는 함수 $f(x)$에 의하여 결정되는 집합 A를 모두 구하면 구간 $(0,\,1)$, $\left[\frac{1}{2},\,1\right)$, $\left(0,\,\frac{1}{2}\right]$이다.(※ [그림 1-2-②])



〔그림 1-2-②〕

(다른 풀이 1)

임의의 실수 $x\in[0,\,1]$에 대하여 $f(x)\le 0$이면 $B=\{0\}$ 또는 $B=\varnothing$.(※ [그림 1-2-③])



〔그림 1-2-③〕

이것은 B의 길이가 2π라는 것에 위배된다. 따라서, $x_1\in(0,\,1)$이고 $f(x_1)>0$인 실수 x_1이 존재한다. 또한 닫힌구간 $[0,\,1]$에서 $f(x)$가 연속이므로 $f(c)$가 $f(x)$의 최댓값이 되는 $c\in(0,\,1)$인 실수 c가 존재한다. 그러므로 $B=[p,\,p+2\pi]$라고 하면, $-2\pi<p<0$ 이다. 또한 두 직선 $y=(p+2\pi)x$ 와 $y=p(x-1)$의 교점을 구하면 $\left(-\dfrac{p}{2\pi},\,-\dfrac{p^2+2\pi p}{2\pi}\right)$이다. [논제 I-1]의 결과를 이용하면 집합 B를 만족하는 함수 중 하나를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$h(x)=\begin{cases}(p+2\pi)x & \left(0\le x\le -\dfrac{p}{2\pi}\right)\\ p(x-1) & \left(-\dfrac{p}{2\pi}<x\le 1\right)\end{cases}$$

이때 함수 $f(x)$의 그래프는 함수 $h(x)$의 그래프의 아래 또는 경계에 존재하므로 ($f(x)$의 최댓값)$\le$($h(x)$의 최댓값)이고 $h(x)$의 최댓값은 $h\left(-\dfrac{p}{2\pi}\right)$이므로 Q는 $h\left(-\dfrac{p}{2\pi}\right)=-\dfrac{p^2+2\pi p}{2\pi}=-\dfrac{(p+\pi)^2}{2\pi}+\dfrac{\pi}{2}$의 최댓값이다. 따라서 $Q=\dfrac{\pi}{2}$ 이다. $p=-\pi$일 때 함수 $f(x)$는 최댓값 Q를 가지므로 $h(x)$는 다음과 같다.

$$h(x)=\begin{cases}\pi x & \left(0\le x\le \dfrac{1}{2}\right)\\ -\pi(x-1) & \left(\dfrac{1}{2}<x\le 1\right)\end{cases}$$

이때 $\left[0,\,\dfrac{1}{2}\right]$에서 $h(x)$의 그래프를 l_1, $\left[\dfrac{1}{2},\,1\right]$에서 $h(x)$의 그래프를 l_2라고 하면 최댓값 Q를 가지는 함수 $f(x)$의 그래프는 l_1과 l_2 중 적어도 하나를 포함해야 한다. 따라서 집합 A는 다음과 같이 3가지 경우가 있다.

i) 함수 $f(x)$의 그래프가 l_1만 포함하는 경우

$$A=\left(0,\ \frac{1}{2}\right]$$

ii) 함수 $f(x)$의 그래프가 l_2만 포함하는 경우

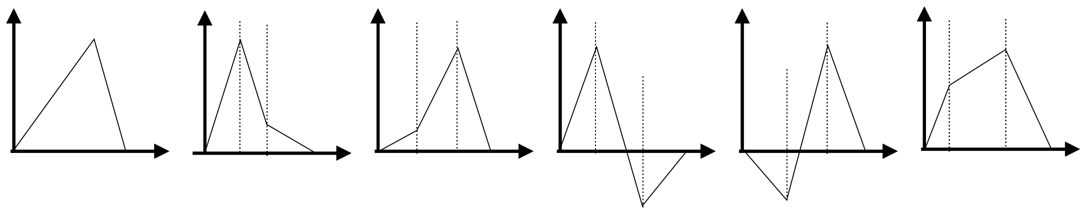
$$A=\left[\frac{1}{2},\ 1\right)$$

iii) 함수 $f(x)$의 그래프가 l_1, l_2를 모두 포함하는 경우

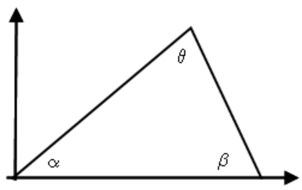
$$A=(0,\ 1)$$

(다른 풀이 2)

집합 B의 길이가 2π이므로 최댓값은 양수이다. 최댓값이 양수이면서 $k=2$인 조건에 맞는 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같은 형태들이다.



이 중 가장 첫 번째의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$의 최댓값 중에서 가장 큰 값 Q를 구하여 보고 이를 다른 그래프에 적용시켜보자.



그림에서 $2\pi=\tan\alpha+\tan\beta$이고 함수 $f(x)$의 최댓값 중에서 가장 큰 값은 $\tan\theta$가 최소일 때이다.

$$\tan\theta=-\tan(\alpha+\beta)=\frac{2\pi}{\tan\alpha\tan\beta-1}$$

이고

$$2\pi=\tan\alpha+\tan\beta\geq 2\sqrt{\tan\alpha\tan\beta}$$

에서

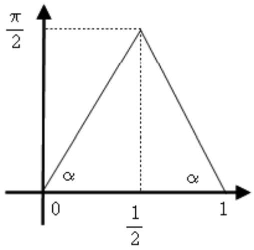
$$\tan\alpha\tan\beta\leq\pi^2$$

이다.

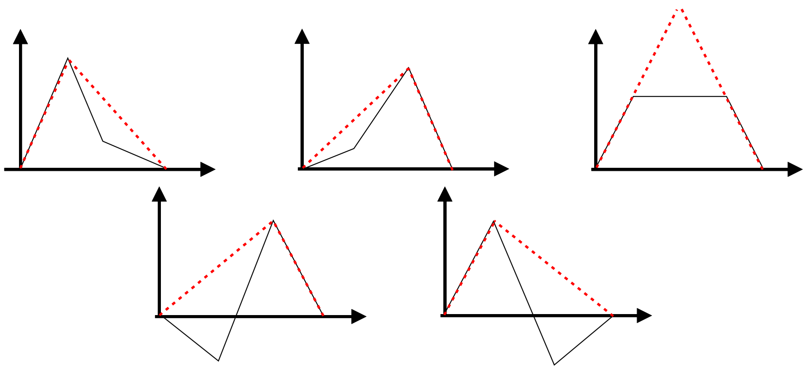
$$\tan\theta=-\tan(\alpha+\beta)=\frac{2\pi}{\tan\alpha\tan\beta-1}\geq\frac{2\pi}{\pi^2-1}$$

이므로 함수 $f(x)$의 최댓값 중에서 가장 큰 값 Q는 $\pi=\tan\alpha=\tan\beta$일 때 $\frac{\pi}{2}$이다.

즉, 함수 $f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때 집합 B의 길이는 2π이고 함수 $f(x)$의 최댓값 중에서 가장 큰 값 Q는 $\frac{\pi}{2}$이다.

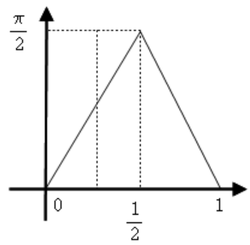
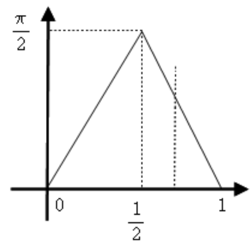
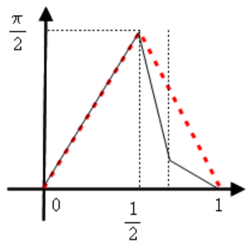
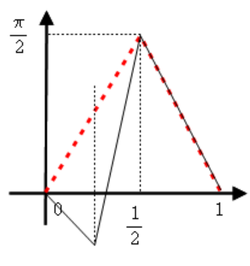
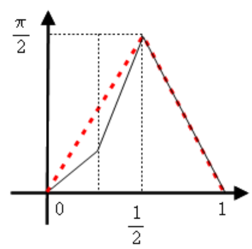
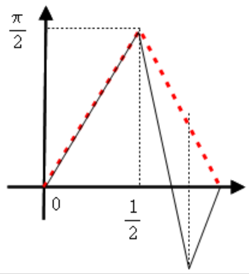


이제 위의 방법을 다른 형태의 그래프에 적용시켜보자.



다섯 가지 형태의 그래프에 각각 적용시키면 세 번째 그래프에서는 최댓값 중에 가장 큰 값 Q가 나올 수 없고 나머지는 모두 $\frac{\pi}{2}$라는 것을 알 수 있다.

이를 종합하여 집합 A를 구하면 다음과 같다.

		
$A=(0,\ 1)$	$A=(0,\ 1)$	$A=\left(0,\ \frac{1}{2}\right]$
		
$A=\left[\frac{1}{2},\ 1\right)$	$A=\left[\frac{1}{2},\ 1\right)$	$A=\left(0,\ \frac{1}{2}\right]$

논제 Ⅰ-3

$f(x) \le f(t)+a(x-t) \Longleftrightarrow f(x)-f(t) \le a(x-t)$

$x=t$일 때는 $f(x) \le f(t)+a(x-t)$가 당연히 성립한다. 그러므로 $f(x) \le f(t)+a(x-t)$가 항상 성립하기 위한 필요충분조건은 $x<t$일 때는 $\dfrac{f(x)-f(t)}{x-t} \ge a$이어야 하고 $x>t$일 때는 $\dfrac{f(x)-f(t)}{x-t} \le a$가 성립해야 한다는 것이다. 편의상 다음과 같이 두 조건을 각각 조건 가), 조건 나)라고 하자.

조건 가) 모든 실수 $x \in [0, t)$ 에 대하여 $\dfrac{f(x)-f(t)}{x-t} \ge a$

조건 나) 모든 실수 $x \in (t, 1]$ 에 대하여 $\dfrac{f(x)-f(t)}{x-t} \le a$.

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 다음이 성립한다.

$a \in B \Longrightarrow$ 조건 가), 조건 나)를 모두 만족하는 실수 $t \in (0, 1)$가 존재한다.

$\Longrightarrow f'(t) = \displaystyle\lim_{x \to t-0} \frac{f(x)-f(t)}{x-t} \ge a,\ f'(t) = \lim_{x \to t+0} \frac{f(x)-f(t)}{x-t} \le a,\ t \in A$

$\Longrightarrow f'(t) = a,\ t \in A$

$\Longrightarrow B \subset \{f'(t) | t \in A\}$

$t \in A \Longrightarrow$ 조건 가), 조건 나)를 모두 만족하는 실수 a가 존재한다.

$\Longrightarrow f'(t) = \displaystyle\lim_{x \to t-0} \frac{f(x)-f(t)}{x-t} \ge a,\ f'(t) = \lim_{x \to t+0} \frac{f(x)-f(t)}{x-t} \le a,\ a \in B$

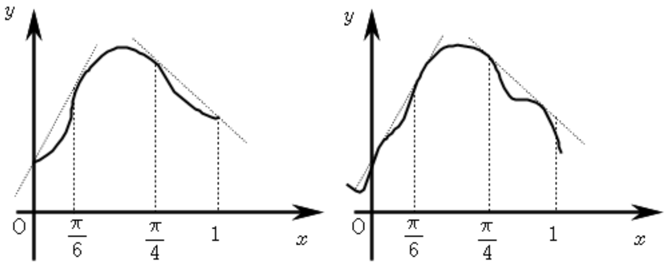
$\Longrightarrow f'(t) = a,\ a \in B$

$\Longrightarrow \{f'(t) | t \in A\} \subset B$

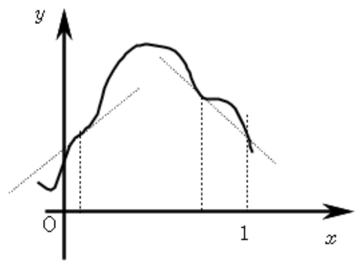
그러므로 $\{f'(t) | t \in A\} = B$이다. 한편 $t \in A = \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right]$이면 모든 실수 $x \in [0, 1]$ 에 대하여 부등식 $f(x) \le f(t)+f'(t)(x-t)$가 성립하므로 닫힌구간 $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right]$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 위로 볼록[16]이어야 한다. 그러므로 닫힌구간 $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right]$에서 도함수 $f'(x)$는 단조감소[17]한다. 이와 더불어 도함수 $f'(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 구하고자 하는 집합 B는 구간 $\left[f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right), f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$이다.

16) 순볼록의 의미가 아니고 사전(辭典)의 정의에 따른 것임(5쪽 읽기자료 참고)

17) 정의역의 임의의 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$의 관계가 만족할 때 $f(x_1) \ge f(x_2)$인 함수(3쪽 배경지식 참고)



〔조건을 만족하는 함수의 그래프 개형들의 예〕



〔t가 아래로 볼록인 구간에 속하면 $f'(t) \notin B$〕

논제 Ⅰ-4

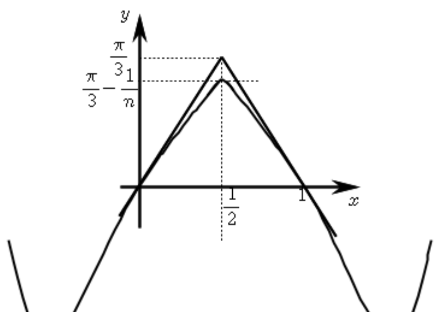
$A=(0,\,1)$ 이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 $[0,\,1]$에서 위로 볼록이다. 한편, $f'(x)$가 모든 실수에서 존재하고 연속이므로 평균값 정리에 의해서 $0=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c)$를 만족하는 실수 c가 0과 1사이에 존재한다. 그런데 $c\in$A이므로 $0=f'(c)\in B$이다. 그러므로 모든 실수 $x\in[0,\,1]$에 대하여 $f(x)\le f(c)+f'(c)(x-c)=f(c)$이다. 따라서 $f(c)$가 닫힌구간 $[0,\,1]$에서 최댓값이 된다. 또한, 평균값 정리를 닫힌구간 $[0,\,c]$, $[c,\,1]$에 각각 적용하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\frac{f(c)}{c}=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=f'(a),\ -\frac{f(c)}{1-c}=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=f'(b),\ 0<a<c<b<1$$

인 실수 $a,\,b$가 존재한다. 따라서

$$\frac{4}{3}\pi=\int_0^1|f''(x)|dx=f'(0)-f'(1)\ge f'(a)-f'(b)=\frac{f(c)}{c}+\frac{f(c)}{1-c}=\frac{f(c)}{c(1-c)}\ge 4f(c)$$

즉, $f(c)\le\dfrac{\pi}{3}$ 이므로 (가) 모든 $m\in C$에 대하여 $m\le\dfrac{\pi}{3}$이다. 한편, 모든 자연수 n에 대하여, 다음 네 가지 조건을 만족하는 함수 $f_n(x)$가 존재한다(※[그림 1-4]).



〔그림 1-4〕

ⅰ) 함수 $f_n(x)$의 도함수와 이계도함수가 모든 실수에서 연속

ii) 함수 $f_n(x)$의 그래프가 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 위로 볼록

iii) $f_n(0)=f_n(1)=0$, $f'(0)=\dfrac{2}{3}\pi$, $f'(1)=-\dfrac{2}{3}\pi$

iv) 닫힌구간 $[0,1]$에서 $f_n(x)$의 최댓값이 $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{1}{n}$보다 크거나 같다.

즉, (나) 모든 자연수 n에 대하여 $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{1}{n}\le m$인 C의 원소 m이 존재한다. 그러므로 (가), (나)에 의해서 $\{b\in\mathbb{R}\,|\,$모든 $m\in C$에 대하여 $m\le b\}$의 최솟값 S는 $\dfrac{\pi}{3}$이다.

14 연세대학교(원주) 의예

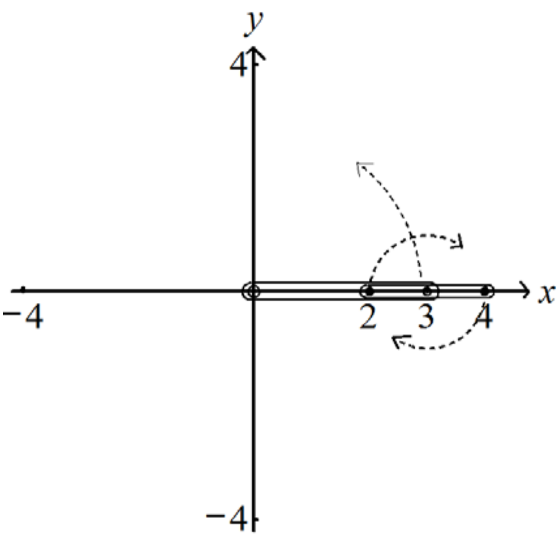
제 시 문 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

일변수 함수로 직선 위의 움직임을 표현하는 데는 충분하지만 평면에 있는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 움직임을 표현하기에는 부족하다. 예를 들어 인공위성의 이동을 추적하려 한다면 시간의 변화에 따른 인공위성의 위치를 알아야 한다. 이 때 좌표를 설정하고 시간 t를 매개변수로 사용하여 위성의 위치를 나타내는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 움직임을 방정식

$$x=x(t),\ \ y=y(t)$$

로 표현할 수 있는 데 이러한 방정식을 **매개변수방정식**이라 한다.

놀이공원에서 볼 수 있는 아래 <그림 1>과 같은 스크램블러(scrambler)는 회전하는 두 팔로 구성되어 있다. 길이가 $3m$인 안쪽 팔은 반시계방향으로 회전한다. 이 경우 각속도가 $\omega\ rad/\mathrm{sec}$라고 가정하면 안쪽 팔 끝점의 위치는 매개변수방정식 $x=3\cos\omega t,\ y=3\sin\omega t$로 나타낼 수 있다. 안쪽 팔 끝에서는 한 쪽의 길이가 $1m$인 바깥쪽 팔이 시계방향으로 회전한다. 이 스크램블러의 바깥쪽 팔의 회전 속도는 안쪽 팔 회전 속도의 세 배라고 한다. <그림 1>과 같은 상태에서 바깥쪽 팔의 오른쪽 끝점에 한 사람을 태우고 스크램블러가 움직이기 시작하였다.



〈그림1〉 스크램블러

논제 Ⅰ-1

안쪽 팔의 각속도가 $1\,rad/\sec$라고 할 때, 스크램블러의 안쪽 팔이 한 바퀴 회전하는 동안에 타고 있는 사람의 움직임을 나타내는 매개변수방정식을 구하고, 그 그래프를 좌표평면에 그리시오. (10점)

논제 Ⅰ-2

위 문제 [Ⅰ-1]에서 구한 매개변수방정식을 이용하여 스크램블러에 타고 있는 사람의 속력이 0인 시각을 모두 구하고, 문제 [Ⅰ-1]에서 그린 곡선의 길이를 구하시오. (20점)

논제 Ⅰ-3

위 문제 [Ⅰ-1]에서 그린 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오. (20점)

제시문분석

1. 제시문

매개변수 방정식이 무엇인지 설명하고, 놀이기구 스크램블러가 회전할 때 안쪽 팔 끝점의 위치를 매개변수 방정식으로 나타내고 있다. 바깥쪽 팔의 회전속도가 안쪽 팔의 회전속도의 세 배임을 제시하고 있다.

논제분석

논제 Ⅰ-1

안쪽 팔의 각속도를 제시하고, 안쪽 팔이 1바퀴 회전할 때 바깥쪽 팔의 오른쪽 끝에 앉아있는 사람의 움직임을 매개변수 방정식으로 나타내고 그 그래프를 그려보는 문제이다. 위치벡터와 삼각함수의 3배각 공식을 이용하면 움직임을 매개변수 방정식으로 표시할 수 있다.

논제 Ⅰ-2

[논제 Ⅰ-1]에서 구한 매개변수 방정식에서 스크램블러에 타고 있는 사람의 속력이 0인 시각과 그 그래프의 곡선의 길이를 구하는 문제이다. 매개변수 방정식을 이용하여 $|\vec{v}|=0$을 만족하는 t를 구한다. 곡선의 길이는 $\int |\vec{v}|dt$ 을 이용하여 구할 수 있다.

논제 Ⅰ-3

[논제 Ⅰ-1]에서 그린 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하는 문제이다. 삼각함수의 치환적분을 사용하거나 배각공식 또는 반각공식을 이용, 식을 변형하여 적분한다.

배경지식쌓기

1. 삼각함수의 여러 가지 공식

(1) 배각 공식

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

(2) 반각 공식

$\sin^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{2}$, $\cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{2}$, $\tan^2 \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

(3) 3배각 공식

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

(4) 곱을 합 또는 차로 고치는 공식

- $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$
- $\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$
- $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$
- $\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

2. 평면 위의 운동

(1) 평면 위의 점의 운동거리

평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $x=f(t)$, $y=g(t)$로 주어질 때, 점 P의 $t=a$부터 $t=b$까지의 운동거리 l은 다음 식으로 나타내어진다.

$$l = \int_a^b |\vec{v}|dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \ (a \le b)$$

(2) 곡선의 호의 길이

① 곡선 $x=f(t), y=g(t)$의 구간 $a \le t \le b$ 부분의 호의 길이 l은

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}\, dt$$

② 곡선 $y=f(x)$의 구간 $a \le x \le b$ 부분의 호의 길이 l은

$$l = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\, dx$$

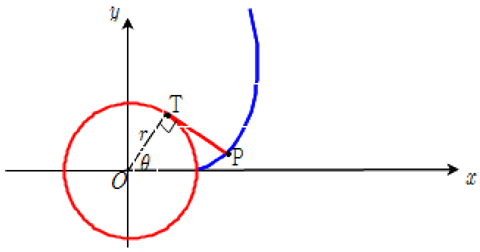
풀어보기

1. $a>0$일 때, $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$를 구하시오.

2. 다음과 같이 매개변수로 주어진 함수가 있다.
$x=r(\theta-\sin\theta), y=r(1-\cos\theta)\,(r>0)$일 때, 이와 같은 곡선을 cycloid라고 부른다.
곡선 $y=f(x)\,(0\le x\le 2\pi r)$의 길이를 구하시오.

3. 한 실이 원둘레를 따라 감겨져 있다가 팽팽히 당겨지면 직선인 상태로 된다. 그 실의 끝점 P 에 의하여 그려진 곡선을 원의 신개선(involute)이라 부른다. 만약 원이 반지름 r 과 중심 O 를 가진다면 P의 최초의 위치도 $(r,0)$ 이다. 매개변수 θ 가 아래 그림에서와 같다면, 신개선의 매개변수 방정식은 다음과 같음을 보여라.18)

$$x=r(\cos\theta+\theta\sin\theta),\ \ y=r(\sin\theta-\theta\cos\theta)$$



4. 다음을 적분하여라.

(1) $\int \sin^5 x\cos^2 x\,dx$

(2) $\int \tan^6 x\sec^4 x\,dx$

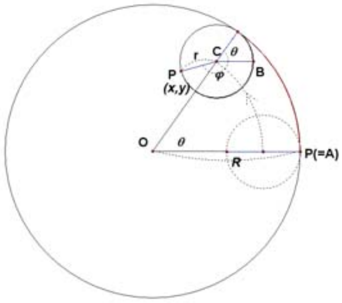
(3) $\int \tan^5 x\sec^7 x\,dx$

18) James Stewart, Calculus 미분적분학 6th, 청문각, 2010

읽기자료

원의 안쪽을 굴러가는 원 위의 한 점의 자취: hypocycloid[19)]

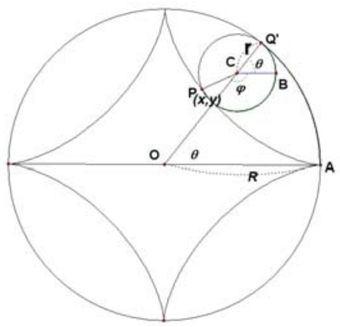
고대 그리스 시대의 천문학에 관한 가설은 행성이 원의 안쪽을 굴러가는 원운동을 한다는 것이다. 이를 탐구하기 위하여 그림과 같이 원의 안쪽을 굴러가는 원 위의 한 점 P의 자취를 살펴보기로 하자.



점 P의 정확한 자취의 방정식을 구해야만 별들의 움직임이 정확하게 어떤 경로를 따라서 움직이는지를 판별할 수 있기 때문이다. 그리스 사람들은 이렇게 원의 안쪽을 굴러가는 원 위의 점 P의 자취를 hypocycloid라고 불렀다.

hypocycloid의 자취를 구하기 위해 작은 원의 중심의 큰 원의 중심에 대한 회전각 θ와 점 P의 작은 원의 중심에 대한 회전각 ϕ를 이용하여 점 P의 좌표를 표현할 것이다.

그림과 같이 큰 원의 반지름과 작은 원의 반지름을 각각 R, r이라고 하자($R \geq r$).



점 A에 있던 점 P가 호 $\widehat{PQ'}$만큼 굴러서 점 P로 갔다고 하자.

이 때, 작은 원의 중심은 큰 원의 중심을 중심으로 시계 반대 방향으로 θ만큼, 점 P는 작은 원의 중심을 중심으로 시계 방향으로 ϕ만큼 회전했다고 하자. (큰 원과 작은 원의 반지름 차이로 인해서 작은 원의 회전각은 큰 원보다 크거나 같아야 한다.)

19) 수학과교육 77호, 물체의 움직임을 매개변수로 표시하기

이것은 점 P의 위치가 작은 원의 중심 C 에서 x축의 방향으로 $r\cos(-\phi)=r\cos\phi$만큼 y축의 방향으로 $y=r\sin(-\phi)=-r\sin\phi$만큼 평행이동 했음을 의미한다.

한편 작은 원의 중심 C의 좌표는 $x=(R-r)\cos\theta$, $y=(R-r)\sin\theta$ 이므로, 점 P의 좌표는

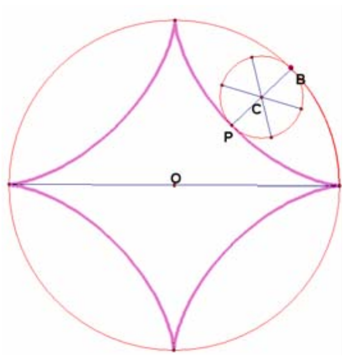
$$x=(R-r)\cos\theta+r\cos\phi,\ y=(R-r)\sin\theta-r\sin\phi \ \cdots\cdots(1)$$

이다. 여기서 ϕ와 θ의 관계를 구하자. 작은 원이 굴러간 거리 $\widehat{\mathrm{AQ}'}$은 중심각이 $\theta+\phi$인 호 PQ'의 길이와 같다. 즉 $\widehat{\mathrm{AQ}'}=R\theta=\widehat{\mathrm{PQ}'}=r(\phi+\theta)$이므로 $\phi=\left[\dfrac{R-r}{r}\right]\theta$이다. 이것을 (1)식에 대입하면 hypocycloid의 매개변수로 표현된 함수는 다음과 같다.

$$x=(R-r)\cos\theta+r\cos\left[\frac{R-r}{r}\right]\theta,\ y=(R-r)\sin\theta-r\sin\left[\frac{R-r}{r}\right]\theta \ \cdots\cdots(2)$$

이 hypocycloid는 다음과 같은 상황에서 그 중요성이 드러난다. $R=2r$이면 (2)식은 $x=r\cos\theta+r\cos\theta=2r\cos\theta$, $y=r\sin\theta-r\sin\theta=0$이다. 이것은 $y=0$이므로 작은 원 위의 한 점이 큰 원의 지름을 왕복하는 직선운동을 한다는 것을 의미한다. 즉, 반지름의 비가 $2:1$인 두 개의 원이 있으면 우리는 그것을 이용하여 직선을 그을 수 있다는 것이다. 이것은 19세기 증기기관의 설계에서 매우 중요하게 사용되는 기법이다. 즉, 원운동을 직선운동으로 바꾸거나 직선운동을 원운동으로 바꾸기 때문이다.

이제 그림과 같은 반지름의 비가 $4:1$인 hypocycloid를 살펴 보자.



위의 (2)식에 $R=4r$을 대입하면

$x=r(3\cos\theta+\cos3\theta)$, $y=r(3\sin\theta-\sin3\theta)$가 된다.

여기에서 삼각함수의 3배각의 공식

$\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$, $\sin3\theta=-4\sin^3\theta+3\sin\theta$을 이용하면

$\cos^3\theta=\dfrac{3\cos\theta+\cos3\theta}{4}$, $\sin^3\theta=\dfrac{3\sin\theta-\sin3\theta}{4}$이므로 $x=4r\cos^3\theta$, $y=4r\sin^3\theta$이다.

이때, $r=\dfrac{1}{4}$이면 $x=\cos^3\theta, y=\sin^3\theta$이고, 따라서 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$이 된다.

이 도형을 일반적으로 astroid라고 부른다.

예시답안

풀어보기

1. $I=\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ $(a>0)$를 계산하기 위하여 다음과 같은 치환을 생각하자.

$x=a\sin\theta$로 두면 $x=0 \Rightarrow \theta=0,\ x=a \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$이고 $dx=a\cos\theta d\theta$이므로

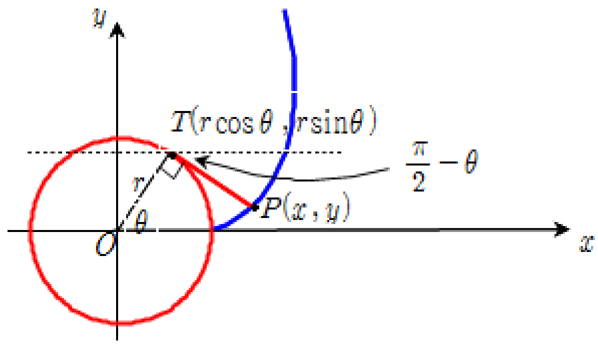
$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-(a\sin\theta)^2}\ a\cos d\theta = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{\pi a^2}{4}$$

2. $l=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$에서 $x=r(\theta-\sin\theta),\ y=r(1-\cos\theta)\ (r>0)$으로 두고 매개변수의 미분법과 치환적분법을 적용하면

$dx=r(1-\cos\theta)d\theta,\ dy=r\sin\theta d\theta$이고 $x=0 \Rightarrow \theta=0,\ x=2\pi r \Rightarrow \theta=2\pi$이므로

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{4r^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=\int_0^{2\pi}2r\sin\frac{\theta}{2}d\theta=8r$$이다.

3.



$$x=r\cos\theta+r\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=r(\cos\theta+\theta\sin\theta)$$

$$y=r\sin\theta-r\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=r(\sin\theta-\theta\cos\theta)$$

4. (1) $u=\cos x$라 두면 $du=-\sin x\,dx$

$$\int\sin^5 x\cos^2 dx=\int(\sin^2 x)^2\cos^2 x\sin x dx=\int(1-\cos^2 x)^2\cos^2 x\sin x\,dx$$

$$=\int(1-u^2)^2u^2(-du)=-\int(u^2-2u^4+u^6)du=-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{2}{5}\cos^5 x-\frac{1}{7}\cos^7 x+C$$

(2) $u=\tan x,\ du=\sec^2 x\,dx$

$$\int\tan^6 x\sec^4 x\,dx=\int\tan^6 x\sec^2 x\sec^2 x\,dx=\int\tan^6 x(1+\tan^2 x)\sec^2 dx$$

$= \int u^6(1+u^2)du = \int (u^8+u^6)du = \frac{1}{9}u^9 + \frac{1}{7}u^7 + C$

$= \frac{1}{9}\tan^9 x + \frac{1}{7}\tan^7 x + C$

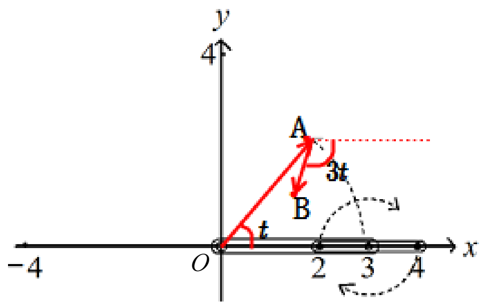
(3) $u = \sec x,\ du = \sec x \tan x\, dx$

$\int \tan^5 x \sec^7 x\, dx = \int \tan^4 x \sec^6 x \sec x \tan x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^6 x \sec x \tan x\, dx$

$= \int (u^2-1)^2 u^6\, du = \int (u^{10} - 2u^8 + u^6)du = \frac{1}{11}u^{11} - \frac{2}{9}u^9 + \frac{1}{7}u^7 + C$

$= \frac{1}{11}\sec^{11} x - \frac{2}{9}\sec^9 x + \frac{1}{7}\sec^7 x + C$

논제 Ⅰ-1



벡터를 이용하여 구하면 $\overrightarrow{OA} = (3\cos t,\ 3\sin t)$, $\overrightarrow{AB} = (\cos(-3t),\ \sin(-3t))$ 이므로 $\overrightarrow{OB} = (3\cos t + \cos 3t,\ 3\sin t - \sin 3t)$ 이다. $x = 3\cos t + \cos 3t,\ y = 3\sin t - \sin 3t$ 에서 삼각함수의 3배각 공식을 이용하여 매개변수방정식을 정리하면

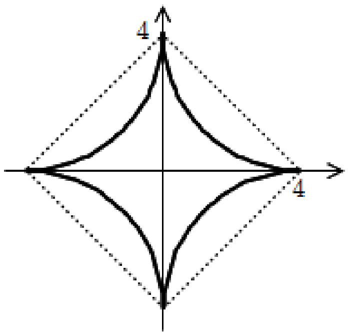
$$x = 4\cos^3 t,\ y = 4\sin^3 t$$

이다. 위의 매개변수 방정식을 정리하면 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$ 을 만족한다. 따라서 매개변수 방정식의 그래프는 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이다. 또한

$$\frac{dx}{dt} = -12\cos^2 t \sin t,\ \frac{dy}{dt} = 12\sin^2 t \cos t$$

이므로 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\frac{dy}{dx} = -\tan t < 0$ 이다. $(4,\ 0)$, $(0,\ 4)$ 를 지나고

$x + y = 4(\cos^3 t + \sin^3 t) \le 4$ 이므로 그래프는 제1사분면$\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$에서 아래로 볼록하며 감소한다. 그러므로 매개변수 방정식의 그래프는 다음 그림과 같다.



논제 Ⅰ-2

① 속력이 0인 시각

스크램블러에 타고 있는 사람의 속도 $\vec{v}$는

$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)=(-12\cos^2 t\sin t,\ 12\sin^2 t\cos t)$$

이고 속력 $|\vec{v}|$는

$$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{12^2\cos^4 t\sin^2 t+12^2\sin^4 t\cos^2 t}=12|\sin t\cos t|=6|\sin 2t|$$

이다. 속력이 0인 시각은

$\sin 2t=0$에서 $2t=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi \Rightarrow t=0,\ \frac{1}{2}\pi,\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ 2\pi$이다.

② 곡선의 길이

곡선의 길이는 [Ⅰ- 1]에 의해 1사분면에 있는 곡선의 길이를 4배하면 된다.

곡선의 길이 S는 $S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$에서

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}6|\sin 2t|\,dt=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt=24$$ 이다.

논제 Ⅰ-3

곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이는 [논제 Ⅰ-2]와 마찬가지로 제1사분면에 있는 $x,\ y$축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 4배하면 된다.

영역의 넓이 A는 $A=4\int_0^4 y\,dx$에서 $x=4\cos^3 t,\ y=4\sin^3 t$로 치환하면 $x=0 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$, $x=4 \Rightarrow t=0$이고 $dx=-12\cos^2 t\sin t\,dt$이므로

$$A=4\int_0^4 ydx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 4\sin^3 t\,(-12\cos^2 t\sin t)dt=192\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 tdt$$

이다. 여기서 t를 $t=\dfrac{\pi}{2}-u$로 치환하면 $A=192\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 u\sin^2 udu$이다. 따라서 $2A$는

$$2A=192\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=48\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2t)^2\,dt=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\,dt=24\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=12\pi$$

이다. 그러므로 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이 A는 6π이다.

(다른 풀이1)

반각공식 $\sin^2 t=\dfrac{1-\cos 2t}{2}$, $\cos^2 t=\dfrac{1+\cos 2t}{2}$를 사용한다.

$$192\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\ \cos^2 tdt=192\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)(1-\cos^2 2t)dt$$

$$=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\sin^2 2t\,dt=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)(1-\cos 4t)dt$$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t-\cos 4t+\cos 2t\cos 4t)dt\ =12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\cos 2t-\cos 4t+\frac{1}{2}\cos 6t\right)dt$$

$$=12\left[t-\frac{1}{4}\sin 2t-\frac{1}{4}\sin 4t+\frac{1}{12}\sin 6t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=6\pi$$

(다른 풀이2)

배각공식 $\sin t\cos t=\dfrac{1}{2}\sin 2t$를 사용한다.

$$192\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\ \cos^2 tdt=192\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2\sin^2 t\,dt=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)(1-\cos 2t)dt$$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t-\cos 4t+\cos 2t\cos 4t)dt=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\cos 2t-\cos 4t+\frac{1}{2}\cos 6t\right)dt=6\pi$$

15 연세대학교(원주) 자연

제시문 1 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

생명표란 어떤 생물학적 종의 출생에서 사망까지의 소멸과정을 나타내는 표이다. 이것은 그 종의 역사와 미래를 예측하는데 중요한 역할을 한다.
$p(x,\ t)$는 출생 후 x년 동안 산 개체가 그 후 t년 동안 생존할 확률을 뜻하며, $q(x,\ t)$는 x년 동안 산 개체가 그 후 t년 안에 사망할 확률을 뜻한다. $(q(x,\ t)=1-p(x,\ t))$ 또한 $L(x)$는 신생 개체 50,000개 중 x년까지 살아있는 개체의 수를 나타내고, $E(x)$는 출생하여 x년까지 산 개체가 이후 생존하는 기간(년) 즉 잔여수명을 나타내며 $E(x)=\sum_{t=1}^{\infty}p(x,\ t)$ (년) 으로 정의한다.

논제 Ⅰ-1

다음 표는 어떤 종의 생명표의 일부를 보인 것이다. (단, 주어진 종의 최대 수명은 50년이다.)

x(년)	44	45	46	47	48	49	50
$L(x)$(개)	1,132	500	347	201	85	17	0

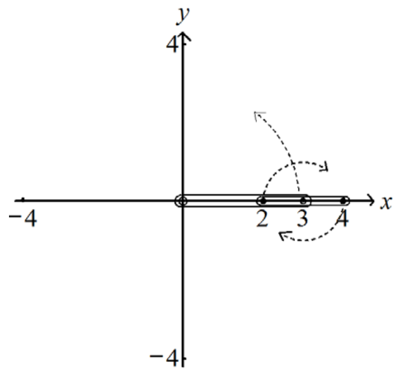
이 표를 이용하여 출생 후 개체가 45년 동안 생존할 확률과, 출생 후 45년을 산 개체가 3년 안에 사망할 확률을 구하시오. (15점)

논제 Ⅰ-2

위의 표와 다르게, 어느 종의 개체수가 $L(x)=50000-1000x\ (0\le x\le 50)$로 주어졌다고 가정하자. 잔여수명이 $E(x)=11$(년)일 때 그 개체의 나이 x를 추정하시오. (20점)

제시문 2 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.[20)]

놀이공원에서 볼 수 있는 아래 <그림 1>과 같은 스크램블러(scrambler)는 회전하는 두 팔로 구성되어 있다. 길이가 $3m$인 안쪽 팔은 반시계방향으로 회전한다. 이 경우 각속도가 $1\,rad/\sec$라고 가정하면 안쪽 팔 끝점의 위치는 매개변수방정식 $x=3\cos t,\ y=3\sin t$로 나타낼 수 있다. 안쪽 팔 끝에서는 한 쪽의 길이가 $1m$인 바깥쪽 팔이 시계방향으로 회전한다. 이 스크램블러의 바깥쪽 팔의 회전 속도는 안쪽 팔 회전 속도의 세 배라고 한다. <그림 1>의 바깥쪽 팔의 오른쪽 끝점에 타고 있는 사람의 위치는 매개변수 시간 t를 사용하여 다음과 같이 표현된다.



〈그림1〉 스크램블러

$$x=3\cos t+\cos 3t,\ y=3\sin t-\sin 3t$$

논제 Ⅱ-1

제시문의 매개변수방정식을 사용하여 스크램블러의 안쪽 팔이 한 바퀴 회전하는 동안에 타고 있는 사람의 위치를 나타내는 곡선의 그래프, 즉 움직이는 점 $(x(t),\ y(t))$의 자취를 좌표평면에 그리시오. (10점)

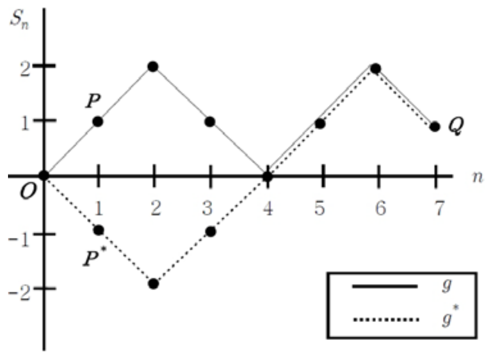
논제 Ⅱ-2

위 제시문의 스크램블러에 타고 있는 사람의 속력이 0인 시각을 구하시오. 그리고 문제 [2-1]에서 그린 곡선의 길이, 즉 스크램블러의 안쪽 팔이 한 바퀴 회전하는 동안에 타고 있는 사람이 실제로 움직인 거리를 구하시오. (20점)

20) 연세대(원주) 의예과의 제시문1의 논제(3번 문항 제외)와 일치하므로 분석과 풀이는 생략함.

제 시 문 3 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

동전을 던져서 앞면(H)과 뒷면(T)이 나올 확률을 각각 0.5라 하자. 동전을 7번 던져서 앞면이 나온 수가 뒷면이 나온 수 보다 한 번 많았다. n번 동전을 던져서 앞면이 나온 수에서 뒷면이 나온 수를 뺀 수를 $S_n(n=1,\ \cdots,\ 7)$이라고 하고, 점 $(n,\ S_n)$을 연결한 그래프를 고려하자. 예를 들어 7번 동전을 던진 결과가 {H, H, T, T, H, H, T}인 경우를 $\mathrm{O}(0,\ 0) \to \mathrm{Q}(7,\ 1)$에 이르는 그래프로 나타내면 <그림 2>의 g와 같다.



<그림 2> $O(0,0) \to Q(7,1)$에 이르는 그래프의 예

논제 Ⅲ-1

조건부확률 $P(S_6=2\ |S_7=1)$을 구하시오. (10점)

논제 Ⅲ-2

$\mathrm{Q}(7,\ 1)$에 이르는 동안 처음부터 계속해서 $S_n>0$이 될 확률을 구하려고 한다. 먼저 $\mathrm{P}(1,\ 1) \to \mathrm{Q}(7,\ 1)$, $\mathrm{P}^*(1,\ -1) \to \mathrm{Q}(7,\ 1)$에 이르는 가능한 그래프의 수를 각각 구하시오. 그리고 아래 조건 ①과 ②를 이용하여 $\mathrm{O}(0,\ 0) \to \mathrm{Q}(7,\ 1)$에 이르는 그래프 중에서 한 번도 x축을 만나지 않는 경우의 수를 구한 후, 앞에서 구한 값들을 이용하여 확률을 구하시오. (25점)

① 처음부터 앞면이 나온 수가 많으려면 그래프는 반드시 점 P를 통과해야 한다.
② x축을 만나는 어떤 그래프 $g:\mathrm{P} \to \mathrm{Q}$에 대해서도 그래프 g가 처음 x축과 만나는 점까지는 x축에 대해 대칭이고 이 후는 일치하는 그래프 $g^*:\mathrm{P}^* \to \mathrm{Q}$가 존재한다. 역으로 어떤 그래프 $g^*:\mathrm{P}^* \to \mathrm{Q}$는 반드시 x축을 만나야 하므로, 그래프 g^*가 처음 x축과 만나는 점까지는 x축에 대해 대칭이고 이후는 일치하는 그래프 $g:\mathrm{P} \to \mathrm{Q}$가 존재한다. 따라서 그래프 $g:\mathrm{P} \to \mathrm{Q}$와 $g^*:\mathrm{P}^* \to \mathrm{Q}$는 일대일 대응이 성립한다. (<그림 2> 참조)

제시문분석

1. 제시문1

생명표, 생존할 확률, 사망할 확률, 잔여수명에 대해 설명하고 있다.

2. 제시문3

동전을 던져서 나온 결과를 그래프로 나타내는 방법에 대해 설명하고 있다.

논제분석

논제 Ⅰ-1

생명표를 제시하고 출생 후 개체가 45년간 생존할 확률과 출생 후 45년간 생존한 개체가 3년안에 사망할 확률을 계산하는 문제이다. 제시문에 주어진 공식을 이용하여 $p(x,\ t) = \dfrac{L(x+t)}{L(x)}$임을 유도한 후 대입하면 간단하게 계산할 수 있다.

논제 Ⅰ-2

종의 개체 수와 잔여수명을 제시하고 그 개체의 나이를 추정하는 문제이다. 제시문에 주어진 잔여수명의 공식을 사용하여 계산한다. 단, 주어진 종의 최대 수명이 50년이므로 최대생존기간이 $(50-x)$년임을 이용하면 $\sum_{t=1}^{\infty} p(x,t)$ 대신에 $\sum_{t=1}^{50-x} p(x,t)$를 대입해야 한다.

논제 Ⅲ-1

조건부 확률을 구하는 문제이다. 조건부 확률의 정의와 독립시행의 확률을 이용하여 구한다.

논제 Ⅲ-2

$\mathrm{P}(1,\ 1) \to \mathrm{Q}(7,\ 1)$, $\mathrm{P}^*(1,\ -1) \to \mathrm{Q}(7,\ 1)$에 이르는 가능한 그래프의 수를 이용하여 $\mathrm{O}(0,\ 0) \to \mathrm{Q}(7,\ 1)$에 이르는 그래프 중에서 한 번도 x축을 만나지 않는 경우의 수와 확률을 구하는 문제이다. 논제에 나오는 일대일 대응의 관계를 이용하면 구할 수 있다.

배경지식쌓기

1. 조건부 확률

두 사건 A, B에 대하여 사건A가 일어났다고 가정하였을 때 사건B가 일어날 확률을 사건A가 일어났다는 가정 하에서 사건B가 일어날 조건부 확률이라고 하고, $P(B \mid A)$로 나타난다.

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(A \cap B^c)} \ (\text{단, } P(A) > 0)$$

2. 베이즈의 정리 (Bayes' Theorem)

n개의 배반인 사건 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 중 하나는 반드시 일어난다고 할 때, 임의의 사건B에 대하여 다음의 식이 성립한다.

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B \mid A_k)} \ (1 \le i \le n)$$

3. 독립시행

동일한 시행을 반복할 때, 각 시행의 결과가 서로 독립일 경우, 이러한 시행을 독립시행이라 한다.

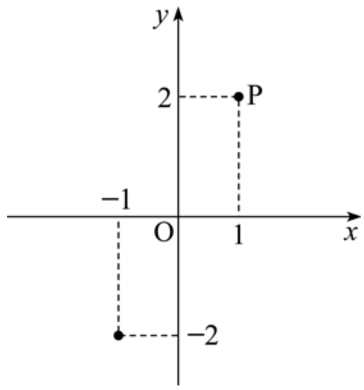
어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률을 p이고, 일어나지 않을 확률이 q라 할 때, 이 시행을 독립적으로 n회 반복하는 독립시행에서 사건A가 r회 일어날 확률 P_r은

$$P_r = {}_nC_r p^r q^{n-r} \ (\text{단, } p+q=1, \ r=0, \ 1, \ 2, \ \cdots, \ n)$$

풀어보기

1. 좌표평면 위를 움직이는 점 P가 있다. 동전 1개를 던져서 앞면이 나오면 점 P를 x축에 대하여 대칭이동하고, 뒷면이 나오면 점 P를 y축에 대하여 대칭이동하기로 하자. 동전을 6번 던질 때, 점 $(1, 2)$에서 출발한 점 P가 점 $(-1, -2)$에 있을 확률은?

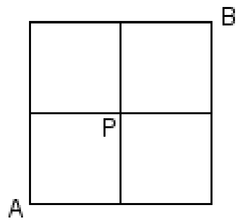
(2007 전국연합)



2. 5회에 1회의 비율로 모자를 잃어버리고 돌아오는 버릇이 있는 K군이 A, B, C라는 세 친구집을 차례로 방문하고 돌아왔을 때, 모자를 잃어버렸다는 것을 알았다. 두 번째 방문한 B의 집에서 잃어버렸을 확률을 구하여라.

3. **(Monty Hall problem)** TV프로그램 중에 출연자가 자기 앞에 있는 3개의 문 중에서 하나를 선택하는 프로그램이 있다. 이 3개의 문 중 어느 한 문 뒤에만 승용차가 있고 나머지 두문 뒤에는 염소가 있어서 만일 출연자가 선택한 문을 열어서 그 문 뒤에 승용차가 나오면 그 차는 출연자의 것이 되지만 만일 염소가 나오면 아무 것도 갖지 못하는 게임이다. 어느 출연자가 한 문을 선택했을 때 사회자는 어느 문 뒤에 승용차가 있는지 알기 때문에 남은 다른 두 문 중에서 한 문을 열어 보이고 그 뒤에 염소가 있음을 확인시킨 후(남은 두 문중 어느 한 문 뒤에는 반드시 염소가 있을 것이다) 출연자에게 선택한 문을 바꿀 용의가 있느냐고 물어본다. 처음 선택한 것을 유지할 경우와 바꿀 경우 어느 것이 더 유리한가?

4. 그림과 같이 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단거리로 이동하여 도착하려고 한다.



이때 P 지점을 지나가는 확률을 구하려고 한다. 서현이와 유리 두 사람 중 누구의 이야기가 옳은가?

서현 : A 지점에서 B 지점까지 가는 최단거리가 6 가지이고, 그 중에 P 지점을 지나가는 경우가 4 가지이므로 확률은 $\frac{2}{3}$ 이다. **유리** : A 지점에서 P 지점이 아닌 다른 곳을 지나가는 확률이 각각 $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ 이므로 P 지점을 지나가는 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

읽기자료

걸어도 걸어도 앞으로 나아가지 못하는 취객[21)]

경제학에서도 주목하는 브라운 운동

'브라운 운동'이라는 현상이 있다. 이 연구의 시작은 식물학자 브라운이 19 세기 초에 보고하여 주목받았다. 컵에 담긴 물에서 꽃가루가 미세하게 떨며 움직이는 것을 발견한 브라운은 처음에는 이 운동이 생명현상이라고 착각했다(속설일 뿐이라는 말도 있다.)

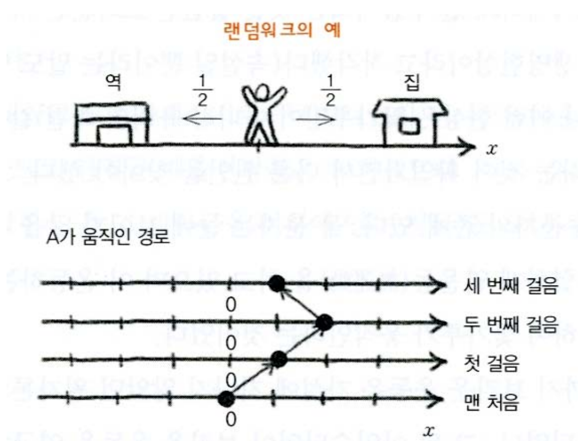
그러나 이런 현상은 꽃가루만이 아니라 유리의 파편 같은 것들도 보여준다는 것이 확인되면서 다른 원인을 찾아야 했다. 그 원인은 '원자와 분자의 존재'였다. 물 분자는 눈에 보이지 않을 정도로 작지만 격렬하게 열운동을 하고 있으며 이 운동하는 물 분자와 충돌하여 꽃가루가 움직인다는 것이었다.

브라운 운동은 당시까지 가설에 지나지 않았던 원자론의 중요한 증거가 되었다. 그 뒤 아인슈타인이 브라운 운동을 연구하여 노벨상을 수상한 것은 유명한 일이다. 브라운 운동의 원인이 해명된 뒤에는 그 운동의 특성에 대한 연구가 활발해져, 위너(N. Wiener)같은 수학자들이 정교하게 이론으로 다듬어 갔다. 또 주식의 가격 변동이 브라운 운동에 가깝다는 주장이 제기된 이래 금융 등의 경제계에서 주목받게 되었다.

취객의 걸음걸이로 '브라운 운동'을 이해할 수 있다.

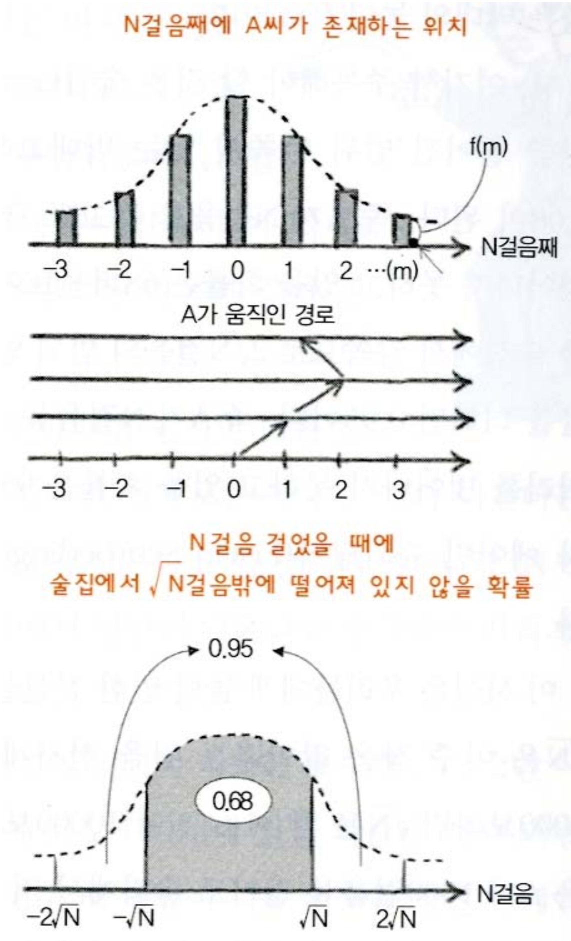
브라운 운동을 단순화한 것에 '랜덤워크'가 있다. 랜덤워크를 통해서 브라운 운동의 정체를 좀 더 파헤쳐보자.

역과 집 사이의 중간에 술집이 있고, 만취한 A 가 지금 술집을 나와 집을 향해 출발했다고 하자. 그런데 A 는 술을 지나치게 많이 마셔서 발걸음이 불안하다. 한 발 내밀 때마다 비틀비틀 역 방향과 집 방향으로 반반의 확률로 왔다 갔다한다.



---

21) 고지마 히로유키 지음, 허명구 옮김, 세상은 수학이다, 해나무, 2009



이것을 오른쪽의 그림으로 살펴보자. x 축의 플러스 방향이 집 쪽이고 마이너스 쪽이 역 쪽이라고 치자. 만취한 A 는 확률 0.5 로 플러스 방향, 그리고 확률 0.5 로 마이너스 방향으로 한 눈금씩 이동한다. 다음으로 그림과 같이 한 발 나아갈 때마다 하나 위에 있는 가로축에 A 의 위치를 표시해가는 것으로 하자. 이것은 A 가 취한 발걸음으로 걸은 경로를 그린 것이다. 걸음 수 N 이 충분히 크다면 N 걸음째에 A 씨가 존재하는 위치를 확률적으로 그리면 그림의 그래프와 같다.

막대그래프의 높이는 그 위치에 있을 확률을 나타낸다. 예를 들면 술집에서 집쪽으로 m 걸음만큼 가까이 다가간 위치에 있을 확률은 막대의 높이 $f(m)$ 이다. 자, 여기서 주목해야 할 것은 술집($x=0$)에서 양쪽으로 $\sqrt{N}$ 걸음만큼 떨어진 범위 안쪽에 있는 막대그래프의 확률을 더하면 약 0.68 이 된다. 즉 A 가 N 걸음을 걷고도 술집에서 $\sqrt{N}$ 걸음의 거리를 벗어나지 못하고 있을 확률은 68 퍼센트이다. 나아가 이것의 두 배, 즉 술집에서 양쪽으로 $2\sqrt{N}$ 걸음의 범위안에 있는 막대그래프의 확률을 더하면 0.95 이다. 즉 A 가 N 걸음을 걷고도 술집에서 $2\sqrt{N}$ 걸음의 거리를 벗어나지 못하고 있을 확률은 95 퍼센트다. 이것을 물리학자 에어빈 슈뢰딩거는 ‘$\sqrt{N}$ 법칙’이라고 했다.

이 사실은 우리들에게 놀랄만한 진실을 가르쳐준다. 우선 N 보다 $\sqrt{N}$ 은 아주 작은 값이라는 것을 전자계산기로 확인해보자. N 이 1000 보라면 $\sqrt{N}$ 은 약 31.6 , N 이 10000 보라면 $\sqrt{N}$ 은 100 이다. 이것은 A 가 1000 걸음을 걸어도 술집에서 겨우 32 걸음, 잘해야 64 걸음 정도밖에 떨어져 있지 않음을 의미한다. 만취한 상태에서 집으로 가는 길이 얼마나 먼 길인지는 술을 좋아하는 사람이라면 경험으로 알고 있을 것이다. 이러한 부분에도 $\sqrt{\ }$ (무리수)가 관계있다는 것은 유쾌한 일이다.

랜덤워크는 만취한 A 가 동전을 던져서 걷는 방향을 결정하는 것과 같다. 좌우 어디로 갈지는 마치 동전을 던졌을 때 앞뒤 어디가 나올지 모르는 것과 같기 때문이다. 따라서 랜덤워크에 ‘$\sqrt{N}$ 법칙’이 있다면 동전 던지기에도 마찬가지 이 법칙을 적용할 수 있다.

예시답안

풀어보기

1. 점P가 x축과 y축에 대하여 각각 홀수번씩 대칭이동해야 점$(-1,-2)$에 있게된다.
즉, (x축 1번, y축 5번), (x축 3번, y축 3번), (x축 5번, y축 1번)
따라서 ${}_6C_1\left(\frac{1}{2}\right)^6+{}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^6+{}_6C_5\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{2}$

2. 모자를 잃어버리는 사건을 E, 모자를 A의 집, B의 집, C의 집에서 잃어버린 사건을 각각 A, B, C 라고 하면

$$P(A\cap E)=P(A)=\frac{1}{5},\ P(B\cap E)=P(B)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{5},\ P(C\cap E)=P(C)=\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}$$

$$P(B\mid E)=\frac{P(B\cap E)}{P(E)}=\frac{P(B\cap E)}{P(A\cap E)+P(B\cap E)+P(C\cap E)}$$

$$=\frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}=\frac{\frac{4}{25}}{\frac{61}{125}}=\frac{20}{61}$$

3. 3개의 문을 각각 A, B, C라 하고, 출연자가 A를 선택했다고 하자. 이때 사회자가 B를 선택하는 사건을 D, 자동차가 A, B, C에 있는 사건을 각각 A,B,C라고 하면

$$P(A)=\frac{1}{3}, P(B)=\frac{1}{3}, P(C)=\frac{1}{3},\ P(D\mid A)=\frac{1}{2}\quad P(D\mid B)=0,\ P(D\mid C)=1$$

$$P(A\mid D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{P(A\cap D)}{P(A\cap D)+P(B\cap D)+P(C\cap D)}$$

$$=\frac{P(D\mid A)P(A)}{P(D\mid A)P(A)+P(D\mid B)P(B)+P(D\mid C)P(C)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$$

마찬가지로 계산하면 $P(C\mid D)=\frac{2}{3}$이다. 즉, 선택을 바꾸는 경우가 유리하다.

4. 유리의 말이 옳다. 6가지의 경우에서 각각의 확률이 다르므로 경우의 수로 계산할 수 없다.

논제 Ⅰ-1

① 출생 후 개체가 45년 동안 생존할 확률

$$p(0,\ 45)=\frac{L(0+45)}{L(0)}=\frac{500}{50000}=\frac{1}{100}$$

② 출생 후 45년을 산 개체가 3년 안에 사망할 확률

$$q(45,\ 3)=1-p(45,\ 3)=1-\frac{L(45+3)}{L(45)}=1-\frac{85}{500}=\frac{83}{100}$$

논제 Ⅰ-2

잔여 수명이 11 년이므로 $0\le x\le 39$ 이다.

$p(x,\ t)$의 정의에 의해 $p(x,\ t)$는 $p(x,\ t)=\dfrac{L(x+t)}{L(x)}$ 이다. $E(x)=11$ 에서

$11=\displaystyle\sum_{t=1}^{\infty}p(x,\ t)=\sum_{t=1}^{50-x}p(x,\ t)=\frac{1}{L(x)}\sum_{t=1}^{50-x}L(x+t)$ 이고 $11L(x)=\displaystyle\sum_{t=1}^{50-x}L(x+t)$ 이다.

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{50-x}L(x+t)&=L(x+1)+L(x+2)+\cdots+L(50)\\&=\{50000-1000(x+1)\}+\{50000-1000(x+2)\}+\cdots+\{50000-1000(x+50-x)\}\\&=50000(50-x)-1000\times\frac{(50-x)(51+x)}{2}\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$11(50000-1000x)=50000(50-x)-1000\times\frac{(50-x)(51+x)}{2}$$

이고, $x\ne 50$ 이므로

$$11000=50000-500\times(51+x)$$

이다. 그러므로 $x=27$ 이다.

(다른풀이)

$L(x)=50000-1000x=1000(50-x)$를 이용하여

$$\sum_{t=1}^{\infty}p(x,\ t)=\sum_{t=1}^{50-x}p(x,\ t)=\sum_{t=1}^{50-x}\frac{L(x+t)}{L(x)}$$

$$=\sum_{t=1}^{50-x}\frac{1000(50-x-t)}{1000(50-x)}=\sum_{t=1}^{50-x}\left(1-\frac{t}{50-x}\right)=(50-x)-\frac{1}{50-x}\times\frac{(50-x)(51-x)}{2}=11$$

이다. 그러므로 $x=27$ 이다.

논제 Ⅲ-1

조건부확률의 정의와 독립시행의 확률을 이용하면

$$P(S_6=2\,|S_7=1)=\frac{P(S_6=2 \text{ and } S_7=1)}{P(S_7=1)}=\frac{{}_6C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}}{{}_7C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{{}_6C_4}{{}_7C_4}=\frac{3}{7}$$ 이다.

논제 Ⅲ-2

㉠ P(1, 1) → Q(7, 1)에 이르는 가능한 그래프의 수

앞 ○ ○ ○ ○ ○ ○ 에서 앞3, 뒤3인 경우의 수와 같으므로 ${}_6C_3=20$이다.

㉡ P*(1, −1) → Q(7, 1)에 이르는 가능한 그래프의 수

뒤 ○ ○ ○ ○ ○ ○ 에서 앞4, 뒤2인 경우의 수와 같으므로 ${}_6C_4=15$이다.

㉢ O(0, 0) → Q(7, 1)에 이르는 그래프 중에서 x축을 만나지 않는 경우의 수

조건 ①과 ②에서 그래프 g : P → Q 와 g^* : P* → Q 는 일대일 대응이 성립함으로 $20-15=5$인 5개의 그래프가 x축과 만나지 않는다.

㉣ Q(7, 1)에 이르는 동안 처음부터 계속해서 $S_n>0$이 될 확률

㉠, ㉡, ㉢에서 조건을 만족하는 그래프는 5개임을 알 수 있다. 따라서 Q(7, 1)에 이르기 위해서는 총 7회 중 앞면이 4번 나와야 하므로 총 경우의 수는 ${}_7C_4=35$이고, 조건에 맞는 그래프는 5개이므로 구하는 확률은 $\frac{5}{35}=\frac{1}{7}$ 이다.

16 이화여자대학교 모의

논제 1

어떤 공장에서 생산된 생산품 A의 불량품의 개수를 매년 조사한 결과, 그 해 발생한 불량품의 개수는 이 전 두 해에 각각 발생한 개수들의 평균과 일치함을 알 수 있었다. 조사를 실시한 첫 번째 해에 발생한 불량품의 개수가 1000이고 두 번째 해에 발생한 불량품의 개수가 1500이라고 할 때, n번째 해에 발생한 불량품의 개수를 결정하시오. (단, n은 2보다 큰 자연수이다.)

논제 2

집합 S 는 $\dfrac{1}{a_n}$로 구성된 무한 집합으로서 a_n은 0을 자리숫자로 가지지 않는 자연수이다. 예를 들면, $\dfrac{1}{271}$은 S의 원소이나 $\dfrac{1}{305}$은 S의 원소가 아니다. 아래 물음에 답하시오. [20점]

(1) 임의의 자연수 n에 대하여 10^n에서 10^{n+1}사이에 있는 자연수 중에서 0 을 자리숫자로 가지지 않는 자연수들의 개수를 구하시오.

(2) S의 모든 원소의 합 $\displaystyle\sum_{\frac{1}{a_n}\in S}\frac{1}{a_n}$의 수렴성에 대하여 논하시오.

논제 3

제 시 문 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

[가] (평균치 정리) 두 실수 a, b가 $a<b$를 만족할 때, 함수 f가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하면, $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$를 만족하는 적당한 점 c가 (a, b)안에 존재한다.

[나] 함수 f가 실수 전체에서 연속인 일대일 함수이면 다음 성질을 만족한다.

① 함수 f의 치역을 정의역으로 갖는 역함수 f^{-1}가 존재하고, f^{-1}도 역시 연속함수이다.

② 임의의 점 α에 대하여 $f(\alpha)=\beta$라고 하자. β에 대하여 h가 충분히 작은 실수이면, $\beta+h=f(\gamma)$를 만족하는 점 γ를 유일하게 찾을 수 있다.

함수 f가 임의의 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$을 만족할 때, 위 제시문을 이용하여 다음 물음에 답하시오. [25점]

(1) 함수 f가 일대일 함수임을 보이시오.

(2) α, β, γ, h가 제시문 [나] ②에서 주어진 것과 같을 때, h가 0으로 수렴하면 γ가 α로 수렴함을 설명하시오.

(3) α, β가 제시문 [나] ②에서 주어진 것과 같을 때, 함수 f의 역함수 f^{-1}가 β에서 미분가능함을 보이고, 다음의 등식을 유도하시오.

$$\left(f^{-1}\right)'(\beta)=\frac{1}{f'(\alpha)}$$

제시문분석

1. 제시문

(가) 평균값 정리에 대하여 설명하고 있다.
(나) 연속함수와 일대일 함수에 대하여 설명하고 있다.

논제분석

논제 1

이 문제에서는 주어진 상황에 해당하는 수열의 점화식을 찾고, 그 점화식의 적절한 변형을 통해 구하고자 하는 수열이 등비수열과 관련이 있음을 인식함으로써 문제를 해결할 수 있는 논리적 사고능력을 보고자 하였다.

논제 2

이 문제에서는 주어진 급수의 수렴성을 보이기 위하여 적당한 범위 안에서 분모에 나타날 수 있는 모든 경우의 수를 구하고, 그 경우의 수를 적용하여 주어진 급수의 대소 관계를 추론함으로써 문제를 해결하는 논리적 사고능력을 보고자 하였다.

논제 3

주어진 명제들을 논거로 활용하여 요구되는 문제들을 해결하는 조건제시 논술형 문제이다. 주어진 함수가 적절한 조건을 만족할 때, 그 함수와 역함수의 관계를 알아보는 상황을 제시하고 있다. 함수의 연속과 미분가능의 정의를 파악하고, 주어진 명제들을 활용함으로써 역함수의 연속성과 함수의 미분계수와 그 역함수의 미분계수 사이의 관계를 추론할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

[논제 (1)]
평균값 정리를 이용하여 주어진 함수가 일대일 함수임을 증명하고 있다.

[논제 (2)]
주어진 문자들의 수렴관계를 구하고자 한다.

[논제 (3)]
역함수의 미분법 공식을 [논제 (2)]를 이용하여 증명하고 있다.

배경지식쌓기

1. 롤의 정리[22]

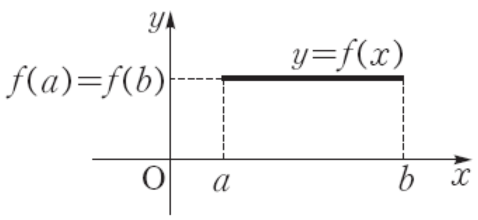
<롤의 정리 정의>

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면 $f'(c)=0$ 인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

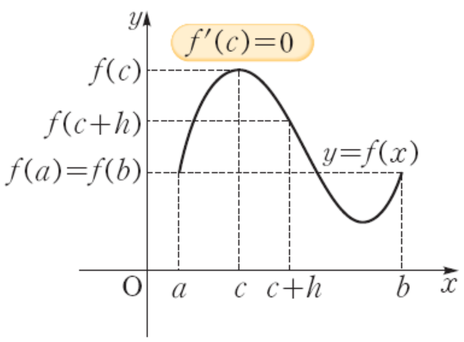
<롤의 정리 증명>

ⅰ) 함수 $f(x)$가 상수함수일 때,

열린구간 $(a,\ b)$에 속하는 모든 c에 대하여 $f'(c)=0$이다.



ⅱ) 함수 $f(x)$가 상수함수가 아닐 때,



$f(a)=f(b)$이므로 함수 $f(x)$는 열린구간 $(a,\ b)$에 속하는 $x=c$에서 최댓값 또는 최솟값을 갖는다.

$x=c$에서 최댓값을 가질 때 절댓값이 충분히 작은 수 $h(h\neq 0)$에 대하여 $f(c+h)-f(c)\leq 0$ 이므로

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leq 0,\ \lim_{h\to-0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\geq 0$$

이다.

그런데 함수 $f(x)$는 $x=c$에서 미분가능하므로 위의 좌극한과 우극한이 같다. 따라서 다음이 성립한다.

22) 좋은 책 신사고 수학 2

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=0$$

같은 방법으로 함수 $f(x)$가 $x=c\ (a<c<b)$에서 최솟값을 갖는 경우에도 $f'(c)=0$ 임을 보일 수 있다.

2.평균값의 정리[23]

<평균값의 정리>

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

<평균값의 정리 증명>

함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$를 지나는 직선 AB의 기울기는 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$이다.

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=k$ 라고 하면 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은 $y=k(x-a)+f(a)$이다. 이때, $F(x)=f(x)-\{k(x-a)+f(a)\}$ …… ①

라고 하면 함수 $F(x)$ 는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하며 $F(a)=F(b)=0$이다.

따라서 롤의 정리에 의하여 $F'(c)=0$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다. ①의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$F'(x)=f'(x)-k$$

이므로 $F'(c)=f'(c)-k=0$에서 $f'(c)=k$이다.

따라서 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

23) 좋은 책 신사고 수학 2

풀어보기

1. 모든 실수 x에 대하여 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{g\left(2+\frac{1}{n}\right)-g\left(2-\frac{1}{n}\right)\right\}=\frac{1}{3}$$

을 만족하고 $f(3)=2$일 때, 미분계수 $f'(3)$의 값은?

(2012 EBS)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

2. 수열 $\{a_n\}$은 3으로 나누어떨어지지 않는 자연수를 1부터 차례대로 나열한 수열이다. 즉,

$$a_n:\ 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11,\cdots$$

이다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_n \geq 390$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.

(2011 EBS)

3. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가

$$f(-1)=-1,\ f(0)=1,\ f(1)=0$$

을 만족시킬 때, 보기에서 옳은 것만 있는 대로 고른 것은?

(2006 9월 평가원)

보 기

ㄱ. $f(a)=\frac{1}{2}$인 실수 a가 구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 두 개 존재한다.

ㄴ. $f'(b)=-1$인 실수 b가 구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 한 개 존재한다.

ㄷ. $f''(c)=0$인 실수 c가 구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 한 개 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

읽기자료

무한급수의 수렴 발산 – 바젤의 문제

조화급수 $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$는 발산하지만 급수 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$은 $\frac{\pi^2}{6}$으로 수렴한다.

이 문제는 이를 해결한 오일러의 고향 마을의 이름을 따서 바젤의 문제(Basel Problem)라고 한다.

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\ =1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=2$$

즉 $1<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots<2$ 이므로 1과 2사이의 어떤 값(약 1.644934)에 수렴한다는 것은 알았지만 그 값이 정확히 얼마인지를 아는 데는 오랜 시간이 걸렸다. 1644년 멩골리를 시작으로 베르누이(Bernoulli), 라이프니츠(Leibniz), 뉴턴(Newton)등 당대의 수학자들이 노력했지만 모두 실패로 끝나고 1735년 베르누이의 제자인 오일러(Leonhard Euler, 스위스)에 의해 급수의 합이 $\frac{\pi^2}{6}$이 됨이 밝혀졌다. 그의 나이 24세 때의 일이다.

[증명]

사인을 멱급수로 정리하면

$$\sin x=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

라 하자. 양변을 계속 미분하면

$$\cos x=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots$$

$$-\sin x=2a_2+(3\cdot 2)a_3x+(4\cdot 3)a_4x^2+(5\cdot 4)a_5x^3+\cdots$$

$$-\cos x=(3\cdot 2)a_3+(4\cdot 3\cdot 2)a_4x+(5\cdot 4\cdot 3)a_5x^2+\cdots$$

$$\sin x=(4\cdot 3\cdot 2)a_4+(5\cdot 4\cdot 3\cdot 2)a_5x+\cdots$$

$$\vdots$$

위의 각각의 식에 $x=0$을 대입하면

$$a_0=0\ ,\ a_1=1\ ,\ a_2=0\ ,\ a_3=-\frac{1}{3!}\ ,\ a_4=0\ ,\ a_5=\frac{1}{5!}\ ,\ \cdots$$

따라서 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=x\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots\right)$

여기서 $P(x)=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots=\frac{\sin x}{x}$ $\cdots$① 이라 두면

$P(\pm\pi)=P(\pm 2\pi)=P(\pm 3\pi)=\cdots=0$, $P(0)=1$ 이다. 따라서

$$P(x)=\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\cdots$$
$$=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$
$$=1-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{2^2\pi^2}+\frac{1}{3^2\pi^2}+\cdots\right)x^2+\cdots \qquad \cdots②$$

①, ②식의 x^2의 계수를 비교하면 $\frac{1}{3!}=\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{2^2\pi^2}+\frac{1}{3^2\pi^2}+\cdots$ 이 되고 양변에 π^2을 곱하면 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$ 은 $\frac{\pi^2}{6}$으로 수렴한다.

예시답안

풀어보기

1. 정답 ⑤

$\frac{1}{n}=h$ 로 놓으면 $n\to\infty$ 일 때, $h\to 0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} n\left[g\left(2+\frac{1}{n}\right)-g\left(2-\frac{1}{n}\right)\right]=\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)+g(2)-g(2-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(2-h)-g(2)}{-h}=2g'(2)=\frac{1}{3}$$

$$\therefore g'(2)=\frac{1}{6}$$

이때, $f(3)=2$에서 $g(2)=3$이므로

$$f'(3)=\frac{1}{g'(2)}=6$$

2. 정답 23

$a_{2n-1}=1+3(n-1)=3n-2,\ a_{2n}=2+3(n-1)=3n-1$ 이므로

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=\sum_{k=1}^{n}(6k-3)=6\cdot\frac{n(n+1)}{2}-3n=3n^2$$

$$S_{2n-1}=S_{2n}-a_{2n}=3n^2-3n+1=3n(n-1)+1$$

이때, $S_{22}=S_{2\times 11}=3\cdot 11^2=363,\ S_{23}=S_{2\times 12-1}=3\cdot 12\cdot 11+1=397$

따라서 $S_n\geq 390$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 23이다.

3. ㄱ. $f(x)$ 는 미분가능하므로 연속함수이고

$f(-1)=-1,\ f(0)=1$ 이므로 중간값 정리에 의하여 $f(c_1)=\frac{1}{2}$ 인 실수 c_1 이 열린구간 $(-1,\ 0)$ 에 적어도 한 개 존재한다.

또한 $f(0)=1,\ f(1)=0$ 이므로 $f(c_2)=\frac{1}{2}$ 인 실수 c_2 가 열린구간 $(0,\ 1)$ 에 적어도 한 개 존재한다.

따라서 $f(a)=\frac{1}{2}$ 인 실수 a 가 열린구간 $(-1,\ 1)$ 에 적어도 두 개 존재한다. (참)

ㄴ. $g(x)=f(x)+x$ 로 놓으면 $f(x)$ 가 연속함수이므로 $g(x)$ 도 연속함수이다.

$$g(0)=f(0)+0=1+0=1,\ g(1)=f(1)+1=0+1=1$$

이므로 롤의 정리에 의하여 $g'(b)=0$ 인 실수 b 가 구간 $(0,1)$ 에 적어도 한 개 존재한다.
$g'(x)=f'(x)+1$ 이므로 $g'(b)=f'(b)+1=0$ 에서 $f'(b)=-1$
따라서, $f'(b)=-1$ 인 실수 b 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 적어도 한 개 존재한다. (참)

ㄷ. (반례) $f(x)=-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1$ 이면 $f(-1)=-1$, $f(0)=1$,
$f(1)=0$ 이지만 $f'(x)=-3x+\frac{1}{2}$, $f''(x)=-3$ 이므로 $f''(c)=0$ 인 실수 c 는 존재하지 않는다. (거짓)
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

논제 1

n번째 해에 발생하는 불량품의 개수를 a_n이라 하면 주어진 조건에서 수열 a_n은 $a_n=\frac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n-2})$ 를 만족한다.

점화식 $a_n=\frac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n-2})$ 를 변형하면 $2a_n=a_{n-1}+a_{n-2}=2a_{n-1}+a_{n-2}-a_{n-1}$ 에서 $2a_n+a_{n-1}=2a_{n-1}+a_{n-2}=\cdots=2a_2-a_1=2000$을 얻을 수 있다.

그런데, $a_n=-\frac{1}{2}a_{n-1}+1000$로 바꿀 수 있으므로, 이 점화식을 $a_n-\alpha=p(a_{n-1}-\alpha)$ 의 형태로 변형시키면 $a_n-\frac{2000}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_{n-1}-\frac{2000}{3}\right)$ 이 된다.

새로 얻은 수열 $b_n=a_n-\frac{2000}{3}$ 은 첫째항이 $\frac{1000}{3}$ 이고 공비가 $-\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 그 일반항은 $b_n=\frac{1000}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{2000}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$ 으로 주어진다.

따라서 $a_n=-\frac{2000}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+\frac{2000}{3}$ 을 찾을 수 있다.

논제 2

(1) 임의의 자연수 n에 대하여 10^n 에서 10^{n+1} 사이에 있는 자연수들의 자리수는 (10^{n+1}으로는 S의 원소를 만들 수 없으므로 제외하면) $n+1$개다. 이들 중 0을 자리 숫자로 가지지 않는 자연수의 자리수로 나타날 수 있는 자연수는 0을 제외한 1부터 9까지의 총 9개의 숫자만 가능하다. 그러므로 첫 번째 나타날 수 있는 모든 가능한 자리숫자들 9가지의 경우의 각각에 대하여 두 번째 나타날 수 있는 모든 가능한 자리숫자들 9가지의 경우가 있고, 이를 반복적으로 적용하면 총 $9\cdot9\cdots9=9^{n+1}$을 얻게 된다.

(2) $1 \le a_n \le 10$ 의 경우에 $\dfrac{1}{a_n} \le 1$ 이고, $10 \le a_n \le 100$ 의 경우에 $\dfrac{1}{a_n} \le \dfrac{1}{10}$ 이고, 일반적으로, $10^n \le a_k \le 10^{n+1}$ 의 경우에 $\dfrac{1}{a_k} \le \dfrac{1}{10^n}$ 이다.

위의 사실과 (1)의 결과를 이용하여

$$\sum_{\frac{1}{a_n} \in S,\ 1 \le a_n \le 10} \frac{1}{a_n} \le \frac{1}{10^0} \cdot 9, \quad \sum_{\frac{1}{a_n} \in S,\ 10 \le a_n \le 10^2} \frac{1}{a_n} \le \frac{1}{10} \cdot 9^2$$

등을 반복적으로 얻을 수 있다. 따라서,

$$\sum_{\frac{1}{a_n} \in S} \frac{1}{a_n} \le \frac{1}{10^0} \cdot 9 + \frac{1}{10^1} \cdot 9^2 + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}} \cdot 9^n + \cdots = 10 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = 10 \cdot \frac{9/10}{1-9/10} = 90$$

이므로 주어진 급수는 수렴한다.

논제 3

(1) 함수 f 가 일대일 함수임을 보이려면 서로 다른 두 실수 a, b 에 대하여 $f(a) \ne f(b)$ 임을 보이면 된다.

만약에 a 와 b 가 서로 다른 실수라면 일반성을 잃지 않고 $a < b$ 라고 가정할 수 있다. 그러면 함수 f 는 주어진 조건에 의하여 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능이다. 따라서 제시문 (가)에 의하여 열린구간 (a, b) 에서 $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ 를 만족하는 적당한 실수 c 를 찾을 수 있다.

위 등식의 우변에서 a 와 b 가 서로 다른 실수이므로 $b - a \ne 0$ 이 나오고, 주어진 조건에 의하여 $f'(c) \ne 0$ 이다. 따라서 $f'(c)(b-a) \ne 0$ 이고 $f(b) - f(a) \ne 0$ 이다. 그러므로 함수 f 는 일대일 함수이다.

(2) (1)의 결과와 제시문 [나]①에 의하여 f 의 역함수 f^{-1} 도 연속함수이고 $\gamma = f^{-1}(\beta + h)$ 로 나타낼 수 있다. 그러므로 h 가 0 으로 수렴하면 연속성에 의하여 $f^{-1}(\beta+h)$ 는 $f^{-1}(\beta) = \alpha$ 로 수렴한다.

(3) $$(f^{-1})'(\beta) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(\beta+h) - f^{-1}(\beta)}{h} = \lim_{\gamma \to \alpha} \frac{\gamma - \alpha}{f(\gamma) - f(\alpha)} = \lim_{\gamma \to \alpha} \frac{1}{\dfrac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma - \alpha}}$$

$$= \frac{1}{\displaystyle\lim_{\gamma \to \alpha} \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha}} = \frac{1}{f'(\alpha)}$$

이므로 역함수 f^{-1} 는 β 에서 미분가능이고 $(f^{-1})'(\beta) = \dfrac{1}{f'(\alpha)}$ 이 성립한다.

17 이화여자대학교 수시

논제 1

주어진 실수 $\alpha(0<\alpha<\pi)$에 대하여, 함수 $F(\theta)$를 아래와 같이 정의하려고 한다.

$$F(\theta)=\frac{\sin(\theta+\alpha)-\sin\theta}{\cos(\theta+\alpha)+\cos\theta}\ (\text{단, } \theta>0)$$

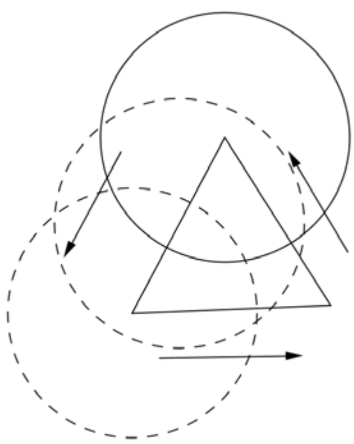
(1) 함수 $F(\theta)$가 개구간 $0<\theta<M$에서 정의된다고 할 때, M이 취할 수 있는 최댓값이 얼마인지 기술하시오.(단, M은 α로 표시된다.)

(2) 문제 (1)에서 구한 정의역에서 $F(\theta)$는 상수함수가 됨을 보이시오.

논제 2

반지름이 $r\,(r>0)$인 원에 내접하는 정n각형들에 대하여 다음 문제들에 답하시오.

(1) 정삼각형($n=3$) 세 변 위의 각 점을 중심으로 하는 반지름 r인 원을 고려하자. 이 원들을 모두 모았을 때의 자취가 차지하는 면적을 구하시오(그림 참조)



(2) 정 n각형에서 변 위의 각 점을 중심으로 하는 반지름 r인 원을 고려하자. 이 원들을 모두 모았을 때의 자취가 차지하는 면적을 A_n이라고 할 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty} A_n$을 구하는 과정을 기술하시오.(단, 정 n각형의 내각 합은$(n-2)\pi$이다.)

논제 3

실수 α는 다음의 부등식을 만족한다.

$$\log_3\left((\log \alpha)^2 + 2\log \alpha\right) < \log_3(\log \alpha) + 1$$

이때 다음 극한값을 구하는 과정을 구체적으로 기술하시오.(여기에서 log는 상용로그를 의미한다.)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{10}\right)\left(1+\left(\frac{\alpha}{10}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{\alpha}{10}\right)^4\right)\cdots\left(1+\left(\frac{\alpha}{10}\right)^{2^n}\right)$$

논제분석

논제 1

(1) 삼각방정식의 일반해를 구할 수 있는 지를 보고자 하였다.
(2) 삼각함수의 계산을 정확히 할 수 있는 지를 보고자 하였다.

논제 2

(1) 삼각함수의 응용으로서 삼각함수를 이용하여 주어진 도형의 넓이를 구할 수 있는 지를 보고자 하였다.
(2) (1)의 풀이를 기본으로 하여 일반화된 정 n각형의 도형에서 삼각함수를 이용하여 주어진 도형의 넓이의 극한값을 구할 수 있는지를 보고자 하였다.

논제 3

주어진 log 부등식을 이용하여 극한값을 구할 수 있는지를 보고자 하였다.

배경지식쌓기

<삼각방정식의 일반해>

임의의 정수 n에 대하여

(1) $\sin x = a(|a| \leq 1)$의 한 해를 α 라고 하면 $x = n\pi + (-1)^n \alpha$
(2) $\cos x = a(|a| \leq 1)$의 한 해를 α 라고 하면 $x = 2n\pi \pm \alpha$
(3) $\tan x = a$(a는 실수)의 한 해를 α 라고 하면 $x = n\pi + \alpha$

풀어보기

1. $0 \le x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $\sin 2x = 2\cos x - 2\cos^2 x$ 를 만족시키는 서로 다른 모든 x 의 값의 합은?

(2009 대수능)

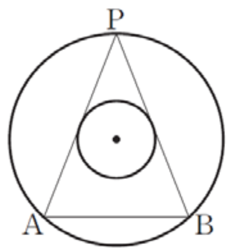
① π ② $\frac{5}{4}\pi$ ③ $\frac{3}{2}\pi$
④ $\frac{7}{4}\pi$ ⑤ 2π

2. $\dfrac{\sin 50° + \sin 10°}{\cos 50° + \cos 10°}$ 의 값은?

(2009 평가원)

① $\sqrt{3}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. 반지름의 길이가 1, 4 인 두 동심원이 있다. 큰 원 위의 한 점 P 에서 그은 두 현 PA, PB 가 작은 원에 접할 때, 삼각형 PAB 의 넓이는?



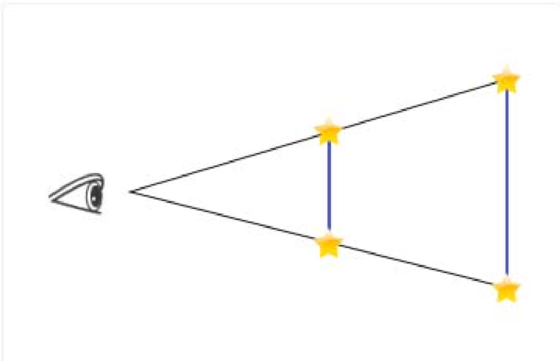
① $3\sqrt{15}$ ② $\frac{13\sqrt{15}}{4}$ ③ $\frac{7\sqrt{15}}{2}$
④ $\frac{15\sqrt{15}}{4}$ ⑤ $4\sqrt{15}$

읽기자료

1. 삼각함수[24)]

삼각비를 처음으로 연구한 사람들은 고대 그리스의 천문학자들이었다. 물론 이 시대에는 수학자와 천문학자가 구별되지 않았으므로, 천문현상을 연구한 수학자라 부르는 게 더 적절할지도 모르겠다. 천문학자들은 별을 관측하는 것이 기본적인 연구 방법이었고, 따라서 두 별 사이의 거리를 정확히 구하는 것이 대단히 중요하였다. 지금과 같은 우주 시대에는 두 별 사이의 실제 거리를 구하는 것도 가능하지만, 실용적인 목적을 위해서는 모든 별들이 하나의 구면에 놓여 있다고 생각하고 두 별 사이의 거리를 구하는 것이 더 중요하다.

실제로 밤하늘을 보며 두 별 사이의 거리를 잰다고 생각해 보자. 팔을 쭉 뻗어 30cm자를 들고 두 별 사이의 거리를 재면 충분하다고 생각하기 쉽지만, 이 방법은 사람마다 팔의 길이가 다르므로 정확한 거리를 구하는 것과는 거리가 멀다. 극단적으로 생각하면, 눈앞에 자를 놓고 두 별 사이의 거리를 잴 때와 팔을 쭉 뻗어 잴 때를 비교하면 되겠다.



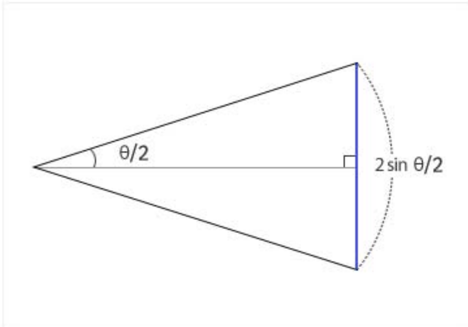
두 별 사이의 거리를 결정하기는 어렵지만 두 별 사이의 각도는 일정하다.

고대 (천문현상을 연구한) 수학자들은 직접 거리를 구하는 것이 잘 되지 않으므로, 대신에 두 별 사이의 각도를 재는 방법을 사용하였다. 이것은 팔의 길이에 상관없이 누구나 별 사이의 거리를 짐작할 수 있는 방법이었다. 모든 별이 하나의 구면에 있다고 생각하였으므로, 이제 별까지 이르는 거리만 알면 두 별 사이의 거리는 자동으로 결정된다. 만약 별까지 이르는 거리가 기존에 생각하던 것보다 두 배로 멀어진다면, 두 별 사이의 거리도 두 배로 멀어진다. 결국 두 별이 멀고 가까운 정도를 재는 데 중요한 것은 거리가 아니라 각도이며, 그에 따라 별에 이르는 거리와 두 별 사이 거리를 결정하는 비례상수 또한 중요하다. 각도마다 이 비례상수를 구하려는 시도가 바로 삼각함수의 시작이었다.

처음 삼각함수를 생각할 때는 두 별 사이의 각과 두 별 사이의 거리를 비교하였으므로, 지금 우리가 사용하는 삼각함수와는 약간의 차이가 있다. 관측 지점부터 별까지의 거리를 1, 두 별 사이의 각을 θ라 하면, 두 별 사이의 거리는 $2\sin(\theta/2)$가 된다.

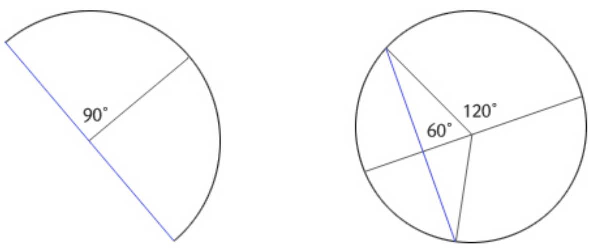
24) 내용출처 : 네이버캐스트

우리에게는 피타고라스 정리라는 막강한 도구가 있기 때문에 중심각이 θ인 부채꼴의 현의 길이를 구하는 것보다 한 각이 $\theta/2$인 직각삼각형을 이용하는 쪽이 훨씬 편리하다. 이런 이유로 인도 수학자들은 직각삼각형에서 주어진 각의 맞은편 변의 길이를 '현의 절반'이라는 뜻에서 jya-ardha, 줄여서 jya라 불렀다. 이 용어는 이후 아라비아 수학자들이 소리를 흉내 내어 jiba로 옮기게 되는데, 이것이 다시 유럽으로 전해지면서 약간의 사고가 생겼다. 아랍어는 모음이 세 개뿐이어서 아랍 문자에는 모음을 따로 표기하지 않는 경우가 많다. 그 바람에 jiba의 모음을 없앤 jb를 본 유럽인들은 이 단어가 jaib인 것으로 착각하였다. 원래의 jiba는 특별한 뜻이 없는 단어였지만, jaib는 만(灣, bay)를 뜻하는 단어여서, 여기에 해당하는 라틴어 sinus로 번역되었다. 우리가 사인(sine)이라 부르는 것은 이 라틴어를 다시 영어식으로 바꾼 것이다.



θ보다 θ/2를 사용하는 쪽이 편하다.

사인값을 직각삼각형의 빗변과 높이의 비로 정의하는 것이 중학교에서 배우는 삼각비인데, 고등학교 수학에서는 이것을 둔각까지 확장하여 정의한다. 이것은 삼각함수의 원래 목적을 생각하면 자연스럽게 생각할 수 있다. 예를 들어 $\sin 90^\circ$를 구하려면, 반지름이 1이고 중심각이 180°인 부채꼴을 만들어 그 현의 길이를 재면 된다. 즉, 두 별 사이의 각이 180°일 때 두 별 사이의 거리를 구하는 것이다. 이 경우에는 현의 길이가 곧 지름의 길이가 되므로, $2\sin(180/2)^\circ = 2$가 되어, $\sin 90^\circ = 1$로 정의하면 자연스럽다.

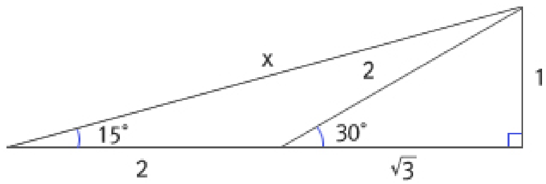


직각에 대한 사인값(왼쪽), 둔각에 대한 사인값(오른쪽)

같은 식으로 $\sin 120^\circ$를 구하여 보자. 이 경우 두 별 사이의 각이 240°일 때 두 별 사이의 거리를 구하는 것은, 뒤돌아서서 보면 두 별 사이의 각이 120°일 때를 생각하는 것과 같다. 따라서 $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$가 된다. 이와 같이 생각하면 둔각에 대한 사인값을 자연스럽게 정할 수 있다.

이와 같은 착상으로 둔각에 대한 코사인, 탄젠트 등의 값을 확장할 수 있고, 심지어 180°를 넘는 각에 대해서도 삼각함수의 값을 정할 수 있다. 이런 과정은 원래의 성질이 잘 유지되게 하면서 특정한 경우로부터 일반적인 경우로 확장하는 수학적 사고방식을 잘 보여준다.

고대의 수학자들은 삼각함수의 정확한 값을 계산하기 위하여 엄청나게 많은 노력을 기울였다. 특정한 값의 사인값이나 코사인값을 구하려면 피타고라스 정리, 닮음비 등등 수많은 정리와 공식을 수많은 종이 위에 써야만 했다. 예를 들어, 15°, 라디안으로는 $\pi/12$인 각에 대한 사인값을 구하여 보자. 다음 그림을 이용하면 $\sin(\pi/12)=(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4=0.25881904510\cdots$임을 계산할 수 있다.



sin 15° 구하기.

한 각의 크기가 15°인 삼각형의 빗변의 길이를 x라 하면, 피타고라스 정리에 의해 다음이 성립한다. $x^2=(2+\sqrt{3})^2+1^2=8+4\sqrt{3}$

따라서 x의 값을 구하면 다음과 같다.

$$x=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

이제 분모를 유리화하면, 다음과 같다.

$$\sin 15^\circ=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=0.25881904510\cdots$$

그러나 이런 방식은 대단히 복잡할 뿐만 아니라, 임의의 각에 대한 사인값을 계산하기 어려워, 지금은 테일러 급수(Taylor series)를 이용하여 근삿값을 구한다. 테일러 급수란 어떤 함수를 다항식의 형태로 근사하는 것으로, 삼각함수는 다음의 형태로 나타낼 수 있다.

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$
$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\cdots \quad \left(\text{단, } |x|<\frac{\pi}{2}\right)$$

테일러 급수를 이용하여 위에서 구한 sin 15°를 다시 구해 보면 다음과 같은 값을 얻는다.

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{12}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{12}\right)^5-\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{12}\right)^7+\cdots\approx 0.25881904508\cdots$$

겨우 네 개의 항만 구하여도 소수점 아래 아홉 번째 자리까지 맞았고, 항을 더 많이 계산할수록 근삿값도 점점 정밀해진다. 전자계산기가 삼각함수값을 구하는 것도 이런 원리이다.

2. 삼각함수의 덧셈정리의 말없는 증명

삼각함수에서 각의 덧셈에 대한 기본공식은

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha,\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},\ \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

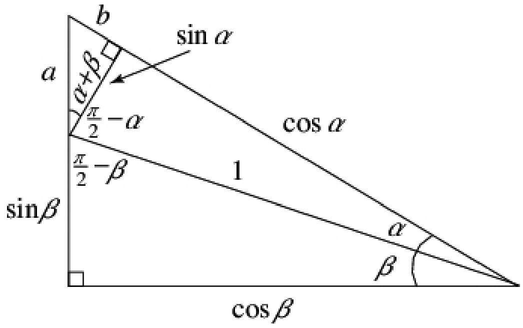
와 같이 주어진다.

처음의 네 개의 공식은 가끔은 심슨의 공식(Simpson's formulas)이라고도 한다.

또한 위의 공식을 연속적으로 적용하면

$$\sin(nx)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^k x\sin^{n-k}x\sin\left[\frac{n-k}{2}\pi\right]=2\sin\left[(n-1)x\right]\cos x-\sin\left[(n-2)x\right]$$
$$\cos(nx)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^k x\sin^{n-k}x\cos\left[\frac{n-k}{2}\pi\right]=2\cos\left[(n-1)x\right]\cos x-\cos\left[(n-2)x\right]$$

를 얻을 수 있다.



위의 그림에서와 같이 작은 직각삼각형을 생각하자.

위의 그림에서 $a=\dfrac{\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}$, $b=\sin\alpha\tan(\alpha+\beta)$ 임을 알 수 있다.

이제, 위의 큰 삼각형에 삼각함수의 정의를 적용하면

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta+a}{\cos\alpha+b}=\frac{\sin\beta+\dfrac{\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}}{\cos\alpha+\sin\alpha\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha+b}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha+\sin\alpha\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}}$$

을 얻고, 다시 $\sin(\alpha+\beta), \cos(\alpha+\beta)$에 대해서 풀어주면

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\cos\alpha\sin\alpha+\cos\beta\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta},\ \cos(\alpha+\beta)=\frac{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

그리고, 삼각함수의 기본정리 $\sin^2x+\cos^2x=1$를 이용하면

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha,\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

Smiley 형제는 아래의 그림을 이용해서 삼각함수의 덧셈정리를 쉽게 증명하였다.

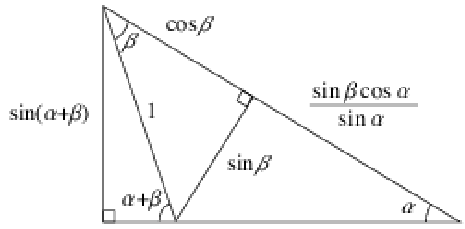


그림 1

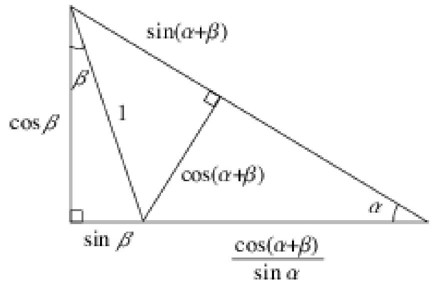


그림 2

위의 (그림1)에서

$$\sin\alpha=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta+\dfrac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha}}\Rightarrow\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

그리고 (그림2)에서

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos\beta}{\sin\beta+\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}}\Rightarrow\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

이와 유사한 그림에서 1999년에 Smiley 형제는 다시 삼각함수의 차에 관한 공식을 발견하였다.

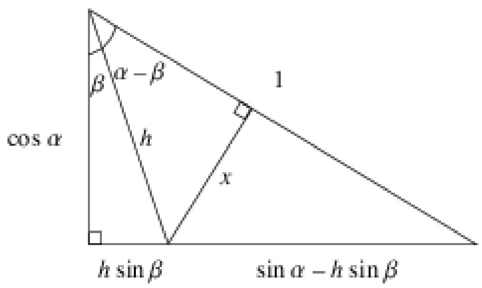


그림 3

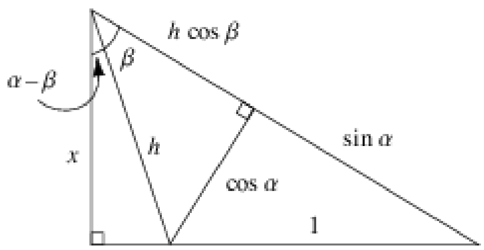


그림 4

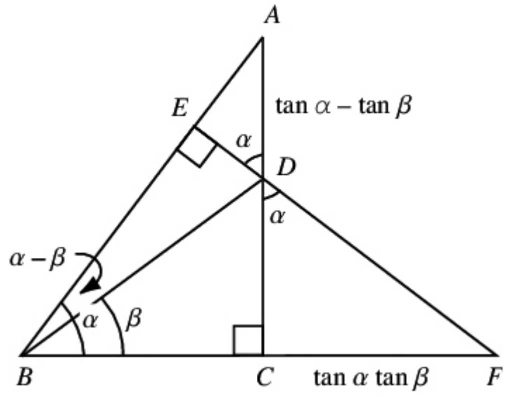
위의 (그림3)에서

$$h=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta},\ x=h\sin(\alpha-\beta)=(\sin\alpha-h\sin\beta)\cos\alpha\Rightarrow$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

마찬가지로, (그림4)에서

$$h=\frac{\cos\alpha}{\sin\beta},\ x=h\cos(\alpha-\beta)=(\sin\alpha+h\cos\beta)\cos\alpha$$
$$\Rightarrow\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

1999년에 Ren은 그림을 이용해서 $\tan(\alpha-\beta)$에 관한 공식을 발견했다.



위의 그림에서 $\frac{\overline{\mathrm{BF}}}{\overline{\mathrm{BE}}}=\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{DE}}}$이므로 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\overline{\mathrm{DE}}}{\overline{\mathrm{BE}}}=\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{BF}}}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$을 얻는다.

예시답안

풀어보기

1. 정답 ⑤

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ 이므로 주어진 방정식에 대입하면 $2\sin x \cos x = 2\cos x - 2\cos^2 x$, $\cos x(\sin x + \cos x - 1) = 0$

$$\therefore \cos x = 0 \text{ 또는 } \sin x + \cos x = 1$$

(i) $\cos x = 0$ 일 때, $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

(ii) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ 일 때, $x = 0, \frac{\pi}{2}$

따라서 주어진 방정식을 만족시키는 서로 다른 모든 x 의 값의 합은

$$0 + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 2\pi$$

2. 정답 ⑤

$$\sin 50° + \sin 10° = 2\sin\frac{50° + 10°}{2}\cos\frac{50° - 10°}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 20° = \cos 20°$$

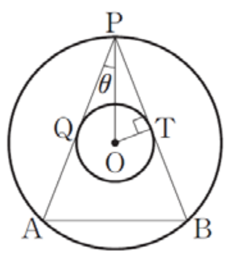
$$\cos 50° + \cos 10° = 2\cos\frac{50° + 10°}{2}\cos\frac{50° - 10°}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 20° = \sqrt{3}\cos 20°$$

$$\therefore \frac{\sin 50° + \sin 10°}{\cos 50° + \cos 10°} = \frac{\cos 20°}{\sqrt{3}\cos 20°} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(다른 풀이)

$$\frac{\sin 50° + \sin 10°}{\cos 50° + \cos 10°} = \frac{2\sin 30°\cos 20°}{2\cos 30°\cos 20°} = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3. 정답 ④



그림과 같이 동심원의 중심을 O , 현 PA, PB 와 작은 원의 접점을 각각 Q, T 라 하고 $\angle APO = \theta$라 하면 $\angle APB = 2\theta$, $\overline{PT} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$ 이고, $\overline{OP} = \overline{OB}$이므로 $\triangle OPB$는 이등변삼각형이다.

따라서 $\overline{PT} = \overline{TB}$ 이므로 $\overline{PA} = \overline{PB} = 2\sqrt{15}$ 이고 $\sin\theta = \frac{1}{4}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$$\therefore \triangle PAB = \frac{1}{2}\overline{PA}\cdot\overline{PB}\sin 2\theta = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{15}\cdot 2\sqrt{15}\cdot 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= 60\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{15\sqrt{15}}{4}$$

논제 1(1)

함수 $F(\theta)$가 정의되려면 $\cos(\theta+\alpha)+\cos\theta \neq 0$이어야 한다. $\cos(\theta+\alpha)+\cos\theta = 0$, $\cos(\theta+\alpha) = -\cos\theta = \cos(\theta+\pi)$, $\theta+\alpha = 2n\pi \pm (\theta+\pi)$ (n은 정수). $\theta > 0$ 이어야하므로 $\theta+\alpha = 2n\pi - \theta - \pi$, $\theta = \frac{(2n-1)\pi-\alpha}{2}$ 이다.

(또는 $\cos(\theta+\alpha) = -\cos\theta = \cos(\pi-\theta)$ 인 경우도 같은 방법으로 구할 수 있다.)

그러므로 $\cos(\theta+\alpha)+\cos\theta = 0$을 만족하는 θ의 최솟값은 $n=1$ 일 때, $\frac{\pi-\alpha}{2}$이다. 따라서 함수 $F(\theta)$가 개구간 $0 < \theta < M$에서 정의 된다고 할 때, M이 취할 수 있는 최댓값은 $\frac{\pi-\alpha}{2}$이다.

논제 1(2)

$0 < \theta < \frac{\pi-\alpha}{2}$ 일 때,

$$F(\theta) = \frac{\sin(\theta+\alpha)-\sin\theta}{\cos(\theta+\alpha)+\cos\theta},$$

$$F'(\theta) = \frac{\{\cos(\theta+\alpha)-\cos\theta\}\{\cos(\theta+\alpha)+\cos\theta\}+\{\sin(\theta+\alpha)-\sin\theta\}\{\sin(\theta+\alpha)+\sin\theta\}}{\{\cos(\theta+\alpha)+\cos\theta\}^2}$$

$$= \frac{\cos^2(\theta+\alpha)-\cos^2\theta+\sin^2(\theta+\alpha)-\sin^2\theta}{\{\cos(\theta+\alpha)+\cos\theta\}^2} = \frac{1-1}{\{\cos(\theta+\alpha)+\cos\theta\}^2} = 0$$

그러므로 개구간 $0 < \theta < \frac{\pi-\alpha}{2}$ 에서 $F(\theta)$는 상수함수이다.

(다른 풀이)

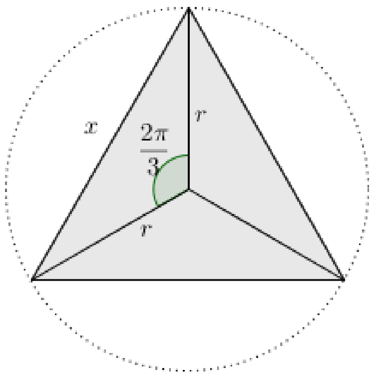
$$F(\theta) = \frac{2\cos\frac{2\theta+\alpha}{2}sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{2\theta+\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}} = \tan\frac{\alpha}{2}$$ 이므로 $F(\theta)$ 는 상수함수이다.

논제 2(1)

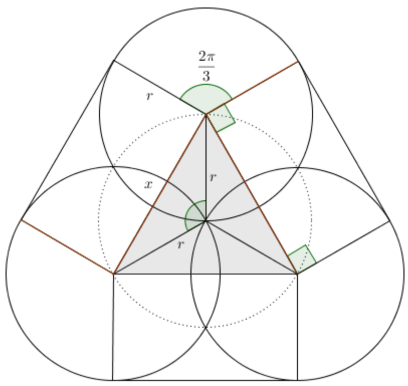
아래 그림에서 제2 코사인 법칙을 사용하면

$$x^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos\frac{2\pi}{3} = 2r^2\left(1 - \cos\frac{2\pi}{3}\right) = 2r^2 \times \frac{3}{2} = 3r^2$$

이다. 따라서 정삼각형의 한 변의 길이는 $x = \sqrt{3}\,r$ 이다.



아래 그림에서 문제에서 요구하는 영역의 넓이는 한 변의 길이가 x인 정삼각형, 가로와 세로의 길이가 각각 x, r 인 직사각형의 넓이 3 개, 그리고 반지름이 r 이고 중심각이 $\frac{2\pi}{3}$ 인 부채꼴의 넓이 3 개로 이루어져 있다.



그러므로 $A_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}\,r)^2 + 3\sqrt{3}\,r^2 + \pi r^2 = \left(\frac{15\sqrt{3}}{4} + \pi\right)r^2$ 이다.

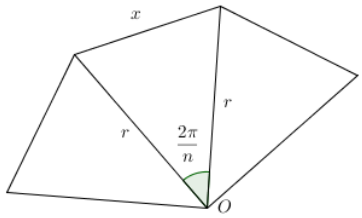
(다른 풀이)

정삼각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{3}\,r$ 이다. 자취가 차지하는 면적을 A_3이라고 하면

$$A_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}\,r)^2 + 3\sqrt{3}\,r \cdot r + \pi r^2 = \left(\frac{15\sqrt{3}}{4} + \pi\right)r^2$$

논제 2(2)

정n 각형의 한 변의 길이는 $x=2r\sin\frac{\pi}{n}$ 이다. 따라서 한 변의 길이가 x 인 정n 각형의 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n}\times n$ 이다.



정n 각형에서 원의 자취가 차지하는 면적 A_n은 한 변의 길이가 x 인 정 n 각형의 넓이, 가로와 세로가 각각 x, r인 직사각형의 넓이 n 개, 중심각이 $\frac{2\pi}{n}$ 인 부채꼴의 넓이 n 개의 합이다.
(부채꼴의 중심각은 $\pi-\frac{(n-2)\pi}{n}=\frac{2\pi}{n}$) 따라서

$$A_n=\frac{1}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n}\times n+2r^2\sin\frac{2\pi}{n}\times n+\pi r^2$$

이고,

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n}\times n+2r^2\sin\frac{2\pi}{n}\times n+\pi r^2\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}r^2\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}2\pi+2r^2\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\pi+\pi r^2\right)=4\pi r^2$$

(다른 풀이)

$n\to\infty$일 때, 반지름이 $r(r>0)$인 원에 내접하는 정n각형은 반지름이 $r(r>0)$인 원에 가까워지므로 $\lim_{n\to\infty}A_n=\pi(2r)^2=4\pi r^2$

논제 3

$\log_3((\log\alpha)^2+2\log\alpha)<\log_3(\log\alpha)+1$, $(\log\alpha)^2+2\log\alpha<3(\log\alpha)$, $\log\alpha(\log\alpha-1)<0$, $1<\alpha<10$, $\frac{1}{10}<\frac{\alpha}{10}<1$. $A_n=\left(1+\frac{\alpha}{10}\right)\left\{1+\left(\frac{\alpha}{10}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{\alpha}{10}\right)^4\right\}\cdots\left\{1+\left(\frac{\alpha}{10}\right)^{2^n}\right\}$이라 두면 $\left(1-\frac{\alpha}{10}\right)A_n=1-\left(\frac{\alpha}{10}\right)^{2^{n+1}}$. 따라서, $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\alpha}{10}\right)A_n=1$이고

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{10}\right)\left\{1+\left(\frac{\alpha}{10}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{\alpha}{10}\right)^4\right\}\cdots\left\{1+\left(\frac{\alpha}{10}\right)^{2^n}\right\}=\lim_{n\to\infty}A_n=\frac{10}{10-\alpha}$ 이다.

18 인하대학교 모의

제 시 문 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 복소수 $z=a+bi$ 에 대하여 $|z|$ 를

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

으로 정의하고, 두 복소수 $z=a+bi$ 와 $w=c+di$ 에 대하여 연산 $z\otimes w$ 를

$$z\otimes w=ac+bd$$

으로 정의하자. 여기서 a, b, c, d 는 모두 실수이다.

한편, 두 복소수 $z=a+bi$ 와 $w=c+di$ 를 각각 좌표평면 위의 점 $A(a,b)$ 와 $B(c,d)$ 로 대응시키면 $|z|$ 는 위치벡터 $\overrightarrow{OA}=(a,b)$ 의 크기를 의미한다. 여기서 정점 O 는 좌표평면 위에서 원점이다. 또한 $z\otimes w$ 는 두 위치벡터 $\overrightarrow{OA}$ 와 $\overrightarrow{OB}$ 의 내적 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 을 의미한다. 특히 $|z|=1$ 이면, 대응되는 점 A 의 좌표는 선분 $\overline{OA}$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각 θ 를 이용하여 $A(\cos\theta, \sin\theta)$ 로 나타낼 수 있다.

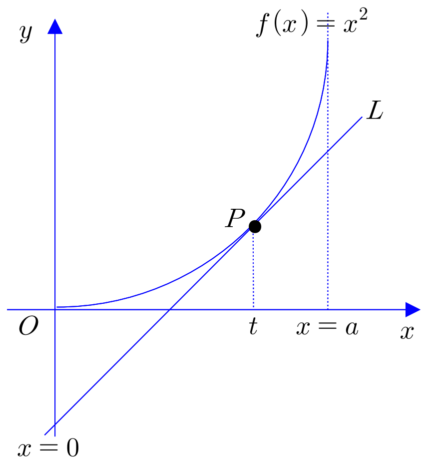
(나) [그림 1]과 같이 구간 $[0,\ a]$에서 곡선 $f(x)=x^2$ 위의 임의의 점 $P(t,\ t^2)$에서 접선은

$$L: y=2t(x-t)+t^2$$

이다. 곡선 $f(x)=x^2$ 과 세 개의 직선 L, $x=0$, $x=a$ 으로 둘러싸인 부분의 면적 $S(t)$ 는

$$S(t)=\int_0^a\{x^2-2t(x-t)-t^2\}\,dx=\frac{1}{3}a^3-a^2t+at^2$$

으로 주어진다. $S(t)$ 를 t 로 미분하면 $\frac{d}{dt}S(t)=-a^2+2at=2a\left(t-\frac{a}{2}\right)$ 이고 $a>0$ 이므로 증감을 조사하면 $t=\frac{a}{2}$ 일 때 $S\left(\frac{a}{2}\right)$ 는 극소이면서 최소이다.



〔그림 1〕

(다) 함수 $y=f(x)$ 가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때 함수 $f(x)$ 의 a 에서 b 까지의 정적분은 아래 왼쪽 기호로 나타내고, 그 값은 아래 오른쪽 극한값으로 주어진다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \ \ (\text{단},\ \Delta x = \frac{b-a}{n},\quad x_k = a + k\Delta x)$$

논제 I

두 복소수 $z,\ w$ 가 $|z|=|w|=1,\ z\otimes w=\frac{1}{2}$ 을 만족할 때, 제시문 (가)를 참고하여 다음 질문에 답하시오.

(1-1) $z^2\otimes w^2$의 값을 구하시오. (10점)

(1-2) z^2과 w^2에 대응하는 평면상의 점을 각각 $P,\ Q$라 할 때, 각 $\angle POQ$를 구하시오. (10점)

논제Ⅱ 제시문 (나)와 (다)에 주어진 내용을 바탕으로 다음을 기술하시오.

(2-1) 구간 $[0,\ a]$에서 정의된 곡선 $y=f(x)$ 가 아래로 볼록하다고 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위에 임의의 점 $P(t, f(t))$ 에서, 이 곡선에 접하는 접선을 L 이라 하고, 이 곡선과 세 개의 직선 $L,\ x=0,\ x=a$ 에 의해 둘러싸인 부분의 면적을 $S(t)$ 라 하자. 제시문 (나)를 참고하여 $S(t)$ 를 최소로 만드는 t 의 값이 $t=\dfrac{a}{2}$ 임을 보이시오. (10점)

(2-2) 구간 $\left[0, \dfrac{2k}{n}\right]$ 에서 정의된 곡선 $y=xe^x$ 위에 임의의 점 $P(t, f(t))$ 에서, 이 곡선에 접하는 접선을 L 이라 하고, L 의 x-절편을 $R_{n,k}$, 접점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 $Q_{n,k}$ 라 하자. 문제 (2-1)의 결과와 제시문 (다)를 이용하여, 곡선 $y=xe^x$ 과 세 개의 직선 $L,\ x=0,\ x=\dfrac{2k}{n}$ 에 의해 둘러싸인 부분의 면적이 최소일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|Q_{n,k}-R_{n,k}|$$

의 값을 구하시오. (10점)

제시문분석

1. 제시문 (가)

복소수의 크기와 두 복소수의 이항 연산을 정의한다. 또한 복소수를 좌표평면 위의 한 점으로 대응시켰을 때, 복소수의 크기와 이항 연산의 의미를 각각 대응하는 위치벡터의 크기와 위치벡터들의 내적으로 해석할 수 있으며, 선분 $\overline{OA}$ 가 x 축 양의 방향과 이루는 각 θ 를 이용하여 좌표평면 위의 점으로 나타낼 수 있음을 설명한다.

2. 제시문 (나)

아래로 볼록한 곡선 $y=x^2$ 과 곡선 위의 점에서의 접선 L, $x=0$, 직선 $x=a(>0)$ 로 둘러싸인 부분의 면적을 최소로 만드는 접점의 x좌표가 항상 $\dfrac{a}{2}$ 임을 보였다.

3. 제시문 (다)

정적분의 정의가 제시되었다.

논제분석

논제 Ⅰ

문제 (1-1)은 크기가 1인 두 복소수의 연산의 결과를 주고, 두 복소수의 제곱의 연산의 결과를 구하는 문제로서 다항식의 연산으로 풀어도 되겠고 혹은 코사인 함수의 덧셈공식 및 2배각 공식을 이용한 풀이도 가능하다.

문제 (1-2)는 두 복소수의 연산을 좌표평면에서 두 위치벡터의 내적으로 해석하고 문제 (1-1)의 결과를 이용하여 두 위치벡터가 이루는 각의 크기를 구하는 문제이다.

논제 Ⅱ

문제 (2-1)은 아래로 볼록한 곡선 $y=f(x)$ 을 가지고 제시문 (나)의 내용을 따라 접점의 x좌표가 $\frac{a}{2}$ 임을 보이는 것으로 접선의 방정식, 면적의 정적분 표현, 그리고 이계도함수의 응용과 연관된 문제이다. 문제 (2-2)는 문제 (2-1)의 결과를 이용하여 무한급수의 합을 구하는 것으로서 무한급수를 정적분으로 표현하여 값을 구하는 문제이다.

배경지식쌓기

1. 평면벡터의 성분과 내적

좌표평면 위에서 원점 O, 점 A $(a,\ b)$, 점 B $(c,\ d)$, $\overline{OA}$ 가 x 축 양의 방향과 이루는 각 θ 라 하면

① $\overrightarrow{OA}=(a,\ b)$

② 벡터의 크기 $|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{a^2+b^2}$ (이것을 r 이라 두자.)

③ $\overrightarrow{OA}=(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$

④ 벡터의 내적 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=ac+bd=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos(\angle\mathrm{AOB})$

※ 벡터의 내적을 이용하여 두 벡터가 이루는 각 $\angle\mathrm{AOB}$ 를 구하는 경우가 많다.

2. 미분의 활용

① 함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$ 가 어떤 구간에서 미분가능할 때, 그 구간의 모든 x 에 대하여

i) $f'(x)>0$ 이면 $f(x)$ 는 그 구간에서 증가한다.

ii) $f'(x)<0$ 이면 $f(x)$ 는 그 구간에서 감소한다.

② 함수의 극대와 극소의 판정

함수 $f(x)$ 가 a 를 포함한 어떤 구간에서 미분가능하고 $f'(a)=0$ 일 때, $x=a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가

i) 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대이고, 극댓값은 $f(a)$.

ii) 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극소이고, 극솟값은 $f(a)$.

③ 곡선의 오목과 볼록

함수 $f(x)$ 가 어떤 구간에서

i) $f''(x)>0$ 이면 곡선 $y=f(x)$ 는 이 구간에서 아래로 볼록.

ii) $f''(x)<0$ 이면 곡선 $y=f(x)$ 는 이 구간에서 위로 볼록.

함수 $f(x)$ 에서 $f''(a)=0$ 이고 $x=a$ 의 좌우에서 $f''(a)$ 의 부호가 바뀌면 점 $(a,\ f(a))$ 는 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이다.

④ 함수의 최댓값, 최솟값 구하기

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a,\ b]$ 에서 연속이고, 열린구간 $(a,\ b)$ 에서 미분가능하면 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값은 다음과 같이 구한다.

i) $f'(x)=0$ 를 이용하여 닫힌구간 $[a,\ b]$ 에서 모든 극값을 구한다.

ii) 구간의 양 끝점에서의 함숫값 $f(a),\ f(b)$ 를 구한다.

iii) 모든 극값과 $f(a),\ f(b)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값.

3. 적분

① 정적분과 넓이 : 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a,\ x=b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이 S 는

$$\mathrm{S}=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

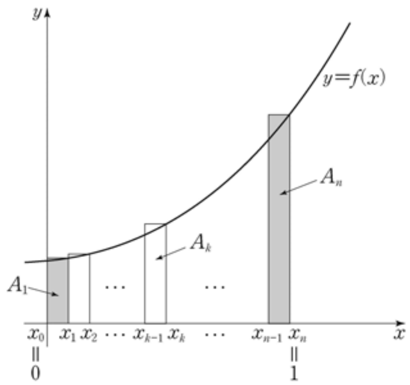
② 정적분과 무한급수

$a,\ p,\ k$ 가 상수이고, $f(x)$ 가 연속함수일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\frac{p}{n}=\int_a^{a+p} f(x)\,dx=\int_0^p f(a+x)dx=\int_0^1 pf(a+px)dx$$

풀어보기

1. 함수 $f(x)=x^2+ax+b\ (a\geq 0,\ b>0)$가 있다. 그림과 같이 2 이상인 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 1]$을 n 등분한 각분점 (양 끝점도 포함)을 차례로
$0=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=1$이라 하자.
닫힌구간 $[x_{k-1},\ x_k]$를 밑변으로 하고 높이가 $f(x_k)$인 직각삼각형의 넓이를 A_k라 하자.
$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$



양 끝에 있는 두 직사각형의 넓이의 합이 $A_1+A_n=\dfrac{7n^2+1}{n^3}$일 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{8k}{n}A_k$의 값을 구하시오.

(2010 수능)

읽기자료

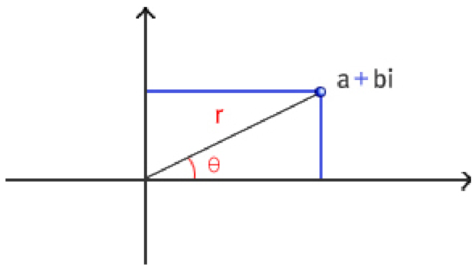
복소수의 극형식[25)]

복소수의 극형식을 이용하면 복소수의 곱과 거듭제곱을 조금 쉽게 구할 수 있다.

복소수 $a+bi$ 를 복소평면에 나타낸 뒤, 원점과의 거리를 r 이라 하고, x 축의 양의 방향으로부터 잰 각을 θ 라 하면, 다음처럼 쓸 수 있다.

$$a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

복소수를 이런 식으로 표현한 것을 '극형식'이라고 한다.



복소수 $a+bi$ 와 $c+di$ 를 곱하면 $(ac-bd)+(ad+bc)i$ 이다. 실제 복소수를 곱하려면 $ac,\ bd,\ ad,\ bc$ 를 계산하며 곱셈을 네 번 해야 하고, $ac,\ -bd$ 를 계산하며 뺄셈을 한 번, $ad+bc$ 를 계산하며 덧셈을 한 번 모두 여섯 번의 연산을 해야 한다. 이제 극형식으로 표현한 복소수 $r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ 와 $s(\cos\beta+i\sin\beta)$ 를 곱해보면 다음과 같다.

$$rs\{(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+i(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)\}$$

위의 식에 삼각함수의 덧셈 정리를 적용해보자. 여기서 사용할 삼각함수의 덧셈정리는 아래와 같다.

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\ \ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

이제 덧셈정리를 적용한 후 간단하게 정리하면 아래 식을 얻는다.

$$r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\times s(\cos\beta+i\sin\beta)=rs\{\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)\}$$

극형식을 쓰면 rs 에서 곱하기 한 번, $\alpha+\beta$ 에서 더하기 한 번만 하면, 복소수를 곱할 수 있다는 얘기다. 연산 여섯 번에 비하면 훨씬 효율적이니, 복소수를 거듭해서 곱할수록 노동력을 대단히 줄여줄 거라는 것을 짐작할 수 있을 것이다.

위 식을 오일러-드므아브르(Euler-De Moivre)의 공식이라 부르는데, 특히 $r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ 를 n 제곱하면, $rn\{\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha)\}$ 임을 알 수 있다.

이러한 극형식을 이용하면 오일러 공식 $e^{it}=\cos t+i\sin t$ (단, i 는 허수단위, t 는 실수)을 미분이나 멱급수를 쓰지 않고, 유도할 수도 있다.

---

25) 내용출처 : http://navercast.naver.com

예시답안

풀어보기

1. $x_k=\dfrac{k}{n}$ 이므로 $\mathrm{A}_k=\dfrac{1}{n}f(x_k)=\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_n&=\frac{1}{n}\{f(x_1)+f(x_n)\}\\&=\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{a}{n}+b+1+a+b\right\}\\&=\frac{1}{n^3}\{1+an+(1+a+2b)n^2\}\ =\frac{7n^2+1}{n^3}\text{에서 } a=0,\ 1+a+2b=7\end{aligned}$$

$$\therefore\ a=0\,,\ b=3 \qquad \therefore\ f(x)=x^2+3$$

따라서, $\mathrm{A}_k=\dfrac{1}{n}\left\{\left(\dfrac{k}{n}\right)^2+3\right\}$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n}\mathrm{A}_k&=8\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2+3\right\}\\&=8\int_0^1 x(x^2+3)dx\\&=8\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1\\&=8\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)=14\end{aligned}$$

논제 Ⅰ

(1-1)

복소수 z, w에 대응하는 좌표평면 위의 점들과 원점을 잇는 선분이 양의 x축과 이루는 각을 각각 α, β라 하면, $|z|=|w|=1$이므로 제시문 (가)에 의해

$$z=\cos\alpha+i\sin\alpha,\ w=\cos\beta+i\sin\beta$$

가 된다. 한편, $z\otimes w=\dfrac{1}{2}$ 이므로 연산 $\otimes$의 정의에 의해

$$z\otimes w=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$$

이다. 구하는 것이 $z^2\otimes w^2$이므로 먼저 z^2, w^2을 구하면

$$z^2=\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha,\ w^2=\cos 2\beta+i\sin 2\beta$$

이다. 연산 $\otimes$의 정의와 코사인 함수의 공식을 적용하면

$$z^2 \otimes w^2 = \cos 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\alpha \sin 2\beta$$
$$= \cos 2(\alpha-\beta) = 2\cos^2(\alpha-\beta) - 1 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2}$$

(혹은 $z^2 \otimes w^2 = \cos 2(\alpha-\beta) = \cos^2(\alpha-\beta) - \sin^2(\alpha-\beta) = \frac{1}{4} - \left(1 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}$)

을 얻는다.

(다른풀이)

$z = a+bi$, $w = c+di$ 라 하면 $|z| = |w| = 1$ 이므로 $a^2+b^2 = c^2+d^2 = 1$ 이다.

$z \otimes w = \frac{1}{2}$ 이므로 연산 $\otimes$ 의 정의에 의해 $ac+bd = \frac{1}{2}$ 이다.

$z^2 = (a^2-b^2)+2abi$, $w^2 = (c^2-d^2)+2cdi$ 이므로

$$z^2 \otimes w^2 = (a^2-b^2)(c^2-d^2) + 4abcd$$
$$= a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd - a^2d^2 - b^2c^2 + 2abcd$$
$$= (ac+bd)^2 - a^2(1-c^2) - b^2(1-d^2) + 2abcd$$
$$= 2(ac+bd)^2 - (a^2+b^2) = 2 \times \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{2}$$

을 얻는다.

(1-2)

제시문 (가)에 의하면 $z^2 \otimes w^2$ 은 좌표평면에서 대응되는 벡터들의 내적을 의미한다. z^2 과 w^2 에 대응하는 평면상의 점이 각각 P, Q 라 했으므로

$$-\frac{1}{2} = z^2 \otimes w^2 = \overrightarrow{OP} \circ \overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\cos(\angle POQ)$$

가 성립한다. $|\overrightarrow{OP}| = |z^2| = |z|^2 = 1$, $|\overrightarrow{OQ}| = |w^2| = |w|^2 = 1$이므로 $\cos(\angle POQ) = -\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $\angle POQ = \frac{2\pi}{3}$ 이다.

논제 Ⅱ

(2-1)

제시문 (나)의 방법을 따라 해보자. 먼저 접점 $(t,\ f(t))$에서 접선 L을 구하면,

$$L:\ y = f'(t)(x-t) + f(t)$$

이다. 곡선 $y = f(x)$ 는 아래로 볼록하다고 했으므로 $f''(t) > 0$ 이고 접선 L은 곡선 아래에 있

다. 따라서 곡선 $y=f(x)$와 세 개의 직선 L, $x=0$, $x=a$에 의해 둘러싸인 도형의 면적은 다음으로 주어진다.

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^a \{f(x)-f'(t)(x-t)-f(t)\}\,dx \\ &= \int_0^a f(x)\,dx - f'(t)\left[\frac{1}{2}x^2 - tx\right]_0^a - f(t)\,[x]_0^a \\ &= \int_0^a f(x)\,dx - f'(t)\left(\frac{1}{2}a^2 - ta\right) - f(t)\,a \end{aligned}$$

이 면적을 t로 미분하면

$$\frac{d}{dt}S(t) = -f''(t)\left(\frac{1}{2}a^2 - at\right) + f'(t)\,a - f'(t)\,a = f''(t)a\left(t - \frac{1}{2}a\right)$$

이다. 구간 $[0,\ a]$에서 $af''(t)>0$이므로 $t<\frac{a}{2}$일 때 $\frac{d}{dt}S(t)<0$이고 $t>\frac{a}{2}$일 때 $\frac{d}{dt}S(t)>0$이므로 $t=\frac{a}{2}$일 때 $S\left(\frac{a}{2}\right)$는 극소이면서 최소이다.

(2-2)

먼저 $f(x)$의 이계도함수는 $f''(x)=2e^x+xe^x>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록하다. 문제에서 곡선 $y=xe^x$와 세 직선 L, $x=0$, $x=\frac{2k}{n}$로 둘러싸인 면적이 최소라 하였으므로 문제 (2-1)의 결과를 적용할 수 있다. 즉, 접점은 $P\left(\frac{k}{n},\ \frac{k}{n}e^{\frac{k}{n}}\right)$이고 따라서 $Q_{n,k}\left(\frac{k}{n},\ 0\right)$이다. 접선은

$$L:\ y=\left(1+\frac{k}{n}\right)e^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{k}{n}\right)+\frac{k}{n}e^{\frac{k}{n}}$$

이다. 이 접선의 x절편은 $x=\frac{k}{n}-\frac{\frac{k}{n}e^{\frac{k}{n}}}{\left(1+\frac{k}{n}\right)e^{\frac{k}{n}}}=\frac{k}{n}-\frac{\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}}$이므로 $R\left(\frac{k}{n}-\frac{\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}},0\right)$이다.

따라서 $|Q_{n,k}-R_{n,k}|=\frac{\left(\frac{k}{n}\right)}{1+\left(\frac{k}{n}\right)}$이다. 그러므로

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|Q_{n,k}-R_{n,k}| &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)}{1+\left(\frac{k}{n}\right)} \\ &= \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx = \int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx = [x-\ln(1+x)]_0^1 = 1-\ln 2 \end{aligned}$$

이다.

19 한양대학교 모의(1차)

제시문 1 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 주어진 두 개의 0 아닌 실 계수 다항식 $p(x)$, $s(x)$에 대하여

$$p(x)=q(x)s(x)+r(x)$$

를 만족하는 실 계수 다항식 $q(x)$, $r(x)$가 존재한다. 단, $r(x)=0$이거나 $r(x)$의 차수는 $s(x)$의 차수보다 작다. 이 때, $r(x)=0$이면 $s(x)$는 $p(x)$의 약수라 부르고, $p(x)$는 $s(x)$의 배수라 부른다.

(나) 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$는

$$A^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})A^2+(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}+a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})A$$
$$+(a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{13}a_{31}a_{22}-a_{11}a_{22}a_{33}-a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{21}a_{32})E=O$$

을 만족하고, 이를 케일리-해밀턴 정리라 한다. 단, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(다) 실 계수 다항식 $p(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$와 3×3 행렬 A에 대해,

$$p(A)=a_nA^n+\cdots+a_1A+a_0E$$

로 정의한다. 이 때, $p(A)=O$이 되는 다항식 $p(x)$중 차수가 가장 낮고 최고차항의 계수가 1인 다항식을 A의 최소다항식이라 한다.

논제 1-1

3×3 행렬 A의 최소다항식이 $p(A)=O$을 만족하는 모든 실계수 다항식 $p(x)$의 약수임을 제시문 (가)를 이용하여 설명하시오.

논제 1-2

위 [논제 1-1]의 결과를 이용하여 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$의 최소다항식을 구하시오.

제시문 2 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 기주는 학교에서 미술시간에 찰흙으로 둥근 공을 만든 후, 칼로 평평하게 잘라보았더니 단면의 테두리 모양이 항상 원이 됨을 관찰하였다.

(나) 기주는 학교에서 수학시간에 반지름이 1 이고 중심이 원점인 구의 방정식은 $x^2+y^2+z^2=1$로 주어진다는 것을 공부하였다. 이 구와 평면 $y=z$ 가 만나는 공통부분을 구하기 위하여, 두 방정식을 연립하여 구하여 보았더니, $x^2+2y^2=1$ 이라는 타원의 방정식을 얻게 되어 구를 평면으로 자른 단면의 테두리 모양이 타원이 나올 수도 있을까라는 의문을 가지게 되었다.

(다) 평면 α 밖의 한 점 P 에서 평면 α 에 내린 수선의 발 P$'$ 을 점 P 의 평면 α 위로의 정사영이라고 한다. 또, 도형 F의 각 점에서 평면 α에 내린 수선의 발들로 이루어진 도형 F$'$을 도형 F 의 평면 α 위로의 정사영이라고 한다. 두 도형 α, β 가 이루는 각의 크기가 θ 일 때, 평면 α 위에 있고 넓이가 S인 도형의 평면 β 위로의 정사영의 넓이 S'은 $S'=S\cos\theta$ 로 주어진다.

논제 2-1

제시문 (가)와 (나)에서 기주가 봉착하게 되는 모순이 어떤 오류에서 비롯된 것인지 논하시오.

논제 2-2

부등식 $x^2+y^2+z^2 \le 1$ 로 주어지는 속이 꽉 찬 공을 생각하자. 또한 세 점 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ 을 지나는 평면을 생각하자. 제시문 (다)를 참고하여, 이 평면과 공의 공통부분을 xy-평면에 정사영했을 때 얻게 되는 도형에 관해 논하고, 이 도형의 면적을 구하시오.

제시문분석

1. 제시문1

(가) 다항식에서 약수와 배수를 정의하고 있다.
(나) 3 차 정사각행렬에서 케일리-해밀턴 정리를 정의하고 잇다.
(다) 실계수 다항식과 최소다항식을 정의하고 있다.

2. 제시문2

(나) 구의 방정식 $x^2+y^2+z^2=1$과 평면 $y=z$가 만나는 단면을 구하기 위해 $y=z$를 $x^2+y^2+z^2=1$에 대입해서 풀었을 때 나타나는 오류에 대해 설명하고 있다.
(다) 정사영의 정의와 정사영의 넓이에 대한 공식을 제시하고 있다.

논제분석

논제 1-1

다항식의 나눗셈과 행렬의 최소다항식의 개념 이해도를 평가하는 문제이다. 행렬 A의 최소다항식 $m(x)$가 $p(A)=0$이 되는 모든 다항식 $p(x)$의 약수가 되는가를 묻고 있다. $p(A)=0$이 되는 실계수 다항식을 $p(x)=q(x)m(x)+r(x)$을 표현하였을 때 $r(x)=0$이 됨을 보이면 된다.

논제 1-2

[논제 1-1]의 결과와 제시문(나)의 행렬의 케일리-해밀턴 정리를 이용하여 최소다항식을 구하는 문제이다. 케일리-해밀턴 정리에 의해 나온 3차 방정식을 인수분해하여 $m(A)=0$이 되는 최소다항식을 구해야 한다.

〈제시문2〉

원, 타원, 쌍곡선 등 이차곡선과 공간도형의 위치관계를 잘 파악하고 있는지 평가하고자 한다.

논제 2-1

$y=z$를 $x^2+y^2+z^2=1$에 대입했을 때 나오는 식의 의미에 대해 묻고 있다.

논제 2-2

구와 평면이 만나는 단면의 도형을 $xy-$평면에 정사영시킨 도형의 넓이를 구하는 문제이다.

배경지식쌓기

1. 다항식에서의 약수와 배수

다항식 A가 다항식 B로 나누어 떨어질 때, 즉 $A=BQ(B\neq 0)$일 때, B를 A의 약수, A를 B의 배수라고 한다.

2. 좌표공간에서 평면의 방정식

(1) 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$를 지나고 법선벡터가 (a,b,c)인 평면의 방정식

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

(2) 법선벡터가 (a, b, c)인 평면의 방정식의 일반형

$$ax+by+cz+d=0$$

(3) 세 점 $\mathrm{A}(a,0,0)$, $\mathrm{B}(0,b,0)$, $\mathrm{C}(0,0,c)$를 지나는 평면의 방정식은

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad (abc\neq 0)$$

3. 내적과 각의 관계

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

풀어보기

1. 좌표공간에서 삼각형 ABC 가 다음 조건을 만족시킨다.

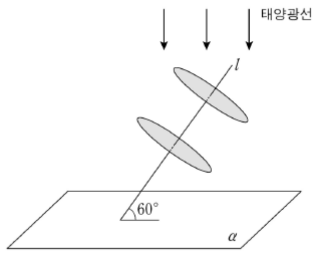
> (가) 삼각형 ABC 의 넓이는 6이다.
> (나) 삼각형 ABC 의 yz 평면 위로의 정사영의 넓이는 3 이다.

삼각형 ABC 의 평면 $x-2y+2z=1$ 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 구하여라.

(2012 수능)

2. 한 변의 길이가 1인 정팔면체에 내접하는 구의 부피를 구하여라.

3. 그림과 같이 중심 사이의 거리가 $\sqrt{3}$ 이고 반지름의 길이가 1인 두 원판과 평면 α가 있다. 각 원판의 중심을 지나는 직선 l은 두 원판의 면과 각각 수직이고, 평면 α와 이루는 각의 크기가 60° 이다. 태양광선이 그림과 같이 평면 α에 수직인 방향으로 비출 때, 두 원판에 의해 평면 α에 생기는 그림자의 넓이는? (단, 원판의 두께는 무시한다.)



(2011 수능)

4. A 는 실수를 성분으로 하는 이차정사각행렬이다. 다음 진술의 참, 거짓을 판정하여라.[26]

(1) $A^2 = E$ 이면 $A = E$ 또는 $A = -E$ 이다. (　　)

(2) $A^3 = E$ 이면 $A = E$ 또는 $A^2 + A + E = O$ 이다. (　　)

(3) $A^4 = E$ 이면 $A^2 = E$ 또는 $A^2 = -E$ 이다. (　　)

26) http://blog.naver.com/waegrae/50013384508

읽기자료

최소다항식과 행렬

[정의] 실계수 다항식 $p(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$와 행렬 A에 대해,

$$p(A)=a_nA^n+\cdots+a_1A+a_0E$$

로 정의한다. 이 때, $p(A)=O$이 되는 다항식 $p(x)$중 차수가 가장 낮고 최고차 항의 계수가 1인 다항식을 A의 최소다항식이라 한다.

이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$는 항상 $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$을 만족한다. 따라서 이차정사각행렬 A의 최소다항식은 1차식 또는 2차식이다.

[문제 1][27] 실수를 성분으로 하는 이차 정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$가

$A(A-E)(A-2E)=O$을 만족시킬 때, $a+d$, $ad-bc$의 값을 구하여라.

[풀이] 행렬 A가 만족시키는 식 $A(A-E)(A-2E)=O$에 대응하는 다항식은 $x(x-1)(x-2)$이다. A는 이차 정사각행렬이므로 최소 다항식은 1차식 또는 2차식이다.

최소다항식	성립하는 행렬의 식	$a+d$	$ad-bc$
x	$A=O$	0	0
$x-1$	$A=E$	2	1
$x-2$	$A=2E$	4	4
$x(x-1)$	$A(A-E)=A^2-A=O$	1	0
$x(x-2)$	$A^2-2A=O$	2	0
$(x-1)(x-2)$	$A^2-3A+2E=O$	3	2

[문제 2] $A^3-2A^2-3A=O$을 만족시키는 이차 정사각행렬 A의 조건을 구하여라.

[풀이] $A^3-2A^2-3A=O$에 대응하는 다항식은 $x^3-2x^2-3x=x(x-3)(x+1)$이다. A는 이차 정사각행렬이므로 최소 다항식은 1차식 또는 2차식이다.

(i) 최소 다항식이 x 일 경우 : $A=O$

(ii) 최소 다항식이 $x-3$ 일 경우 : $A=3E$

27) http://blog.naver.com/waegrae/50013439223

(iii) 최소 다항식이 $x+1$ 일 경우 : $A=-E$

(iv) 최소 다항식이 $x(x-3)$ 일 경우: $A^2-3A=O$ (단, $A\neq O, A\neq 3E$)

(v) 최소 다항식이 $x(x+1)$ 일 경우 : $A^2+A=O$ (단, $A\neq O, A\neq -E$)

(vi) 최소 다항식이 $(x-3)(x+1)$ 일 경우: $A^2-2A-3E=O$ (단, $A\neq -E, A\neq 3E$)

[문제 3] 실수를 성분으로 하는 이차 정사각행렬 A 가 $A^9=O$ 을 만족시킬 때, $A^2=O$ 이 성립하는가?

[풀이] $A^9=O$ 에 대응하는 다항식은 x^9 이고 A 는 이차 정사각행렬이므로 최소 다항식은 1차식 또는 2차식이다.

(i)최소 다항식이 x 인 경우 : $A=O$

(ii)최소 다항식이 x^2 인 경우 : $A^2=O(A\neq O)$

(i), (ii)에 의해 $A^9=O$ 이면 $A=O$ 또는 $A^2=O(A\neq O)$이다.

$A=O$ 의 경우에도 $A^2=O$ 이 성립한다.

그러므로 $A^9=O$ 이면 $A^2=O$ 이다.

예시답안

풀어보기

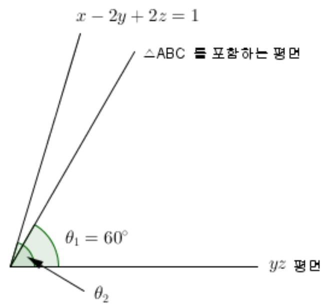
1. $\triangle$ABC 를 포함한 평면과 yz 평면이 이루는 예각의 크기를 θ_1 라 하면

$6\cos\theta_1 = 3$ 에서 $\cos\theta_1 = \frac{1}{2}$

평면 $x-2y+2z=1$ 과 yz 평면이 이루는 예각의 크기를 θ_2 라 하면 두 평면의 법선벡터가 각각 $(1,\ -2,\ 2)$, $(1,\ 0,\ 0)$이므로

$$\cos\theta_2 = \frac{|1\cdot1+(-2)\cdot0+2\cdot0|}{\sqrt{1+4+4}\,\sqrt{1+0+0}} = \frac{1}{3}$$

한편, 삼각형ABC 의 평면 $x-2y+2z=1$위로의 정사영의 넓이가 최대가 되기 위해서는 이 두 평면이 이루는 예각의 크기가 최소가 되어야 한다.



최소의 각을 θ 라 하면 $\theta = \theta_2 - \theta_1$ 이다. 그러므로

$$\cos\theta = \cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{6} + \frac{2\sqrt{6}}{6}$$

따라서 정사영의 넓이의 최댓값은 $6\cos\theta = 2\sqrt{6}+1$

(다른 풀이)

삼각형 ABC 를 포함한 평면의 방향벡터를 $(a,\ b,\ c)$(단, $a^2+b^2+c^2=1$, $a \geq 0$이다)라 하고 이 평면이 yz-평면과 이루는 예각을 θ_1, 평면 $x-2y+2z=1$ 과 이루는 예각을 θ_2 라 하면

$$\cos\theta_1 = \frac{|(a,\ b,\ c)\cdot(1,\ 0,\ 0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\sqrt{1+0+0}} = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

이므로 $a = \frac{1}{2}$ 이고 $a^2+b^2+c^2 = \frac{1}{4}+b^2+c^2 = 1$ 이 되어 $b^2+c^2 = \frac{3}{4}$ 이다. 한편,

$$\cos\theta_2 = \frac{|(a,\ b,\ c)\cdot(1,\ -2,\ 2)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \sqrt{1+4+4}}$$
$$= \frac{|a-2b+2c|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|a-2b+2c|}{3} = \frac{\left|\frac{1}{2}-2b+2c\right|}{3}$$

이다.

삼각형ABC 의 평면 $x-2y+2z=1$위로의 정사영의 넓이가 최대가 되기 위해서는 θ_2 의 크기가 최소가 되어야 하고 따라서 $\cos\theta_2$ 의 크기가 최대가 되어야 한다. 또 $\cos\theta_2$ 의 크기가 최대가 되기 위해서는 $-2b+2c$ 의 크기가 최대가 되어야 하므로, 코시 슈바르쯔 부등식에 의해

$$(-2b+2c)^2 \le (b^2+c^2)(4+4) = \frac{3}{4}\cdot 8 = 6$$

이 성립하고 따라서 $-2b+2c$ 의 최댓값은 $\sqrt{6}$ 이 된다. 이때,

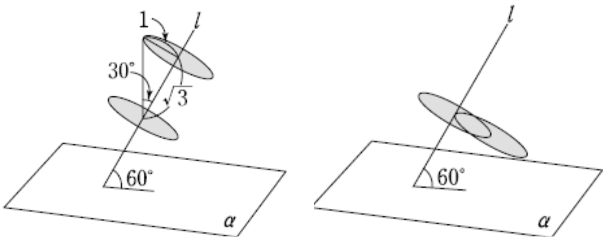
$$\cos\theta_2 = \frac{\frac{1}{2}+\sqrt{6}}{3} = \frac{1+2\sqrt{6}}{6}$$

이다. 따라서, 구하고자 하는 정사영의 넓이의 최댓값은

$$6\cdot\frac{1+2\sqrt{6}}{6} = 1+2\sqrt{6}$$

2. 정팔면체의 중심을 원점으로 두면 정팔면체의 한 면은 평면 $x+y+z=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다. 따라서 내접하는 구의 반지름은 $r=\frac{\left|0+0+0-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$ 이 되므로 구의 부피는 $\frac{\sqrt{6}}{27}\pi$ 이다.

3. 그림의 원판을 태양광선 방향으로 평행이동하여 만나게 하면 윗 원판이 아래 원판의 중심을 지난다.



겹친 원판의 넓이 S는 아래 그림의 빗금친 부분의 넓이를 S_1이라 하면

$S=2\times\pi\times1^2-2S_1$이다.

S_1은 중심각이 $\frac{2}{3}\pi$인 활꼴이므로

$$S_1=\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\times 1^2\times\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore\ S=2\pi-\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

그런데 구하는 그림자의 넓이 S'은 평면과 이루는 각이 $\frac{\pi}{6}$인 정사영이므로

$$S'=\left(\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\cos\frac{\pi}{6}=\left(\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{3}{4}$$

4. 이차정사각행렬에서 최소다항식은 1 차식 또는 2 차식이다.

(1) (거짓)

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\text{일 때, } A^2-E=O\text{ 에서 } x^2-1=(x+1)(x-1)$$

(ⅰ) 최소다항식이 $x+1$ 인 경우: $A+E=O$, 즉 $A=-E$

(ⅱ) 최소다항식이 $x-1$ 인 경우: $A-E=O$, 즉 $A=E$

(ⅲ) 최소다항식이 $(x+1)(x-1)$인 경우: ($A\neq\pm E$일 경우) $A^2=E$

$a+d=0,\ ad-bc=-1$이므로 $A^2=E$ $\quad\therefore$거짓

(2) (참)

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\text{일 때, } A^3-E=O\text{ 에서 } x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

(ⅰ) 최소다항식이 $x-1$ 인 경우 : $A-E=O$, 즉 $A=E$

(ⅱ) 최소다항식이 x^2+x+1인 경우 : $A^2+A+E=O$ $\therefore$참

(3) (참)

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\text{일 때, } A^4-E=O\text{ 에서 } x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$$

(ⅰ) 최소다항식이 $x+1$ 인 경우: $A+E=O$, 즉 $A=-E$

(ⅱ) 최소다항식이 $x-1$ 인 경우: $A-E=O$, 즉 $A=E$

(ⅲ) 최소다항식이 $(x+1)(x-1)$인 경우:($A\neq\pm E$일 경우)

$a+d=0,\ ad-bc=-1$이므로 $A^2=E$

(ⅳ) 최소다항식이 x^2+1 인 경우: $A^2+E=O$

$a+d=0,\ ad-bc=1$이므로 $A^2=-E$

(ⅰ), (ⅱ)의 경우에도 $A^2=E$이다. $\therefore$참

논제 1-1 [28)]

행렬 A의 최소다항식을 $m(x)$라 하면 $m(A)=0$ 이다. 제시문(가)에 의해

$$p(x)=q(x)m(x)+r(x)$$

를 만족하는 실 계수 다항식 $q(x), r(x)$가 존재한다. 단, $r(x)=0$ 이거나 $r(x)$의 차수는 $m(x)$의 차수보다 작다. 따라서

$$O=p(A)=q(A)m(A)+r(A)=r(A).$$

이므로 최소다항식의 정의에 의해 $r(x)=0$ 이어야 한다. 즉, $p(x)=q(x)m(x)$이므로 행렬 A의 최소다항식 $m(x)$는 $p(A)=O$ 을 만족하는 모든 실 계수 다항식 $p(x)$의 약수이다.

논제 1-2

케일리-해밀턴 정리에 의해 행렬 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$는 $x^3-4x^2+5x+2=0$을 만족한다.

또한 문제 (1)과 제시문 (나)로부터 행렬 A의 최소다항식은

$$x^3-4x^2+5x+2=(x-1)^2(x-2)$$

의 약수임을 알 수 있다. 또한

$$A-E=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}\neq O\ ,\ A-2E=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\neq O$$

$$(A-E)(A-2E)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}=O$$

이다. 따라서, 행렬 A의 최소다항식은 $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$ 이다.

논제 2-1

기주가 얻은 식은 구와 평면의 공통부분에 놓인 점의 x좌표와 y좌표가 만족하는 식이므로 공통부분을 xy-평면에 정사영한 도형이 만족하는 식이 된다.

28) 한양대 예시답안 참조

논제 2-2

세 점 $(1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 1,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 1)$을 지나는 평면의 방정식은 $x+y+z=1$이다. 또한 $x+y+z=1$의 법선벡터가 $(1,\ 1,\ 1)$이고, $xy-$평면의 법선벡터는 $(0,\ 0,\ 1)$이므로 두 평면이 이루는 각을 θ라고 할 때, $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

평면 $x+y+z=1$과 공의 공통부분은 세 점 $(1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 1,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 정삼각형의 외접원과 같으므로 중심은 $\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$이고, 반지름 r은

$$r=\sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

이므로 평면과 공의 공통부분의 넓이 $S=\dfrac{2}{3}\pi$이다. 따라서 이 영역을 xy-평면에 정사영시킨 타원의 넓이 $S'=S\cos\theta=\dfrac{2}{3}\pi\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\pi$ 이다.

20 한양대학교 모의(2차)

제 시 문 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

집합 S는 다음 조건 (a)~(e)를 만족한다.
(a) 집합 S에는 CURVE라 불리는 부분집합이 적어도 하나 존재한다.
(b) 각 CURVE는 집합 S의 원소 n개 이상으로 이루어져 있다.
(c) 각 CURVE는 집합 S의 진부분집합이다.
(d) 집합 S의 서로 다른 두 원소를 포함하는 CURVE가 항상 존재한다.
(e) 서로 다른 두 CURVE의 교집합은 한 개의 원소로 이루어져 있다.

만약 조건 (b)에서 $n=2$ 라고 하자. 이때 집합 S를 $\{a_1, a_2, a_3\}$이라 하고, S의 원소 2 개로 이루어져 있는 CURVE $C_{1,2}$, $C_{1,3}$, $C_{2,3}$ 를 각각 $\{a_1, a_2\}$, $\{a_1, a_3\}$, $\{a_2, a_3\}$ 이라면, 조건 (a)~(e)를 만족함을 알 수 있다. 또한, 집합 S는 조건 (a)~(e)를 만족하는 가장 작은 집합이고 CURVE라 불리는 부분집합의 개수는 3 개임을 알 수 있다.

논제 Ⅰ-1

조건 (b)에서 $n=3$ 이라고 할 때, 위의 조건 (a)~(e)를 만족하는 집합 S 중 원소의 개수가 가장 적은 것은 몇 개로 이루어져 있는지 논하시오.

논제 Ⅰ-2

위 [논제 I-1]에서 구한 집합S 에서 CURVE의 개수를 구하시오.

제 시 문 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(a) 함수 $f:[a,\ b]\to R$에 대하여 닫힌구간 $[a,\ b]$를 n 등분한 점들을 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 라 하고, 구간 $[x_j,\ x_{j+1}]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 M_j, 최솟값을 L_j 라 하자.

$S_n=\sum_{j=0}^{n-1}M_j\times\frac{b-a}{n}$, $T_n=\sum_{j=0}^{n-1}L_j\times\frac{b-a}{n}$ 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}T_n$ 이면 $f(x)$는 $[a,b]$에서 H-적분가능하다고 한다.

(b) 제시문 (a)에서 주어진 M_j, L_j에 대하여 $C_n=\sum_{j=0}^{n-1}((M_j-L_j)\times\frac{b-a}{n})$ 라 할 때, $\lim_{n\to\infty}C_n=0$ 이면 $f(x)$는 $[a,b]$에서 Y-적분가능하다고 한다.

(c) 극한이 존재하는 수열 $\{a_n\},\{b_n\}$과 상수 c에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$ 과 $\lim_{n\to\infty}(c\,a_n)=c\cdot\lim_{n\to\infty}a_n$ 이 성립한다.

논제Ⅱ-1

함수$f(x)=\begin{cases}x^3, & -1\le x\le 1\text{인 유리수}\\ 0, & -1\le x\le 1\text{인 무리수}\end{cases}$ 라 할 때, $f(x)$의 H-적분가능성과 Y-적분가능성에 대하여 논하시오.

논제Ⅱ-2

$\lim_{n\to\infty}T_n$이 존재하는 경우에 대하여, H-적분가능성과 Y-적분가능성의 관계에 관하여 논하시오. 그리고 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 정의된 다항함수 $f(x)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j x^j$가 $(a,\ b)$의 모든 점 x에 대하여 $f'(x)\ne 0$을 만족할 때, $f(x)$의 H-적분가능성에 관하여 논하시오.

제시문분석

1. 제시문

집합 S의 진부분집합 CURVE에 대한 정의와 집합 S와 CURVE의 관계를 제시하고 있으며, $n=2$ 일 때 집합 S와 CURVE를 예를 들어 설명하고 있다.

2. 제시문

(a) 함수 $f(x)$의 $[a, b]$ 에서 H-적분가능에 대하여 정의하고 있다.
(b) 함수 $f(x)$의 $[a, b]$ 에서 Y-적분가능에 대하여 정의하고 있다.
(c) 수렴하는 수열의 성질을 제시하고 있다.

논제분석

논제 Ⅰ-1

주어진 조건을 만족하는 집합 중에서 원소의 개수가 가장 적은 집합을 구하는 문제이다. 논리 추론 능력을 살펴보고자 하는 문항으로 주어진 제시문에서 $n=2$ 일 때를 관찰한 뒤, $n=3$ 인 경우로 확장하기 위하여 (a)~(e)의 조건을 만족하는 CURVE의 원소를 살펴보며 이를 만족하는 가장 작은 집합 S를 구성해 나가야 한다.

논제 Ⅰ-2

[논제 Ⅰ-1]을 해결하는 과정에서 구하고자 하는 CURVE의 개수는 자연스럽게 도출할 수 있다.

논제 Ⅱ-1

제시문에서 정의한 두 가지 적분 정의를 이해하고 주어진 함수의 적분가능성을 확인하는 문항이다. 교육과정에서 터득한 닫힌구간에서 연속인 함수는 최댓값과 최솟값을 갖는다는 사실과 적분의 급수표현에 대한 이해를 토대로 새로운 적분 정의를 주어진 함수에 대한 문제해결에 적용할 수 있는지를 평가하고자 한다.

논제 Ⅱ-2

먼저 H-적분가능성과 Y-적분가능성 간의 관계를 찾고, 다항함수의 연속성과 미분의 의미 및 극한의 성질을 적용하여 다항함수의 H-적분가능성을 밝히고자 한다.

배경지식쌓기

1. 집합과 부분집합

① 부분집합: 집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속할 때, 집합 A를 집합 B의 부분집합이라 하고, 기호로 $A \subset B$와 같이 나타낸다.

② 교집합: 두 집합 A, B의 공통인 원소로 이루어진 집합을 A와 B의 교집합이라고 한다.

③ 합집합: 두 집합 A, B의 원소 전체로 이루어진 집합을 A와 B의 합집합이라고 한다.

④ 여집합: 전체집합 U의 원소 중에서 A에 속하지 않는 원소들로 이루어진 집합을 A의 여집합이라고 한다.

⑤ 차집합: 두 집합 A, B에 대하여 A에는 속하지만 B에는 속하지 않는 모든 원소들로 이루어진 집합을 A에 대한 B의 차집합이라고 한다.

2. 극한과 미분과 정적분

① 극한(Limit)의 기본성질

수열$\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 수렴하고, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$일 때

(i) $\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n = c\alpha$ (단, c는 상수)

(ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha \pm \beta$

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha\beta$

(iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n \neq 0$, $\beta \neq 0$)

② 함수의 증가와 감소

미분가능한 함수 $f(x)$가 어떤 구간의 모든 x에 대하여

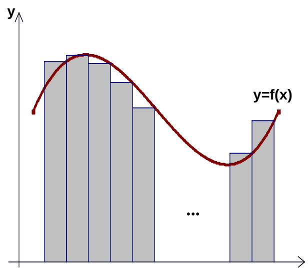
(i) $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

(ii) $f'(x) < 0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

③ 정적분의 정의

닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대해서 정적분을 다음과 같이 구분구적법의 형태로 정의할 수 있다. 구간 $[a, b]$를 n등분하여 양 끝점과 각 분점을 차례로 $x_0(=a)$, x_1,

x_2, $\cdots$, x_{n-1}, $x_n(=b)$ 이라 하고, 각 소구간의 길이를 Δx라고 하면 $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$이다.



이 때, 위 그림과 같이 각 소구간의 오른쪽 끝에서의 함숫값을 높이로 하는 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\cdots+f(x_n)\Delta x=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

이다. 여기서, $n\to\infty$이면 S_n은 구하는 도형의 넓이 S에 한없이 가까워진다.

($f(x)\ge 0$일 때)

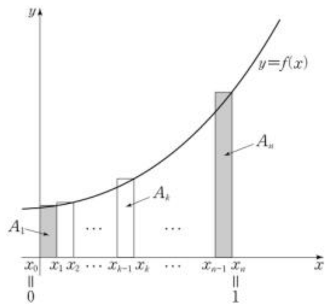
$$\therefore S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

일반적으로, 함수 $y=f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면

$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$ 가 항상 존재한다. 이 때, 이 극한값을 함수 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분이라 하고, 기호로 $\int_a^b f(x)dx$ 와 같이 나타낸다.

풀어보기

1. 함수 $f(x)=x^2+ax+b\ (a\geq 0,\ b>0)$가 있다.
그림과 같이 2 이상인 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 1]$을 n등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $0=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=1$이라 하자. 닫힌구간 $[x_{k-1},\ x_k]$를 밑변으로 하고 높이가 $f(x_k)$인 직사각형의 넓이를 A_k라 하자. $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$



양 끝에 있는 두 직사각형의 넓이의 합이 $A_1+A_n=\dfrac{7n^2+1}{n^3}$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n}A_k$의 값을 구하시오.

(2010 수능)

2. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 있다. 2 이상인 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 1]$을 n등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례대로 $0=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=1$이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

(2011 평가원)

보 기

ㄱ. $n=2m$(m은 자연수)이면 $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f(x_{2k})}{m}\leq\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}$이다.

ㄴ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left\{\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\right\}=\int_0^1 f(x)dx$

ㄷ. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}\leq\int_0^1 f(x)dx\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{n}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

예시답안

풀어보기

1. $x_k=\dfrac{k}{n}$ 이므로 $A_k=\dfrac{1}{n}\cdot f(x_k)=\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

$$A_1+A_n=\frac{1}{n}\{f(x_1)+f(x_n)\}=\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{a}{n}+b+1+a+b\right\}=\frac{1}{n^3}\{1+an+(1+a+2b)n^2\}$$

$$=\frac{7n^2+1}{n^3}$$

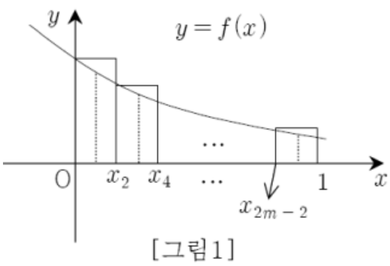
$$a=0,\ 1+a+2b=7 \quad \therefore\ a=0,\ b=3 \quad \therefore\ f(x)=x^2+3$$

따라서, $A_k=\dfrac{1}{n}\left\{\left(\dfrac{k}{n}\right)^2+3\right\}$이므로

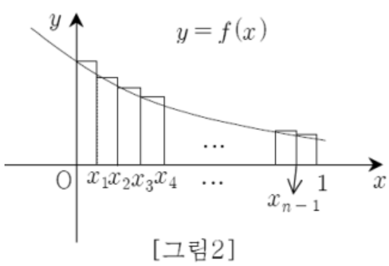
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n}A_k=8\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2+3\right\}=8\int_0^1 x(x^2+3)dx=8\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=8\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)=14$$

2. ㄱ. (반례)



[그림1]



[그림2]

$x_{2k+2}-x_{2k}=\dfrac{2}{2m}=\dfrac{1}{m}$ 이므로

$\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f(x_{2k})}{m}$ 은 [그림1]의 직사각형들의 넓이의 합을 나타낸다.

$x_{k+1}-x_k=\dfrac{1}{n}$ 이므로 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}$ 은 [그림2]의 직사각형들의 넓이의 합을 나타낸다.

따라서 $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f(x_{2k})}{m}>\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}$ 이다. (거짓)

ㄴ. $x_k=\dfrac{k}{n}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left\{\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\right\}=\frac{1}{2}\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_{k-1})\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\frac{1}{n}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx\right\}$$
$$=\int_0^1 f(x)\,dx \ \ \text{(참)}$$

ㄷ. (반례)

ㄱ의 [그림2]에서 $\int_0^1 f(x)\,dx$ 는 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이이고, $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}$ 은 직사각형들의 넓이의 합을 나타내므로

$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}>\int_0^1 f(x)\,dx$ (거짓)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ이다.

논제 Ⅰ-1 [29)]

위의 성질들을 만족하는 원소의 개수가 최소인 집합 S를 구하는 것이므로, 각 CURVE는 3개의 원소로 이루어져 있다고 가정하자. 집합 S의 한 부분집합 CURVE를 A라고 하면, A를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$A=\{a_1, a_2, a_3\}$$

(c)에 의해 두 집합의 차 $S-A$에 있는 원소가 적어도 하나 있다. 이 원소를 a_4라고 하자. (d)와 (e)에 의하면 두 원소를 포함하는 CURVE는 단 하나만 존재하므로, a_1, a_4를 포함하는 CURVE의 나머지 원소를 a_5라 하자. 이 CURVE는 a_1, a_4을 포함하므로, a_5는 a_1, a_2, a_3, a_4와는 다른 원소이다. 이것을 $C_{145}=\{a_1, a_4, a_5\}$라 하고, $A=C_{123}$으로 표시하자.

마찬가지로 a_2, a_4를 포함하는 CURVE가 존재해야하고, 이 CURVE는 C_{123}과 C_{145}과는 각각 하나의 원소 a_2와 a_4를 공통원소로 가지므로 CURVE C_{123}과 C_{145}에 없는 원소 a_6가 이 CURVE에 속해야 한다. 따라서 $C_{246}=\{a_2, a_4, a_6\}$를 얻는다. a_3와 a_4를 포함하는 CURVE는 $C_{123}, C_{145}, C_{246}$과는 하나의 공통원소를 각각 a_3, a_4, a_4를 가지므로 세 번째 원소 a_7은 $a_1, \cdots, a_6$와는 다름을 알 수 있고, 새로운 CURVE인 C_{347}을 얻는다. 그러므로 집합 S는 적어도 7개의

29) 한양대 예시답안

원소를 가져야 한다. 그리고 집합 S는 부분집합인 CURVE C_{123}, C_{145}, C_{246}, C_{347}를 포함한다.
앞에서 구성한 집합 $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$이 위의 성질 (a)-(e)을 만족하는지 확인해야 한다. 그런데 구성과정으로부터 (d)를 제외한 성질들을 만족함을 알 수 있다. 따라서 임의의 두 원소를 포함하는 CURVE는 항상 존재한다는 조건 (d)를 만족하는지 확인해야한다.
두 개의 원소 (a_1과 a_2), (a_1과 a_3), (a_1과 a_4), (a_1과 a_5)를 각각 포함하는 CURVE는 C_{123}, C_{123}, C_{145}, C_{145}임을 알 수 있다. 조건 (d)에 의해 (a_1과 a_6)를 포함하는 CURVE가 있어야 한다. 이 CURVE는 $C_{123}, C_{145}, C_{246}$과 공통원소를 가지고 있으므로 a_7을 포함할 수 있다. 따라서 (a_1과 a_6)를 모두 포함하는 CURVE는 $C_{167}=\{a_1, a_6, a_7\}$이고, 이것은 또한 ($a_1$과 a_7)를 포함한다.
원소 a_2를 포함하는 CURVE는 C_{123}, C_{246}이므로, 원소 (a_2와 a_5)를 포함하는 CURVE가 필요한데, 이 CURVE는 C_{123}, C_{145}, C_{246}과 공통원소를 가지므로 a_7을 포함할 수 있다. 따라서 (a_2와 a_5)를 포함하는 CURVE는 $C_{257}=\{a_2, a_5, a_7\}$이다.
원소 a_3를 포함하는 CURVE는 C_{123}, C_{347}이므로, 원소 (a_3와 a_5)를 포함하는 CURVE가 필요한데, 이것은 CURVE C_{123}, C_{145}, C_{257}, C_{347}과 각각 공통원소 a_3 또는 a_5를 가진다. 따라서 (a_3와 a_5)를 포함하는 CURVE는 a_6를 포함할 수 있는데, 이 CURVE는 $C_{356}=\{a_3, a_5, a_6\}$이다.
나머지 경우 (a_3과 a_7), (a_4와 a_5), (a_4와 a_6), (a_4와 a_7), (a_5와 a_6), (a_5와 a_7), (a_6과 a_7)을 포함하는 CURVE들은 이미 존재함을 알 수 있다.
그러므로 집합 $S=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$라면 위의 성질 (a)-(e)를 만족하는 7개의 CURVE $C_{123}, C_{145}, C_{167}, C_{246}, C_{257}, C_{347}, C_{356}$를 갖는다. 따라서 원소가 7개 이면서 7개의 CURVE를 갖는 집합이 원소의 개수가 가장 적은 집합이다.

논제 Ⅰ-2

집합 $S=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$라면 위의 성질 (a)-(e)를 만족하는 CURVE는
$C_{123}, C_{145}, C_{167}, C_{246}, C_{257}, C_{347}, C_{356}$으로 7개를 갖는다.

논제 Ⅱ-1

소구간 $[x_j, x_{j+1}]$의 끝 점은 유리수 이므로 $f(x)$에 대하여 H-적분가능성을 살펴보면,

n이 짝수이면 $j \geq \dfrac{n}{2}$이면 $M_j = f(x_{j+1})$이고 $L_j = 0$이고

$j < \dfrac{n}{2}$이면 $M_j = 0$이고 $L_j = f(x_j)$이다.

n이 홀수이면 $j > \dfrac{n}{2}$이면 $M_j = f(x_{j+1})$이고 $L_j = 0$이고

$j < \dfrac{n}{2}$이면 $M_j = 0$이고 $L_j = f(x_j)$이다.

그러므로 $M_{\frac{n-1}{2}} = f(x_{\frac{n+1}{2}})$이고 $L_{\frac{n-1}{2}} = f(x_{\frac{n-1}{2}})$이다.

$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} M_j \times \dfrac{b-a}{n}$ 또는 $S_n = (\sum_{j=0}^{n-1} M_j \times \dfrac{b-a}{n}) - M_{\frac{n-1}{2}} \times \dfrac{b-a}{2n}$ 이고,

$T_n = \sum_{j=0}^{n-1} L_j \times \dfrac{b-a}{n}$ 또는 $T_n = (\sum_{j=0}^{n-1} L_j \times \dfrac{b-a}{n}) - L_{\frac{n-1}{2}} \times \dfrac{b-a}{2n}$ 이다.

$\lim\limits_{n\to\infty} M_{\frac{n-1}{2}} \times \dfrac{b-a}{2n} = 0$ 이고 $\lim\limits_{n\to\infty} L_{\frac{n-1}{2}} \times \dfrac{b-a}{2n} = 0$ 이므로

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} M_j \times \dfrac{b-a}{n} = \int_0^1 x^3 dx = \dfrac{1}{4}$ 이고

$\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} L_j \times \dfrac{b-a}{n} = \int_{-1}^0 x^3 dx = -\dfrac{1}{4}$ 이다.

그러므로 $f(x)$는 $[-1,1]$ 에서 H-적분가능하지 않다.

$f(x)$에 대하여 Y-적분가능성을 살펴보면,

$S_n - T_n = 2\sum_{j=0}^{n-1} M_j \times \dfrac{b-a}{n}$ 또는 $S_n - T_n = 2(\sum_{j=0}^{n-1} M_j \times \dfrac{b-a}{n}) - 2M_{\frac{n-1}{2}} \times \dfrac{b-a}{2n}$ 이고

$\lim\limits_{n\to\infty} 2M_{\frac{n-1}{2}} \times \dfrac{b-a}{2n} = 0$ 이므로

$\lim\limits_{n\to\infty} (S_n - T_n) = 2\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} M_j \times \dfrac{b-a}{n} = 2\int_0^1 x^3 dx = \dfrac{1}{2} \neq 0$ 이다.

그러므로 $f(x)$는 $[-1,1]$ 에서 Y-적분가능하지 않다.

논제 Ⅱ-2

$f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 H-적분가능하다고 가정하자.

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} T_n$ 이므로 제시문 (a)에 의하여

$\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n - T_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n + (-1)T_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n + \lim\limits_{n\to\infty} (-1)T_n$

$= \lim\limits_{n\to\infty} S_n + (-1)\lim\limits_{n\to\infty} T_n = 0$

따라서 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 Y-적분가능하다.

$f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 Y-적분가능하다고 가정하자.

$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - T_n) = 0$ 이고 $\lim_{n\to\infty} T_n$ 존재하므로 제시문 (b)에 의하여

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(C_n + T_n) = \lim_{n\to\infty} C_n + \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} T_n$

따라서 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 H-적분가능하다.

$f'(x) > 0$ 다고 가정하자.

가정에 의하여 $M_j = f(x_{j+1})$, $L_j = f(x_j)$이며 $M_{j-1} = L_j$이므로

$C_n = \sum_{j=0}^{n-1}(M_j - L_j) \times \frac{b-a}{n} = (f(b) - f(a)) \times \frac{b-a}{n}$ 이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$이고 $f(x)$는 $[a,b]$에서 Y-적분가능하고 위에서 증명된 관계에 의하여 $f(x)$는 $[a,b]$에서 H-적분가능하다.

$f'(x) < 0$ 다고 가정하자.

가정에 의하여 $M_j = f(x_j)$, $L_j = f(x_{j+1})$이며 $M_j = L_{j-1}$이므로

$C_n = \sum_{j=0}^{n-1}(M_j - L_j) \times \frac{b-a}{n} = (f(a) - f(b)) \times \frac{b-a}{n}$ 이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$이고 $f(x)$는 $[a,b]$에서 Y-적분가능하고 위에서 증명된 관계에 의하여 $f(x)$는 $[a,b]$에서 H-적분가능하다.

21 한양대학교 수시(오전)

논 술 1 다음 제시문 <가>~<라>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> 좌표평면 $\mathrm{R}^2=\{(x,y)|x,\ y$는 실수$\}$ 위의 점 $(x,\ y)$를 2×1 행렬 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$로 나타내면, 다음 등식이 성립한다.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<나> 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대해, 좌표평면 R^2에서 R^2로의 함수 f_A를 다음과 같이 정의한다.

$$f_A(X)=AX,\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

<다> 함수 f_A는 다음과 같은 등식을 만족한다.

$$f_A(X_1+X_2)=f_A(X_1)+f_A(X_2)$$
$$f_A(cX)=cf_A(X)$$

(단, $X,\ X_1,\ X_2$는 좌표평면 R^2 위의 점, c는 실수)

<라> 좌표평면 위의 영역 S와 자연수 k에 대해, 함수 f_A^k에 의해 S가 이동된 영역을 $f_A^k[S]$라 하자. (단, $f_A^k=f_A\circ\cdots\circ f_A$)

논제 1

좌표평면 위의 두 점 $X_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$에 대하여, 다음의 영역들을 좌표평면에 나타내시오.

$$S_1=\{pX_1+qX_2|p\ge0,\ q\ge0\},\ S_2=\{pX_1+qX_2|p\ge0,\ q\le0\}$$
$$S_3=\{pX_1+qX_2|p\le0,\ q\ge0\},\ S_4=\{pX_1+qX_2|p\le0,\ q\le0\}$$

논제 2

행렬 $A=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}$, 영역 $S=\{(x,y)\in\mathrm{R}^2|xy\geq 0\}$ 이라 하자.

(1) $f_A[S]$, $f_A^2[S]$, $f_A^3[S]$ 를 좌표평면에 나타내시오.

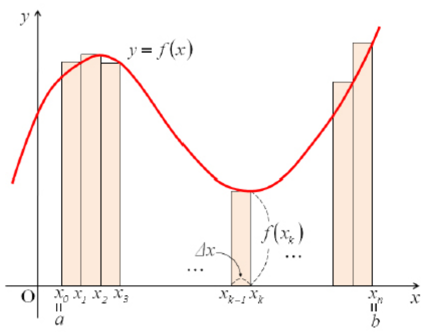
(2) 모든 자연수 k 에 대하여, $f_A^k[S]$ 가 직선 $y=\alpha x$ 를 포함하고 있다. α 를 구하시오.

논 술 2 다음 제시문<가>~<마>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> 함수 $y=f(x)$ 가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(x)\geq 0$ 일 때, 두 직선 $x=a$, $x=b$ 와 x 축 및 곡선 $y=f(x)$ 로 둘러싸인 영역의 넓이 S를 구분구적법으로 구하면 다음과 같다.

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\triangle x,\ \left(\triangle x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\triangle x\right)$$

이 극한값 S를 함수 $f(x)$ 의 a 에서 b 까지의 정적분이라 하고, 기호로 $\int_a^b f(x)dx$ 와 같이 나타낸다.



<나> n, m 은 자연수라고 하자. 두 실수 a, b 가 $n-1<a\leq n<m\leq b<m+1$ 일 때, 구간 $[a,b]$ 에서 함수 $y=[x]$ 의 정적분을 다음과 같이 정의한다.(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

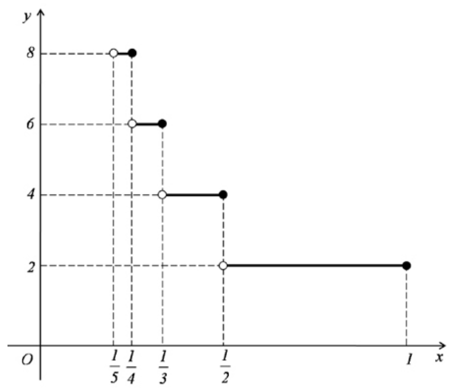
$$\int_a^b [x]dx=\int_a^n (n-1)dx+\sum_{k=n+1}^{m}\int_{k-1}^{k}(k-1)dx+\int_m^b mdx$$

<다> 감소수열 $\{a_n\}$ 은 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 와 $a_1 \le b$ 를 만족한다고 하자. 구간 $(a, b]$ 위의 함수 $y=f(x)$ 에 대하여 정적분 $\int_a^b f(x)dx$ 는 극한값 $\lim_{n\to\infty}\int_{a_n}^b f(x)dx$ 로 정의한다. 즉,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{a_n}^b f(x)\,dx$$

<라> 감소수열 $\{b_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ 이면 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ 이 수렴한다.

<마> 다음은 함수 $y=2\left[\frac{1}{x}\right]$ 의 그래프 중 일부분이다.



논제 1

자연수 n 에 대하여 등식 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)2k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ 이 성립함을 보이시오.

논제 2

극한값 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)2k}$ 을 구하시오.

논제 3

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$ 의 값을 구하시오.

논제 4

위 3번의 결과를 이용하여, 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{2n}{k}\right]-2\left[\frac{n}{k}\right]\right)$ 을 구하시오.

제시문분석

논술 1

2×2 행렬을 이용한 일차변환의 정의와 성질에 대해 설명하고 있다.

논술 2

<가> 구분구적법의 정의와 정적분과의 관계에 대해 설명하고 있다.
<나> 가우스함수에 대한 특이적분의 정의를 제시하고 있다.
<다> 반개구간에서의 특이적분의 정의를 제시하고 있다.
<라> 교대급수의 수렴성에 대해 언급하고 있다.
<마> 특별한 형태의 가우스함수를 제시하고 그 그래프의 일부를 제시하고 있다.

논제분석

논제 1

1. 평면상의 두 점을 제시하고 원점과 각각의 점을 연결하는 반직선을 새로운 좌표축으로 하는 좌표계에서 특정조건을 만족하는 점들이 나타내는 영역을 도시할 것을 요구하고 있다. 특정한 두 점을 이용해 새로운 점의 좌표를 나타내는 일차결합을 이해하는 것이 관건이다.

2-(1). 위의 1번 문제와 같이 좌표평면상에 임의의 점을 특정한 두 점의 일차결합으로 나타낼 수 있어야 하며 일차변환의 합성을 반복적으로 계산하여 그 결과를 도시할 것을 요구하고 있다.

2-(2). 주어진 행렬 A 를 이용한 일차변환의 반복 합성이 어떤 규칙성을 가지게 되는지 위의 2-(1) 문제를 통해 유추해보는 것이 관건이다.

논제 2

수학적 귀납법을 이용해 등식이 성립함을 증명해야 한다.

위 1번문제의 등식의 우변과 제시문 <가>의 구분구적법과 정적분의 관계를 이용해 값을 계산한다.

제시문 <라>의 교대급수의 수렴성과 위 2번 문제의 정적분값을 이용해 수렴값을 구하도록 한다.

제시문 <가>를 이용해 정적분으로 표현한 후 제시문 <마>의 그래프를 이용해 구하고자 하는 정적분값을 넓이로 도시해보고 계산한다.

배경지식쌓기

1. 일차변환의 정의와 성질

일반적으로 좌표평면 위의 변환 $f:(x,\ y)\to(x',\ y')$에서

$$\begin{cases} x' = ax+by \\ y' = cx+dy \end{cases} \quad (a,\ b,\ c,\ d\text{는 상수})\cdots\cdots ①$$

와 같이 x', y'이 상수항이 없는 x, y의 일차식으로 나타내어질 때, 이 변환 f를 일차변환이라고 하며, ①을 일차변환 f를 나타내는 식이라고 한다.

①을 행렬로 나타내면

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

이므로 $X'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$로 놓으면 다음과 같다.

$$X' = AX \quad \cdots\cdots ②$$

따라서 일차변환 f를 나타내는 식 ①이 주어지면 ②와 같이 행렬 A가 결정되고, 역으로 행렬 A가 주어지면 ②에 의하여 ①과 같이 일차변환 f가 정해짐을 알 수 있다. 이때 행렬 A를 일차변환 f를 나타내는 행렬 또는 일차변환 f의 행렬이라고 한다.

일차변환 f와 2×1행렬 X_1, X_2에 대하여

(1) $f(X_1+X_2)=f(X_1)+f(X_2)$

(2) $f(kX_1)=kf(X_1)$ (단, k는 실수)

2. 정적분과 무한급수

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\cdot\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)dx=\int_0^{b-a} f(a+x)dx$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{c}{n}k\right)\cdot\frac{c}{n}=\int_a^{a+c} f(x)dx=\int_0^{c} f(a+x)dx=c\int_0^{1} f(a+cx)dx$

풀어보기

1. 좌표평면 위의 점 $(x,\ y)$를 x축에 대하여 대칭이동시키는 일차변환을 f, 원점을 중심으로 $\dfrac{\pi}{3}$ 만큼 회전이동시키는 일차변환을 g라 하자.

합성변환 h를 $h=f\circ g\circ f$라 할 때, 합성변환 h^{2011}에 의하여 점 $(2,\ 2)$가 옮겨지는 점은 $(a,\ b)$이다. 이때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, $h^1=h,\ h^{n+1}=h^n\circ h$이다.)

(2011 전국연합)

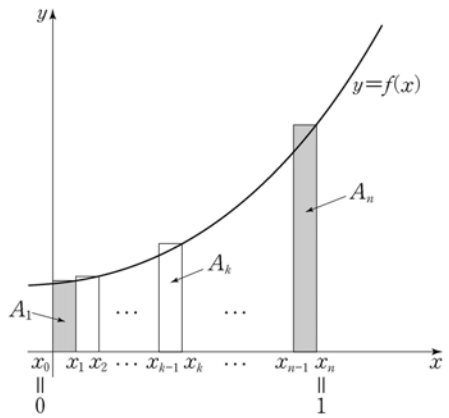
2. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 있다.
2 이상인 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 1]$을 n등분한 각 분점 (양 끝점도 포함)을 차례대로 $0=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=1$이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

(2010 평가원)

보 기
ㄱ. $n=2m$ (m은 자연수)이면 $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f(x_{2k})}{m}\le\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}$ 이다.
ㄴ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left\{\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\right\}=\int_0^1 f(x)dx$
ㄷ. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}\le\int_0^1 f(x)dx\le\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{n}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

3. 함수 $f(x)=x^2+ax+b$ $(a \ge 0,\ b>0)$가 있다. 그림과 같이 2이상인 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 1]$을 n 등분한 각 분점 (양 끝점도 포함)을 차례로
$0=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=1$이라 하자. 닫힌구간 $[x_{k-1},\ x_k]$를 밑변으로 하고 높이가 $f(x_k)$인 직사각형의 넓이를 A_k라 하자. $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$



양 끝에 있는 두 직사각형의 넓이의 합이 $A_1+A_n=\dfrac{7n^2+1}{n^3}$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n}A_k$의 값을 구하시오.

(2010 대수능)

읽기자료

1. 선형독립과 선형종속[30)]

평면의 모든 벡터는 $\vec{i}$와 $\vec{j}$의 선형결합으로 표현된다. 또한 공간의 모든 벡터는 $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$의 선형결합으로 표현된다. 한편, 평면에서 $\vec{i}$는 $\vec{j}$의 실수배로 표현될 수 없고 $\vec{j}$ 또한 $\vec{i}$의 실수배로 표현될 수 없다. 삼차원 공간에서도 마찬가지로 $\vec{i}$는 $\vec{j}$와 $\vec{k}$의 선형결합으로 나타내어질 수 없음을 다음과 같이 보일 수 있다.

$\vec{i}=c_1\vec{j}+c_2\vec{k}$인 c_1, c_2가 존재한다고 하자. 그러면 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\c_1\\c_2\end{pmatrix}$이고 $1=0$이 되어 모순이 유도된다. 따라서 $\vec{i}$는 $\vec{j}$와 $\vec{k}$의 선형결합으로 나타내어질 수 없다. 같은 방법으로 $\vec{j}$는 $\vec{i}$와 $\vec{k}$의 선형결합으로 나타내어질 수 없으며 $\vec{k}$는 $\vec{i}$와 $\vec{j}$의 선형결합으로 나타내어질 수 없다.

결론적으로 평면의 모든 벡터는 $\vec{i}$와 $\vec{j}$의 선형결합으로 표현될 수 있으며, 집합 $\{\vec{i}, \vec{j}\}$는 그러한 집합 중 최소이다. 마찬가지로 삼차원 공간의 모든 벡터는 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$의 선형결합으로 표현될 수 있으며, 집합 $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$는 그러한 집합 중 최소이다. 여기서 최소집합이란 주어진 성질을 여전히 만족하는 진부분집합을 갖지 않는 집합을 의미한다.

그렇다면 다음과 같은 질문을 할 수 있다. 평면의 모든 벡터가 그 원소들의 선형결합으로 표현될 수 있는 최소집합이 집합 $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ 외에 또 존재할까? 또한 삼차원 공간의 모든 벡터가 그 원소들의 선형결합으로 표현될 수 있는 최소집합이 집합 $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ 외에 또 존재할까?

질문에 답하기 위하여 크기가 같은 벡터 $\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_n}$중 어떤 벡터가 다른 벡터들의 선형결합으로 나타내어진다는 것에 알아보자. 예를 들어, 벡터 $\overrightarrow{v_1}$이 다른 벡터들의 선형결합이라고 하자. 즉, $\overrightarrow{v_1}=c_2\overrightarrow{v_2}+\cdots+c_n\overrightarrow{v_n}$인 어떤 실수 $c_2, \cdots, c_n$이 존재한다고 하자. 그러면 $\overrightarrow{v_1}-c_2\overrightarrow{v_2}-\cdots-c_n\overrightarrow{v_n}=\vec{0}$가 성립한다. $\overrightarrow{v_i}$가 다른 벡터의 선형결합인 경우에도 $\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_n}$의 자명하지 않은 선형결합이 영벡터와 같아짐을 쉽게 알 수 있다. 이렇게 벡터 $\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_n}$에 대하여 영벡터와 같아지는 $\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_n}$의 자명하지 않은 선형결합이 존재하면 $\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_n}$은 선형종속이라고 한다. 그렇지 않은 경우, 즉, $c_1\overrightarrow{v_1}+\cdots+c_n\overrightarrow{v_n}=\vec{0}$인 경우 반드시 $c_1=\cdots=c_n=0$이면 $\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_n}$은 선형독립이라고 한다.

30) David Pole, 선형대수학, 경문사, 2011

2. Alternating Series Test[31)]

급수에서 이웃하는 두 항의 부호가 항상 반대이면 교대급수(alternating series)라고 한다. 교대급수의 일반항은 양의 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(-1)^{n-1}a_n \text{ 또는 } (-1)^n a_n$$

다음과 같이 홀수 항까지의 부분합 T_n과 짝수 항까지의 부분합 U_n을 정의하자.

$$T_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-2} - a_{2n-1} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1})$$

$$U_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

$T_n - U_n = a_{2n} \geq 0$이므로 $U_n \leq T_n$이고 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \geq a_{n+1}$이면 $\{T_n\}$은 감소수열, $\{U_n\}$은 증가수열이다.

$U_1 \leq U_2 \leq \cdots \leq U_n \leq T_n \leq \cdots \leq T_2 \leq T_1$이므로 $\{T_n\}$은 아래로 유계, $\{U_n\}$은 위로 유계이다.

단조수열 정리에 의하여 $\{T_n\}$, $\{U_n\}$은 각각 수렴한다. $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$; $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = U$라고 하면 $\lim\limits_{n\to\infty}(T_n - U_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}$이다. 따라서 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$이면 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \lim\limits_{n\to\infty} U_n$이고 다음 결과가 성립한다.

교대급수 판정법

양의 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$이고 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \geq a_{n+1}$이면 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$은 수렴한다.

31) James Stewart, CALCULUS, 청문각, 2009

예시답안

풀어보기

1. 일차변환 f, g를 나타내는 행렬을 각각 A, B라 하면

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

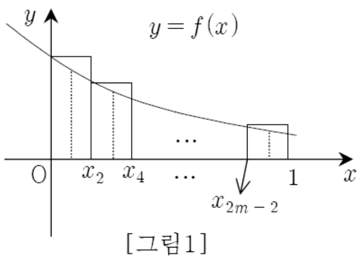
합성변환 h를 나타내는 행렬을 C라 하면

$$C=ABA=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\ C^6=E\text{이므로}$$

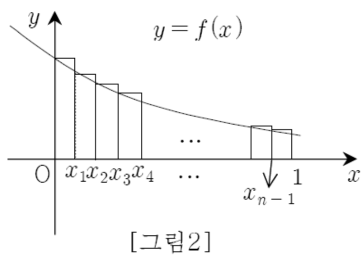
$$\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=C^{2011}\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\sqrt{3}\\ 1-\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

따라서 $a^2+b^2=8$

2. ㄱ. (반례)



[그림1]



[그림2]

$x_{2k+2}-x_{2k}=\dfrac{2}{2m}=\dfrac{1}{m}$ 이므로 $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f(x_{2k})}{m}$ 은 [그림1]의 직사각형들의 넓이의 합을 나타낸다.

$x_{k+1}-x_k=\dfrac{1}{n}$ 이므로 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}$ 은 [그림2]의 직사각형들의 넓이의 합을 나타낸다.

따라서 $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f(x_{2k})}{m}>\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}$ 이다. (거짓)

ㄴ. $x_k=\dfrac{k}{n}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left\{\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\right\}=\frac{1}{2}\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_{k-1})\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\frac{1}{n}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 f(x)\,dx\right\}=\int_0^1 f(x)\,dx \text{ (참)}$$

ㄷ. (반례) ㄱ의 [그림2]에서 $\int_0^1 f(x)\,dx$ 는 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=0,\ x=1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이이고, $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}$ 은 직사각형들의 넓이의 합을 나타내므로 $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n} > \int_0^1 f(x)\,dx$ (거짓)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄴ이다.

3. $x_k=\frac{k}{n}$ 이므로 $A_k=\frac{1}{n}\cdot f(x_k)=\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

$$A_1+A_n=\frac{1}{n}\{f(x_1)+f(x_n)\}=\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{a}{n}+b+1+a+b\right\}$$

$$=\frac{1}{n^3}\{1+an+(1+a+2b)n^2\}=\frac{7n^2+1}{n^3} \text{ 에서}$$

$$a=0,\ 1+a+2b=7 \qquad \therefore\ a=0,\ b=3 \qquad \therefore\ f(x)=x^2+3$$

따라서 $A_k=\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2+3\right\}$ 이므로

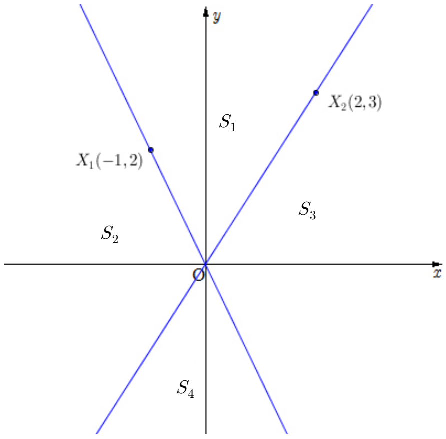
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n}A_k=8\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2+3\right\}$$

$$=8\int_0^1 x(x^2+3)dx=8\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1=8\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)=14$$

논술 1

(논제1)

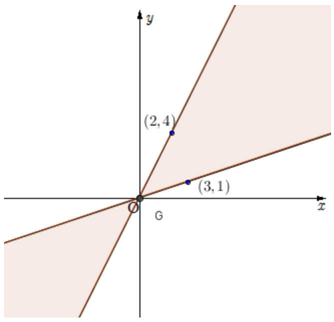
원점을 O 라고 하면 (p,q)는 직선 OX_1, 직선 OX_2 를 새로운 좌표축으로 하는 영역의 좌표이다. 따라서 S_1, S_2, S_3, S_4 의 영역은 아래 그림과 같다. 이때, 각 좌표축의 단위길이는 $\overline{OX_1}, \overline{OX_2}$ 이다.



(논제2)

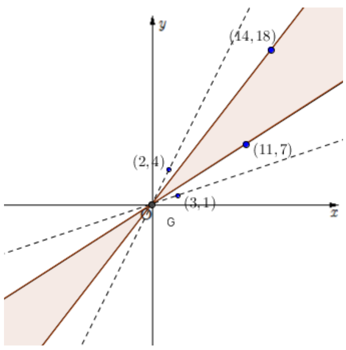
(1) (i) $f_A[S]=AS$ 이므로 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ 이다.

$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$이고, $xy \geq 0$ 이므로 좌표평면은 아래 그림과 같다.



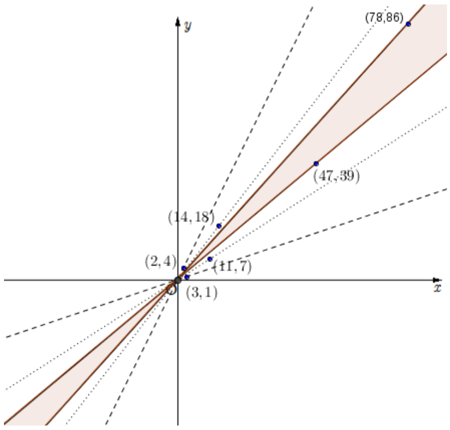
(ii) $f_A^2[S]=A^2S$ 이므로 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ 이다.

따라서 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 14 \\ 18 \end{pmatrix}$이고, $xy \geq 0$ 이므로 좌표평면은 아래 그림과 같다.



(iii) $f_A^3[S]=A^3S$ 이고 $A^3=\begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}$ 이다.

따라서 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 47 \\ 39 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 78 \\ 86 \end{pmatrix}$이고, $xy \geq 0$ 이므로 좌표평면은 아래 그림과 같다.



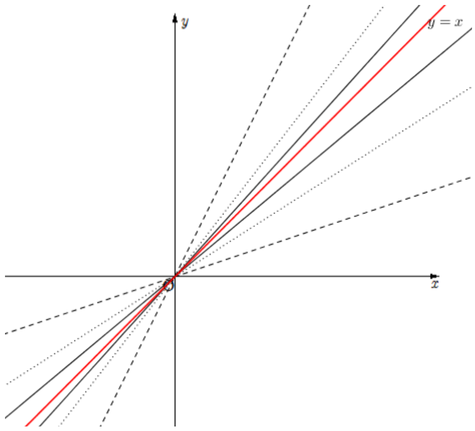
(2) $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$이라 하자.

원점과 $(3,1)$, $(2,4)$을 연결하는 좌표축이 거듭제곱을 하면서 평행사변형의 나머지 꼭짓점인 $(5,5)$와 원점을 연결한 직선(기울기가 1)에 점점 가까워진다. 즉

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = p$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} d_n = q$ 이므로

$$\begin{pmatrix} p & q \\ p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3p+q & 2p+4q \\ 3p+q & 2p+4q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

이다. 다시 $Y=X$ 가 된다. 따라서 $y=x$ 를 항상 포함하고 있다. 즉 $\alpha=1$이다.



(다른 풀이)

$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix}$이라 하자. 만약 $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{c_n} = p$이라면 [논제1]과 [논제2-1]에 의해 모든 자연수 k에 대하여, $f_A^k[S]$가 직선 $y=px$를 포함하고 있다는 것을 알 수 있다.

$f_A^n\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix}$이라고 두면

$$f_A^{n+1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\left(a_n\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + b_n\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) + y\left(c_n\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + d_n\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = x\begin{pmatrix} 3a_n + 2b_n \\ a_n + 4b_n \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3c_n + 2d_n \\ c_n + 4d_n \end{pmatrix}$$

그러므로

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + 4b_n \end{cases}, \quad \begin{cases} c_{n+1} = 3c_n + 2d_n \\ d_{n+1} = c_n + 4d_n \end{cases}$$

한편 $a_1 = 3,\ b_1 = 1,\ c_1 = 2,\ d_1 = 4$ 이고 $a_{n+1} - b_{n+1} = 2(a_n - b_n)$, $a_1 - b_1 = 2$이므로 $a_n - b_n = 2^n$

또한 $2a_{n+1} - b_{n+1} = 5a_n$, $a_{n+1} + 2^{n+1} = 5a_n$, $a_{n+1} - \frac{2}{3}\cdot 2^{n+1} = 5\left(a_n - \frac{2}{3}\cdot 2^n\right)$,

$a_1 - \frac{2}{3}\cdot 2 = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$이다.

따라서 $a_n - \frac{2}{3}\cdot 2^n = \frac{5}{3}\cdot 5^{n-1} = \frac{5^n}{3}$, $a_n = \frac{2^{n+1} + 5^n}{3}$, $b_n = \frac{-2^n + 5^n}{3}$이다.

마찬가지로 $c_n - d_n = -2^n$, $c_n = \frac{-2^{n+1} + 2\cdot 5^n}{3}$, $d_n = \frac{2^n + 2\cdot 5^n}{3}$이다.

그러므로 $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{c_n}$이다.

따라서 모든 자연수 k에 대하여, $f_A^k[S]$는 직선 $y = x$를 포함하고 있다. 그러므로 $\alpha = 1$이다.

논술 2

(논제1)

수학적 귀납법으로 증명한다.

$n = 1$ 일 때, (좌변)$= \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$, (우변)$= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ 이므로 성립한다.

자연수 n 에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)2k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ 이 성립한다고 하자.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)2k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)2k} + \frac{1}{(2n+1)2(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{(2n+1)2(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+1)+2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)+(n-1)} + \frac{1}{(n+1)+n} + \left\{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)}\right\}$$

$$= \frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+1)+2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)+n} + \frac{1}{(n+1)+(n+1)} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k}$$

따라서 자연수 n 에 대하여 등식 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)2k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ 이 성립한다.

(논제2)

(논제1)에서 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)2k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)2k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=[\ln(1+x)]_0^1=\ln 2$$

(논제3)

제시문<라>에 의해 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ 이므로 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ 은 수렴한다.

$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ 이라 두면 (논제2)에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)2k}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots=\ln 2=\lim_{n\to\infty}S_{2n}$$

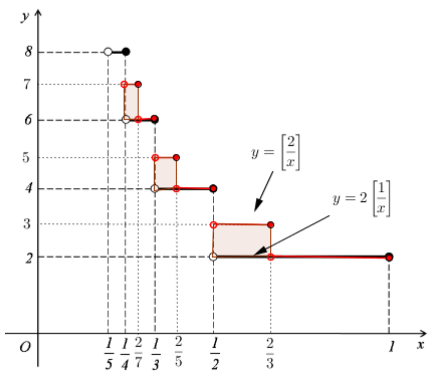
이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=\ln 2$ 이다. 즉,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=\ln 2$$

이다.

(논제4)

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{2n}{k}\right]-2\left[\frac{n}{k}\right]\right)=\int_0^1\left(\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]\right)dx$ 이다. 이것은 $x=0$ 에서 $x=1$ 까지 $y=\left[\frac{2}{x}\right]$ 의 그래프와 $y=2\left[\frac{1}{x}\right]$ 의 그래프의 사이의 넓이를 구하는 것과 같다. 제시문 <마>를 이용하여 그래프를 그리면 아래 그림의 색칠된 부분의 넓이와 같다.



따라서 $\int_0^1\left(\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]\right)dx=\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{4}\right)+\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{6}\right)+\left(\frac{2}{7}-\frac{2}{8}\right)+\cdots$

$$=2\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots\right\}=2\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)=2\ln 2-1$$

이다.

22 한양대학교 수시(오후)

제시문1 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

우리는 자연수의 개수가 유한하지 않으며, 홀수, 짝수의 개수 또한 각각 무한함을 알고 있다. 다음 〔**명제1**〕과 〔**명제2**〕는 자연수 중 특별한 존재인 소수의 개수에 관한 것이다.

$f(x)$를 실수 x보다 크지 않은 소수들의 개수라 정의하자.

〔**명제1**〕 $x \geq 1$ 이면 $\ln x \leq f(x)+1$ 이다.

수열 $\{A_n\}$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$A_n = 2^{2^n}+1,\ n=0,1,2,\dots$$

〔**명제2**〕 $n \neq m$ 이면 A_n 과 A_m 은 서로소이다.

논제 1-1

[명제1]이 참일 때 소수들의 총 개수를 구하시오.

논제 1-2

[명제2]가 참일 때 소수들의 총 개수를 구하시오.

논제 1-3

$A_n-(A_0A_1\cdots A_{n-1})$ 의 값을 구하시오. (단, $n \geq 1$)

논제 1-4

위 3번의 답을 이용하여 [명제2]가 참임을 보이시오.

제 시 문 2 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

좌표공간 $R^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z$는 실수$\}$ 안에 곡선 C가 있다. 이 곡선을 매개변수 t에 관한 함수로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{cases} x = 2\cos t + 6\sin t \\ y = -4\cos t + 3\sin t \\ z = 6 - 5\cos t \end{cases}$$

철수는 이 곡선의 모양을 알아보기 위해 여러 가지 시도를 해보다가 이 곡선의 xy평면 위로의 정사영은 원점을 중심으로 하는 타원이 됨을 알았다. 그래서 철수는 곡선 C가 원일 것이라고 추측하였다.

논제 2-1

곡선 C를 포함하는 어떤 평면 α가 존재함을 보이고, 평면 α의 방정식을 구하시오. (단, 방정식에서 x의 계수가 1이 되도록 한다.)

논제 2-2

철수의 추측이 참임을 설명하고, 이때 원 C의 중심과 반지름을 구하시오.

논제 2-3

제시문에 주어진 타원을 E라 할 때, E의 넓이를 구하시오.

제시문분석

1. 제시문

함수 $f(x)$의 정의를 완벽히 이해하는 것이 중요하다. 예를 들면 10보다 작은 소수는 $2,3,5,7$이므로 $f(10)$은 그것의 개수인 4이다.

2. 제시문

좌표공간에 매개변수로 주어진 곡선의 정보에 관한 내용이다.

논제분석

논제 1-1

소수의 개수는 일반적으로 귀류법을 사용하여 확인할 수 있다. 또는 부등식을 이용하여 보일 수도 있다.

논제 1-3

A_n-2를 합·차로 정리하고 이를 이용하여 귀납적으로 결과를 찾을 수 있다.

논제 1-4

1 이외의 공약수를 갖지 않는 두 수를 서로소라 한다. 따라서 A_n, A_m의 최대공약수를 $d(\geq 1)$라 할 때, $d=1$임을 보이면 된다.

논제 2-1

평면의 방정식의 일반형이 $ax+by+cz=d$임을 이용하여 계수를 구할 수 있다.

논제 2-2

원의 정의에 의해 원 임을 쉽게 확인할 수 있다. 그러나 다양한 방법으로 풀어보는 것도 생각해 보자.

배경지식쌓기

1. 소수의 개수

유클리드는 소수의 개수가 무한히 많다는 것을 다음과 같이 증명하였다.

소수의 개수가 유한하다고 하고 이것을 $p_i\,(i=1,2,3,\cdots,n)$라 하자. 이제 다음과 같은 양수를 생각해 보자.

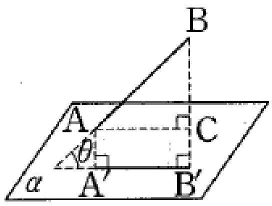
$$P=p_1p_2\cdots p_n+1$$

$P>1$이므로 산술의 기본정리(1 보다 큰 자연수는 인수가 나타나는 순서를 고려하지 않을 때, 소수들의 곱으로 유일하게 표현된다.)에 의해 어떤 소수 p에 의해 나누어 져야 한다. 그런데 $p_i\,(i=1,2,3,\cdots,n)$가 유일한 소수들이므로 p는 이들 중 하나여야 한다. 즉 $p|P$이고 $p\,|p_1p_2\cdots p_n$이므로 $p|P-p_1p_2\cdots p_n$ 즉, $p|1$을 얻는다. 이는 모순이다. 따라서 소수의 개수는 무한하다.

2. 정사영

(1) 정사영의 길이 : 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 $A'B'$이라 하고, 직선 AB가 평면 α와 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$$\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta$$



(2) 정사영의 넓이 : 평면 α 위의 도형 F의 평면 β 위로의 정사영을 F'이라 하고, F, F'의 넓이를 각각 S, S'이라 할 때, α와 β가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$S'=S\cos\theta$$

3. 타원의 넓이

두 정점 $F(c,0), F'(-c,0)$에서의 거리의 합이 일정한 값 $2a(a>c>0)$인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (단, } b^2=a^2-c^2)$$

이고 이때 타원의 넓이는

$$S=\pi ab$$

풀어보기

1. $A_n = 2^{2^n} + 1$ 라 정의할 때, $A_n = A_{n-1}^2 - 2A_{n-1} + 2\ (n \geq 1)$임을 보여라.

2. 좌표공간에서 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

(2012 대수능)

(가) 삼각형 ABC의 넓이는 6 이다. (나) 삼각형 ABC의 yz 평면 위로의 정사영의 넓이는 3 이다.

삼각형 ABC의 평면 $x - 2y + 2z = 1$ 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 구하시오.

3. 좌표공간에 점 $A(9, 0, 5)$가 있고 xy 평면 위에 타원 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 이 있다.

타원 위의 점 P 에 대하여 $\overline{AP}$ 의 최댓값을 구하시오.

(2012 대수능)

읽기자료

1. 페르마 수[32)]

Pierre de Fermat
(1601~1665)

$f_n = 2^{2^n} + 1$ 과 같은 꼴의 수를 프랑스 수학자 페르마의 이름을 따서 '페르마 수'라고 한다. 수학적 직관이 믿을 만 했던 페르마는

$$f_0 = 3\ ,\ f_1 = 5\ ,\ f_2 = 17\ ,\ f_3 = 257\ ,\ f_4 = 65537$$

가 모두 소수임을 관찰하고 자연수 n의 모든 값에 대하여 f_n은 소수라 생각했다. 그는 메르센느에게 편지를 하여 자신의 확신을 알렸다. "나는 $f_n = 2^{2^n} + 1$ 형태의 수들이 항상 소수임을 발견했고, 훨씬 이전에 분석자들에게 이 정리의 진실을 알렸다." 그렇지만 페르마는 증명을 생각해 낼 수 없는 자신의 무능을 한탄하고, 계속되는 편지에서 점증하는 분노의 어조는 그가 계속해서 증명을 시도하고 있었음을 암시한다. 그 문제는 1732년 오일러가 $f_5 = 2^{2^5} + 1 = 4294967297$은 641로 나누어진다고 발견했을 때 부정적으로 해결됐다. 우리에게 그 정도의 수는 매우 커 보이지 않지만, 페르마의 시대에는 소수성 조사는 어려운 과제 중 하나였다.

브르스비크에 있는 가우스 기념비

오늘날 까지도 무수히 많은 페르마 소수가 있는지, 더구나 f_4 보다 큰 페르마 소수가 하나라도 있는지 알지 못한다. 페르마 소수에 대한 관심의 일부분은 자와 컴퍼스만으로 작도될 수 있는 모든 정다각형을 결정하는 고대의 문제와 주목할 만한 관련을 갖고 있다는 발견에 기인한다. 가우스는 정17각형도 자와 컴퍼스로 작도가능하다는 것을 발견하였고, 자신의 발견이 너무도 자랑스러워 그의 묘비에 17개의 변을 갖는 정다각형이 새겨지길 요구했다. 어떤 이유에서인지 그의 소망은 실현되지 못했지만 그 정다각형은 그의 출생지 독일 브르스비크에 세워진 가우스 기념비의 측면에 새겨졌다.

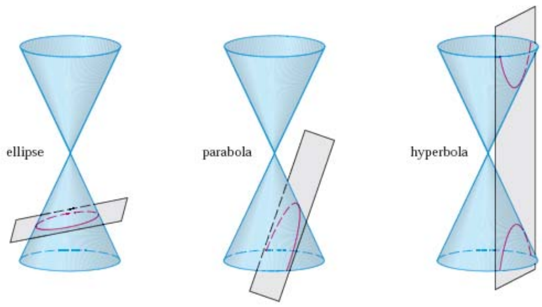
32) 이준복, 이중섭 공역, 기초정수론, 경문사, 2011

2. 이차곡선과 원뿔곡선

모든 이차곡선 $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$ 은 원뿔곡선이다. 왜냐하면 우선 $C=0$ 이면 이 식은

$$A(x-a)^2+B(y-b)^2+F'=0$$

의 꼴로 변형할 수 있다. 여기서 $AB>0$ 이면 이 곡선은 원이나 타원이 되고, $AB<0$ 이면 쌍곡선이 된다. 만일 A 와 B 중 하나가 0이면 포물선이고 둘 다 0이면 직선일 것이다.



이제 $C\neq 0$ 라 하자. 좌표축을 시계 반대방향으로 θ 만큼 회전시킨 새로운 좌표축 X, Y 를 생각하자. 그러면 다음과 같은 관계가 만족한다.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

이 식을 주어진 이차방정식에 대입하면

$$A'X^2+B'Y^2+C'XY+D'X+E'Y+F'=0$$

을 얻는다. 여기서 각 항의 계수는 다음과 같다.

$$A'=A\cos^2\theta+C\sin\theta\cos\theta+B\sin^2\theta,\ B'=A\sin^2\theta-C\sin\theta\cos\theta+B\cos^2\theta$$
$$C'=(B-A)\sin2\theta+C\cos2\theta,\ D'=D\cos\theta+E\sin\theta$$
$$E'=-D\sin\theta+E\cos\theta,\ F'=F$$

여기서 $A=B$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$, $A\neq B$ 일 때는 각 θ 가 관계식 $\tan2\theta=\frac{C}{A-B}$ 를 만족하게 되면 $C'=0$ 이 되어 XY 항이 사라지게 된다.

이제 보다 쉽게 이차곡선을 판별하는 방법을 알아보자. 위 식에서

$$A'+B'=A+B\ ,\ C'^2+(A'-B')^2=C^2+(A-B)^2$$

이고, $C'=0$ 이면 $-4A'B'=C^2-4AB$ 가 되므로

① $A'B'>0$ 즉, $C^2-4AB<0$ 이면 이차곡선은 원이나 타원

② A' 와 B' 중 하나가 0이면 즉, $C^2-4AB=0$ 이면 포물선

③ $A'B'<0$ 즉, $C^2-4AB>0$ 이면 쌍곡선이다.

예시답안

풀어보기

1. $A_{n-1}^2-2A_{n-1}+2=\left(2^{2^{n-1}}+1\right)^2-2\left(2^{2^{n-1}}+1\right)+2=\left(2^{2^n}+2\cdot2^{2^{n-1}}+1\right)-2\cdot2^{2^{n-1}}-2+2$

$$=2^{2^n}+1=A_n$$

2. 삼각형 ABC와 yz평면이 이루는 예각의 크기를 α 라 하면

$$6\cos\alpha=3,\ \cos\alpha=\frac{1}{2} \qquad \therefore\ \alpha=\frac{\pi}{3}$$

평면 $x-2y+2z=1$과 yz평면이 이루는 예각의 크기를 β라 하면, $\overrightarrow{h_1}=(1,\ -2,\ 2)$가 평면 $x-2y+2z=1$의 법선벡터이고 $\overrightarrow{h_2}=(1,\ 0,\ 0)$이 yz평면의 법선벡터이므로 $\overrightarrow{h_1}\cdot\overrightarrow{h_2}=|\overrightarrow{h_1}||\overrightarrow{h_2}|\cos\beta$에서

$$(1,\ -2,\ 2)\cdot(1,\ 0,\ 0)=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}\sqrt{1^2+0^2+0^2}\cos\beta$$

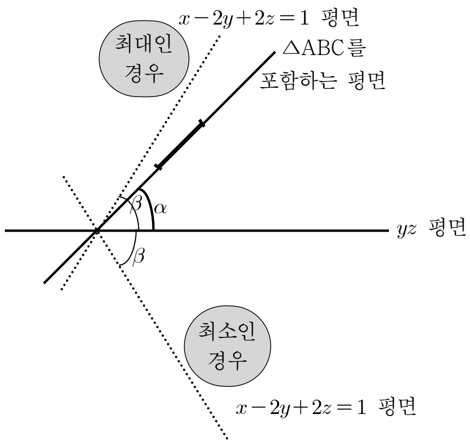
$$1=3\cos\beta,\ \cos\beta=\frac{1}{3}$$

한편, 삼각형 ABC와 평면 $x-2y+2z=1$이 이루는 예각의 크기는 최댓값이 $\beta+\alpha$이고 최솟값이 $\beta-\alpha$이다. 그런데 정사영의 넓이가 최대가 되려면 두 평면이 이루는 예각의 크기가 최소가 되어야 하므로 각의 크기의 최솟값을 θ라 하면

$$\theta=\beta-\alpha=\beta-\frac{\pi}{3}$$

따라서 구하는 정사영의 넓이의 최댓값은

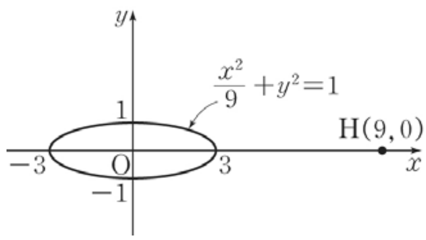
$$6\cos\theta=6\cos\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)=6\left(\cos\beta\cos\frac{\pi}{3}+\sin\beta\sin\frac{\pi}{3}\right)=6\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+2\sqrt{6}$$



3. 타원 위의 점 P의 좌표를 $(a,\ b,\ 0)$이라 하고, 점 A에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\mathrm{H}(9,\ 0,\ 0)$이므로

$$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{\overline{\mathrm{AH}}^2 + \overline{\mathrm{PH}}^2} = \sqrt{5^2 + \overline{\mathrm{PH}}^2}$$

따라서 $\overline{\mathrm{PH}}$가 최대일 때, $\overline{\mathrm{AP}}$도 최대가 된다.



그림에서 점 P의 좌표가 $(-3,\ 0)$일 때, $\overline{\mathrm{PH}}=12$로 최대가 된다.

$$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}} \le \sqrt{5^2+12^2} = 13$$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}$의 최댓값은 13이다.

논제 1-1

소수의 개수가 유한하다고 가정하자. 임의의 실수 x와 어떤 자연수 M에 대해 $f(x) \le M$이다. [명제 1]이 참이므로 $\ln x \le f(x)+1 \le M+1$인데 $x \to \infty$일 때 $\ln x \to \infty$이므로 모순이다. 따라서 소수들의 총 개수는 무수히 많다.

(다른 풀이)

$x \to \infty$일 때 $\ln x - 1 \to \infty$ 이고 $\ln x - 1 \le f(x)$이므로 $f(x) \to \infty$ 이다. 따라서 소수들의 총 개수는 무수히 많다.

논제 1-2

모든 페르마 수는 소수인수를 가진다. 그런데 $n \ne m$일 때 $A_n,\ A_m$은 서로소이므로 $A_n,\ A_m$은 공통된 소수 인수가 없다. 즉, $A_n,\ A_m$은 서로 다른 소수 인수를 가진다. 그런데 페르마 수는 무수히 많으므로 소수도 무수히 많다.

(다른 풀이)

임의의 음이 아닌 정수 m에 대하여 $A_m = 2^{2^m}+1 \ge 2^{2^0}+1 = 3$이다. 소수의 개수가 $p_0,\ p_1,\ \cdots,\ p_{n-1}$으로 유한하다고 가정하자. 그러면 [명제 2]에 의해 n개의 페르마 수 $A_0,\ A_1,\ \cdots,\ A_{n-2},\ A_{n-1}$은 서로소이므로 각각 서로 다른 소수를 약수로 가져야 한다. 따라서

$A_k(0 \le k \le n-1)$가 각각 소수 $p_k(0 \le k \le n-1)$를 약수로 갖는다고 둘 수 있다. 그리고 소수가 $p_0, p_1, \cdots, p_{n-1}$ 뿐이므로 A_n은 $p_k(0 \le k \le n-1)$중의 하나를 약수로 갖는다. 이것은 $n \ne m$일 때 A_n, A_m은 서로소라는 가정에 모순이다. 따라서 소수들의 총 개수는 무수히 많다.

논제 1-3

$A_n - 2 = 2^{2^n} - 1 = (2^{2^{n-1}} - 1)(2^{2^{n-1}} + 1) = A_{n-1}(2^{2^{n-1}} - 1)$이므로

$A_n - 2 = A_{n-1}(2^{2^{n-1}} - 1) = A_{n-1}A_{n-2}(2^{2^{n-2}} - 1) = \cdots = A_{n-1}A_{n-2}\cdots A_1A_0(2^{2^0} - 1)$이고

$A_n - 2 = A_nA_{n-1}\cdots A_1A_0$ 이다.

따라서 $A_n - (A_0A_1\cdots A_{n-2}A_{n-1}) = 2$이다.

논제 1-4

$n > m$일 때 A_n, A_m의 최대공약수를 $d(\ge 1)$라 하자. [논제 Ⅰ-3]에 의해

$A_n - (A_0A_1\cdots A_m\cdots A_{n-2}A_{n-1}) = 2$이고 $A_n - (A_0A_1\cdots A_m\cdots A_{n-2}A_{n-1})$은 d의 배수이므로 2도 d의 배수이다. 따라서 $d=1$ 또는 $d=2$ 이다. 한편 $A_n = 2^{2^n} + 1\,(n = 0,\ 1,\ 2, \cdots)$은 홀수이므로 $d=1$ 이다. 따라서 $n > m$일 때 A_n, A_m은 서로소이다. 같은 방법으로 $n < m$일 때 A_n, A_m은 서로소이다. 그러므로 $n \ne m$일 때 A_n, A_m은 서로소이다.

(다른 풀이)

$n > m$이라 해도 일관성을 잃지 않는다. A_n, A_m의 최대공약수를 d, 즉 $(A_m, A_n) = d$라 하면 $d|A_n$, $d|A_m$이다. ($x|y$는 'x는 y의 약수'라는 뜻이다.) [논제 1-3]에 의해

$A_n - 2 = A_0A_1\cdots A_m\cdots A_{n-2}A_{n-1}$이고 $d|A_m$이므로 $d|A_0A_1\cdots A_m\cdots A_{n-2}A_{n-1}$이다. 따라서 $d|(A_n - 2)$이고 $d|A_n$이므로 $d|2$ 이다. 이것은 $d=1$ 또는 $d=2$ 임을 의미하는데 페르마 수는 모두 홀수이므로 $d=1$이다. 즉, $(A_m, A_n) = 1$이므로 $n \ne m$일 때 A_n, A_m은 서로소이다.

논제 2-1

임의의 실수 t에 대해 $x = 2\cos t + 6\sin t,\ y = -4\cos t + 3\sin t,\ z = 6 - 5\cos t$이면 $ax + by + cz = d$를 만족하는 실수 a, b, c, d가 존재함을 보이자.

각각 대입하여 정리하면 $(2a - 4b - 5c)\cos t + (6a + 3b)\sin t + (6c - d) = 0$이므로

$a = a,\ b = -2a,\ c = 2a,\ d = 12a$이다.

그러므로 구하는 평면 α의 방정식은 $x - 2y + 2z = 12$이다.

논제 2-2

xy평면 위로 곡선 C의 정사영이 원점을 중심으로 한 타원일 때 “곡선 C가 원”이라는 것이 철수의 추측이다. 평면 α와 z축과의 교점 O에서 곡선 C까지의 거리가 일정함을 보이도록 하자. 교점 O의 좌표가 $(0,\ 0,\ 6)$이므로 곡선 C 위의 임의의 점까지의 거리는

$\sqrt{(2\cos t+6\sin t)^2+(-4\cos t+3\sin t)^2+(-5\cos t)^2}$ 이고 정리하면

$\sqrt{45(\cos^2 t+\sin^2 t)}=3\sqrt{5}$ 이다. 따라서 곡선 C는 중심이 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 6)$이고 반지름이 $3\sqrt{5}$ 인 원이다.

논제 2-3

원 C를 포함하는 평면 α와 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ, 원 C의 넓이를 S, 타원 E의 넓이를 S'라고 하자. $S'=S\cos\theta$이고 $S=45\pi$이므로 $S'=45\pi\cos\theta$이다. 평면 α의 법선벡터 $\overrightarrow{u_\alpha}=(1,\ -2,\ 2)$와 xy평면의 법선벡터 $\overrightarrow{u_{xy}}=(0,\ 0,\ 1)$에서 $\cos\theta$는

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{u_\alpha}\cdot\overrightarrow{u_{xy}}}{|\overrightarrow{u_\alpha}||\overrightarrow{u_{xy}}|}=\dfrac{2}{3}$ 이므로 타원 E의 넓이는 $S'=30\pi$이다.

(다른 풀이 1) 매개변수를 소거하여 회전이동을 이용

xy평면 위로의 정사영을 매개변수 t로 표현하면

$$x=2\cos t+6\sin t,\ y=-4\cos t+3\sin t$$

이고

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&6\\-4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\end{pmatrix}=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}3&-6\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

이므로 $\cos^2 t+\sin^2 t=1$에서

$$(3x-6y)^2+(4x+2y)^2=900\Leftrightarrow 5x^2-4xy+8y^2=180$$

이다. $5x^2-4xy+8y^2=180$을 회전변환시켜서 xy항을 없애도록 하자.

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$$

에서 $5x^2-4xy+8y^2=180$에 대입하여 XY항의 계수가 0이 되는 θ를 찾으면

$$5\sin2\theta-8\sin2\theta-4\cos2\theta=0\Rightarrow\tan2\theta=-\frac{4}{8-5}=-\frac{4}{3}$$

이고 $5x^2-4xy+8y^2=180$을 $\tan2\theta=-\dfrac{4}{3}$인 θ로 회전이동하면 $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{45}=1$인 타원이 된다. 그리고 타원의 넓이는 30π이다.

실제, $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 인 2차 곡선은 $\tan 2\theta = \dfrac{b}{c-a}$ 인 θ 로 회전이동하면 xy 항을 없앨 수 있어서 구체적인 2차 곡선의 모양을 알 수 있다.

(다른 풀이 2) 매개변수를 두고 회전이동을 이용

xy 평면 위로의 정사영을 매개변수 t 로 표현하면

$$x=2\cos t+6\sin t,\ y=-4\cos t+3\sin t$$

이다. $X=A\cos t,\ Y=B\sin t$ 으로 나타낼 수 있는 회전이동을 찾아보면

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\cos t+6\sin t \\ -4\cos t+3\sin t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t\{2\cos\theta+4\sin\theta\}+\sin t\{6\cos\theta-3\sin\theta\} \\ \cos t\{2\sin\theta-4\cos\theta\}+\sin t\{6\sin\theta+3\cos\theta\}\end{pmatrix}$$

에서 $6\cos\theta-3\sin\theta=2\sin\theta-4\cos\theta=0$ 이고 $\tan\theta=2$ 이다. θ 로 회전이동하면

$$X=2\sqrt{5}\cos t,\ Y=3\sqrt{5}\sin t$$

이고 타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{45}=1$ 이다. 그리고 타원의 넓이는 30π 이다.

23 항공대학교 모의

제 시 문 다음 제시문을 읽고 답하시오.

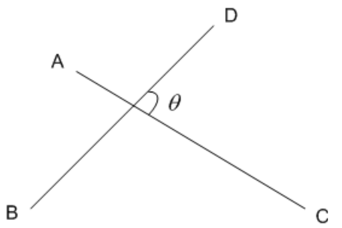
토지 측량을 위해 고대 이집트에서는 기하학에 대해서 많은 연구가 있었다. 이러한 연구는 그리스 수학자들에 의하여 이론적으로 발전되었다. 이들은 ‘정의’와 ‘증명’과 같은 과정을 통하여 평면도형과 관련된 수학 지식을 학문으로 체계화하는 데에 큰 공헌을 하였다. 한편, 평면에서 도형과 관계된 내용 중

(1) 삼각형, 평행사변형, 직사각형, 사다리꼴 같은 평면도형의 면적 공식
(2) 합동인 두 도형의 성질
(3) 닮음인 두 도형의 성질
(4) 평행선과 다른 한 직선이 만날 때 생기는 각의 성질
(5) 삼각함수의 성질
(6) 직각삼각형의 성질
(7) 삼각형의 내심과 외심의 성질

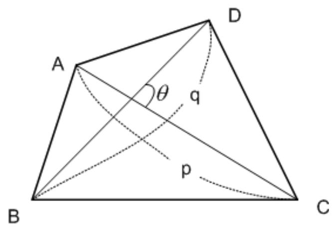
등의 여러 가지 기본 성질을 활용하여 새로운 기학학적 사실을 이끌어 낼 수 있다. 특히, 도형 문제에 보조선을 추가하고 평면 도형의 기본 성질을 활용하면 여러 종류의 문제를 풀 수 있다. 이와 같은 수학적 방법은 실생활의 여러 가지 문제를 합리적으로 해결하는 바탕을 이룬다.

논제 1-1

두 개의 기계장치가 <그림 1>에 간략하게 선분 AC 와 선분 BD 로 주어졌고 그 길이는 각각 p 와 q 이다. <그림 1>과 같이 선분 AC 와 선분 BD 의 교각은 θ 이고, 이 장치들이 정상적으로 작동을 하면 <그림 2>와 같이 사각형 ABCD 를 경계로 하는 내부의 모든 영역을 사용하게 된다. 주어진 여건에 의하여 사각형 ABCD 에 할당된 면적이 $\frac{pq}{4}$ 로 설정되었을 때, 교각 θ 를 다음과 같은 순서로 구하여 보자. 단, 기계 장치의 길이 p 와 q 는 각각 일정하다.



〈그림 1〉



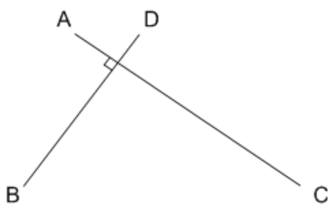
〈그림 2〉

(1) 사각형 ABCD 의 면적 S를 p, q, θ 에 관한 식으로 구하고, 그 과정을 평면도형과 관련된 성질을 이용하여 논리적으로 기술하시오.

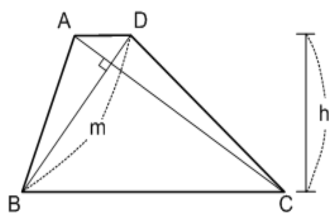
(2) $S=\dfrac{pq}{4}$ 일 때, 교각 θ 를 구하시오. (단, $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$)

논제 1-2

직각으로 교차하는 두 개의 기계장치를 <그림 3>에 선분 AC 와 선분 BD 로 표시하였다. <그림 4>와 같이 선분 AC 와 선분 BD 의 끝점을 직선으로 연결하여 만든 사각형 ABCD 가 사다리꼴이 되었다. 사다리꼴 ABCD 의 높이가 h 이고 대각선 BD의 길이가 m 일 때, 평면도형과 관련된 성질을 이용해 사다리꼴 ABCD 의 면적 R을 m 과 h 에 관한 식으로 구하고, 그 과정을 논리적으로 기술하시오.



〈그림 3〉



〈그림 4〉

제시문분석

1. 제시문

평면도형의 기본 성질을 잘 활용하면 새로운 기하학적 사실을 발견할 수 있으며 실생활의 여러 가지 문제를 합리적으로 해결할 수 있다.

논제분석

논제 1-1

(1) 일반적인 사각형에서 두 대각선의 길이와 끼인각의 크기를 알 때 그 넓이를 구하는 문제이다. 제시문의 내용에 따라 필요한 보조선을 그어 여러 가지 평면도형의 성질을 활용할 필요가 있다.

(2) 일반적인 사각형의 넓이와 두 대각선의 길이가 주어졌을 때, 두 대각선이 이루는 각의 크기를 묻는 문제로 (1)을 활용하여 간단히 계산할 수 있으며 삼각비의 값을 알고 있어야 한다.

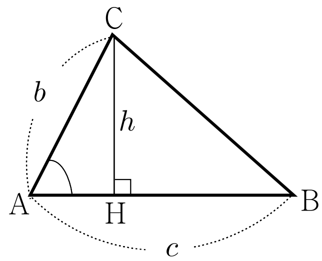
논제 1-2

두 대각선이 직교하는 사다리꼴에서 한 대각선의 길이와 사다리꼴의 높이로 넓이를 나타낼 수 있는가를 묻는 문제이다.

배경지식쌓기

1. 삼각형의 넓이

(1) 두 변과 그 사잇각을 알 때의 넓이

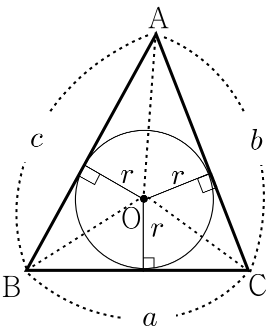


$\triangle$ABC 에서 두 변의 길이 b, c 와 그 사잇각 A 가 주어졌다고 하자. 점 C 에서 변 AB 에 수선 CH 를 내리면, 넓이 S 는

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CH}}=\frac{1}{2}\times c\times b\sin\mathrm{A}$$

이므로, 따라서 $S=\frac{1}{2}bc\sin\mathrm{A}$ 이다.

(2) 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 와 내접원의 반지름 r 이 주어졌을 때 넓이



$$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{OBC}+\triangle\mathrm{OCA}+\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$

(3) 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 와 외접원의 반지름 R 이 주어졌을 때 넓이

사인법칙에 의하면, $\frac{a}{\sin\mathrm{A}}=\frac{b}{\sin\mathrm{B}}=\frac{c}{\sin\mathrm{C}}=2R$ 이다. (1)의 공식을 이용하면,

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\mathrm{A}=\frac{1}{2}bc\frac{a}{2R}=\frac{abc}{4R}$$

이고, 또한 $S=\frac{abc}{4R}=\frac{2R\sin\mathrm{A}\times2R\sin\mathrm{B}\times2R\sin\mathrm{C}}{4R}=2R^2\sin\mathrm{A}\sin\mathrm{B}\sin\mathrm{C}$

이므로, $S=\frac{abc}{4R}$ 이고 $S=2R^2\sin\mathrm{A}\sin\mathrm{B}\sin\mathrm{C}$ 이다.

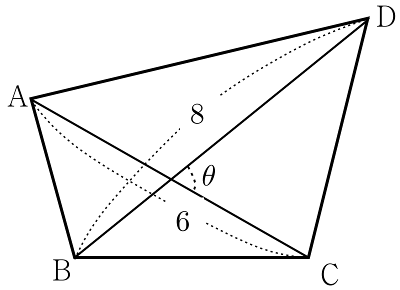
2. 헤론(Heron)의 공식

삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 를 알면 그 넓이를 구할 수 있다.

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\quad(\text{단, } 2s=a+b+c\text{이다.})$$

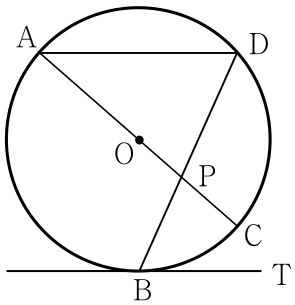
풀어보기

1. 두 대각선의 길이가 각각 8, 6 이고 두 대각선이 이루는 각의 크기가 θ 인 사각형 ABCD 에서 $\cos\theta=\frac{1}{3}$ 일 때, 사각형 ABCD 의 넓이는?



① $10\sqrt{2}$ ② $12\sqrt{2}$ ③ $14\sqrt{2}$
④ $16\sqrt{2}$ ⑤ $18\sqrt{2}$

2. 지름이 $\overline{AC}$ 인 원 O 위의 한 점 B 에서 접선을 그리고 $\overline{AD}//\overline{BT}$, $\angle CBT=\alpha$ 라 할 때, $\angle APD$ 의 크기를 α 로 나타내시오.[33)]



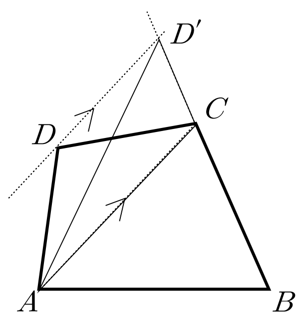
33) 이상원, 기하영역에 제시된 보조선에 관한 연구

읽기자료

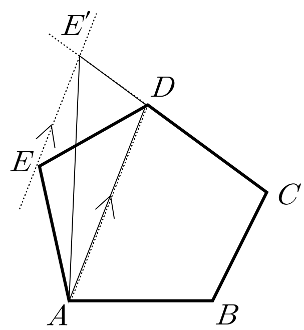
넓이의 보존성과 등적변형[34]

넓이는 그에 대응하는 도형을 변형, 분할, 이동하더라도 그 크기가 변하지 않는 성질을 지니고 있다. 이는 넓이의 측정이나 계산의 기초가 되는 중요한 성질이다.

등적변형이란 도형의 넓이는 변화시키지 않고 그 모양만 바꾸는 것을 뜻한다. 일반적으로 볼록n각형은 삼각형의 구적 공식의 의미에 바탕을 두고 $(n-1)$각형으로 등적변형이 가능하다. 따라서 이와 같은 조작을 $(n-3)$회 수행함에 따라 어떤 볼록n각형도 삼각형으로 변형할 수 있다. <그림 1>와 <그림 2>은 각각 사각형에서 삼각형으로의 등적변형과 오각형에서 사각형으로의 등적변형을 보여주고 있다. 또 삼각형은 직사각형으로 직사각형은 모두 정사각형으로 등적변형할 수 있으므로 임의의 다각형은 등적인 정사각형화가 항상 가능한 셈이다.



〈그림 1〉



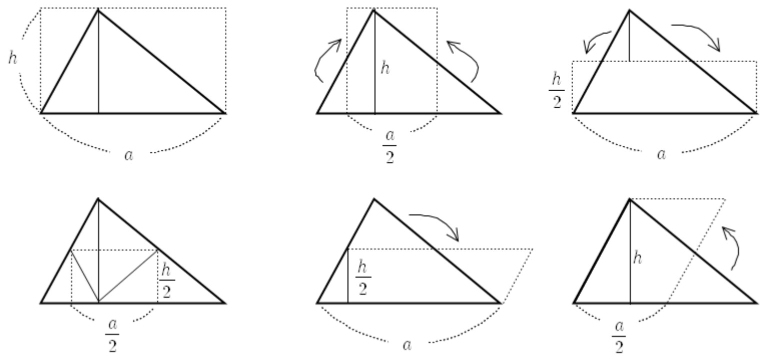
〈그림 2〉

정사각형과 직사각형은 단위 정사각형으로 덮어 그 개수를 세어 봄으로써 넓이를 구할 수 있고 평행사변형은 평행사변형의 구성요소의 길이가 도형에 남아 있도록 직사각형으로 등적변형하여 ‘평행사변형의 넓이=밑변의 길이×높이’라는 공식을 얻을 수 있다.

일반적인 삼각형에서는 단위정사각형을 꼭 맞게 채워서 넓이를 구할 수 없기 때문에 평행사변형의 경우로부터 유추하여 넓이를 구할 수 있는 다른 도형으로 등적변형하여 그 넓이를 구할 수 있다.

즉, 삼각형의 넓이의 2 배가 되는 직사각형, 가로가 밑변의 반이고 세로가 높이와 같은, 또는 가로가 밑변과 같고 세로가 높이의 반이 되는, 또는 가로와 세로가 각각 밑변과 높이의 반이 되는 직사각형, 밑변이 같고 높이가 반이 되는, 또는 밑변이 반이 되고 높이가 같은 평행사변형 등으로 등적변형하고 이를 이용하여 넓이를 구하면 된다(<그림 3>).

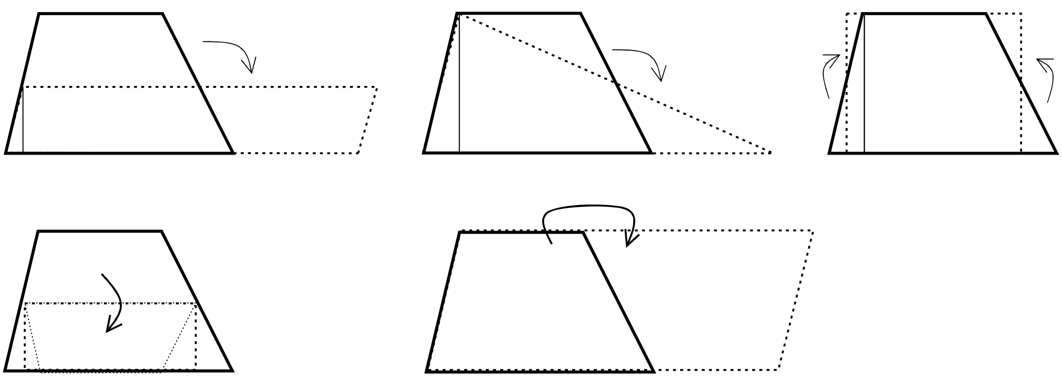
34) 정경순, 삼각형과 사각형 넓이공식의 관계적 이해 실태 조사 및 지도 방안 연구, 2010



〈그림 3〉

이에 따라, '삼각형의 넓이=밑변×높이÷2'라는 효율적인 공식을 얻을 수 있다.

사다리꼴에 있어서도 <그림 4>과 같은 등적변형들을 생각할 수 있으며 이로 인해, '사다리꼴의 넓이=(윗변의 길이+아랫변의 길이)÷2'라는 공식을 얻게 된다.



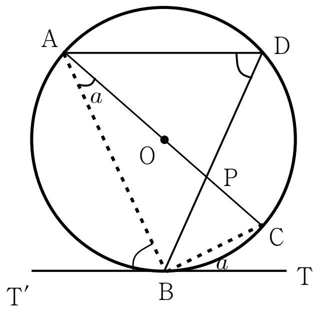
〈그림 4〉

예시답안

풀어보기

1. $$S=\frac{1}{2}\times8\times6\times\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{2}\times8\times6\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=16\sqrt{2}$$

2.



$\triangle$ ABP 에서 $\angle APD=\angle BAP+\angle ABP$ 이고 $\angle BAP=a$ ($\because$ $\overline{BT}$는 접선),

$\overline{BC}$ 는 현이므로 $\angle BAP=\angle CBT=a$

$\angle ABT'=\angle ACB=\angle ADB=\angle DBT(\because \overleftrightarrow{AD}\,//\,\overleftrightarrow{BT})=\angle DAB$ ($\because$ $\overleftrightarrow{BT}$: 접선, $\overline{BD}$: 현)

또, $\overline{AC}$ 가 지름이므로

$$\angle ABT'=180^\circ-(90^\circ+a)=90^\circ-a$$

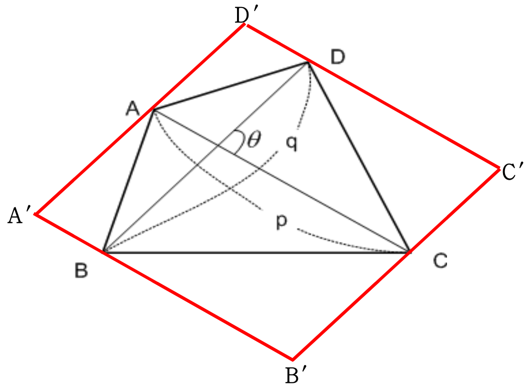
$$\angle ABP=180^\circ-(\angle ABT'+\angle DBT)=180^\circ-2\times(90^\circ-a)=2a$$

$$\therefore\ \angle ABP=2a$$

따라서, $\angle APD=a+2a=3a$

논제 1-1

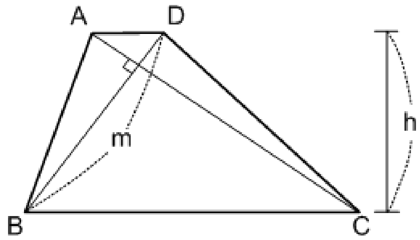
(1) 점 A를 지나고 대각선 BD와 평행한 직선을 긋고, 점 C를 지나고 대각선 BD와 평행한 직선을 긋는다. 마찬가지로, 점 B와 D를 지나고 대각선 AC와 평행한 직선을 각각 긋는다. 네 직선의 교점을 그림과 같이 A′, B′, C′, D′ 라고 했을 때 사각형 A′B′C′D′ 는 평행사변형이 되고 그 넓이는 사각형 ABCD의 넓이의 두 배가 된다.
또, 두 대각선의 교점을 O 라 하면, 평행사변형 AA′BO 에서 마주보는 두 내각의 크기가 같으므로 $\angle AA'B=\angle AOB$ 임을 알 수 있다. 따라서, 사각형 A′B′C′D′ 에서 $\overline{A'D'}$ 와 $\overline{A'B'}$ 가 이루는 각의 크기는 θ 이고 다음과 같은 식이 성립한다.

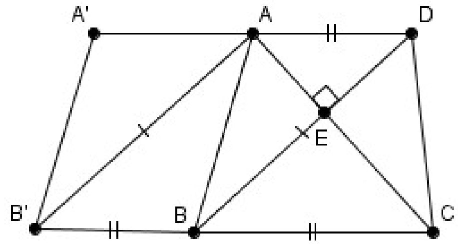


$$S = \frac{1}{2} \times (\text{사각형 A}'\text{B}'\text{C}'\text{D}'\text{의 넓이}) = \frac{1}{2} pq\sin\theta$$

(2) $\frac{pq}{4} = \frac{1}{2} pq\sin\theta$ 이고 $\sin\theta = \frac{1}{2}$, $\therefore \theta = 30^\circ$

논제 1-2





$\triangle$ABD 를 점 D 가 점 A 에 오도록 평행이동 시킨다.

그러면, $\angle \text{CAB}' = 90^\circ$ ($\because \overline{\text{AB}'} \,//\, \overline{\text{DB}}$) 이다. 따라서,

$$\sqrt{(\overline{\text{B}'\text{B}} + \overline{\text{BC}})^2 - m^2} = \sqrt{(\overline{\text{AD}} + \overline{\text{BC}})^2 - m^2} = \overline{\text{AC}}$$

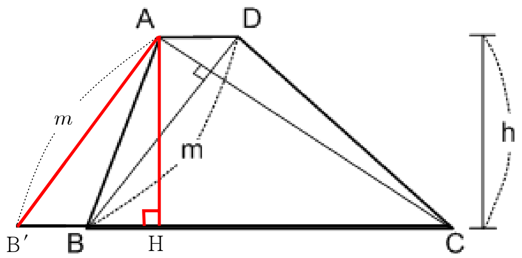
이다. 사다리꼴의 넓이 $R = (\overline{\text{AD}} + \overline{\text{BC}}) \times \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \sin 90^\circ \times m \times \overline{\text{AC}} = \frac{m}{2} \times \overline{\text{AC}}$ 이다.

여기서 $(\overline{\text{AD}} + \overline{\text{BC}}) = \frac{2R}{h}$ 이고 $R = \frac{m}{2} \times \sqrt{(\overline{\text{AD}} + \overline{\text{BC}})^2 - m^2}$ 이므로

$R = \frac{m}{2} \times \sqrt{\left(\frac{2R}{h}\right)^2 - m^2}$ 이다.

그러므로 $R = \frac{m^2 h}{2\sqrt{m^2 - h^2}}$ 가 된다.

(다른 풀이)



그림에서 $\triangle \mathrm{AB'H} \backsim \triangle \mathrm{CAH}$이므로

$\overline{\mathrm{AC}} : \overline{\mathrm{B'A}} = \overline{\mathrm{AH}} : \overline{\mathrm{B'A}} \Rightarrow \overline{\mathrm{AC}} : m = h : \sqrt{m^2 - h^2}$이고 $\overline{\mathrm{AC}} = \dfrac{mh}{\sqrt{m^2-h^2}}$이므로

[논제 1-1]에 의해 $R = \dfrac{m^2 h}{2\sqrt{m^2-h^2}}$이다.

발간을 도와주신 분들

기 획

천 정 국	부산광역시교육청	교 육 정 책 국 장
김 영	부산광역시교육청	교 수 학 습 기 획 과 장
변 용 권	부산광역시교육청	교수학습기획과 학력지원담당장학관
문 창 민	부산광역시교육청	교 수 학 습 기 획 과 장 학 사

집필위원(수학나침반 동아리)

강 진 희	만덕고등학교
김 무 진	부산과학고등학교
김 정 수	부산과학고등학교
박 윤 효	부산고등학교
원 태 경	부산일과학고등학교
임 승 윤	부산중앙고등학교
위 성 미	남산고등학교
최 기 원	신정고등학교

검토위원

김 기 현	부산동고등학교
김 보 라	웅상중학교
김 현 미	낙동고등학교
박 재 희	경기과학고등학교
박 철 호	부산백양고등학교
신 동 연	구덕고등학교
오 정 임	부산장안고등학교
이 우 영	만덕고등학교
이 재 식	만덕고등학교
전 현 수	부산국제외국어고등학교
정 순 진	강서고등학교
황 성 미	만덕고등학교

수리논술 나침반 Ⅳ

발 행 일	2012. 5. 21.
편집 · 발행	부산광역시교육청