규 토
라이트
N 제

CONTENTS

규토 라이트 N제 오리엔테이션

문제편

| 이차곡선 |

| 평면벡터 |

| 공간도형과 공간좌표 |

CONTENTS

해설편

오리엔테이션

책소개

개념, 유형, 기출을 한 권으로 Compact하게

규토 라이트 N제는 기출문제와 개념 간의 격차를 최소화하고 1등급으로 도약하기 위한 탄탄한 base를 만들어 주기위해 기획한 교재입니다. 학생들이 처음 개념을 학습한 뒤 막상 기출문제를 풀면 그 방대한 양과 난이도에 압도당하기 쉽습니다. 이를 최소화하기 위해 4단계로 구성하였고 책에 적혀 있는 규토 라이트 N제 100% 공부법으로 꾸준히 학습하다보면 역으로 기출문제를 압도하실 수 있습니다.

Gyu To Math (규토 수학)에서 첫 글자를 따서 총 4단계로 구성하였습니다.

---

1. Guide step (개념 익히기편)

교과서 개념, 실전개념, 예제, 개념 확인문제, '규토의 Tip'을 모두 담았습니다.
단순히 문제만 푸는 것이 아니라 개념도 함께 복습하실 수 있습니다.
교과서에 직접적인 서술이 없더라도 수능에서 자주 출제되는 포인트들을 녹여내려고 노력하였습니다.

---

2. Training – 1 step (필수 유형편)

기출문제를 풀기 전의 Warming up 단계로 수능에서 자주 출제되는 유형들을 분석하여
수능최적화 자작으로 구성하였습니다.
기초적인 문제뿐만 아니라 학생들이 어렵게 느낄 수 있는 문제들도 다수 수록하였습니다.
단시간 내에 최신 빈출 테마들을 Compact하게 정리하실 수 있습니다.

---

3. Training – 2 step (기출 적용편)

사관, 교육청, 수능, 평가원에서 3~4점 문제를 선별하여 구성하였습니다.
필수 유형편에서 배운 내용을 바탕으로 실제 기출문제를 풀어보면서 사고력과 논리력을 증진시킬 수 있습니다.
실제 기출 적용연습을 위하여 유형 순이 아니라 전반적으로 난이도 순으로 배열했습니다.

---

4. Master step (심화 문제편)

사관, 교육청, 수능, 평가원에서 난이도 있는 문제를 선별하여 준킬러 자작문제와 함께 구성하였습니다.
과하게 어려운 킬러문제는 최대한 지양하였고 킬러 또는 준킬러 문제 중에서도
1등급을 목표로 하는 학생이 반드시 정복해야하는 문제들로 구성하였습니다.

교과서 개념유제부터 어려운 기출 4점까지 모두 수록

교과서 개념유제부터 수능에서 킬러로 출제된 문제까지 모두 수록하였습니다.
규토 라이트 N제 기하의 경우 총 581제이고
문제집의 취지에 맞게 중 ~ 중상 난이도 문제들이 제일 많이 분포되어 있습니다.

규토 라이트 N제의 추천 대상

1. 개념강의와 병행할 교재를 찾는 학생
2. 개념을 끝내고 본격적으로 기출문제를 들어가기 전인 학생
3. 해당과목을 compact하게 정리하고 싶은 학생
4. 무엇을 해야할지 갈피를 못잡는 3~4등급 학생
5. 기출문제가 너무 어렵게 느껴지는 학생
6. 아무리 공부해도 수학성적이 잘 오르지 않는 학생

검토후기

문지유 / 울산대학교 의예과

안녕하세요! 울산대학교 의과대학 20학번 재학 중인 문지유입니다. 문제집 검토는 항상 신경이 많이 쓰이고 떨리네요ㅎㅎ
2023 규토 라이트 N제는 고3 학생들 뿐만 아니라 중학생, 고1, 고2 학생들이 선행학습을 할 때에도 활용하기 좋을 것 같아요. 개념 설명이 간단하면서도 명료하고 깔끔하게 되어 있으면서도, 중요한 포인트를 놓치지 않는 꼼꼼한 교재입니다. 개념 공부를 하며 바로바로 이해했는지 확인할 수 있는 예제 문제가 해설과 함께 중간중간 실려 있습니다. 기본 개념을 가지고 풀 수 있는 난이도가 그리 높지 않은 Guide Step 문제부터, 유형별로 개념을 적용하여 풀 수 있는 문제(Traning – 1Step), 단원별 역대 기출들(Training – 2Step), 고난도를 연습할 수 있는 Master Step까지. 개념 공부와 함께 문제풀이를 곁들여 밸런스 있는 공부를 하기 최적화된 문제집이라고 생각합니다.
새해가 밝았습니다. 학년이 바뀌고, 나이도 어느덧 한 살 더 먹은 여러분이 규토 라이트 N제와 함께 새로운 마음으로 산뜻하게 공부하셔서, 이 교재를 풀면서 성장하는 것을 스스로 느꼈으면 좋겠습니다. 뿌듯한 한 해 되세요! 파이팅 :D

조윤환 / 대성여자고등학교 교사

규토 라이트 N제는 개념 설명 + 기출 문제 + 자작 N제로 구성되어 있어 세 마리 토끼를 한 번에 잡을 수 있는 독학서입니다. 특히 수능 대비에 알맞은 컴팩트한 볼륨의 Guide step(개념 익히기편)에서 수능에 자주 출제되는 중요한 개념을 빠르게 훑고 문제 풀이로 넘어갈 수 있습니다. Guide step에서는 실전에서 사용할 수 있는 유용한 테크닉과 학생들이 개념을 공부하면서 궁금할 수 있는 포인트까지 따로 자세하게 설명해주어서 교과서나 시중 개념서에서 해결할 수 없는 의문점까지 해결할 수 있습니다.
기출 문제에 추가로 자작 문제가 포함되어 있어서 트렌디한 평가원 스타일의 문제를 다양하게 풀어볼 수 있다는 것은 규토 라이트 N제 만의 큰 장점이라고 생각합니다. 특히 기하 컨텐츠가 부족할 텐데, 규토 라이트 N제로 많은 도움을 받으면 좋겠습니다.
저자의 TIP이 문제집과 해설집 곳곳에서 여러분들을 도와줄 것입니다. 규토 시리즈 특유의 유쾌한 해설이 무척 상세해서 규토 라이트 N제로 공부하다 보면 친절한 과외선생님이 옆에서 설명해주는 듯한 느낌을 받을 수 있을 것입니다. 특히 책 안에 나와 있는 규토 시리즈의 100% 공부법을 참고하면 수학 공부 방법에 고민이 많은 학생들에게 큰 도움이 될 것이라고 생각합니다.

정지영 / 울산대학교 의예과

안녕하세요, 검토자 정지영입니다. 올해 신입으로 시작해서, 규토 라이트 N제 기하가 새로 출간되는 순간에 함께하게 되어 영광입니다. 이번 라이트 N제 기하 역시 친절한 Guide step, 다양한 난이도의 문항 구성 및 친절한 해설로 무장하고 출간되었습니다. 첫 출시임에도 이전의 공통과목 및 확통, 미적분과 비교해도 밀리지 않을 퀄리티의 책입니다.

벌써 봄은 지나고, 이제 여름과 6평을 앞둔 시기가 왔습니다. 입시의 새로운 시작선이라고도 볼 수 있는 지금, 규토 라이트 N제 기하편은 후회 없는 선택이 될 것입니다. 여름, 이 신록의 계절의 끝에 여러분이 찬란한 성장을 할 수 있기를, 그 과정에 규토 시리즈가 함께할 수 있기를 기원합니다.

김태민 / 울산대학교 의학과

안녕하세요! 울산대학교 의학과 20학번 재학 중인 신입 검토자 김태민입니다. 고등학교 시절부터 재수, 3수, 학원조교 경험까지 무수히 많은 수학문제들을 접해보았지만 문제집 검토는 색다른 경험이네요. 다양한 수학문제들을 경험하면서 얻은 제 경험을 되살려 수험생 여러분에게 도움이 될 수 있도록 꼼꼼히 검토했습니다. 규토 라이트 N제 검토를 하면서 가장 인상 깊었던 점은 교재가 문제부터 해설까지 깔끔하다는 것이었습니다. Guide step(개념 익히기편)에서 수능에 필요한 중요 개념을 소개한 다음 Training-1, 2 step에서 개념을 적용할 수 있는 자작문제와 기출문제들을 접할 수 있고 Master step에서는 킬러문항을 통해 고득점에 가까워질 수 있도록 하는 이 유기적 구성의 완성도가 다른 어떤 N제 문제집과 비교해보더라도 매우 좋은 교재라고 생각합니다. 또한 문제의 핵심을 파악하지 못하는 난잡한 해설이 아니라 학생들이 스스로 어떤 부분에서 막혔는지, 어떤 개념을 사용하지 못하였는지를 쉽게 파악할 수 있도록 깔끔한 흐름 속에서 해설이 쓰여져 있기 때문에 해설편을 잘 활용하여 문제풀이의 논리를 갖춰나간다면 분명히 큰 도움이 될 것이라고 확신합니다. 이 책이 출판될 시점이면 많은 수험생 여러분들이 수능이 점점 다가오면서 긴장감, 부담감을 느끼고 있을 거라고 생각되는데요. 그렇지만 그럴수록 자기 자신을 더욱 믿고 최선을 다해 후회 없는 수험생활을 하셨으면 좋겠습니다. 이 교재를 거쳐 간 모든 수험생 여러분들에게 좋은 결과가 있기를 응원하겠습니다. 감사합니다!

수능 수학의 시작과 마무리, 규토 라이트 N제 (오세욱)

-규토 N제 수1,수2,미적분 풀커리(라이트~고득점)로 수능 미적분 백분위 98% 달성 후기-

저는 현역 때 운 좋게 대학입시에 성공해 인서울 대학에 합격했지만 수능에 미련이 남아있는 학생 중 한명이었습니다. 수학을 잘한다고 생각했고 자부심을 가지고 있었지만 막상 수능에서는 3등급 백분위 78을 받았습니다. 수능 시험장에서 문제를 풀면서 '나는 개념을 놓치고 있고 조건을 해석할 줄 모르는구나'를 깨달았습니다.

그렇게 대학에 진학했다는 생각으로 놀며 2020년을 보냈고 2021년이 되자 이대로 끝내면 후회가 남을 것 같다는 생각에 다시 한번 입시 속으로 뛰어들었습니다. 대학을 병행하며 진행하고 싶었기에 과외나 학원을 다니기에는 시간이 촉박하다고 판단하여 구매하게 된 책이 바로 과외식 해설을 담은 '규토 라이트 N제'입니다.

규토 라이트 N제를 만나게 되면서 앞에 적힌 공부방법에 따라 개념 부분과 개념형 유제부터 자세히 읽고 풀어보며 사소하지만 실전 문제풀이에 도움이 되는 팁을 얻었습니다. 또한 함께 실린 자작문제와 기출문제에 개념을 적용해 풀며 답안지와 내 풀이의 차이점을 비교하였고 잘못되게 풀이한 부분이 있다면 다시 한번 적어보며 틀린문제는 풀이의 길을 외울 정도로 반복해서 풀었습니다. 솔직히 이러한 과정이 빠르고 쉽다 한다면 거짓말입니다. 처음 시작할 때는 막막할 정도로 문제가 벽으로 느껴졌고 모르면 아직도 모르는게 많다는 것에 화가 나기도 했습니다. 하지만 한 문제, 한 단원 넘어갈 때마다 확실하게 개념이 탄탄해지고 새로운 문제를 만나도 개념을 중심으로 풀이가 진행되는 경우가 많아 자신감과 재미를 느끼게 되었습니다. 이렇게 수1, 수2부터 미적분까지 3권을 모두 마무리하고 반복하여 풀이하다 보니 평가원 시험에서 고정적으로 1등급을 받게 되었습니다.

규토 라이트 N제는 이름과 달리 절대 '라이트' 하지만은 않습니다. 선택과목 체재에서 규토 라이트 N제는 시작이며 마무리인 단계입니다. 기출을 이미 많이 접해본 N수나 고3분들 중 컴팩트하고 완전하게 개념과 기출을 정리하고 싶은 분들부터 수능 수학을 처음으로 공부해 개념을 탄탄하게 쌓고 싶은 분들까지 규토 라이트 N제를 자신있게 추천드립니다.
[중요] 만약 책을 구매하게 된다면, 규토 선생님의 방법으로 공부하세요.

추신) 여담으로 타 문제집(쎈)과 규토 라이트N제를 비교하는 글이 많아 두 문제집 모두 풀어본 입장에서 남긴다면 해설의 자세함, 친절도, 수능 수학을 할 때 필요한 문제의 질, 개념의 자세함 모두 규토 라이트 N제가 좋다고 생각합니다. 그리고 N제라는 이름 때문에 그런지 몰라도 두 책의 목적은 완전하게 다른데 비교하는 경우가 많은 것 같습니다. 이 책은 자세한 개념부터 심화문제(30번)까지 모두 다룹니다. 과장없이 미적분2022평가원문제 모두 이 책에 있는 문제를 규토 선생님의 방식으로 다뤘다면 모두 맞출 수 있었다고 생각합니다.

나는 수능에서 처음으로 수학 1등급을 받았다. (이나현)

안녕하세요! 9월 백분위 89에서 수능 백분위 96으로 오르는 데 있어 규토 라이트의 도움을 크게 받아 작성하게 되었습니다. 핵심은 규토라이트를 통해 개념과 기출의 중요성을 깨닫게 되었다는 점입니다. 규토라이트는 1-4등급 모두에게 좋은 책이지만, 저는 특히 2-3등급에 머무르는 학생들에게 추천하고 싶습니다.

백분위 89에서 1등급은 드라마틱한 성적 변화가 아니라고 생각하실 수도 있습니다. 하지만 저는 고등학교와 재수 생활을 통틀어 평가원 모의고사에서 1등급은 맞아본 적도 없고 2등급 후반 ~ 3등급 초반을 진동했습니다. 저는 수학을 일주일에 적어도 40시간 이상 투자했고, 유명한 강의와 문제집을 다양하게 접해봤음에도 1등급을 맞지 못하는 원인을 파악하지 못했었는데요. 9월부터 규토 라이트로 두 달 동안 공부하며 제 약점을 파악했고 결국 수능에서 처음으로 1등급을 맞았습니다. 규토 라이트를 처음 접하게 된 건 9월 모의고사에서 2등급을 간신히 걸친 후였는데요. 저는 1등급을 맞게 된 원인이 크게 두 가지라고 생각합니다.

첫 번째로 규토 라이트의 구성입니다. 기출과 N제 그리고 ebs까지 적절하게 섞인 구성이 너무 좋았습니다. 또한 가이드 스텝을 스킵하지 마시고 꼭 정독하시는 것을 추천드립니다. 규토님의 농축된 팁까지 얻어갈 수 있습니다. 마스터 스텝에서도 배워갈 점이 많으니 겁먹지 말고 몇 번이고 풀어보시는 것을 추천드립니다. 저는 규토 라이트를 접하기 전까진 왜 수학에서 개념과 기출을 강조하는지 이해가 가지 않았습니다. 기출은 지겹기만 했고 개념은 다 아는 것만 같았습니다. 하지만 규토 라이트를 통해 제대로 된 기출 학습과 약점훈련을 할 수 있었습니다.

두 번째는 규토님입니다. 일단 규토님은 등급에 따라 커리큘럼과 학습법을 알려주시는데 이대로만 하면 100점도 가능하다고 생각합니다. 가장 도움되었던 학습법은 복습입니다. 뻔한 것 같지만, 알면서도 꺼려지는 게 복습입니다. 그리고 틀린 문제를 생각 없이 계속 푸는 것이 아니라, 제대로 된 복습 가이드를 정해주셔서 이대로만 하면 된다는 점이 좋았습니다. 저는 비록 9월 중순부터 시작해서 전체적으로는 3회독밖에 못했지만... 설명할 수 있을 때까지 계속 풀고 또 풀었습니다. 또한 이메일로 직접 질문을 받아주시는데요, 질문하는 문제에 따라서 가끔 제게 필요한 보충문제나 영상 덕분에 빠르게 이해할 수 있었습니다. 그리고 똑같은 문제를 계속 틀리거나, 사설 모의고사에서 안 좋은 점수를 받는 등 막막할 때가 많았는데요, 그 때마다 실질적인 말씀을 많이 해주셨습니다. 'theme 안의 문제들은 서로 다른 문제들이지만 이 문제들이 똑같게 느껴질 때 비로소 이해한 것' 이라는 말이 아직도 기억에 남네요. 전 이 말을 듣고 깨달음이 크게 왔고 그 뒤로 수학에 대한 감을 제대로 잡았던 것 같아서 써봅니다. 이외에, 6월 9월 보충프린트도 너무 감사했습니다.

저는 비록 9월 중순부터 규토 라이트를 시작했지만 재수 초기로 돌아간다면 규토 라이트로 시작해서 규토 고득점으로 끝내지 않았을까 싶습니다. 제대로 된 기출 학습을 원하시는 분들은 규토 라이트하세요 !!

9월 수학 3등급에서 수능 수학 1등급으로! (노유정)

규토 라이트 수1, 수2로 학습하여 짧은 기간 동안 9월 3 -> 수능 1의 성적향상을 이루었습니다. 저는 8월에 수시 지원 계획이 바뀌며 급하게 수능 준비를 하게 되었습니다. 수능은 100일 정도 밖에 남지 않았는데 개념은 거의 다 까먹었고, 원래 수학을 못하는 학생이었기 때문에 (1,2 학년 학평은 대부분 3등급) 수학이 가장 걱정되는 과목이었습니다. 그래서 짧은 기간 동안 개념 숙지와 문제 풀이를 할 수 있는 교재를 찾다가 규토 라이트를 접하게 되었습니다.

개념 인강을 들으면서 해당되는 단원의 문제를 하루에 약 60문제 정도 풀어서 10월 말 정도에 규토 1회독을 끝냈습니다. 그 후에는 시간이 부족해서 1회독 후 틀린 문제와 기출 위주로만 반복적으로 보았습니다.

규토라이트는 효율적인 학습을 가능하게 하는 책입니다. 기존의 기출 문제집을 풀 때는 난이도별로 구분이 되어있지 않아 제 수준에 맞지 않는 문제를 풀면서 시간을 낭비했던 적이 많습니다. 그러나 규토 라이트를 통해 공부할 때는 개념 숙지에서 고난도 문제 풀이로 넘어가는 과정이 효율적이었습니다. 특히, 지나치게 어려운 문제도 쉬운 문제도 없기 때문에 실력 향상에 큰 도움이 되었습니다. 가이드에 적혀있는 대로 충분히 고민을 하고, 안 풀릴 경우에는 다음 날 다시 풀거나 2회독 때 풀기로 표시를 해두었습니다. 마스터 스텝을 제외하고는 이렇게 하면 대부분 해결할 수 있었던 것 같습니다.

이러한 교재 특성 때문에 수학을 잘 못하는 학생이었음에도 원하는 성적을 얻을 수 있었습니다. 제 사례와 같이 급하게 수능 준비를 하거나, 스스로 수학머리가 없다고 생각하는 수험생들에게 규토를 추천해주고 싶습니다.

[수2 공부법] 수포자에서 수능 수학 백분위 92%!

규토 라이트 n제 수2 리뷰를 할 수 있어서 정말 영광입니다. 먼저 전 나형 수포자였습니다. 현역시절 맨 앞장에 4문제정도 풀고 운이 좋으면 7~8번까지지도 풀리더라구요. 그리고 주관식 앞에 쉬운 2문제 정도 풀고 다 찍었습니다. 항상 6~7등급 찍은게 몇 개 맞으면 5등급까지 갔습니다. 생각해보면 수학을 제대로 공부해본 적이 없었고 주위에서 수학은 절대 단기간에 할 수 없다. 그냥 그 시간에 영어나 탐구를 더하라는 말에 현역시절 수학을 제대로 집중해서 문제를 푼 적이 없었습니다. 현역시절 제가 받은 성적은 6등급 타과목도 잘치지 못한 탓에 재수를 결정했고 불현듯 수학공부를 해봐야겠다는 생각을 했습니다. 어쩌면 내 일생에 단 한 번뿐인데 수학공부 한 번 해보자라고 마음먹었습니다. 다른 과목보다 수2가 문제였습니다. 확통이나 수1에 비해 분명히 해야 할 부분이 저에게 많았기 때문이었습니다. 2월에 본격적으로 수2과목을 빠르게 개념정리를 했습니다. 수2만은 전년도와 교육과정이 크게 바뀌지 않은 탓에 빠르게 개념인강과 교과서로 정독했습니다. 아주 쉬운 기초부터 시작한 셈이죠. 교과서와 개념인강을 3회독정도 해보니 아주 쉬운 유형들은 풀 수 있게 되었습니다. (이를테면 함수의 극한에서 그래프를 주고 좌극한과 우극한의 합차 유형이나 간단한 미분 적분 계산문제 함수의 극한꼴 정적분의 활용 중 속도 가속도문제등) 교과서 유제에도 그리고 평가원 기출에도 매번 나오는 유형들은 교과서만으로도 풀 수 있었습니다. 하지만 처음 보는 낯선 유형과 함수의 추론등 기초가 부족한 저에게 이런 문제들은 거대한 벽과 다름없었습니다. 과연 1년 안에 내가 이런 문제를 극복가능한 것일까.교과서와 개념인강만으로는 해결할 수 없었습니다. 충분히 고민한 뒤에 제가 내린 결론은 문제의 양을 늘려야한다는 것이었습니다. 소위 수포자는 당연하게도 수학경험치가 현저히 낮습니다. 특히 함수 나오고 그래프 나오면 정말 무너지기 쉽죠. 그렇다고 1년도 안 남은 시점에서 중학수학과 고1수학을 체계적으로 본다는 것은 너무 어려운 일입니다. 1년안에 승부를 봐야하는 제 입장에선 현명한 선택이 아니었습니다. 그러다 우연히 커뮤니티에서 규토라이트n제를 알게 됬고 많은 리뷰와 블로그 내용을 꼼꼼히 보고 선택하기로 결정했습니다. 제가 규토 라이트 수2 n제를 택했던 근본적 이유는 충분한 문제양과 더불어 제 기본기를 탄탄하게 보완시켜줄 문제들이 다수 실려있었기 때문입니다.

개념익히기와 〈1 step〉 필수유형편에서 기초적인 문제와 더불어 조금 심화된 문제까지 정말 질 좋은 문제들을 많이 풀었습니다. 양과 질을 동시에 확보한 셈이죠. 수능은 이차함수나 일차함수등 중학수학을 대놓고 물어보진 않습니다. 문제에서 가볍게 쓰이는 정도이죠. 수2를 공부하시면 많은 다항함수를 접하시게 될텐데 라이트n제 필수유형편으로 충분히 커버됩니다.

다음으로는 제가 가장 애정했던 〈2 step〉 기출적용편입니다. 시중에는 정말 많은 기출문제집이 있지만 규토n제 수2만이 갖는 특별함은 바로 최신경향을 반영한 교육청 사관학교 평가원 기출들만으로 공부할 수있다는 점입니다. 일부 기출문제집은 최근 트렌드에 맞지않는 문제들도 있고 또한 교육과정이 변했음에도 이전 교육과정의 문제들도 있는 반면 라이트n제 수2는 규토님의 꼼꼼한 안목으로 꼭 필요한 기출만을 선별했고 따로 다른 기출을 살 필요없이 실린 문제들만 잘 소화해도 기출을 잘 풀었다는 느낌을 받을 수 있을 겁니다. 저도 성적향상에 가장 도움이 됬던 step이었습니다. 하지만 이 단계부턴 문제가 어렵습니다. 특히나 수포자나 수학이 약하시분들은 정말 힘들 수 있습니다. 하지만 저는 포기하지 않고 끝까지 풀었습니다. 심지어 위에 빈칸에 체크가 7개가 되는 문제도 있었습니다. 시간차를 두고 보고 또봤습니다. 서두에서 규토님께서 제시한 수학 학습법에 의거해 복습날짜도 정확히 지키며 공부했습니다. 수학이 어려운 학생부터 조금 부족한 학생까지 〈2 step〉만큼은 꼭 공을 들여서라도 여러 번 회독하셨으면 좋겠습니다. 수능은 어찌 보면 기출의 진화라고 할 만큼 기출에서 크게 벗어나지 않습니다. 꼭 여러 번 회독하셔서 시험장에서 비슷한 유형은 빠른 시간 안에 처리하실 수 있을 만큼 두고두고 보셨으면 좋겠습니다. 〈2 step〉를 잘소화했더니 6월과 9월을 응시했을때 어?! 이거 규토라이트 n제 수2에서 풀었던 느낌을 다수문제에서 받았습니다. (다항함수에서의 실근의 개수 정적분의 넓이 미분계수의 정의등 단골로 나오는 유형이있습니다.) 역시나 기출의 반복이었습니다. 규토라이트 n제 수2를 통해 최신 트렌드 경향에 맞는 유형을 여러 문제를 통해 접하다 보니 정말 신기하게 풀렸고 어렵지 않게 풀 수 있었습니다. 규토 라이트n제는 해설이 정말 좋습니다. 제가 기본기가 부족했던 시기에도 규토해설만큼은 이해될 만큼 자세히 해설되어있고 현장에서 사용할 수 있을만큼 완벽한 해설지라고 생각합니다. 제 풀이와 규토님 풀이를 비교해보면서 좀 더 현실적인 풀이를 찾는 과정에서 제 실력도 많이 향상되었습니다.

추천사

마지막 마스터 스텝은 굉장한 난이도의 기출과 규토님의 자작문제들이 실려있습니다. 제가 굉장히 고생한 스텝이었고 실제로 수능 전날까지 정말 안되는 문제들도 몇 개 있었습니다. 1등급을 원하시는 분들은 꼭 넘어야할 산이라고 생각합니다. 1등급이 목표가 아니더라도 마스터 스텝에 문제는 꼭 풀어보실만한 가치가 있습니다. 문제가 풀리지 않더라도 그 속에서 수학적 사고력이 향상되는 경우가 있고 저도 올해 수능 20번을 맞출만큼 실력이 올라온 것도 마스터스텝 문제를 여러 번 심도 있게 고민해본 결과가 아닐까 싶습니다. 시간이 조금만 남았더라면 30번도 풀 수 있을 만큼 제 수학실력이 많이 올라와 있었습니다. 라이트 n제 수2를 구매하시는 분들은 1문제도 거르지 마시고 완벽하게 다 풀어보는 것을 목표로 삼고 공부하시면 좋은 성과가 꼭 나올거라 생각합니다.

끝으로 저는 수포자였지만 결국 이번 수능에서 2등급을 쟁취하였고 목표한 대학에 붙을 점수가 나온 것 같습니다. ㅎㅎㅎ 수학이 힘드신 문과생분들! 수학에서 가장 중요한 것은 제가 생각하기에 정확한 개념과 많은 문제양을 풀어 수학에 대한 자신감을 키우는 것 이라고 생각합니다. 특히나 수2는 절대적인 양 확보가 정말 중요합니다. 하지만 교과서와 쉬운 개념서로는 한계가 있고 다른 기출문제집을 보자니 너무 두껍고 양이 많습니다. 라이트n제 수2 각유형별로 기본부터 심화까지 한 권으로서 문제풀이의 시작과 마무리를 다할 수 있는 교재라고 자부합니다. 올해만 하더라도 규토라이트 n제 수2교재로 다항함수 특히 3차함수 개형 그리기만도 수백번이 넘었던 것 같습니다. 시중 문제집과 컨텐츠가 난무하는 시기에 규토 라이트n제를 우연히 알게 되고 끝까지 믿고 풀었던 것에 감사하며 수포자도 노력하면 할 수있다는 말씀드립니다. 규토 라이트n제 수2 강추합니다!! 끝으로 규토님께도 감사드립니다 :)

수학에 자신이 없었지만 수능 수학 100점! (김은주)

저는 유독 수학에 자신이 없었던, 2등급만 나오면 대박이라고 여겼던 학생이었습니다. 그랬던 제가 규토 라이트 N제를 공부하고 수능에서 100점을 받을 수 있었습니다.

코로나 19와 개인적인 사정으로 인해 학원에 다닐 수 없었던 저는 시중에 출판된 여러 문제집을 비교하며 독학에 적합한 교재를 찾는 중에 규토 라이트를 고르게 되었습니다.

많은 장점 중 제가 꼽은 이 책의 가장 큰 장점은 바로, "이 책을 공부하는 방법(?)"이 마치 과외를 받는 기분이 들도록 수험생의 입장을 고려해서 세세하게 서술되어있기 때문이었습니다.

규토 N제를 만나기 전의 저는 나쁜 습관이 가득한 학생이었고, 그것이 제 성적을 갉아먹는 요인이었습니다. (찍어서 우연히 맞은 문제, 알고 보니 풀이 과정에서 오류가 있었는데 답만 맞은 문제도 그저 답이 맞으면 동그라미표시를 하고 다시 보지 않았고, 조금 복잡하거나 어려워보이는 문제는 지레 겁을 먹고 풀기를 꺼리는 등) 그래서인지 처음 책을 접했을 때는 문제를 풀고 풀이과정을 해설지와 일일이 대조해보고 백지에 다시 풀이과정을 써보느라 한 문제를 푸는데도 시간이 오래 걸렸고, 생각보다 쉽게 풀리지 않는 문제들이 많아서 충격을 받기도 했습니다. 그럴 때마다 앞부분에 실려있는, 과거 이 책으로 공부했었던 다른 분들의 후기를 읽으며 잘 하고 있는거라고 스스로를 다독였습니다. 그러다보니 뒤로 갈수록 문제가 조금씩 풀리기 시작했고, 처음 풀어서 완벽히 맞는 문제가 나오면 (책 앞부분에 선생님께서 언급하신) 희열을 느끼기도 했습니다. 그렇게 1회독을 하고 나니 다른 모의고사를 볼 때에도 규토를 풀며 체계적으로 훈련했던 감각들이 되살아나서 예전이라면 손도 못 대었을 문제도 풀 수 있게 되었습니다.

책 제목인 라이트와 다르게, 문제들이 분명 쉽지만은 않은 것은 사실입니다. 그렇지만 시간이 오래 걸리더라도 책에 실린 방법대로 끈질기게 물고 늘어지고 스스로에게 엄격해진다면 분명 이 책이 끝날 시점에는 실력 향상이 있을거라고 자신합니다.

늘 고민을 안겨주는 과목이었던 수학을 하면 되는 과목으로 생각할 수 있도록 좋은 책 집필해주신 규토선생님께 진심으로 감사드리고 내년 수능을 준비하시는 분들에게도 이 책을 추천합니다. (규토 고득점 N제도 추천합니다.!)

참고로 모든 추천사는 라이트 N제 구매 인증과 성적표 인증 후 수록하였습니다.
자세한 인증내역은 네이버 카페 (규토의 가능세계)에서 확인하실 수 있습니다.

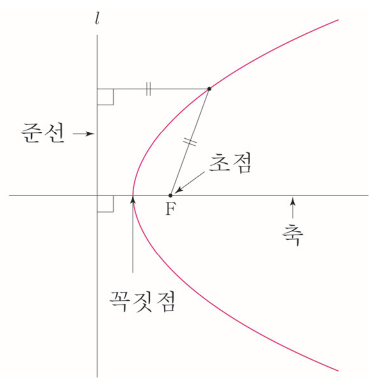
01 포물선

성취 기준 | 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.

개념 파악하기 (1) 포물선의 방정식은 어떻게 구할까?

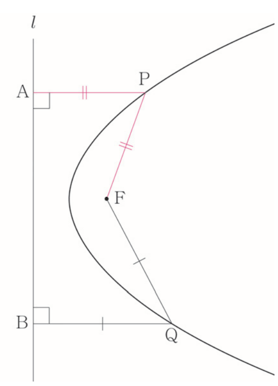
포물선의 뜻

평면 위에 한 점 F와 점 F를 지나지 않는 한 직선 l이 있을 때,
점 F와 직선 l에 이르는 거리가 같은 점들의 집합을 **포물선**이라 한다.
이때 점 F를 포물선의 **초점**, 직선 l을 포물선의 **준선**이라 한다.



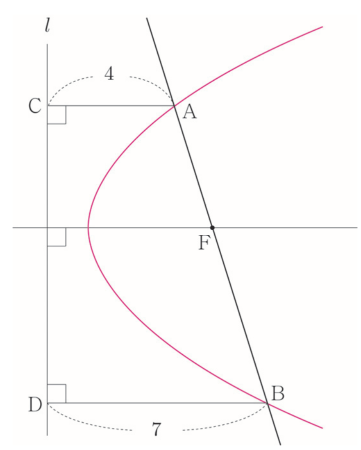
또한 포물선의 초점을 지나고 준선에 수직인 직선을 포물선의 **축**,
포물선과 축이 만나는 점을 포물선의 **꼭짓점**이라 한다.

포물선 위의 어느 점에서도 초점까지의 거리와 준선까지의 거리는 같다.
예를 들어 오른쪽 그림과 같이 $\overline{PF}=\overline{PA}$, $\overline{QF}=\overline{QB}$가 성립한다.



개념 확인문제 1

그림과 같이 포물선의 초점 F를 지나는 직선과 포물선이 만나는 두 점 A, B에서 준선 l에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AC}=4$, $\overline{BD}=7$일 때, $\overline{AB}$의 길이를 구하시오.



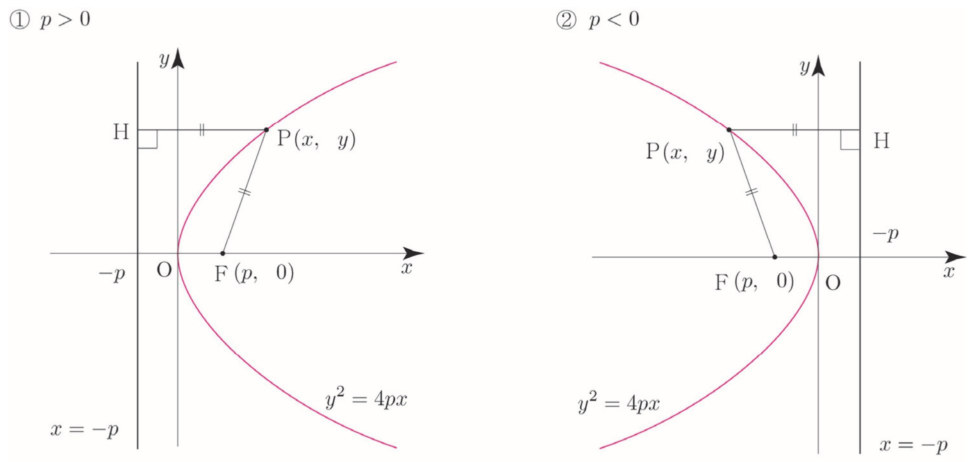
초점이 x축 위에 있는 포물선의 방정식

좌표평면에서 0이 아닌 실수 p에 대하여 점 $F(p,\ 0)$을 초점으로 하고 직선 $x=-p$를 준선으로 하는 포물선의 방정식을 구하여 보자.

포물선 위의 점 $P(x,\ y)$에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 $(-p,\ y)$이다.
포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}$이므로 $\sqrt{(x-p)^2+y^2}=|x+p|$이고,
이 식의 양변을 제곱하여 정리하면 다음과 같다.

$$y^2=4px \quad \cdots \quad ㉠$$

역으로 방정식 ㉠을 만족시키는 점 $P(x,\ y)$는 $\overline{PF}=\overline{PH}$를 만족시키므로 주어진 포물선 위의 점이다.
따라서 ㉠은 구하는 포물선의 방정식이다.



초점이 x축 위에 있는 포물선의 방정식 요약

초점이 $F(p,\ 0)$, 준선이 $x=-p$인 포물선의 방정식은 $y^2=4px$ (단, $p\neq 0$)

ex1 초점이 $F(1,\ 0)$이고, 준선이 $x=-1$인 포물선의 방정식은
$y^2=4px$에서 $p=1$이므로 $y^2=4\times1\times x=4x$, 즉 $y^2=4x$이다.

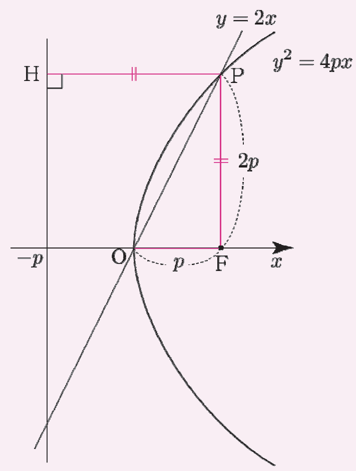
ex2 초점이 $F(-3,\ 0)$이고, 준선이 $x=3$인 포물선의 방정식은
$y^2=4px$에서 $p=-3$이므로 $y^2=4\times(-3)\times x=-12x$, 즉 $y^2=-12x$이다.

Tip 1 포물선 $y^2=4px$의 꼭짓점은 원점이고, 초점이 x축 위에 있고, 축의 방정식은 $y=0$이다.

Tip 2 포물선 $y^2=4px$는 $p>0$이면 왼쪽으로 볼록한 포물선이고,
$p<0$이면 오른쪽으로 볼록한 포물선이다.

Tip 3 초점과 준선의 가운데에 꼭짓점이 존재한다.

Tip 4 **〈포물선 작도법〉**



초점 F를 지나고 축에 수직인 직선이 포물선과 만나는 점을 P라 하고, 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}=2\overline{\mathrm{OF}}$가 성립한다.

[1단계] 포물선의 꼭짓점 O, 초점 F을 찍고, 준선을 그린다.

[2단계] 초점 F를 지나고 축에 수직인 직선 위에
$2\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{PF}}$가 성립하도록 점 P를 찍는다.

[3단계] 점 P를 지나도록 포물선을 그린다.

$\overline{\mathrm{OF}}:\overline{\mathrm{PF}}=1:2$인 직각삼각형을 그림으로 기억하자.

기울기가 $\dfrac{\overline{\mathrm{PF}}}{\overline{\mathrm{OF}}}=2$이고 원점을 지나므로 직선 OP의 방정식이 $y=2x$라는 것을 알 수 있다.

또한 $y=2x$와 포물선 $y^2=4px$이 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 P라 했을 때, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발이 곧 초점이 된다는 사실을 알 수 있다.

개념 확인문제 2

다음 포물선의 방정식을 구하시오.

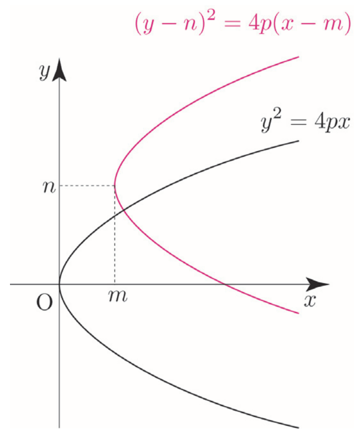
(1) 초점이 $\mathrm{F}(2,\ 0)$, 준선이 $x=-2$인 포물선

(2) 초점이 $\mathrm{F}(-1,\ 0)$, 준선이 $x=1$인 포물선

개념 파악하기 (2) 평행이동한 포물선의 방정식은 어떻게 구할까?

포물선의 평행이동

포물선 $y^2=4px$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식은 $(y-n)^2=4p(x-m)$이다.
이때 포물선의 꼭짓점, 초점, 준선도 모두 평행이동 된다.



방정식 $y^2=4px$	꼭짓점의 좌표 $(0,\ 0)$	초점의 좌표 $(p,\ 0)$	준선의 방정식 $x=-p$
방정식 $(y-n)^2=4p(x-m)$	꼭짓점의 좌표 $(m,\ n)$	초점의 좌표 $(p+m,\ n)$	준선의 방정식 $x=-p+m$

Tip 1 포물선을 평행이동하여도 초점, 꼭짓점, 준선 사이의 거리는 변하지 않는다.★★★
이러한 사실을 바탕으로 평행이동한 그래프의 식을 구할 수 있다.
[**개념 확인문제** 8]을 참고하도록 하자.

Tip 2 $(y-n)^2=4p(x-m)$ 꼴을 포물선의 방정식의 표준형이라고 하고,
위의 식을 전개하여 정리하면 $y^2+Ax+By+C=0$ 꼴이 되는데
좌변이 계수가 실수인 두 일차식의 곱으로 인수분해되지 않을 때,
이를 포물선의 방정식의 일반형이라고 한다.

예제 2

포물선 $(y-3)^2=8(x+1)$의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하시오.

풀이

포물선 $(y-3)^2=8(x+1)$는 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
한편 포물선 $y^2=8x$의 초점의 좌표는 $(2,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=-2$이다.
따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $(1,\ 3)$, 준선의 방정식은 $x=-3$이다.

개념 확인문제 6

다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하시오.

(1) $(y+2)^2=-8(x+3)$

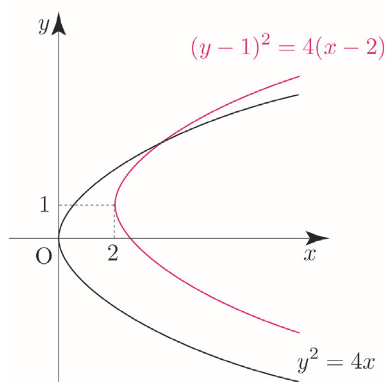
(2) $(x-4)^2=y$

예제 3

포물선 $y^2-2y-4x+9=0$을 그리시오.

풀이

주어진 포물선의 방정식을 변형하면 $(y-1)^2=4(x-2)$이고,
이 포물선은 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 주어진 포물선의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



Tip 포물선의 방정식이 일반형으로 주어지면 이를 표준형으로 고쳐서 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고 그 그래프를 그리면 된다.

개념 확인문제 7

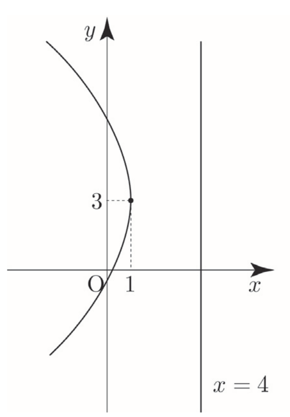
다음 포물선을 그리시오.

(1) $y^2+4y-4x+16=0$

(2) $x^2-6x-8y+17=0$

개념 확인문제 8

꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 3)$이고, 준선의 방정식이 $x=4$인 포물선 $y^2+ay+bx+c=0$를 그리면 다음 그림과 같다. $a+2b-3c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)



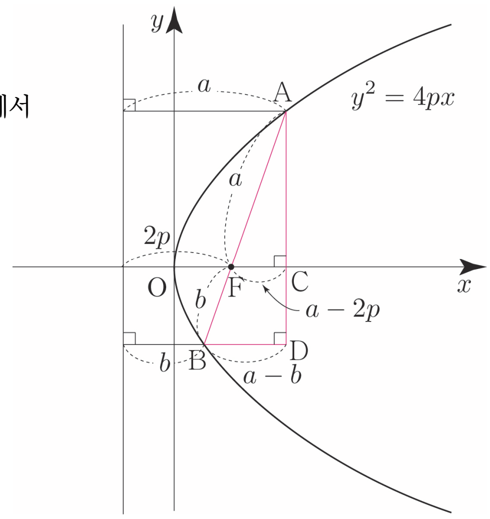
05 이차곡선의 활용

성취 기준 | 이차곡선의 기본개념에서 파생된 이차곡선의 성질을 설명할 수 있다.

개념 파악하기 (12) 포물선의 초점을 지나는 직선은 어떠한 성질이 있을까?

포물선의 초점을 지나는 직선

오른쪽 그림과 같이 초점 F를 지나는 직선과 포물선이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 x축에 내린 수선의 발을 C라 하고, 점 A에서 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선에 내린 수선의 발을 D라 하자.



$\overline{\mathrm{AF}}=a$, $\overline{\mathrm{BF}}=b$, $\overline{\mathrm{OF}}=p$라 하면 $\overline{\mathrm{FC}}=a-2p$, $\overline{\mathrm{BD}}=a-b$이고
두 삼각형 ABD, AFC는 서로 닮음이므로
$\overline{\mathrm{AF}}:\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{FC}}:\overline{\mathrm{BD}} \Rightarrow a:a+b=a-2p:a-b$ 가 성립한다.
이를 정리하면 $(a+b)(a-2p)=a(a-b) \Rightarrow ab=p(a+b)$ ⋯ ㉠
따라서 $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$가 성립한다.

두 점 A, B의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면 $a=x_1+p$, $b=x_2+p$이므로 ㉠에 대입하면
$(x_1+p)(x_2+p)=p(x_1+x_2+2p) \Rightarrow x_1x_2+p(x_1+x_2)+p^2=p(x_1+x_2)+2p^2 \Rightarrow x_1x_2=p^2$
$x_1x_2=p^2$이 성립하므로 등비중항에 의해서 x_1, p, x_2는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

포물선의 초점을 지나는 직선 요약

초점 F를 지나는 직선과 포물선이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, $\overline{\mathrm{AF}}=a$, $\overline{\mathrm{BF}}=b$, $\overline{\mathrm{OF}}=p$라 하면

① $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

② 두 점 A, B의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면 x_1, p, x_2는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

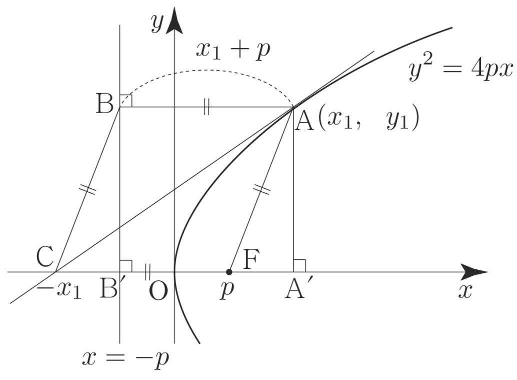
Tip 스스로 증명도 한 번 해보고 실전에서 위 성질을 적극 사용하도록 하자.

개념 파악하기 (13) 포물선의 접선은 어떠한 성질이 있을까?

포물선의 접선의 성질

초점이 F인 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $A(x_1,\ y_1)$에서 준선에 내린 수선의 발을 B라 하고, 점 A에서 그은 접선과 x축이 만나는 점을 C라 하자.

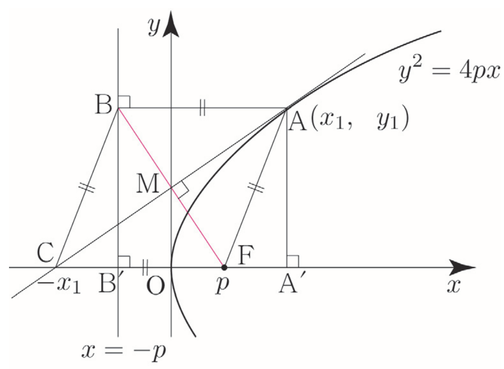
점 A에서 그은 접선의 방정식은 $y_1y=2p(x+x_1)$이므로 x절편은 $-x_1$이다. 따라서 점 C의 좌표는 $(-x_1,\ 0)$이다.



$\overline{AB}=x_1+p$이고, $\overline{FC}=x_1+p$이므로 $\overline{AB}=\overline{FC}$이다. 또한 포물선의 정의에 의하여 $\overline{AB}=\overline{AF}$이므로 $\overline{AB}=\overline{FC}=\overline{AF}$가 성립한다.

두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′라 하자.
$\overline{CB'}=\overline{A'F}=x_1-p$이고, $\overline{BB'}=\overline{AA'}=y_1$이므로 $\overline{BC}=\overline{AF}$이다.
따라서 사각형 ABCF는 마름모이다.

두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $C(-x_1,\ 0)$의 중점을 M라 하면 M의 좌표는 $\left(0,\ \frac{y_1}{2}\right)$이다.
즉, 두 점 A, B의 중점 M은 y축에 존재한다.
마름모의 두 대각선은 서로 수직이므로 선분 BF와 선분 AC는 서로 수직이다.
즉, 점 F에서 선분 AC에 내린 수선의 발은 M이다.



포물선의 접선의 성질 요약

초점이 F인 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $A(x_1,\ y_1)$에서 준선에 내린 수선의 발을 B라 하고, 점 A에서 그은 접선과 x축이 만나는 점을 C라 하고, 선분 AC의 중점을 M이라 하면

① 점 C의 x좌표는 $(-x_1,\ 0)$이다.

② 사각형 ABCF는 마름모이다.

③ 점 F에서 선분 AC에 내린 수선의 발은 M이다.

Tip 삼각형 ACF는 $\overline{AF}=\overline{CF}$인 이등변삼각형이므로 점 F에서 선분 AC에 내린 수선의 발은 두 점 A, C의 중점인 M임이 자명하다.

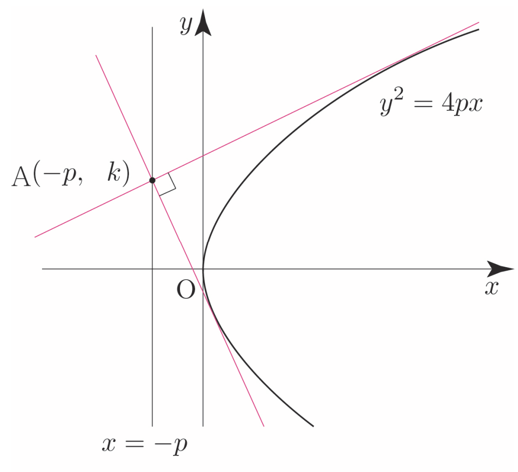
준선 위의 점에서 포물선에 그은 두 접선의 성질

포물선 $y^2=4px$의 준선 $x=-p$ 위의 점을 $\mathrm{A}(-p,\ k)$라 하자.
점 A에서 포물선에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면
접선의 방정식은 $y=mx+\frac{p}{m}$가 점 $\mathrm{A}(-p,\ k)$를 지나므로

$k=-pm+\frac{p}{m} \Rightarrow mk=-pm^2+p \Rightarrow pm^2+km-p=0$

점 A에서 포물선에 그은 두 접선의 기울기를 각각 $m_1,\ m_2$라 하면
$m_1,\ m_2$는 방정식 $pm^2+km-p=0$의 두 근과 같다.

근과 계수의 관계에 의하여 $m_1 \times m_2=\frac{-p}{p}=-1$이므로
준선 위의 점 A에서 포물선에 그은 두 접선은 서로 수직이다.



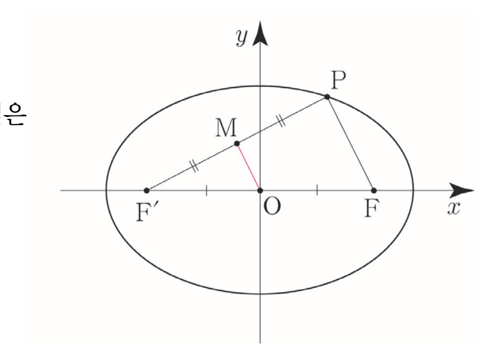
준선 위의 점에서 포물선에 그은 두 접선의 성질 요약

준선 $x=-p$ 위의 점에서 포물선 $y^2=4px$에 그은 두 접선은 서로 수직이다.

개념 파악하기 (14) 두 초점과 타원의 중심 사이에는 어떤 관계가 있을까?

삼각형의 중점 연결

타원 위의 한 점 P와 두 초점 F, F′에 대하여 삼각형 PFF′을
관찰해보자. 점 P와 초점 F′의 중점을 M라 하면 두 초점 F, F′의 중점은
원점 O이므로 두 삼각형 MOF′, PFF′의 닮음비는 $1:2$ 이다.
즉, $\overline{\mathrm{MO}}:\overline{\mathrm{PF}}=1:2$이다.



Tip 중학교 도형 해석이지만 활용 빈도가 높으니 반드시 알아 두도록 하자.
평행조건이 나오면 기본 태도로 동위각, 엇각, 닮음비, 비례식이 떠올라야 한다. (중요★)

특히 두 초점이 원점에 대하여 대칭이므로 닮음비를 자연스레 유추할 수 있다.
출제자 입장에서도 닮음비를 따로 명시해 주지 않아도 되기 때문에 매력적인 출제 포인트가 될 수 있다.

Training – 1 step

필수 유형편

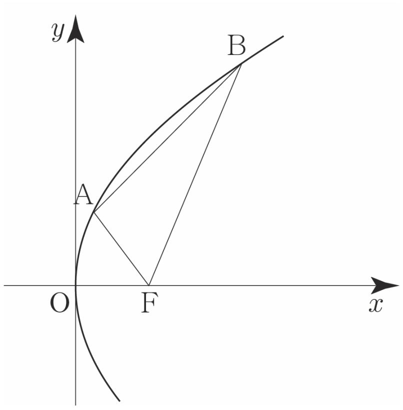
1. 이차곡선

4 Theme 포물선의 정의의 활용

013

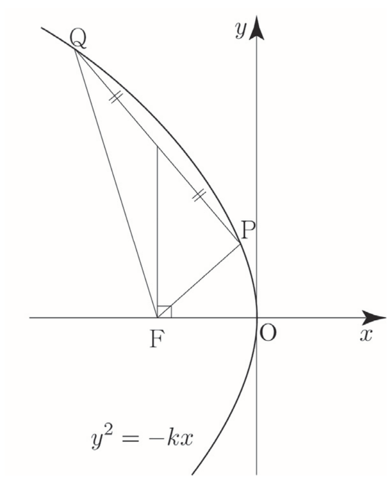
초점 F인 포물선 $y^2=8x$와 기울기가 1인 직선이 만나는 두 점 A, B에 대하여 삼각형 ABF의 무게중심의 x좌표가 $\frac{7}{3}$일 때, 삼각형 ABF의 둘레의 길이는 $p+\sqrt{q}$이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, 두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b라 하면 $a<2<b$이고, p와 q는 자연수이다.)



014

그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=-kx$ 위의 제2사분면에 있는 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 선분 PQ의 중점에서 x축에 내린 수선의 발이 점 F이고, $\overline{\text{PF}}+\overline{\text{QF}}=16$일 때, 양수 k의 값을 구하시오.

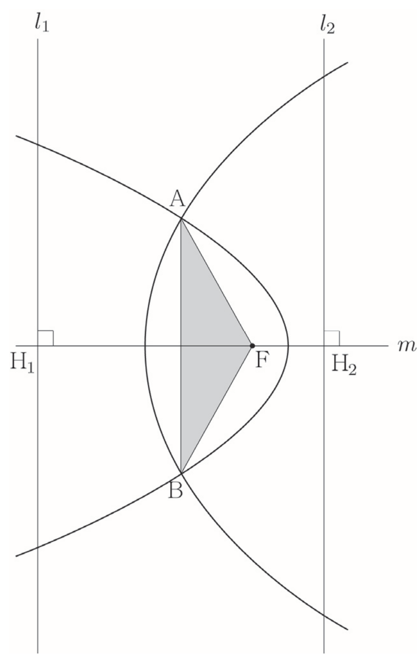


015

포물선 $y^2=4px\ (p>0)$ 위의 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 C, D라 하자. 직선 OA의 기울기가 2이고, 삼각형 OAC의 넓이는 16이다. 점 C를 중심으로 하고 선분 AC를 반지름으로 하는 원 위의 점 P에 대하여 $\overline{\text{BP}}$의 최댓값과 최솟값의 합이 25일 때, $(\overline{\text{BD}})^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.)

016

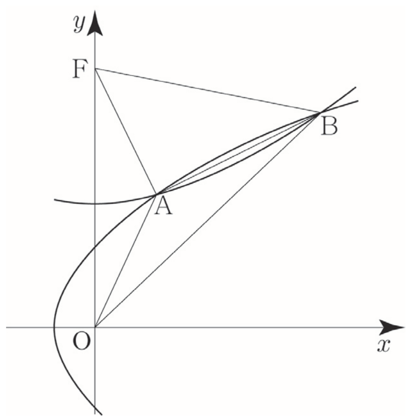
그림과 같이 평행한 두 직선 l_1, l_2에 수직인 직선 m이 두 직선 l_1, l_2와 만나는 점을 각각 H_1, H_2라 하자. 선분 H_1H_2 위의 점 F를 초점으로 하고, 두 직선 l_1, l_2를 각각 준선으로 하는 두 포물선이 만나는 두 점을 A, B라 하자. 삼각형 ABF의 넓이가 $4\sqrt{3}$이고, $\overline{\text{H}_1\text{F}}=3\overline{\text{H}_2\text{F}}$일 때, 두 포물선의 꼭짓점 사이의 거리를 구하시오.



017

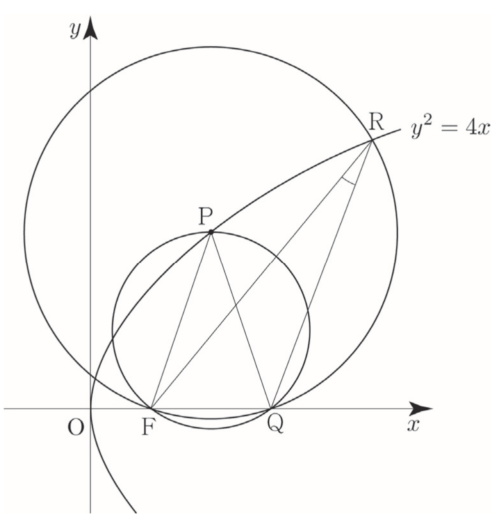
그림과 같이 원점 O, y축 위의 점 F를 각각 초점으로 하는 두 포물선이 만나는 두 점을 A, B라 하자.

$\overline{AB}=2\sqrt{5}$이고, 직선 AB의 기울기가 $\frac{1}{2}$일 때, $\overline{OB}+\overline{BF}-(\overline{OA}+\overline{AF})$의 값을 구하시오.



018

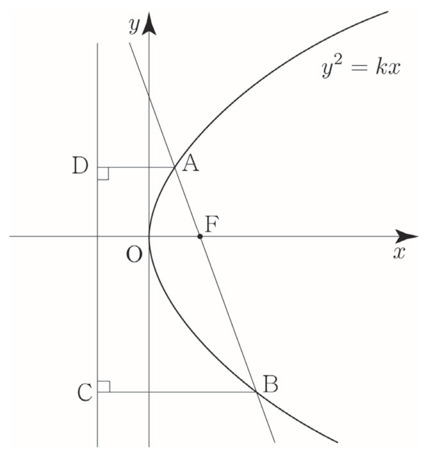
그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 P(a, b)에 대하여 점 P를 중심으로 하고 점 F를 지나는 원이 있다. 원과 x축과 만나는 점 중 F가 아닌 점을 Q라 하고, 원과 포물선이 만나는 점 중 x좌표가 더 큰 점을 R이라 하자. $\sin(\angle \mathrm{FRQ})=\frac{1}{3}$일 때, 삼각형 FPQ의 외접원의 넓이는 $k\pi$이다. $64k$의 값을 구하시오. (단, $a>1$, $b>0$)



5 Theme 포물선의 초점을 지나는 직선

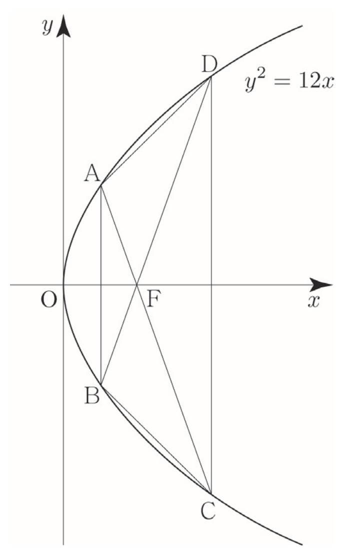
019

그림과 같이 포물선 $y^2=kx$의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 D, C라 하자. $\overline{AF}:\overline{BF}=1:2$이고, 사각형 ABCD의 넓이가 $27\sqrt{2}$일 때, 양수 k의 값을 구하시오.



020

그림과 같이 포물선 $y^2=12x$ 위의 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD에 대하여 두 선분 AB, CD가 각각 y축과 평행하다. 사각형 ABCD의 두 대각선의 교점이 포물선의 초점 F와 일치하고 $\overline{AF}=\frac{9}{2}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는 k이다. $\sqrt{2}\times k$의 값을 구하시오.



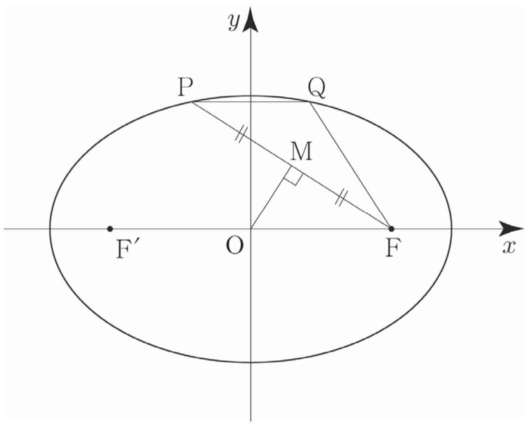
이차곡선

040

그림과 같이 두 초점이 각각 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$인 타원 위의 제2사분면에 있는 점 P에 대하여 선분 PF의 중점을 M이라 하고, 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 타원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자.
원점 O에서 선분 PF에 내린 수선의 발은 M이고,

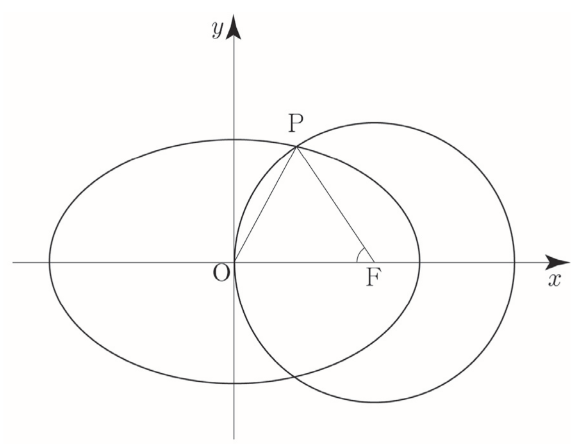
$$\overline{\mathrm{OM}}=1,\ \overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}}=6$$

일 때, 이 타원의 단축의 길이를 구하시오.



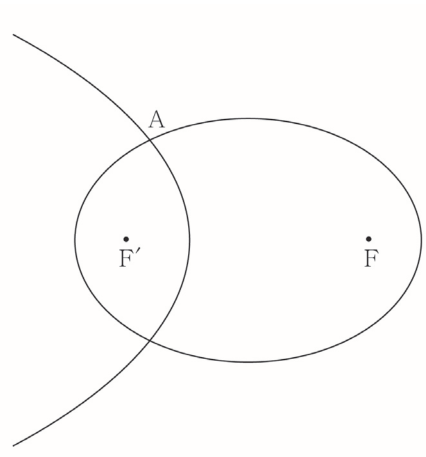
041

타원 $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}=1\ (a>b>0)$의 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F라 하고, 점 F를 중심으로 하고 원점 O를 지나는 원이 타원과 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하자. $\overline{\mathrm{OP}}=2\sqrt{2}$, $\cos(\angle\mathrm{OFP})=\dfrac{5}{9}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.



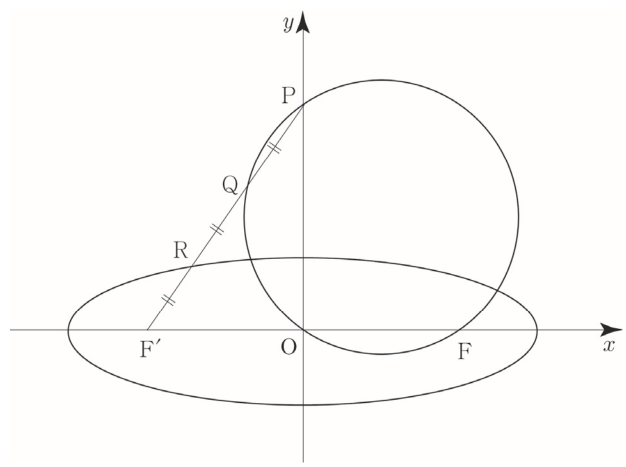
042

그림과 같이 두 초점이 F, F′이고 장축의 길이가 $2\sqrt{2}$, 단축의 길이가 2인 타원과 선분 FF′을 $3:1$로 내분하는 점을 꼭짓점으로 하고 F′가 초점인 포물선이 있다.
타원과 포물선의 교점 중 한 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 선분 FF′에 평행한 직선과 타원의 교점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 사각형 ABFF′의 둘레의 길이가 k일 때, $(k+6)^2$의 값을 구하시오.



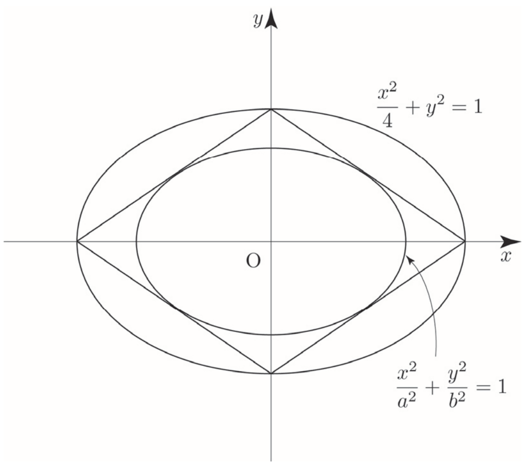
043

그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$이고 단축의 길이가 12인 타원이 있다. y좌표가 6보다 큰 y축 위의 점 P에 대하여 세 점 P, F, O를 지나는 원을 C라 하자. 선분 PF′이 원 C와 만나는 두 점 중 P가 아닌 점을 Q, 타원과 만나는 두 점 중 Q와 가까운 점을 R이라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{RF'}}$이다. 원 C의 넓이가 $s\pi$일 때, s의 값을 구하시오. (단, 점 O는 원점이다.)



139 | 2009학년도 수능 가형

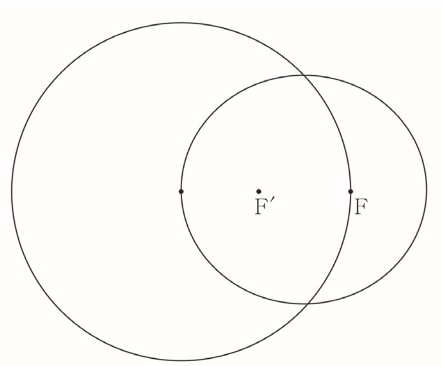
타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$의 네 꼭짓점을 연결하여 만든 사각형에 내접하는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이 있다. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이 $\mathrm{F}(b,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-b,\ 0)$일 때, $a^2b^2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [3점]



140 | 2022학년도 고3 6월 평가원 기하

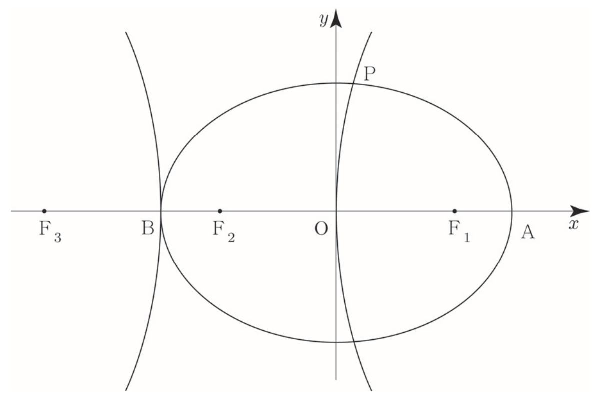
두 초점이 F, F′이고 장축의 길이가 $2a$인 타원이 있다. 이 타원의 한 꼭짓점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 이 타원의 서로 다른 두 꼭짓점과 한 초점을 지날 때, 상수 a의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$　② $\frac{\sqrt{6}-1}{2}$　③ $\sqrt{3}-1$
④ $2\sqrt{2}-2$　⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$



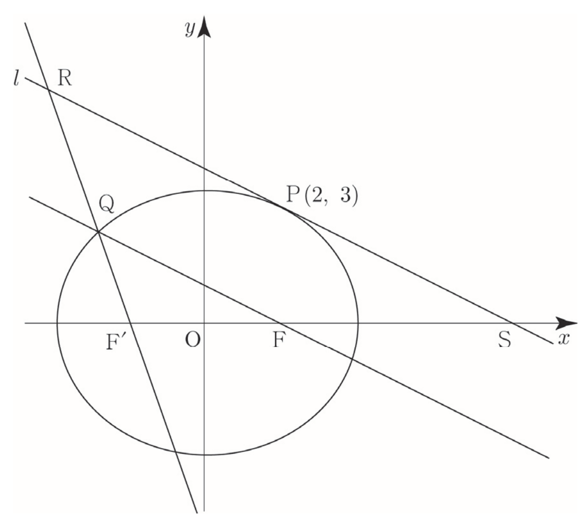
141 | 2021년 고3 3월 교육청 기하

두 초점이 $\mathrm{F}_1(c,\ 0)$, $\mathrm{F}_2(-c,\ 0)$ $(c>0)$인 타원이 x축과 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 0)$, $\mathrm{B}(-3,\ 0)$에서 만난다. 선분 BO가 주축이고 점 F_1이 한 초점인 쌍곡선의 초점 중 F_1이 아닌 점을 F_3이라 하자. 쌍곡선이 타원과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 할 때, 삼각형 $\mathrm{PF}_3\mathrm{F}_2$의 둘레의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다.) [3점]



142 | 2022학년도 고3 9월 평가원 기하

그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(2,\ 3)$에서 타원에 접하는 직선을 l이라 하자. 점 F를 지나고 l과 평행한 직선이 타원과 만나는 점 중 제2사분면 위에 있는 점을 Q라 하자. 두 직선 F′Q와 l이 만나는 점을 R, l과 x축이 만나는 점을 S라 할 때, 삼각형 SRF′의 둘레의 길이는? [4점]

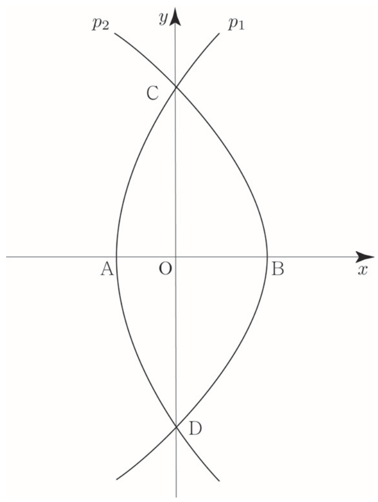


① 30　② 31　③ 32
④ 33　⑤ 34

182 | 2011학년도 수능 가형

그림과 같이 좌표평면에서 x축 위의 두 점 A, B에 대하여 꼭짓점이 A인 포물선 p_1과 꼭짓점이 B인 포물선 p_2가 다음 조건을 만족시킨다. 이때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

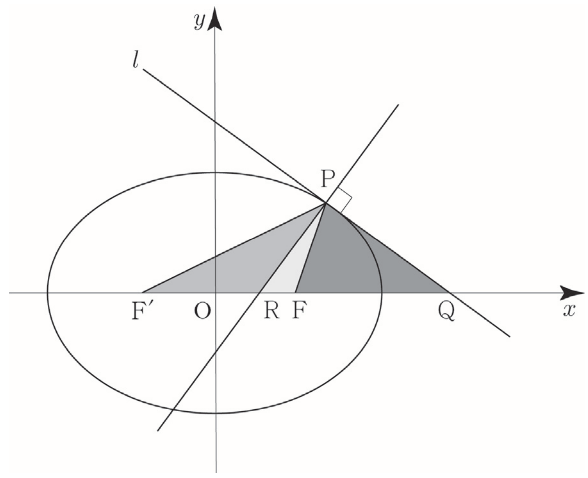
(가) p_1의 초점은 B이고, p_2의 초점은 원점이다.
(나) p_1과 p_2는 y축 위의 두 점 C, D에서 만난다.
(다) $\overline{\mathrm{AB}}=2$



① $4(\sqrt{2}-1)$ ② $3(\sqrt{3}-1)$ ③ $2(\sqrt{5}-1)$
④ $\sqrt{3}+1$ ⑤ $\sqrt{5}+1$

183 | 2014년 고3 7월 교육청 B형

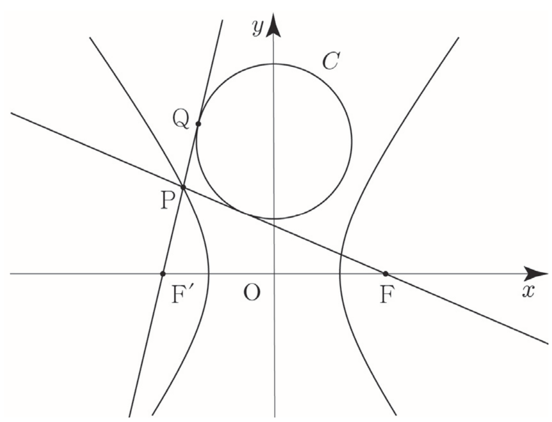
그림과 같이 두 초점이 F, F′인 타원 $3x^2+4y^2=12$ 위를 움직이는 제1사분면 위의 점 P에서의 접선 l이 x축과 만나는 점을 Q, 점 P에서 접선 l과 수직인 직선을 그어 x축과 만나는 점을 R라 하자. 세 삼각형 PRF, PF′R, PFQ의 넓이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 점 P의 x좌표는? [4점]



① $\frac{13}{12}$ ② $\frac{7}{6}$ ③ $\frac{5}{4}$
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{17}{12}$

184 | 2018학년도 수능 가형

그림과 같이 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{17}=1$ 위의 점 P에 대하여 직선 FP와 직선 F′P에 동시에 접하고 중심이 y축 위에 있는 원 C가 있다. 직선 F′P와 원 C의 접점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{F'Q}}=5\sqrt{2}$일 때, $\overline{\mathrm{FP}}^2+\overline{\mathrm{F'P}}^2$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{F'P}}<\overline{\mathrm{FP}}$) [4점]



이차곡선

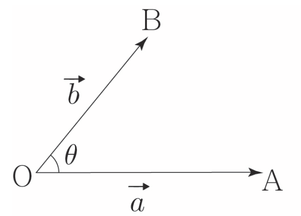
05 평면벡터의 내적

성취 기준 | 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

개념 파악하기 (9) 평면벡터의 내적이란 무엇일까?

평면벡터의 내적

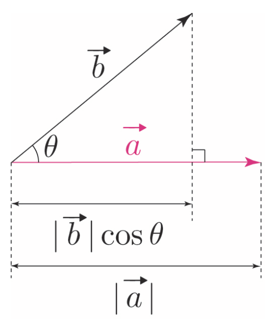
영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$일 때
$\theta=\angle\mathrm{AOB}$ $(0^\circ\le\theta\le180^\circ)$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기라 한다.



영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ일 때,
$\vec{a}$와 $\vec{b}$의 **내적**을 각 θ의 크기에 따라 다음과 같이 정의하고,
기호로 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 와 같이 나타낸다.

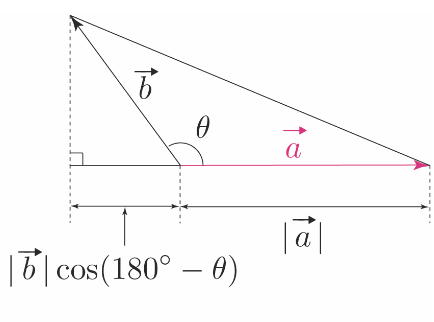
① $0^\circ\le\theta\le90^\circ$ 일 때

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$



② $90^\circ<\theta\le180^\circ$ 일 때

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180^\circ-\theta)$



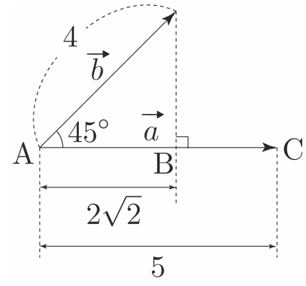
또 $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=0$일 때는 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$으로 정한다.

평면벡터의 내적 요약

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ일 때
① $0^\circ\le\theta\le90^\circ$ 이면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$
② $90^\circ<\theta\le180^\circ$ 이면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180^\circ-\theta)$

ex1 임의의 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos0^\circ=|\vec{a}|^2$

ex2 $|\vec{a}|=5,\ |\vec{b}|=4,\ \theta=45^\circ$



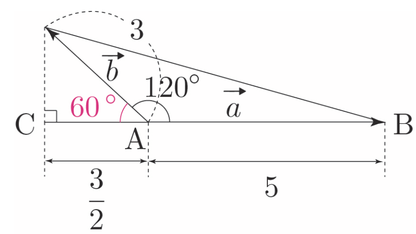
풀이1) 내적공식을 이용한 풀이

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos45^\circ=5\times4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=10\sqrt{2}$$

풀이2) 수선의 발 작도를 이용한 풀이

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\times|\vec{b}|\cos45^\circ=|\overrightarrow{AC}|\times|\overrightarrow{AB}|=5\times2\sqrt{2}=10\sqrt{2}$$

ex3 $|\vec{a}|=5,\ |\vec{b}|=3,\ \theta=120^\circ$



풀이1) 내적공식을 이용한 풀이

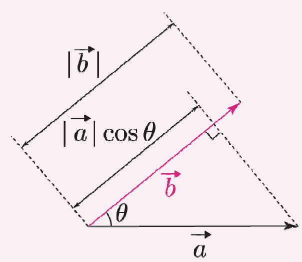
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos120^\circ=5\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{15}{2}$$

풀이2) 수선의 발 작도를 이용한 풀이

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\times|\vec{b}|\cos60^\circ=-|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AC}|=-5\times\frac{3}{2}=-\frac{15}{2}$$

Tip 1 내적이란 벡터의 방향요소를 제외하고 크기만을 곱하여 결과가 스칼라(방향을 가지고 있지 않고 크기만 가지고 있는 물리량)가 되는 연산을 말한다.
<u>즉, 내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}$는 벡터가 아니고 실수이다.</u> (중요★)

Tip 2 내적은 두 벡터의 크기를 단순히 곱해주는 것이 아니라
한 쪽을 기준으로 잡았을 때, 다른 한 쪽의 크기를 곱하는 것이다.
위의 개념설명에서는 $\vec{a}\cdot\vec{b}$를 벡터 $\vec{a}$의 크기와 벡터 $\vec{b}$의
벡터 $\vec{a}$ 위로 수선의 발을 내려 그 크기를 곱하여 나타냈지만
기준을 바꿔서 오른쪽 그림과 같이 벡터 $\vec{b}$의 크기와 벡터 $\vec{a}$의
벡터 $\vec{b}$ 위로 수선의 발을 내려 그 크기를 곱하여 나타낼 수 있다.

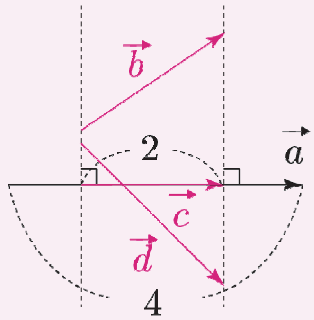


Tip 3 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$이므로 내적의 부호는 θ의 크기에 따라 결정된다.
(단, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 영벡터가 아니다.)
① $0^\circ\le\theta<90^\circ$일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$
② $\theta=90^\circ$일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
③ $90^\circ<\theta\le180^\circ$일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$

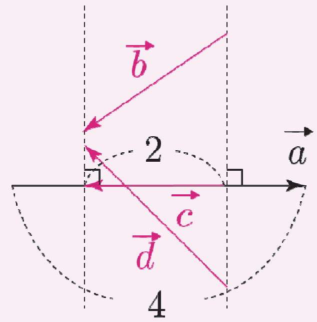
Tip 4 내적공식도 물론 중요하지만 너무 공식에만 초점을 맞추지 말고 그림으로도 기억하자.
특히 어려운 문제일수록 단순 공식보다는 수선의 발을 작도하여 그림으로 해결하는 문제가 주로 출제된다.

Tip 5 실전에서는 내적의 값을 구할 때, 두 벡터의 시점이 일치하지 않은 경우가 대다수이다.
이때 평행이동을 하여 시점을 일치시키지 않아도 수선의 발을 작도하여 내적의 값을 구할 수 있다.

ex1 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{d} = 4 \times 2 = 8$



ex2 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{d} = (-1) \times 2 \times 4 = -8$



벡터 $\vec{b}$를 벡터 $\vec{a}$ 위로 수선의 발을 내려 나타낸 벡터 $\vec{c}$와 $\vec{a}$의 방향에 따라 내적의 부호가 정해진다. ex1)와 같이 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{c}$의 방향이 같으면 양수이고, ex2)와 같이 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{c}$의 방향이 반대이면 음수이다. 실전에서는 수선의 발을 내려 길이를 통해 내적의 절댓값을 구한 후 방향에 따라 내적의 부호를 결정해주면 된다.

개념 확인문제 28

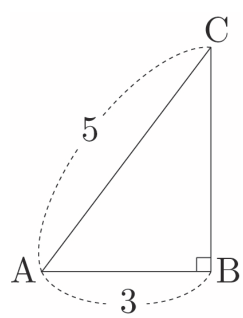
$|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 6$인 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 다음과 같을 때, $\vec{a} \cdot \vec{b}$를 구하시오.

(1) 0°　　(2) 60°　　(3) 90°　　(4) 135°

예제 8

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 5$, $\angle ABC = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서 다음을 구하시오.

(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$　　(2) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA}$



평면벡터

풀이

(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

풀이 1 내적공식을 이용한 풀이

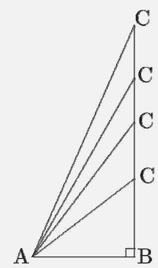
$|\overrightarrow{AB}|=3$, $|\overrightarrow{AC}|=5$이고, 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 $\cos\theta=\frac{3}{5}$이므로

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta = 3\times5\times\frac{3}{5} = 9$

풀이 2 수선의 발 작도를 이용한 풀이

이미 그림상에서 수선의 발 작도가 끝난 상태이므로 아주 땡큐한 상황이다.
두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 $|\overrightarrow{AC}|\cos\theta=|\overrightarrow{AB}|$이므로
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AC}|\cos\theta = |\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AB}|^2 = 9$

Tip 오른쪽 그림과 같이 $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서는
두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$가 이루는 각의 크기 θ와 상관없이 $|\overrightarrow{AC}|\cos\theta=|\overrightarrow{AB}|$이므로
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|^2$가 성립한다.

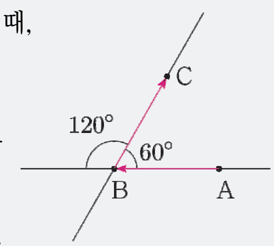


(2) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AD}$이도록 점 D를 잡아서 시점을 통일하면 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$이다.

Tip 두 벡터가 이루는 각의 크기 θ $(0^\circ \le \theta \le 180^\circ)$는 두 벡터의 시점을 일치시킬 때, 두 반직선이 이루는 각의 크기이다.

오른쪽 그림에서 두 직선 AB, BC가 이루는 각의 크기는 60° 또는 120°이지만
두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$가 이루는 각의 크기는 두 벡터의 시점이 일치된 상태에서
측정하므로 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 시점이 B가 되도록 평행이동하면 120°임을 알 수 있다.



풀이 1 내적공식을 이용한 풀이

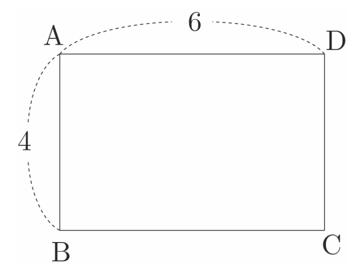
$|\overrightarrow{AC}|=5$, $|\overrightarrow{AD}|=3$이고, 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ 가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면
$\cos\theta = -\frac{3}{5}\left(\because\ \cos(180^\circ-\theta)=\frac{3}{5}\right)$이므로
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AD}|\cos\theta = 5\times3\times\left(-\frac{3}{5}\right) = -9$

풀이 2 수선의 발 작도를 이용한 풀이

이미 그림상에서 수선의 발 작도가 끝난 상태이므로 아주 땡큐한 상황이다.
두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 $|\overrightarrow{AC}|\cos(180^\circ-\theta)=|\overrightarrow{AB}|$이므로
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = -|\overrightarrow{AD}|\times|\overrightarrow{AC}|\cos(180^\circ-\theta) = -|\overrightarrow{AD}| \times |\overrightarrow{AB}| = -3\times3 = -9$

개념 확인문제 29

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AD}=6$인 직사각형 ABCD에서 다음을 구하시오.



(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ (2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ (4) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DB}$

평면벡터의 내적과 성분

영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$의 내적을 성분으로 나타내어 보자.

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하고, $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$라 하자.

① $0^\circ<\theta<180^\circ$ 일 때

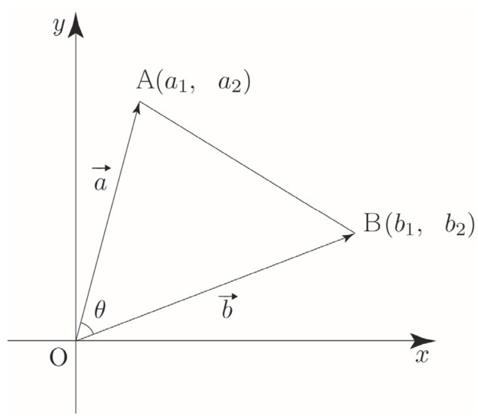
삼각형 OAB에서 코사인법칙을 사용하면

$\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-\overline{AB}^2}{2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$ 이므로

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-\overline{AB}^2}{2}$$

$$=\frac{{a_1}^2+{a_2}^2+{b_1}^2+{b_2}^2-\{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2\}}{2}$$

$$=\frac{2a_1b_1+2a_2b_2}{2}=a_1b_1+a_2b_2$$



Tip 참고로 2015 개정교육과정에서 기하는 수1, 수2와 독립적인 과목으로 편성되어 있지만 수능을 위한 교재인 만큼 공통과목인 수1은 당연히 학습했다는 전제로 책을 집필하였다.
기존 교과서에서는 수1에서 배운 코사인법칙을 사용할 수 없기 때문에 수선의 발을 작도해서 증명했지만 코사인법칙을 통해 간단히 증명할 수 있다.

② $\theta=0^\circ$ 일 때

$\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OA}$ $(k>0)$이므로 $(b_1,\ b_2)=(ka_1,\ ka_2)$이다.

즉, $b_1=ka_1$, $b_2=ka_2$가 성립한다.

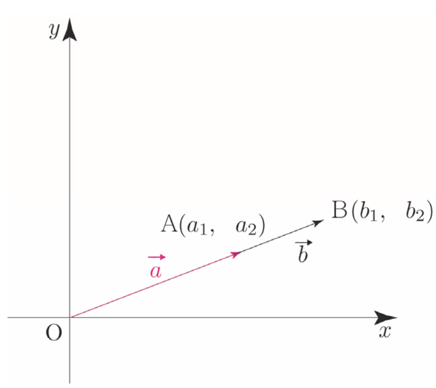
$2a_1b_1a_2b_2=2k^2{a_1}^2{a_2}^2={a_1}^2{b_2}^2+{a_2}^2{b_1}^2$ 이므로

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|$$

$$=\sqrt{{a_1}^2+a_2^2}\,\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2}=\sqrt{{a_1}^2{b_1}^2+{a_1}^2{b_2}^2+{a_2}^2{b_1}^2+{a_2}^2{b_2}^2}$$

$$=\sqrt{{a_1}^2{b_1}^2+2a_1b_1a_2b_2+{a_2}^2{b_2}^2}=\sqrt{(a_1b_1+a_2b_2)^2}=|a_1b_1+a_2b_2|$$

$$=a_1b_1+a_2b_2$$



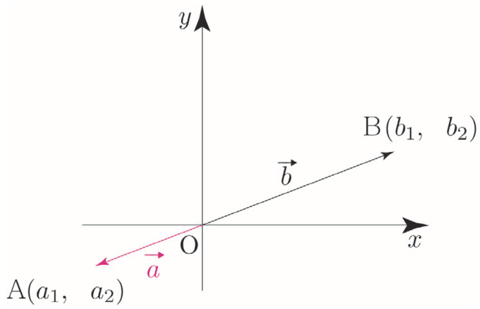
($k>0$, $b_1=ka_1$, $b_2=ka_2$ 이므로 $a_1b_1+a_2b_2=k{a_1}^2+k{a_2}^2=k({a_1}^2+{a_2}^2)>0$이다.)

③ $\theta=180^\circ$ 일 때

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ $(k<0)$이므로 $(b_1,\ b_2)=(ka_1,\ ka_2)$이다.

즉, $b_1=ka_1,\ b_2=ka_2$가 성립한다.

$2a_1b_1a_2b_2=2k^2a_1{}^2a_2{}^2=a_1{}^2b_2{}^2+a_2{}^2b_1{}^2$이므로



$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=-|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$

$=-\sqrt{a_1{}^2+a_2^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}=-\sqrt{a_1{}^2b_1{}^2+a_1{}^2b_2{}^2+a_2{}^2b_1{}^2+a_2{}^2b_2{}^2}$

$=-\sqrt{a_1{}^2b_1{}^2+2a_1b_1a_2b_2+a_2{}^2b_2{}^2}=-\sqrt{(a_1b_1+a_2b_2)^2}=-|a_1b_1+a_2b_2|$

$=a_1b_1+a_2b_2$

$(k<0,\ b_1=ka_1,\ b_2=ka_2$ 이므로 $a_1b_1+a_2b_2=ka_1{}^2+ka_2{}^2=k(a_1{}^2+a_2{}^2)<0$이다.)

평면벡터의 내적과 성분 요약

$\vec{a}=(a_1,\ a_2),\ \vec{b}=(b_1,\ b_2)$일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

ex1 $\vec{a}=(1,\ 4),\ \vec{b}=(-2,\ 3)$일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-2)+4\times3=-2+12=10$

ex2 $\vec{c}=(3,\ 4)$일 때, $\vec{c}\cdot\vec{c}=3\times3+4\times4=25$

Tip 1 위 공식은 $0^\circ\le\theta\le180^\circ$일 때 모두 성립하고, $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=0$일 때에도 성립한다.

Tip 2 〈$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ 증명〉

① 내적공식으로 증명 : $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos0^\circ=|\vec{a}|^2$

② 성분내적공식으로 증명 : $\vec{a}\cdot\vec{a}=a_1a_1+a_2a_2=a_1{}^2+a_2{}^2=|\vec{a}|^2$

Tip 3 성분을 이용한 평면벡터의 내적은 두 벡터가 이루는 각의 크기를 사용하지 않고 나타낼 수 있기에 유용하다.

개념 확인문제 30

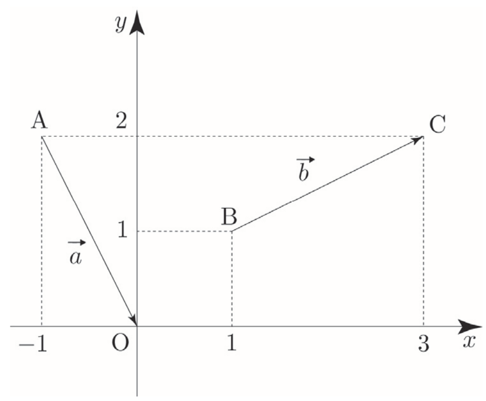
다음 두 벡터 $\vec{a},\ \vec{b}$의 내적을 구하시오.

(1) $\vec{a}=(-2,\ -5),\ \vec{b}=(1,\ -3)$

(2) $\vec{a}=(0,\ -4),\ \vec{b}=(10,\ 1)$

벡터의 분해를 이용하여 벡터를 성분으로 나타내기

오른쪽 그림의 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 성분으로 나타내어 보자.



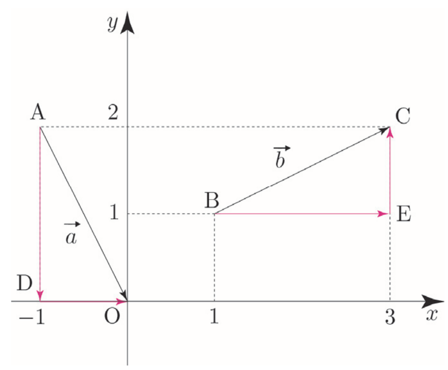
① 좌표를 이용하는 방법

$A(-1,\ 2)$, $B(1,\ 1)$, $C(3,\ 2)$, $O(0,\ 0)$

$\vec{a} = \overrightarrow{AO} = (0-(-1),\ 0-2) = (1,\ -2)$

$\vec{b} = \overrightarrow{BC} = (3-1,\ 2-1) = (2,\ 1)$

② 벡터의 분해를 이용하는 방법 (실전용)



오른쪽 그림과 같이 x축, y축에 수직이 되도록
벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 분해하면 다음과 같다.

$\vec{a} = \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC}$

이때, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OP}$가 되도록 점 P를 잡으면
점 $P(0,\ -2)$이므로 $\overrightarrow{AD} = (0,\ -2)$이고,
$\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OQ}$가 되도록 점 Q를 잡으면
점 $Q(1,\ 0)$이므로 $\overrightarrow{DO} = (1,\ 0)$이다.
따라서 $\vec{a} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = (0,\ -2) + (1,\ 0) = (1,\ -2)$이다.

위와 마찬가지 논리로 $\overrightarrow{BE} = (2,\ 0)$이고, $\overrightarrow{EC} = (0,\ 1)$이다.
따라서 $\vec{b} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC} = (2,\ 0) + (0,\ 1) = (2,\ 1)$이다.

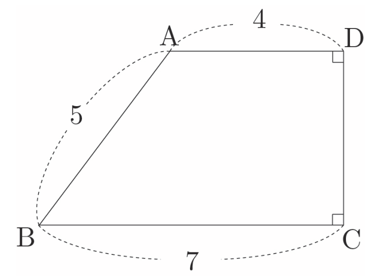
Tip 실전에서는 수직으로 분해된 벡터들의 방향($\rightarrow$ $\leftarrow$ $\uparrow$ $\downarrow$)과 크기만 보고
벡터의 성분을 빠르게 구하면 된다.

ex1 위 문제에서 $\overrightarrow{AD}$의 방향은 $\downarrow$이므로 $(0,\ -1)$의 실수배이고, $\overline{AD} = 2$이므로
$\overrightarrow{AD} = (0,\ -2)$인 것을 알 수 있다.

ex2 위 문제에서 $\overrightarrow{BE}$의 방향은 $\rightarrow$이므로 $(1,\ 0)$의 실수배이고, $\overline{BE} = 2$이므로
$\overrightarrow{BE} = (2,\ 0)$인 것을 알 수 있다.

[예제 13], [개념 확인문제 38]을 통해 이를 적용하여 내적의 값을 구해보자.

예제 13

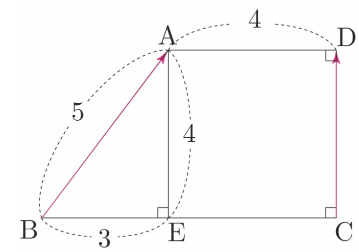


오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=7$, $\overline{AD}=4$, $\angle BCD=\angle CDA=90^\circ$인 사다리꼴 ABCD에서 다음을 구하시오.

(1) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}$ (2) $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CA}$

풀이

(1) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}$

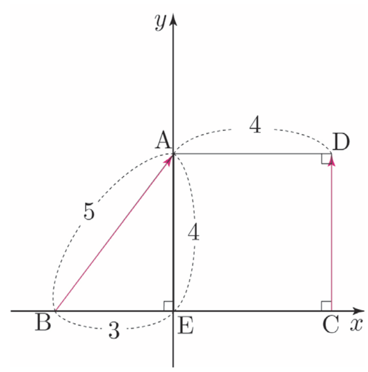


점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 E라 하면

$\overline{BE}=\overline{BC}-\overline{EC}=7-4=3$이고,

삼각형 ABE에서 피타고라스의 정리를 사용하면

$\overline{AE}=\sqrt{5^2-3^2}=4$이다.



오른쪽 그림과 같이 x축과 y축을 설정한 후

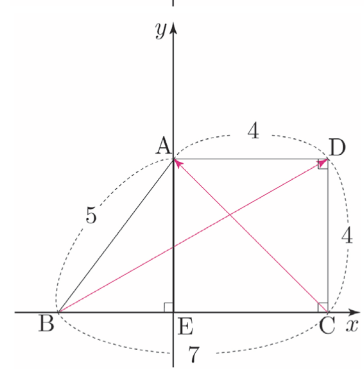
벡터의 분해를 이용하여 벡터를 성분으로 나타내어 보자.

$\overrightarrow{BA}=(3,\ 0)+(0,\ 4)=(3,\ 4)$

$\overrightarrow{CD}=(0,\ 4)$

따라서 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}=3\times0+4\times4=16$이다.

(2) $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CA}$



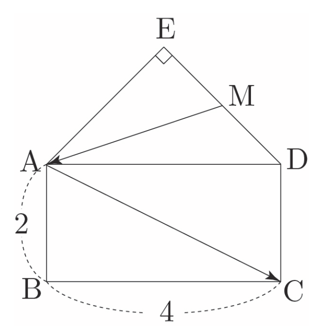
(1)과 같은 논리로 벡터의 분해를 이용하여 벡터를 성분으로 나타내어 보자.

$\overrightarrow{BD}=(7,\ 0)+(0,\ 4)=(7,\ 4)$

$\overrightarrow{CA}=(0,\ 4)+(-4,\ 0)=(-4,\ 4)$

따라서 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CA}=7\times(-4)+4\times4=-28+16=-12$이다.

개념 확인문제 38

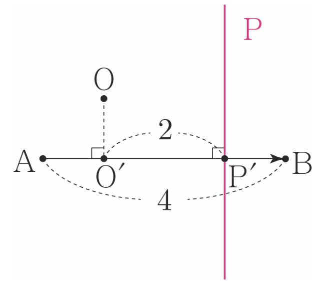


오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=4$인 직사각형 ABCD와 $\overline{EA}=\overline{ED}$, $\angle AED=90^\circ$인 직각이등변삼각형 ADE가 있다. 선분 DE의 중점을 M이라 할 때, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AC}$의 값을 구하시오.

벡터의 내적과 점 P 자취

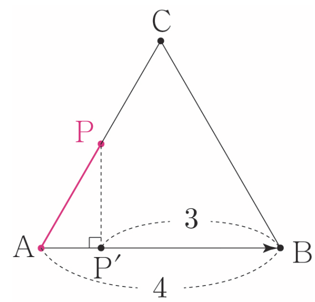
① $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=8$, $|\overrightarrow{AB}|=4$

세 점 O, A, B의 위치관계가 오른쪽 그림과 같을 때,
점 O에서 직선 AB 위에 내린 수선의 발을 O′라 하고
점 P에서 직선 AB 위에 내린 수선의 발을 P′라 하자.
내적값이 양수이므로 두 벡터 $\overrightarrow{O'P'}$, $\overrightarrow{AB}$의 방향이 같으면서
$|\overrightarrow{O'P'}|=2$가 되도록 점 P′를 잡으면
점 P의 자취는 점 P′를 지나고 직선 AB에 수직인 직선이다.



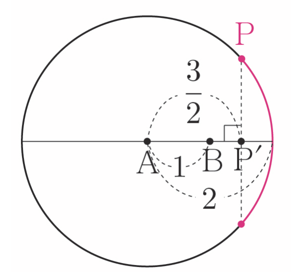
② $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP}\le -12$, $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AC}$ $(0\le t\le 1)$

세 점 A, B, C의 위치관계가 오른쪽 그림과 같을 때,
$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AC}$ $(0\le t\le 1)$이므로 점 P는 선분 AC 위를 움직인다.
점 P에서 직선 AB 위에 내린 수선의 발을 P′라 하자.
내적값이 음수이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BP'}$의 방향이 반대면서
$|\overrightarrow{BP'}|\ge 3$가 되도록 점 P′를 잡으면
점 P의 자취는 오른쪽 그림에서 색칠한 선분이다.



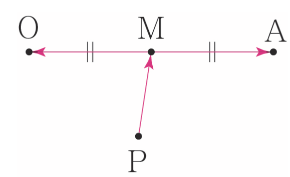
③ $|\overrightarrow{AP}|=2$, $|\overrightarrow{AB}|=1$, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}\ge\frac{3}{2}$

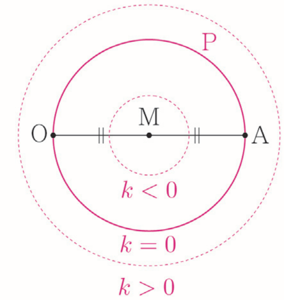
두 점 A, B의 위치관계가 오른쪽 그림과 같을 때,
$|\overrightarrow{AP}|=2$이므로 점 P는 중심이 A이고 반지름이 2인 원의 둘레 위를 움직인다. 점 P에서 직선 AB 위에 내린 수선의 발을 P′라 하자. 내적값이 양수이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AP'}$, $\overrightarrow{AB}$의 방향이 같으면서
$|\overrightarrow{AP'}|\ge\frac{3}{2}$가 되도록 점 P′를 잡으면
점 P의 자취는 오른쪽 그림에서 색칠한 호이다.



④ $\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PA}=k$

두 점 O, A의 위치관계가 오른쪽 그림과 같을 때,
선분 OA의 중점을 M이라 하고, 중점으로 분해하면
$\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MO}$, $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA}$이므로
$(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MO})\cdot(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA})=k$이다.
이때 $\overrightarrow{MO}=-\overrightarrow{MA}$이므로
$(\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA})=|\overrightarrow{PM}|^2-|\overrightarrow{MA}|^2=k$
$\therefore\ |\overrightarrow{PM}|=\sqrt{|\overrightarrow{MA}|^2+k}$
점 P의 자취는 중심이 M이고 반지름의 길이가 $\sqrt{|\overrightarrow{MA}|^2+k}$인 원이다. ($k$의 범위에 따라 반지름의 길이가 달라진다.)





Tip ④에서 소개한 중점분해 Technique은 실전에서 굉장히 유용하게 쓰이는 Technique 중 하나이니 $\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PA}=(\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA})=|\overrightarrow{PM}|^2-|\overrightarrow{MA}|^2=k$가 유도되는 과정을 반드시 기억하도록 하자.

07 사교좌표계 (심화 특강)

성취 기준 | 사교좌표계를 이용하여 벡터를 일차결합으로 나타낼 수 있다.

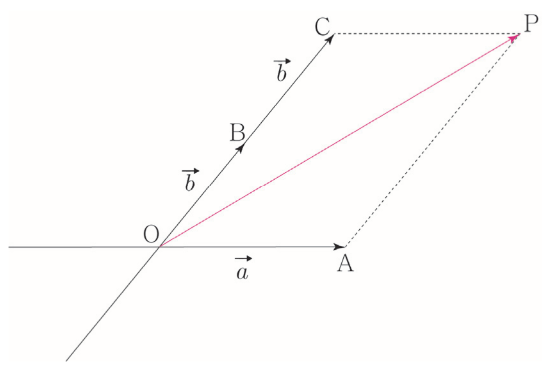
개념 파악하기 (15) 사교좌표계란 무엇일까?

사교좌표계

원하는 좌표를 효과적으로 표현하기 위해 우리가 자주 보는 직교좌표계부터 극좌표계, 천구 좌표계, 관성 좌표계 등 정말 다양한 좌표계가 존재한다.
여러 좌표계 중에서 사교좌표계는 평면벡터 문제 풀이에 큰 도움이 되기에 이를 소개하고자 한다.

직교좌표계가 두 좌표축이 직각으로 교차하는 좌표계라면 사교좌표계는 두 좌표축이 사선으로 교차하는 좌표계를 의미한다.

두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 임의의 점 P의 위치벡터가 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ (s, t는 실수)로 나타내어질 때, 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 이 평면의 기저라고 한다.
오른쪽 그림처럼 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 기저로 하는 평면에 대하여 점 P의 위치벡터는 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}+2\vec{b}$로 나타낼 수 있다.



사교좌표계를 도입해서 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$를 성분으로 표현해보자.
직교좌표계에서 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{E}_1(1,\ 0)$, $\mathrm{E}_2(0,\ 1)$의 원점 O에 대한 위치벡터를 각각 단위벡터 $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$라고 정의한 뒤 성분으로 나타내었다.

이때 $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대응시켜 $\vec{a}=(1,\ 0)$라 하고, $\vec{b}=(0,\ 1)$라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1,\ 2)$로 간단히 표현할 수 있다.

Tip 〈조심해야 할 점〉

$(1,\ 2)$는 실제 우리가 배웠던 직교좌표계에서의 성분이 아니라 새로 정의한 사교좌표계에서의 성분임을 놓치면 안 된다. 실제는 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}+2\vec{b}$와 같다.

크기와 각이 직교좌표계와 다르기 때문에 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$의 값을 구할 때도 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$라 할 수 없다. 실제 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$의 값을 구하기 위해서는 다시 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 일차결합으로 돌려준 후 제곱을 해서 구하면 된다.

만약 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{3}$라면 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\vec{a}+2\vec{b}| \Rightarrow |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=|\vec{a}|^2+4(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2=\frac{10}{3}$

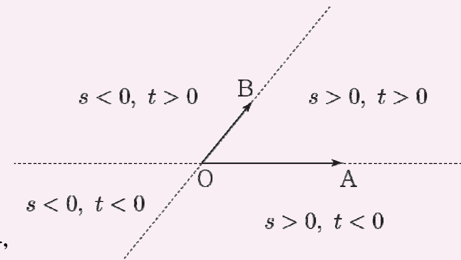
이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{\frac{10}{3}}=\frac{\sqrt{30}}{3}$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ (s, t는 실수)를 만족시키는 점 P의 자취

이번에는 사교좌표계를 이용하여 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ (s, t는 실수)를 만족시키는 점 P의 자취를 구해보자.

Tip 사교좌표계는 직교좌표계를 살짝 찌그러트렸다고 생각하면 되고, 헷갈리는 경우에는 사교좌표계와 상대적인 위치관계가 동일한 직교좌표계를 설정하여 직교좌표계를 먼저 해석하고 이를 바탕으로 사교좌표계를 해석하면 된다.

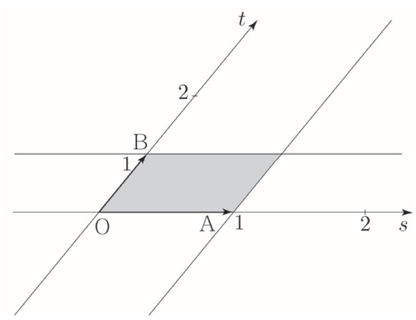
직교좌표계를 떠올리면서 s, t의 부호에 따라 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ (s, t는 실수)를 만족시키는 점 P가 나타내는 영역을 구분하면 오른쪽 그림과 같다.



$s=0$일 때, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$이므로 점 P의 자취는 직선 OB이고,
$t=0$일 때, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$이므로 점 P의 자취는 직선 OA이다.

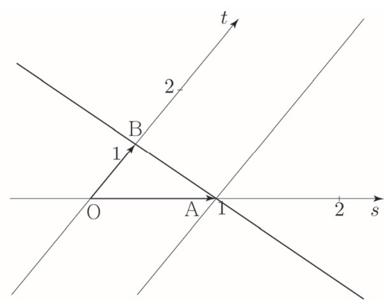
① $0 \le s \le 1,\ 0 \le t \le 1$일 때

점 P의 자취는 두 선분 OA, OB를 이웃하는 두 변으로 하는 평행사변형과 그 내부이다.



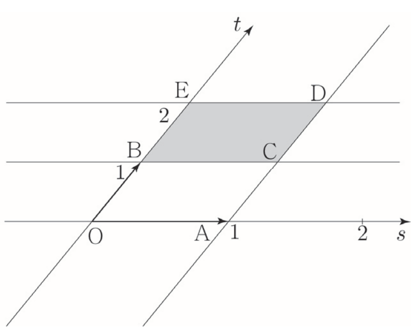
② $s+t=1$일 때

점 P의 자취는 직선 AB이다.
(직선 $x+y=1$을 떠올려보자.)



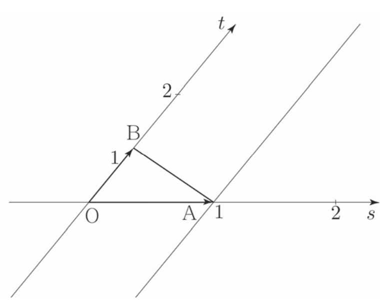
③ $0 \le s \le 1,\ 1 \le t \le 2$일 때

점 P의 자취는 평행사변형 BCDE와 그 내부이다.



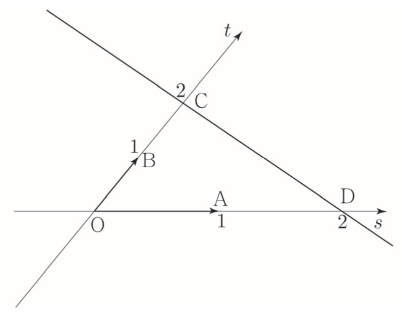
④ $s \ge 0,\ t \ge 0,\ s+t=1$일 때

점 P의 자취는 선분 AB이다.



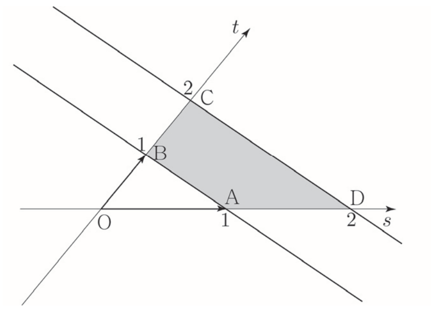
⑤ $s+t=2$일 때

점 P의 자취는 직선 CD이다.
(직선 $x+y=2$을 떠올려보자.)



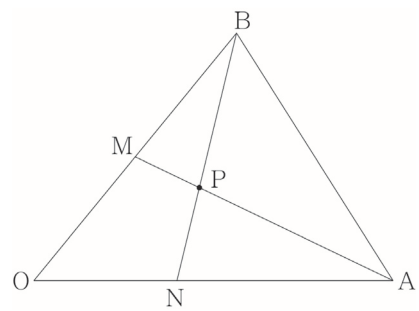
⑥ $s \ge 0,\ t \ge 0,\ 1 \le s+t \le 2$일 때

점 P의 자취는 사각형 ABCD와 그 내부이다.
(직선 $x+y=a$에서 $1 \le a \le 2$일 때를 떠올려보자.)



벡터를 일차결합으로 나타내기

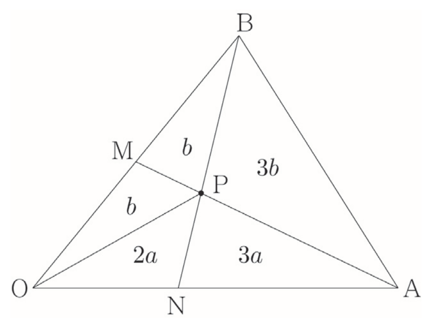
오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABO에서 선분 OB의 중점을 M,
선분 OA를 $2:3$로 내분하는 점을 N이라 하고,
두 선분 BN, AM의 교점을 P라 할 때,
$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$를 만족시키는 $s,\ t$의 값을 구해보자.



① 넓이비를 이용하는 방법 (중학교 도형 해석)

$\overrightarrow{ON}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OA}$이므로 선분 BP와 선분 PN의 길이비만 구하면 된다.
넓이비를 이용하여 이를 구해보자.

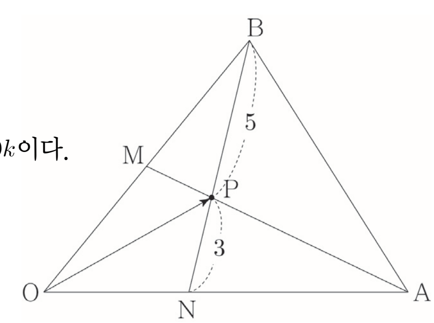
삼각형 OPN의 넓이를 $2a$라 하면, 높이가 동일하고 밑변의 길이비가
$\overline{ON}:\overline{NA}=2:3$이므로 삼각형 PNA의 넓이는 $3a$이다.
삼각형 OPM의 넓이를 b라 하면, 높이가 동일하고 밑변의 길이비가
$\overline{OM}:\overline{MB}=1:1$이므로 삼각형 PMB의 넓이는 b이다.



삼각형 BPA의 넓이를 x라 하면
삼각형 OBN의 넓이는 $2a+2b$, 삼각형 BNA의 넓이는 $3a+x$이다.
이때 두 삼각형 OBN, BNA는 높이가 동일하고 밑변의 길이비가
$\overline{ON}:\overline{NA}=2:3$이므로 $2a+2b:3a+x=2:3 \Rightarrow 6a+2x=6a+6b \Rightarrow x=3b$

삼각형 OAM의 넓이는 $b+5a$, 삼각형 BAM의 넓이는 $4b$이다.
이때 두 삼각형 OAM, BAM는 높이가 동일하고 밑변의 길이비가
$\overline{OM}:\overline{MB}=1:1$이므로 $b+5a=4b \Rightarrow 5a=3b \Rightarrow a:b=3:5$

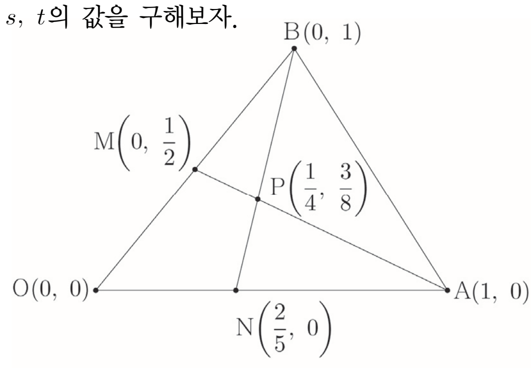
$a=3k,\ b=5k$라 하면 삼각형 BPA의 넓이는 $15k$, 삼각형 PNA의 넓이가 $9k$이다.
이때 두 삼각형 BPA, PNA는 높이가 동일하고 밑변의 길이비는
$\overline{BP}:\overline{PN}=5:3$이다.



$\overrightarrow{OP}=\dfrac{5}{8}\overrightarrow{ON}+\dfrac{3}{8}\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\dfrac{3}{8}\overrightarrow{OB}$이므로 $s=\dfrac{1}{4},\ t=\dfrac{3}{8}$이다.

② **사교좌표계를 이용하는 방법**

이번에는 사교좌표계를 이용하여 $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$를 만족시키는 s, t의 값을 구해보자.



O(0, 0), A(1, 0), B(0, 1)라 하면 $M\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$, $N\left(\frac{2}{5},\ 0\right)$이다.

직선 AM의 방정식은 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$이고,

직선 BN의 방정식은 $y = -\frac{5}{2}x + 1$이므로

두 직선의 교점의 좌표를 구하면 $P\left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{8}\right)$이다.

$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$에서 $\left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{8}\right) = (s,\ 0) + (0,\ t) = (s,\ t)$이므로 $s = \frac{1}{4}$, $t = \frac{3}{8}$이다.

별개로 $\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB}$를 만족시키는 k, l의 값을 구해보자.

$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM} = \left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{8}\right) - \left(0,\ \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8}\right)$

$\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB}$에서 $\left(\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8}\right) = (k,\ 0) + (0,\ l) = (k,\ l)$이므로 $k = \frac{1}{4}$, $l = -\frac{1}{8}$이다.

이처럼 사교좌표계를 이용하면 원하는 벡터를 일차결합으로 손쉽게 나타낼 수 있다.

Tip

이전 Tip에서도 언급했듯이 $\left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{8}\right)$는 실제 우리가 배웠던 직교좌표계에서의 성분이 아니라 새로 정의한 사교좌표계에서의 성분임을 놓치면 안 된다.

예를 들어 선분 BP와 선분 PN의 길이를 구할 때, B(0, 1), $P\left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{8}\right)$, $N\left(\frac{2}{5},\ 0\right)$에서

$|\overrightarrow{BP}| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{8} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{29}}{8}$,

$|\overrightarrow{PN}| = \sqrt{\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{400} + \frac{9}{64}} = \frac{3\sqrt{29}}{40}$

라고 판단하지 않도록 유의해야 한다.

올바르게 구하면 $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{5}{8}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{PN} = \frac{3}{20}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{8}\overrightarrow{OB}$이므로 다음과 같다.

$|\overrightarrow{BP}|^2 = \left|\frac{1}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{5}{8}\overrightarrow{OB}\right|^2 \Rightarrow |\overrightarrow{BP}| = \sqrt{\frac{1}{16}|\overrightarrow{OA}|^2 - \frac{5}{16}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{25}{64}|\overrightarrow{OB}|^2}$

$|\overrightarrow{PN}|^2 = \left|\frac{3}{20}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{8}\overrightarrow{OB}\right|^2 \Rightarrow |\overrightarrow{PN}| = \sqrt{\frac{9}{400}|\overrightarrow{OA}|^2 - \frac{9}{80}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{9}{64}|\overrightarrow{OB}|^2}$

또한 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{MP}$의 값을 구할 때, $\overrightarrow{OP} = \left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{8}\right)$, $\overrightarrow{MP} = \left(\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8}\right)$에서

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{MP} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{16} - \frac{3}{64} = \frac{1}{64}$라고 판단하지 않도록 유의해야 한다.

올바르게 구하면 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{8}\overrightarrow{OB}$이므로 다음과 같다.

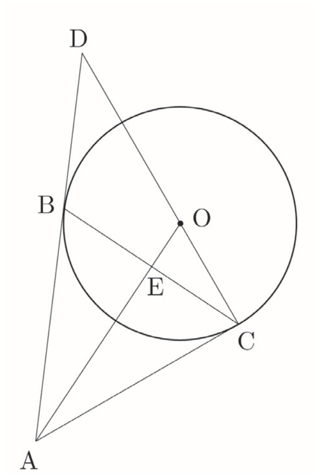
$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{MP} = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OB}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{8}\overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{16}|\overrightarrow{OA}|^2 + \frac{1}{16}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \frac{3}{64}|\overrightarrow{OB}|^2$

즉, 사교좌표계는 단순히 벡터를 일차결합으로 손쉽게 표현하기 위해 도입한 도구로서 받아들이면 된다.

4 Theme 내분점과 외분점의 위치벡터

015

그림과 같이 점 A에서 중심이 O인 원에 접하도록 접선을 그을 때, 두 접점을 B, C라 하자.
직선 AB와 직선 CO가 만나는 점을 D라 하고, 선분 AO와 선분 BC가 만나는 점을 E라 하자.
$|\overrightarrow{AC}|=3$, $|\overrightarrow{AD}|=5$일 때, $\overrightarrow{AO}=m\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{AD}$이고 $k\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AO}$이다. 세 실수 m, n, k에 대하여 $40(m-n+k)$의 값을 구하시오.

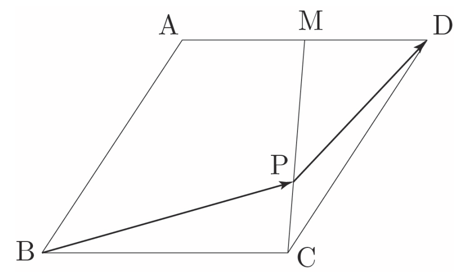


016

정삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하자.
$|\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}|=8$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다.
$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

017

그림과 같은 평행사변형 ABCD에서 선분 AD의 중점을 M, 선분 MC를 $2:1$로 내분하는 점을 P라 하자.
$\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$라 할 때, $\overrightarrow{BP}=m\vec{a}+n\vec{b}$이고, $\overrightarrow{PD}=k\vec{a}+l\vec{b}$이다. 네 실수 m, n, k, l에 대하여 $m+2n-3k+12l$의 값을 구하시오.



018

삼각형 ABC의 무게중심을 G, 선분 BC의 중점을 M, 선분 AC를 $1:3$으로 내분하는 점을 D라 하자.
실수 k와 선분 AC 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{GD}=k\overrightarrow{MP}$이다.
$\overrightarrow{BP}=m\overrightarrow{BA}+n\overrightarrow{BC}$를 만족시키는 실수 m, n에 대하여 $m\times n=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

019

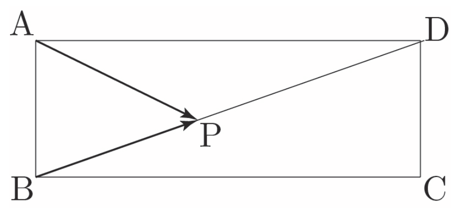
좌표평면 위에 있는 삼각형 ABC에 대하여 선분 BC의 중점을 M, 선분 AC의 중점을 N이라 할 때, 선분 AM와 선분 BN가 만나는 점을 P(2, 3)라 하자.
세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라 할 때, $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2$의 값을 구하시오.

평면벡터

028

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{BC}} = 4$인 직사각형 ABCD에서 대각선 BD 위의 점을 P라 하자. $|\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M \times m = \frac{q}{p}$이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



6 Theme 평면벡터의 자취

029

평면 위의 세 점 O, A, B에 대하여

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 3, \quad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 2$$

일 때, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = m\overrightarrow{\mathrm{OA}} + n\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $(0 \le m \le 2,\ 0 \le n \le 1)$를 만족시키는 점 P가 나타내는 영역의 넓이는 k이다.

k^2의 값을 구하시오.

030

평면 위에 한 변의 길이가 2인 정삼각형 OAB이 있다.

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = m\overrightarrow{\mathrm{OA}} + n\overrightarrow{\mathrm{OB}} \ (m \ge 0,\ n \ge 0)$$

를 만족시키는 점 P가 그리는 도형에 대한 설명을 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ. $m+n=1$일 때, 점 P가 그리는 도형은 선분 AB이다.

ㄴ. $3m+n=1$일 때, 점 P가 그리는 도형의 길이는 $\frac{2\sqrt{7}}{3}$이다.

ㄷ. $2m+n \le 2$일 때, 점 P가 그리는 영역의 넓이는 $\sqrt{3}$이다.

ㄹ. $1 \le m+n \le 2$일 때, 점 P가 그리는 영역의 넓이는 $3\sqrt{3}$이다.

ㅁ. $6m+4n=4$일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$의 최솟값은 $\frac{2\sqrt{21}}{7}$이다.

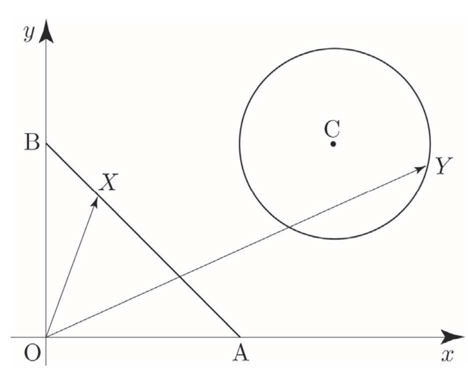
031

좌표평면 위에 세 점 A(2, 0), B(0, 2), C(3, 2)이 있다. 선분 AB 위를 움직이는 점 X와 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이는 점 Y에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OX}} + \overrightarrow{\mathrm{OY}}$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 영역의 넓이는 $a\pi + b\sqrt{2}$이다. $a+b$의 값을 구하시오.

(단, 점 O는 원점이고, a와 b는 자연수이다.)

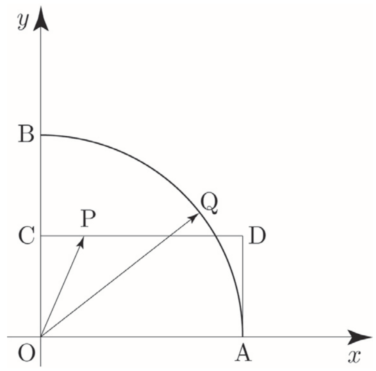


032

좌표평면 위에 네 점 A(2, 0), B(0, 2), C(0, 1), D(2, 1)가 있다. 사각형 OADC의 변 위를 움직이는 점 P와 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB의 호 AB 위를 움직이는 점 Q에 대하여

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 영역을 R라 하자.
점 O로부터 영역 R에 있는 점까지의 거리의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하고, 영역 R의 넓이를 S라 할 때, $M+m+S=a+\sqrt{b}$이다. $a+b$의 값을 구하시오.
(단, 점 O는 원점이고, a와 b는 자연수이다.)

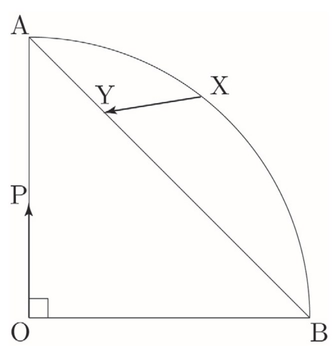


033

그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위를 움직이는 점 X, 선분 AB 위를 움직이는 점 Y, 선분 OA 위를 움직이는 점 P에 대하여

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{XY}$$

를 만족시키는 점 Q가 나타내는 영역의 넓이는?



① $\pi+2+\sqrt{2}$ ② $\pi+2+2\sqrt{2}$ ③ $\pi+2+4\sqrt{2}$
④ $\pi+4+3\sqrt{2}$ ⑤ $\pi+4+4\sqrt{2}$

7 Theme 성분으로 나타낸 평면벡터의 내적

034

좌표평면 위의 두 점 A(2, a), B(a+1, 3)에 대하여 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = -8$일 때, 양수 a의 값을 구하시오.
(단, 점 O는 원점이다.)

035

두 벡터 $\vec{a}=(1,\ 2)$, $\vec{b}=(-2,\ 1)$에 대하여
두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-3\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?

① $-\sqrt{5}$ ② $-\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ③ $-\frac{3\sqrt{5}}{5}$
④ $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

036

세 벡터 $\vec{a}=(k,\ 2)$, $\vec{b}=(k+1,\ k+3)$, $\vec{c}=(-2,\ k^2)$에 대하여 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 평행하고 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{c}$가 서로 수직일 때, 상수 k의 값은?

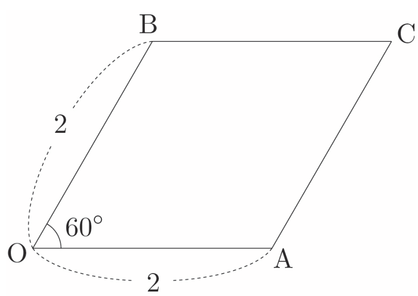
① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

055

좌표평면에서 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=2$이고 $\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$인 평행사변형 OACB에 대하여 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $(0\le s\le 1,\ 0\le t\le 1)$
(나) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3$

$|3\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m$의 값은?



① $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ② $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$ ③ $\sqrt{6}$
④ $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{30}}{2}$

056

좌표평면에서 두 점 $\mathrm{P}(1,\ -\sqrt{2})$, $\mathrm{Q}(-3,\ 3\sqrt{2})$에 대하여 두 점 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lvert\overrightarrow{\mathrm{OA}}\rvert\le 2\sqrt{3}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\ge 3$
(나) $\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=3\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-9$

$\lvert\overrightarrow{\mathrm{AB}}\rvert$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $(M-m)^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

057

좌표평면 위에 $\overline{\mathrm{OA}}=3$인 삼각형 OCA가 있다. 네 점 O, A, B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lvert\overrightarrow{\mathrm{OB}}\rvert=1$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$
(나) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}$의 최댓값은 20이다.

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{\lvert\overrightarrow{\mathrm{AB}}\rvert}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$를 만족시키는 점 P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$의 최솟값은 $a\sqrt{2}+b$이다. $36(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.)

Training – 2 step

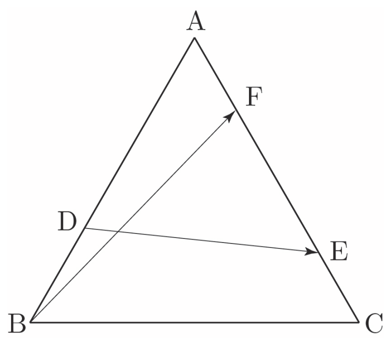
기출 적용편

1. 평면벡터

089 | 2014학년도 고3 9월 평가원 B형

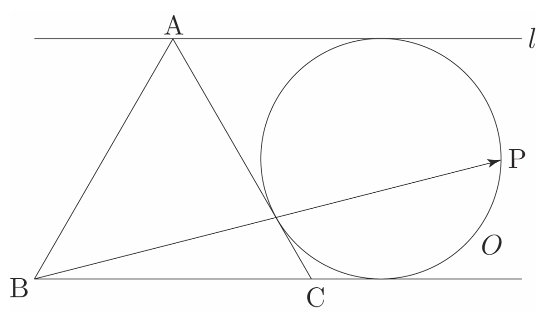
한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC에서 변 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 D라 하고, 변 AC를 $3:1$과 $1:3$으로 내분하는 점을 각각 E, F라 할 때, $|\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2$의 값은? [3점]

① 17 ② 18 ③ 19
④ 20 ⑤ 21



090 | 2022학년도 사관학교 기하

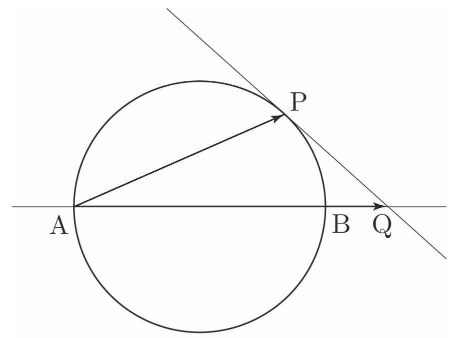
그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC에 대하여 점 A를 지나고 직선 BC에 평행한 직선을 l이라 할 때, 세 직선 AC, BC, l에 모두 접하는 원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은? (단, 원 O의 중심은 삼각형 ABC의 외부에 있다.) [3점]



① 46 ② 47 ③ 48
④ 49 ⑤ 50

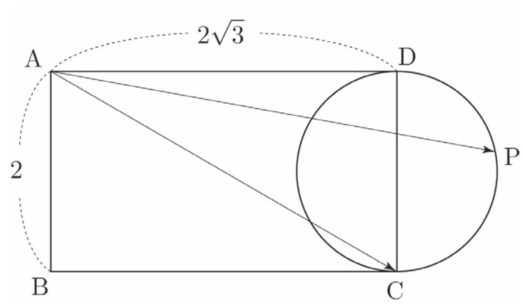
091 | 2019년 고3 10월 교육청 가형

그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 P에서의 접선과 직선 AB가 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q가 선분 AB를 $5:1$로 외분하는 점이고, $\overline{\mathrm{BQ}}=\sqrt{3}$일 때, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 값을 구하시오. [4점]



092 | 2019년 고3 10월 교육청 가형

그림은 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AD}}=2\sqrt{3}$인 직사각형 ABCD와 이 직사각형의 한 변 CD를 지름으로 하는 원을 나타낸 것이다. 이 원 위를 움직이는 점 P에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$의 최댓값은?
(단, 직사각형과 원은 같은 평면 위에 있다.) [4점]



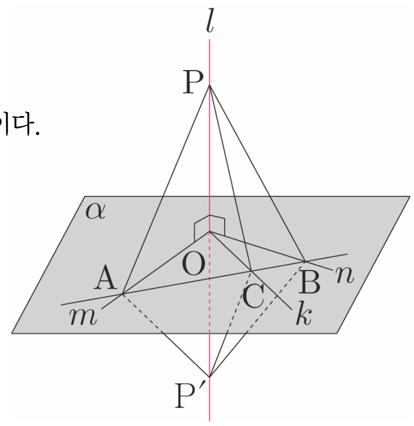
① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

예제 4

직선 l이 평면 α 위의 서로 다른 두 직선 m, n의 교점 O를 지나고 m, n과 각각 수직이면
직선 l은 평면 α와 수직임을 보이시오.

풀이

점 O를 지나고 평면 α 위의 두 직선 m, n과는 다른 임의의 한 직선을 k라 하고,
평면 α 위에서 세 직선 m, n, k와 점 O 이외의 점에서 만나는 직선을 그어
그 교점을 각각 A, B, C라 하자.
또 직선 l 위에 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OP'}}$인 서로 다른 두 점 P, P′을 잡자.



두 직선 m, n은 모두 선분 PP′의 수직이등분선이므로 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AP'}}$, $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{BP'}}$이다.
또 $\overline{\mathrm{AB}}$는 공통이므로 $\triangle\mathrm{PAB}\equiv\triangle\mathrm{P'AB}$이다.
그러므로 $\angle\mathrm{PAC}=\angle\mathrm{P'AC}$이다.
또 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AP'}}$이고 $\overline{\mathrm{AC}}$는 공통이므로 $\triangle\mathrm{PAC}\equiv\triangle\mathrm{P'AC}$이다.
그러므로 $\overline{\mathrm{CP}}=\overline{\mathrm{CP'}}$이다.

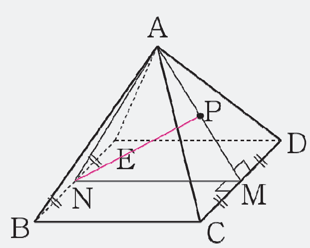
삼각형 PCP′은 이등변삼각형이고 점 O는 $\overline{\mathrm{PP'}}$의 중점이므로
$\overline{\mathrm{PP'}}\perp\overline{\mathrm{OC}}$, 즉 $l\perp k$이다.

따라서 직선 l은 점 O를 지나는 평면 α 위의 임의의 직선과 수직이므로 $l\perp\alpha$이다.

Tip 1 [예제 4]는 문제 풀이 과정에서 어떤 직선과 평면이 수직임을 증명할 때 자주 사용되는 논리이니 반드시 기억하도록 하자. 직선 l이 평면 α와 수직임을 보이기 위해서는 직선 l이 평면 α 위의 서로 다른 두 직선과 한 점에서 만나고 서로 다른 두 직선과 수직임을 보이면 된다.

Tip 2 직선 l과 평면 α가 서로 수직이면 평면 α가 포함하는 직선도 직선 l과 서로 수직이다.

ex 오른쪽 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 같은 사각뿔에서
두 선분 CD, BE의 중점을 각각 M, N이라 하고,
선분 AM 위를 한 점을 P라 할 때, 두 직선 NP, CD가 이루는
각의 크기를 구하시오.



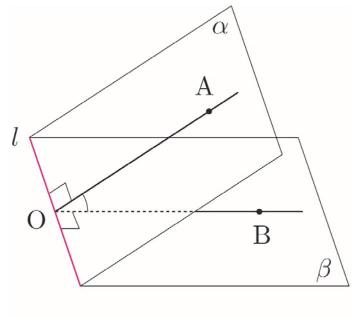
(직선 CD)$\perp$(직선 MN), (직선 CD)$\perp$(직선 AM)이므로
(직선 CD)$\perp$(평면 AMN)이다. 이때 평면 AMN은 직선 NP를
포함하므로 (직선 CD)$\perp$(직선 NP)이다.
따라서 두 직선 NP, CD가 이루는 각의 크기는 90°이다.

개념 파악하기 (6) 이면각이란 무엇일까?

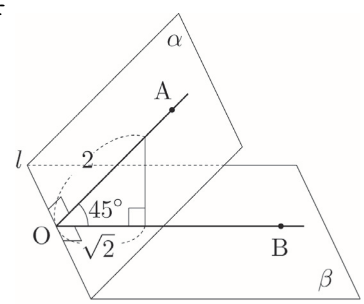
이면각

공간에서 두 평면이 이루는 각에 대하여 알아보자.

평면 위의 직선은 그 평면을 두 부분으로 나누는데, 그 각각을 반평면이라 한다.
오른쪽 그림과 같이 직선 l을 공유하는 두 반평면 α, β로 이루어진 도형을 **이면각**이라 한다.
이때 직선 l을 이면각의 변, 두 반평면 α, β를 각각 이면각의 면이라 한다.
이면각의 변 l 위의 한 점 O를 지나고 직선 l에 수직인 두 반직선 OA, OB를 반평면 α, β 위에 각각 그으면 $\angle$AOB의 크기는 점 O의 위치에 관계없이 일정하다.
이 일정한 각의 크기를 **이면각의 크기**라 한다.
일반적으로 서로 다른 두 평면이 만나서 생기는 이면각 중에서 그 크기가 크지 않은 쪽의 각을 두 평면이 이루는 각이라 한다.

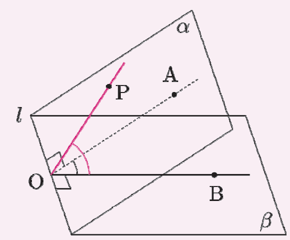


두 평면 α, β가 이루는 각이 직각일 때, 이 두 평면은 수직이라 하고,
기호로 $\alpha \perp \beta$와 같이 나타낸다.

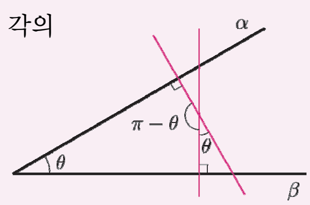


ex 오른쪽 그림에서 반 평면 α, β의 교선 l에 대하여 $l \perp \overline{OA}$, $l \perp \overline{OB}$이고,
$\cos(\angle AOB)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로 이면각의 크기는 45° 이다.

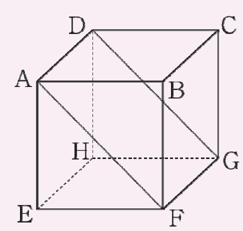
Tip 1 이면각은 두 평면의 교선 위의 한 점에서 교선에 수직인 두 반직선이 이루는 각이므로 두 반직선이 교선에 수직이어야 함을 기억하자. 그림과 같이 $\angle$POB는 이면각이 될 수 없다.



Tip 2 교선이 점으로 보이게 겨냥하면 오른쪽 그림과 같으므로 두 평면이 이루는 각의 크기는 두 평면에 각각 수직인 두 직선이 이루는 각의 크기와 같다.

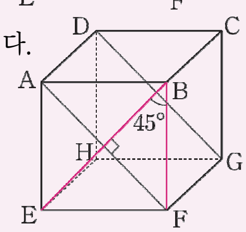


ex1 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 두 평면 ABCD와 AFGD가 이루는 각의 크기를 구하시오.

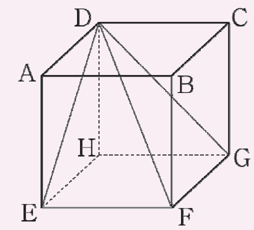


(직선 BE)$\perp$(평면 AFGD), (직선 BF)$\perp$(평면 ABCD)이고,
두 평면이 이루는 각의 크기는 두 평면에 각각 수직인 두 직선이 이루는 각의 크기와 같으므로 두 평면 ABCD와 AFGD가 이루는 각의 크기는 두 직선 BE, BF가 이루는 각의 크기와 같다.
따라서 두 평면 ABCD와 AFGD가 이루는 각의 크기는 $\angle EBF = 45^\circ$ 이다.

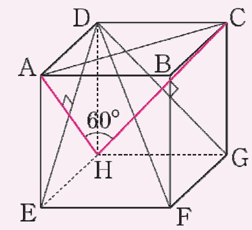
cf) 정사각형 AEFB의 두 대각선은 서로 수직이므로 $\overline{BE} \perp \overline{AF}$ 이고,
평면 AEFB와 직선 AD는 서로 수직이므로 $\overline{BE} \perp \overline{AD}$ 이다.
따라서 (직선 BE)$\perp$(평면 AFGD)이다. (by [예제 4])



ex2 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 두 평면 DEF와 DFG가 이루는 각의 크기를 구하시오.

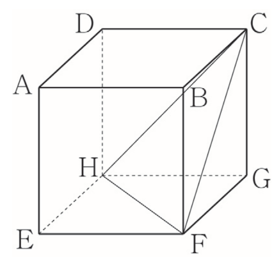


(직선 HA)$\perp$(평면 DEF), (직선 HC)$\perp$(평면 DFG)이고,
두 평면이 이루는 각의 크기는 두 평면에 각각 수직인 두 직선이 이루는 각의 크기와 같으므로 두 평면 DEF와 DFG가 이루는 각의 크기는 두 직선 HA, HC가 이루는 각의 크기와 같다.
삼각형 AHC는 $\overline{HA} = \overline{HC} = \overline{AC}$이므로 정삼각형이다.
따라서 두 평면 DEF와 DFG가 이루는 각의 크기는 $\angle AHC = 60°$이다.



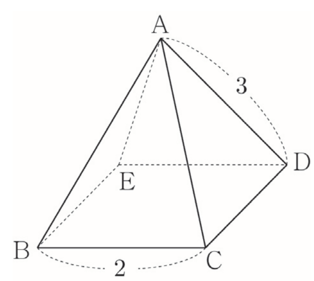
개념 확인문제 10

오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 평면 CHF와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.



개념 확인문제 11

오른쪽 그림과 같이 밑면이 정사각형이고 옆면이 모두 이등변삼각형인 사각뿔에서 $\overline{BC} = 2$, $\overline{AD} = 3$일 때, 평면 ACD와 평면 BCDE가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.

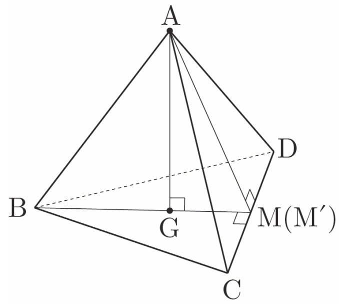


정사면체

자주 출제되는 입체도형인 정사면체의 특징에 대하여 알아보자.

한 변의 길이를 a라 할 때, 다음이 성립한다.

① 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발 = 삼각형 BCD의 무게중심



점 A에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 M, 점 B에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 M′이라 하면 $\overline{\mathrm{AM}} \perp \overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{BM'}} \perp \overline{\mathrm{CD}}$이다.
이때 삼각형 ACD와 삼각형 BCD가 정삼각형이므로 점 M과 점 M′은 선분 CD의 중점이 되어 점 M과 점 M′이 서로 일치한다.
즉 $\overline{\mathrm{BM'}} \perp \overline{\mathrm{CD}}$에서 $\overline{\mathrm{BM}} \perp \overline{\mathrm{CD}}$ ⋯ ㉠
한편 $\overline{\mathrm{AG}} \perp$ (평면 BCD), $\overline{\mathrm{AM}} \perp \overline{\mathrm{CD}}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{GM}} \perp \overline{\mathrm{CD}}$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에 의하여 점 G는 선분 BM 위에 있다.
같은 방법으로 점 G는 점 C에서 선분 BD에 내린 수선 위에 있고, 삼각형 BCD는 정삼각형이므로 점 G는 삼각형 BCD의 무게중심이다.

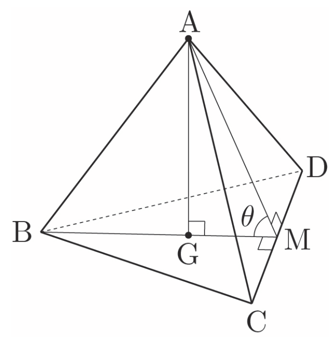
② 정사면체의 높이 $= \dfrac{\sqrt{6}}{3}a$

$\overline{\mathrm{AM}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$, $\overline{\mathrm{GM}} = \dfrac{1}{3}\overline{\mathrm{BM}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a$이므로 삼각형 AGM에서 피타고라스의 정리를 사용하면

$\overline{\mathrm{AG}} = \sqrt{\overline{\mathrm{AM}}^2 - \overline{\mathrm{GM}}^2} = \sqrt{\dfrac{3}{4}a^2 - \dfrac{1}{12}a^2} = \sqrt{\dfrac{2}{3}a^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}a$이다.

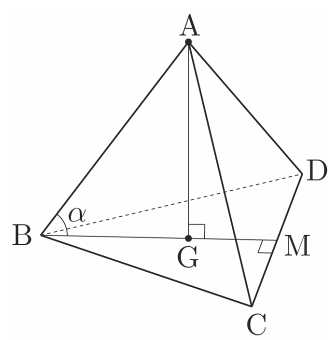
따라서 한 변의 길이가 a인 정사면체의 높이는 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$이다.

③ 정사면체의 두 면이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$



$$\cos\theta = \frac{\overline{\mathrm{GM}}}{\overline{\mathrm{AM}}} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1}{3}$$

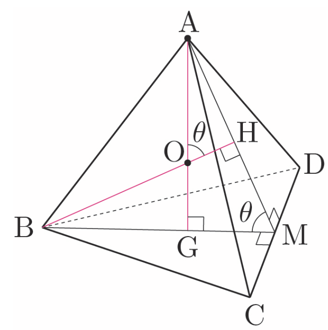
④ 정사면체의 한 모서리와 평면이 이루는 각을 α라 할 때, $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$



$$\cos\alpha = \frac{\overline{\mathrm{BG}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

공간도형과 공간좌표

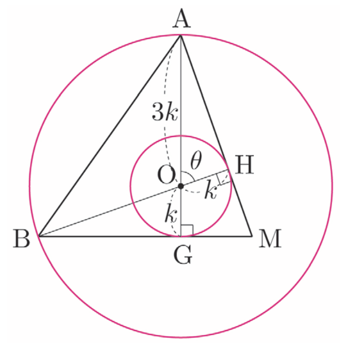
⑤ 정사면체에 내접하는 구와 외접하는 구의 반지름의 비는 $1:3$



오른쪽 그림과 같이 정사면체에서 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 G,
점 B에서 평면 ACD에 내린 수선의 발을 H, 선분 CD의 중점을 M,
두 선분 BH, AG의 교점을 O라 하자.

(직선 BH)$\perp$(평면 ACD), (직선 AG)$\perp$(평면 BCD)이고,
두 평면이 이루는 각의 크기는 두 평면에 각각 수직인 두 직선이
이루는 각의 크기와 같으므로
두 평면 ACD, BCD가 이루는 각의 크기는 두 직선 BH, AG가 이루는 각의 크기와 같다.
따라서 $\angle \mathrm{AMG} = \angle \mathrm{AOH}$가 성립한다.

정사면체에 내접하는 구와 외접하는 구를 그린 후 평면 ABM으로 잘라 단면을
관찰하면 오른쪽 그림과 다음과 같다.



정사면체의 두 면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면
$\cos\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{AO}}} = \dfrac{1}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{OH}} : \overline{\mathrm{OA}} = 1:3$이다.

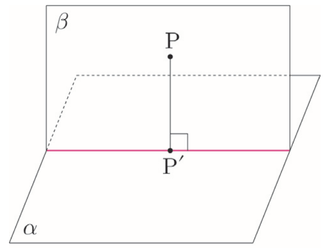
정사면체에 내접하는 구의 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{OH}}$이고
외접하는 구의 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{AO}}$이므로
정사면체에 내접하는 구와 외접하는 구의 반지름의 비는 $1:3$이다.

Tip 특히 ②, ③ 자주 나오는 편이니 값을 기억하고 있는 편이 좋다.
나머지는 결과보다는 유도과정에 포인트를 두고 학습하도록 하자.

평면에 내린 수선의 발 작도하기

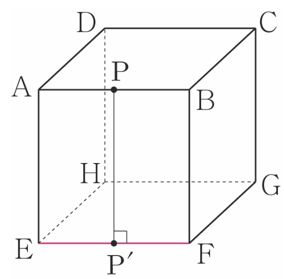
평면 α 위에 있지 않은 점에서 평면 α에 내린 수선의 발을 작도하는 방법에 대해 알아보자.

① 수직인 평면을 이용하기



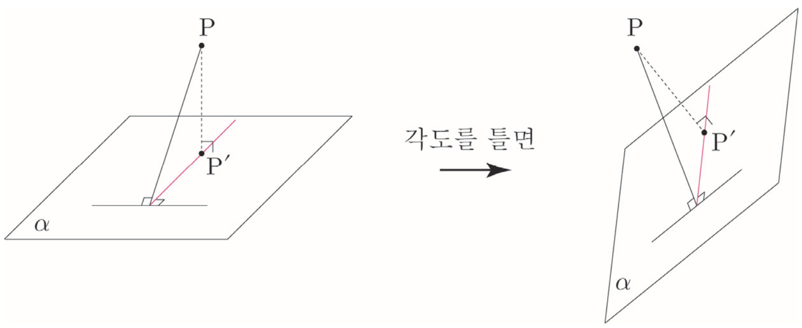
오른쪽 그림과 같이 평면 α에 수직인 평면 β라 하면 평면 β 위의 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발 P′은 두 평면의 교선 위에 떨어진다.
즉, 수직인 평면이 이미 작도되어 있는 상태에서는 교선만 찾으면 비교적 쉽게 수선의 발을 작도할 수 있다.

ex 오른쪽 그림과 같이 정육면체에서 두 평면 AEFB와 EFGH은 서로 수직이므로 점 P에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발은 직선 EF(교선)에 떨어진다.

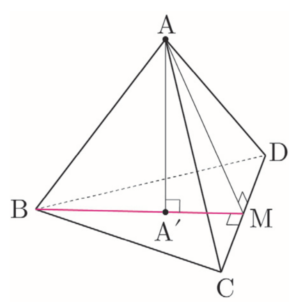


② 삼수선의 정리를 이용하기

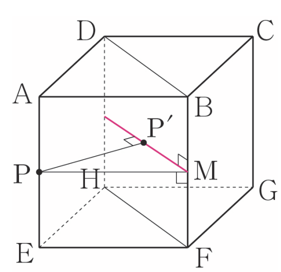
수직인 평면이 작도되어 있지 않다면 삼수선의 정리를 이용하여 수직인 평면을 작도한 뒤 수선의 발이 떨어지는 교선을 만들어주면 된다.
다음 그림과 같이 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발은 색칠한 선 위에 떨어진다.



ex1 오른쪽 그림과 같이 정사면체에서 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 작도해보자. 선분 CD의 중점을 M이라 할 때, 삼수선의 정리를 이용하여 평면 BCD에 수직인 평면을 작도하면 두 평면의 교선은 색칠한 선이다.
따라서 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발은 색칠한 선(교선)위에 떨어진다.



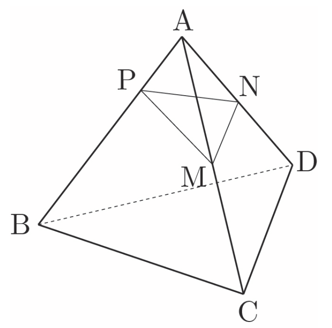
ex2 오른쪽 그림과 같이 정육면체에서 선분 AE의 중점 P에서 평면 DHFB에 내린 수선의 발을 작도해보자. 선분 BF의 중점을 M이라 할 때, 삼수선의 정리를 이용하여 평면 DHFB에 수직인 평면을 작도하면 두 평면의 교선은 색칠한 직선이다.
따라서 점 P에서 평면 DHFB에 내린 수선의 발은 색칠한 선(교선) 위에 떨어진다.



3 Theme 이면각의 크기

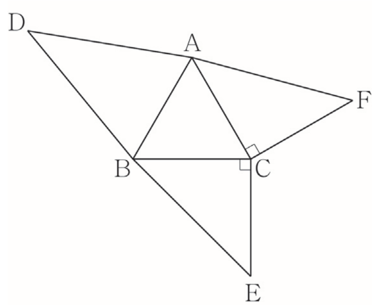
013

모든 모서리의 길이가 4인 정사면체 ABCD에서 선분 AB를 1 : 3으로 내분하는 점을 P, 선분 AC의 중점을 M, 선분 AD의 중점을 N이라 하자. 평면 PMN과 평면 BCD가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $60\cos^2\theta$의 값을 구하시오.



014

그림은 정삼각형 ABC를 한 면으로 하고, $\overline{AC} = \overline{CE} = 2$, $\angle BCE = \angle ACF = 90°$ 인 사면체의 전개도이다.



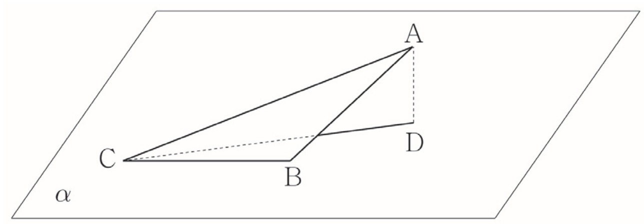
이 전개도로 사면체를 만들 때, 세 점 D, E, F가 합쳐지는 점을 P라 하자. 사면체 PABC에서 평면 PAB와 평면 ABC가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

015

평면 α 위의 세 점 B, C, D와 평면 α 위에 있지 않은 점 A가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 A에서 평면 α에 내린 수선의 발은 D이다.
(나) $\overline{AB} = \overline{BC} = 4$, $\overline{BD} = \sqrt{10}$, $\angle ACB = \frac{\pi}{6}$

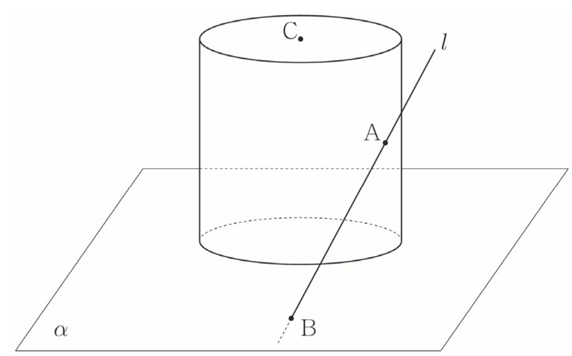


두 평면 ABC와 ACD가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $60\tan^2\theta$의 값을 구하시오.

016

그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 2이고 높이가 6인 원기둥이 평면 α 위에 놓여 있다. 원기둥에 접하도록 직선 l을 그을 때, 접점을 A라 하고 직선 l과 평면 α의 교점을 B라 하자. 평면 α와 만나지 않는 원기둥의 밑면의 중심을 C라 하자. 점 A, B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 A와 평면 α 사이의 거리는 4이다.
(나) $3\overline{AC} = \overline{BC}$

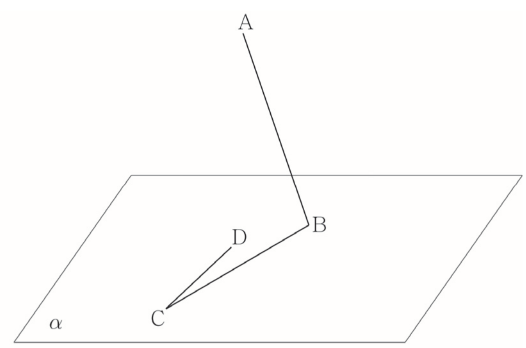


평면 ABC와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $30\cos^2\theta$의 값을 구하시오.

017

평면 α 위의 네 점 B, C, E, F와 평면 α 위에 있지 않은 두 점 A, D가 다음 조건을 만족시킨다.

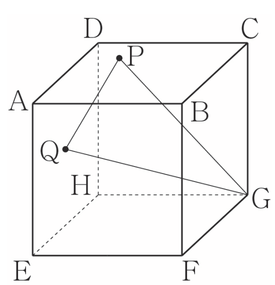
(가) 두 점 A, D에서 평면 α에 내린 수선의 발은 각각 E, F이다.
(나) 두 점 A, D에서 직선 BC에 내린 수선의 발은 각각 B, C이다.
(다) 점 A에서 직선 CD에 내린 수선의 발은 D이다.
(라) $\overline{AE} = \overline{BC} = 7$, $\overline{CD} = 3\sqrt{2}$, $\overline{DF} = 3$



평면 CDF와 평면 ACD가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $32\tan^2\theta$의 값을 구하시오. (단, 선분 AD와 선분 EF는 만나지 않는다.)

018

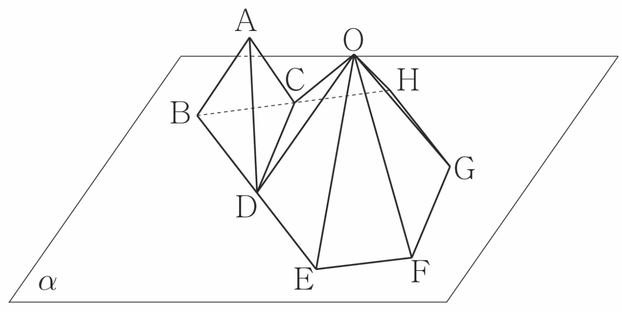
그림과 같이 한 모서리의 길이가 4인 정육면체 ABCD − EFGH에서 선분 BD를 3 : 1로 내분하는 점을 P, 두 선분 AH, DE의 교점을 Q라 하자. 평면 PQG와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\tan^2\theta$의 값을 구하시오.



019

그림과 같이 높이가 $\sqrt{3}$인 정육각뿔과 밑면의 한 모서리를 공유하는 정사면체가 평면 α 위에 놓여 있다. 평면 ACD과 직선 BO는 서로 수직이다. 평면 ODE과 평면 OFG가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $60\cos^2\theta$의 값을 구하시오.

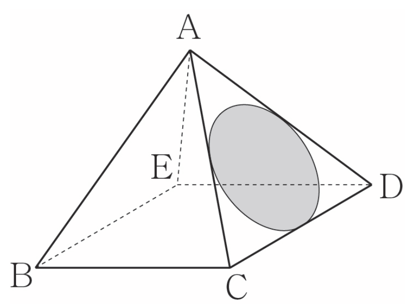
(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)



4 Theme 정사영의 넓이

020

그림과 같이 모든 모서리의 길이가 6인 정사각뿔 A − BCDE에서 삼각형 ACD에 내접하는 원의 평면 BCDE 위로의 정사영의 넓이는?

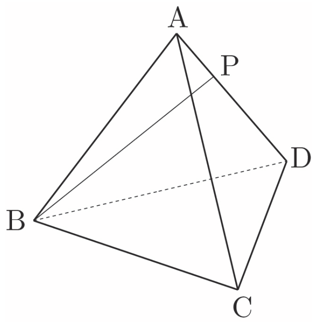


① $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ ② $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ ③ $\sqrt{3}\pi$
④ $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{3}\pi$

5 Theme 정사영의 길이

027

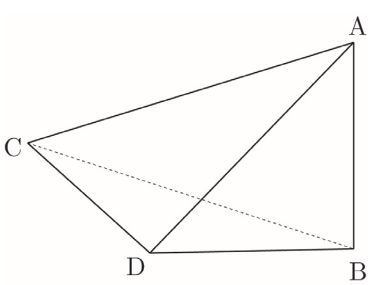
그림과 같이 한 모서리의 길이가 6인 정사면체 ABCD에서 선분 AD를 1 : 2로 내분하는 점을 P라 하자.
선분 BP의 평면 ABC 위로의 정사영의 길이는?



① $\frac{\sqrt{57}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{57}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{57}}{2}$
④ $\frac{2\sqrt{57}}{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{57}}{6}$

028

그림과 같이 $\angle BDC = 120^\circ$, $\overline{CD} = \overline{BD} = 2$ 인 삼각형 BCD를 한 면으로 하는 사면체 ABCD이 있다.
꼭짓점 A의 평면 BCD 위로의 정사영은 B이고
선분 BC의 평면 ACD 위로의 정사영의 길이가 $\sqrt{10}$일 때, 사면체 ABCD의 부피는?

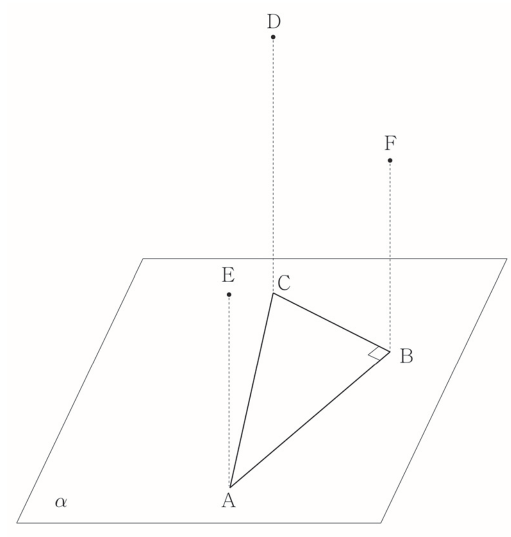


① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

029

그림과 같이 평면 α 위에 $\angle B = 90^\circ$, $\overline{AC} = 5$, $\overline{AB} = 4$인 직각삼각형 ABC가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 세 점 D, E, F는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 세 점 D, E, F의 평면 α 위로의 정사영은 각각 C, A, B이다.
(나) $\overline{AE} = \overline{BF} = 5$, $\overline{CD} = 6$



선분 EF의 중점을 M이라 할 때, 선분 AM의 평면 ABD 위로의 정사영의 길이는?

① $\sqrt{23}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ 5
④ $\sqrt{26}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

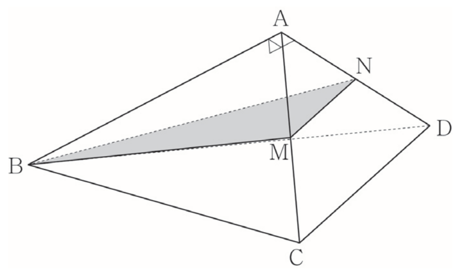
공간도형과 공간좌표

046 | 2020학년도 사관학교 가형

그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ACD를 한 면으로 하는 사면체 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

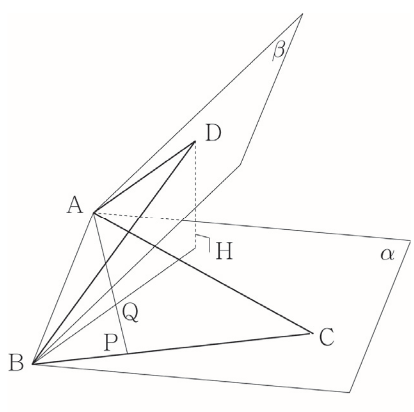
(가) $\overline{BC} = 3\sqrt{10}$
(나) $\overline{AB} \perp \overline{AC}$, $\overline{AB} \perp \overline{AD}$

두 모서리 AC, AD의 중점을 각각 M, N이라 할 때, 삼각형 BMN의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이를 S라 하자. $40 \times S$의 값을 구하시오. [4점]



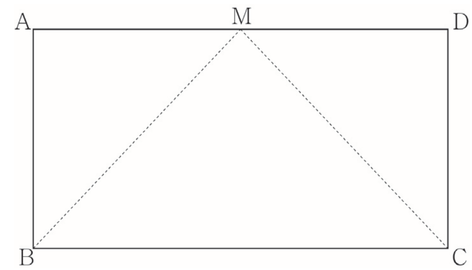
047 | 2016년 고3 10월 교육청 가형

그림과 같이 평면 α 위에 넓이가 27인 삼각형 ABC가 있고, 평면 β 위에 넓이가 35인 삼각형 ABD가 있다. 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점을 P라 하고 선분 AP를 $2:1$로 내분하는 점을 Q라 하자. 점 D에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 Q는 선분 BH의 중점이다. 두 평면 α, β가 이루는 각을 θ라 할 때, $\cos\theta = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

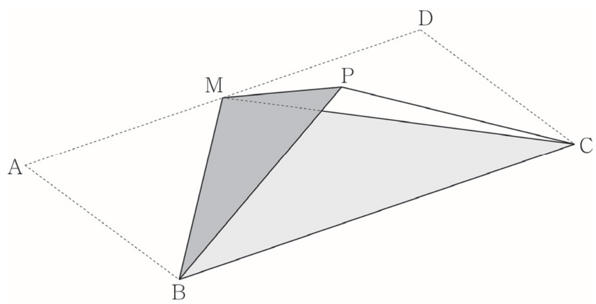


048 | 2022학년도 사관학교 기하

[그림 1]과 같이 $\overline{AB} = 3$, $\overline{AD} = 2\sqrt{7}$인 직사각형 ABCD 모양의 종이가 있다. 선분 AD의 중점을 M이라 하자. 두 선분 BM, CM을 접는 선으로 하여 [그림 2]와 같이 두 점 A, D가 한 점 P에서 만나도록 종이를 접었을 때, 평면 PBM과 평면 BCM이 이루는 각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은? (단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.) [4점]



[그림 1]

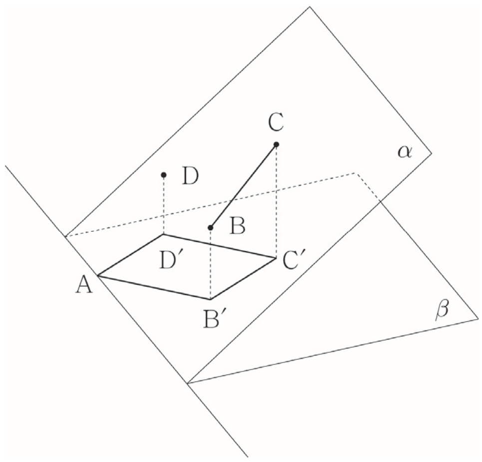


[그림 2]

① $\frac{17}{27}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{19}{27}$
④ $\frac{20}{27}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

055 | 2019학년도 사관학교 가형

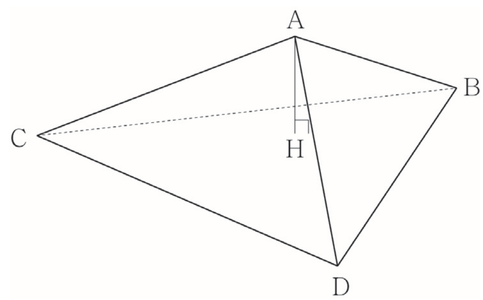
그림과 같이 서로 다른 두 평면 α, β의 교선 위에 점 A가 있다. 평면 α 위의 세 점 B, C, D의 평면 β 위로의 정사영을 각각 B′, C′, D′이라 할 때, 사각형 AB′C′D′은 한 변의 길이가 $4\sqrt{2}$인 정사각형이고, $\overline{BB'} = \overline{DD'}$이다. 두 평면 α와 β가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta = \frac{3}{4}$이다. 선분 BC의 길이는? (단, 선분 BD와 평면 β는 만나지 않는다.) [4점]



① $\sqrt{35}$ ② $\sqrt{37}$ ③ $\sqrt{39}$ ④ $\sqrt{41}$ ⑤ $\sqrt{43}$

056 | 2019학년도 수능 가형

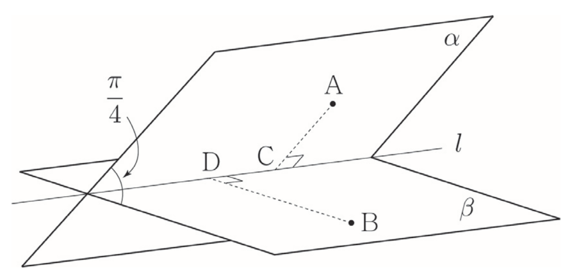
한 변의 길이가 12인 정삼각형 BCD를 한 면으로 하는 사면체 ABCD의 꼭짓점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H는 삼각형 BCD의 내부에 놓여 있다. 삼각형 CDH의 넓이는 삼각형 BCH의 넓이의 3배, 삼각형 DBH의 넓이는 삼각형 BCH의 넓이의 2배이고 $\overline{AH} = 3$이다. 선분 BD의 중점을 M, 점 A에서 선분 CM에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 선분 AQ의 길이는? [4점]



① $\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{13}$ ④ $\sqrt{14}$ ⑤ $\sqrt{15}$

057 | 2017학년도 고3 9월 평가원 가형

그림과 같이 직선 l을 교선으로 하고 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 두 평면 α와 β가 있고, 평면 α 위의 점 A와 평면 β 위의 점 B가 있다. 두 점 A, B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AB} = 2$, $\overline{AD} = \sqrt{3}$이고 직선 AB와 평면 β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$일 때, 사면체 ABCD의 부피는 $a + b\sqrt{2}$이다. $36(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]

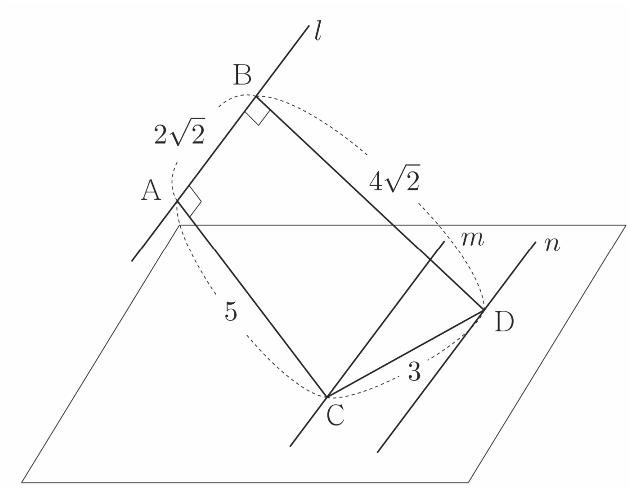


공간도형과 공간좌표

068 | 2011학년도 고3 9월 평가원 가형

같은 평면 위에 있지 않고 서로 평행한 세 직선 l, m, n이 있다. 직선 l 위의 두 점 A, B, 직선 m 위의 점 C, 직선 n 위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$, $\overline{CD} = 3$
(나) $\overline{AC} \perp l$, $\overline{AC} = 5$
(다) $\overline{BD} \perp l$, $\overline{BD} = 4\sqrt{2}$



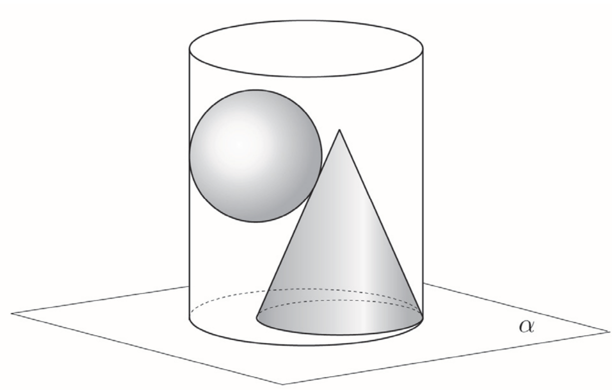
두 직선 m, n을 포함하는 평면과 세 점 A, C, D를 포함하는 평면이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $15\tan^2\theta$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]

069 | 2012학년도 수능 가형

그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 7인 원기둥과 밑면의 반지름의 길이가 5이고 높이가 12인 원뿔이 평면 α 위에 놓여 있고, 원뿔의 밑면의 둘레가 원기둥의 밑면의 둘레에 내접한다. 평면 α와 만나는 원기둥의 밑면의 중심을 O, 원뿔의 꼭짓점을 A라 하자. 중심이 B이고 반지름의 길이가 4인 구 S가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구 S는 원기둥과 원뿔에 모두 접한다.
(나) 두 점 A, B의 평면 α 위로의 정사영이 각각 A′, B′일 때, $\angle A'OB' = 180°$이다.

직선 AB와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta = p$이다. $100p$의 값을 구하시오. (단, 원뿔의 밑면의 중심과 점 A′은 일치한다.) [4점]



015

좌표공간에서 세 점 $A(2, 2, 1)$, $B(0, 4, 4)$, $C(-5, 0, -2)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 할 때, 선분 OG의 길이는? (단, O는 원점이다.)

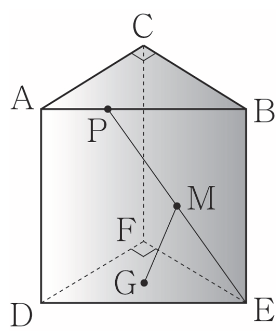
① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

016

좌표공간의 두 점 $A(2, 4, a)$, $B(-1, 1, 3)$에 대하여 선분 AB와 yz평면의 교점을 P라 하자. $\overline{OP} = \sqrt{13}$일 때, 양수 a의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

017

그림과 같이 빗변의 길이가 $3\sqrt{2}$인 직각이등변삼각형을 밑변으로하고 높이가 4인 삼각기둥 ABC－DEF가 있다. 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점을 P라 할 때, 선분 PE의 중점을 M이라 하자. 삼각형 DEF의 무게중심을 G라 할 때, 선분 GM의 길이는?



① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$
④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

4 Theme 좌표공간에서의 정사영

018

두 점 $A(3, -2, 1)$, $B(a+3, 1, 2)$에 대하여 직선 AB와 yz평면이 이루는 각의 크기가 $60°$일 때, 양수 a의 값은?

① $2\sqrt{6}$ ② $\sqrt{26}$ ③ $2\sqrt{7}$
④ $\sqrt{30}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

019

두 점 $A(2, 1, 4)$, $B(1, 2, -3)$에 대하여 삼각형 OAB의 xy 평면 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

020

좌표공간에서 중심이 $A(2, 4, 0)$인 구 S가 y축에 접하고, 접점을 B라 하자. x축을 포함하는 평면 α가 구 S에 접하고, 접점의 z좌표는 양수이다.
세 점 O, A, B를 지나는 원의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 $k\pi$이다. $4k^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

021

좌표공간에서 세 점 $A(0, 0, 2)$, $B(2, 1, 0)$, $C(0, 3, 0)$이 있다. 선분 AB 위의 한 점 P에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{PH} = \frac{\sqrt{34}}{4}$일 때, 삼각형 PBC의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는 k이다. $30k$의 값을 구하시오.

029

좌표공간에서 구 S: $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=k$가 y축과 한 점에서 만나고, z축과 두 점 A, B에서 만난다.

$k+\overline{\text{AB}}^2$의 값을 구하시오.

030

좌표공간에 중심이 $\text{C}(1,\ 2,\ 2\sqrt{5})$이고 원점을 지나는 구 S가 있다. 구 S와 x축, y축이 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 각각 A, B라 하자. 구가 yz평면과 만나서 생기는 원 위를 움직이는 점 중에서 z좌표가 가장 큰 점을 P라 하고, z좌표가 가장 작은 점을 Q라 하자.

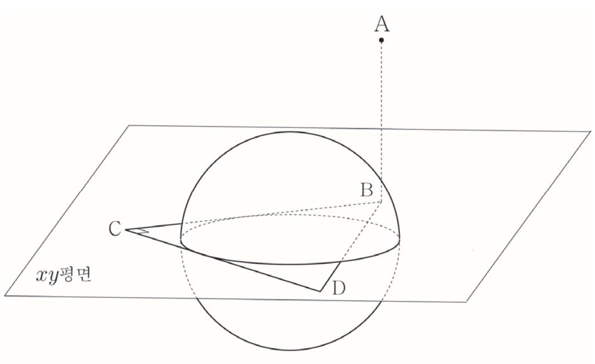
두 사면체 POAB, QOAB의 부피의 곱은 $\frac{q}{p}$이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고 점 P는 xy평면 위에 있지 않으며, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

031

좌표공간에서 점 $\text{A}(a,\ b,\ 12)$의 xy평면 위로의 정사영을 B라 할 때, xy평면 위에 $\overline{\text{BC}}=\overline{\text{CD}}=6$이고 $\angle\text{BCD}=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 BCD가 있다. 구 S: $x^2+y^2+z^2=4$는 두 선분 BC, CD에 각각 접하고, 구 S가 평면 OAC와 만나서 생기는 원 위를 움직이는 점을 P라 하자.

$\overline{\text{BP}}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, M^2-m^2의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



032

두 양의 상수 a, b에 대하여 좌표공간에 중심이 $\text{C}(-3,\ -3,\ a)$이고 두 점 $\text{A}(b,\ 0,\ 0)$, $\text{B}(0,\ b,\ 0)$을 지나는 구

$$S:(x+3)^2+(y+3)^2+(z-a)^2=34+a^2$$

가 있다. 점 C의 xy평면 위로의 정사영을 D라 하고, 점 D의 평면 ABC 위로의 정사영을 E라 하자.

점 E가 z축 위에 있을 때, 구 S가 평면 ABC와 만나서 생기는 도형의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는 $k\pi$이다.

a^2+b+k의 값을 구하시오.

033

양의 상수 a에 대하여 좌표공간에

$$\text{구 } S_1:(x-a)^2+(y-a)^2+(z-2\sqrt{3})^2=16$$

이 있다. 구 S_1의 중심 $\text{A}(a,\ a,\ 2\sqrt{3})$의 xy평면 위로의 정사영을 B라 할 때, 구 S_1이 xy평면, 평면 OAB와 만나서 생기는 도형을 각각 C_1, C_2라 하자.

C_1과 C_2가 원점에서 만날 때, x축을 포함하고 반구 S_2: $(x-a)^2+(y-a)^2+z^2=\frac{4}{5}$, $z\geq 0$에 접하는 평면이 C_2의 내부영역과 만나서 생기는 도형의 길이는 b이다. a^2+b^2의 값을 구하시오.

065 | 2022학년도 수능예비시행 기하

좌표공간에서 점 A$(0,\ 0,\ 1)$을 지나는 직선이 중심이 C$(3,\ 4,\ 5)$이고 반지름의 길이가 1인 구와 한 점 P에서만 만난다. 세 점 A, C, P를 지나는 원의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은 $\frac{q}{p}\sqrt{41}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

066 | 2018학년도 수능 가형

좌표공간에 한 직선 위에 있지 않은 세 점 A, B, C가 있다. 다음 조건을 만족시키는 평면 α에 대하여 각 점 A, B, C와 평면 α 사이의 거리 중에서 가장 작은 값을 $d(\alpha)$라 하자.

> (가) 평면 α는 선분 AC와 만나고, 선분 BC와도 만난다.
> (나) 평면 α는 선분 AB와 만나지 않는다.

위의 조건을 만족시키는 평면 α 중에서 $d(\alpha)$가 최대가 되는 평면을 β라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보기 |

ㄱ. 평면 β는 세 점 A, B, C를 지나는 평면과 수직이다.
ㄴ. 평면 β는 선분 AC의 중점 또는 선분 BC의 중점을 지난다.
ㄷ. 세 점이 A$(2,\ 3,\ 0)$, B$(0,\ 1,\ 0)$, C$(2,\ -1,\ 0)$일 때, $d(\beta)$는 점 B와 평면 β 사이의 거리와 같다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

067

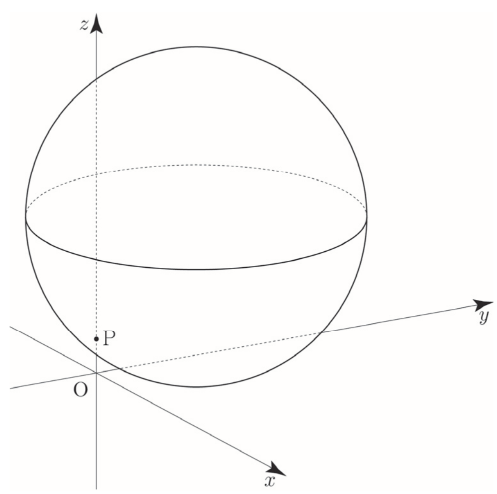
좌표공간에 z축과 평행하고 두 점 A$(4,\ 0,\ \sqrt{2})$, B$(0,\ 4,\ \sqrt{2})$을 지나는 평면 α가 있다. 직선 AB 위를 움직이는 점 P는 $\overline{\mathrm{OP}} \le 4$를 만족시킨다. 평면 α와 평행하고 점 $(6,\ 0,\ 0)$을 지나는 평면 β에 대하여 구 $S: x^2+y^2+(z-4\sqrt{2})^2=24$가 평면 β와 만나서 생기는 원 위를 움직이는 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}^2$의 최댓값과 최솟값의 합은 $a+b\sqrt{3}$이다. $a+b$의 값을 구하시오.
(단, 점 O는 원점이고, a와 b는 정수이다.)

068 | 2022학년도 수능 기하

좌표공간에 중심이 C$(2,\ \sqrt{5},\ 5)$이고 점 P$(0,\ 0,\ 1)$을 지나는 구

$$S: (x-2)^2+(y-\sqrt{5})^2+(z-5)^2=25$$

가 있다. 구 S가 평면 OPC와 만나서 생기는 원 위를 움직이는 점 Q, 구 S 위를 움직이는 점 R에 대하여 두 점 Q, R의 xy평면 위로의 정사영을 각각 $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{R_1}$이라 하자. 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 넓이가 최대가 되도록 하는 두 점 Q, R에 대하여 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 평면 PQR 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{6}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고 세 점 O, $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{R_1}$은 한 직선 위에 있지 않으며, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



이차곡선

이차곡선 | Guide step

1	11
2	(1) $y^2=8x$ (2) $y^2=-4x$
3	풀이 참고
4	(1) $x^2=\frac{4}{3}y$ (2) $x^2=-8y$
5	풀이 참고
6	(1) 초점의 좌표 : $(-5,\ -2)$, 준선 : $x=-1$ (2) 초점의 좌표 : $\left(4,\ \frac{1}{4}\right)$, 준선 : $y=-\frac{1}{4}$
7	풀이 참고
8	27
9	5
10	$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$
11	(1) 초점의 좌표 : $(\sqrt{5},\ 0)$, $(-\sqrt{5},\ 0)$ 장축의 길이 : 6, 단축의 길이 : 4 (2) 초점의 좌표 : $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$ 장축의 길이 : 8, 단축의 길이 : $4\sqrt{3}$ (3) 초점의 좌표 : $(\sqrt{6},\ 0)$, $(-\sqrt{6},\ 0)$ 장축의 길이 : $4\sqrt{2}$, 단축의 길이 : $2\sqrt{2}$ (4) 초점의 좌표 : $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$ 장축의 길이 : 10, 단축의 길이 : 8
12	$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$
13	$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{9}=1$
14	초점의 좌표 : $(0,\ 5)$, $(0,\ -5)$ 장축의 길이 : 26, 단축의 길이 : 24
15	풀이 참고
16	30
17	$\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{3}=1$
18	4
19	(1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$ (2) $\frac{x^2}{4}-y^2=1$
20	(1) 초점의 좌표 : $(13,\ 0)$, $(-13,\ 0)$ 꼭짓점의 좌표 : $(12,\ 0)$, $(-12,\ 0)$ 주축의 길이 : 24 (2) 초점의 좌표 : $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$ 꼭짓점의 좌표 : $(1,\ 0)$, $(-1,\ 0)$ 주축의 길이 : 2
21	(1) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ (2) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$
22	$\frac{x^2}{8}-y^2=-1$
23	(1) 초점의 좌표 : $(0,\ 5)$, $(0,\ -5)$ 꼭짓점의 좌표 : $(0,\ \sqrt{15})$, $(0,\ -\sqrt{15})$ 주축의 길이 : $2\sqrt{15}$ (2) 초점의 좌표 : $(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$ 꼭짓점의 좌표 : $(0,\ 2\sqrt{2})$, $(0,\ -2\sqrt{2})$ 주축의 길이 : $4\sqrt{2}$
24	풀이 참고
25	풀이 참고
26	$\frac{(x+3)^2}{4}-(y-3)^2=1$
27	(1) 포물선 (2) 쌍곡선 (3) 원 (4) 타원
28	(1) (i) $D>0$, 즉 $k<2$이면 서로 다른 두 점에서 만난다. (ii) $D=0$, 즉 $k=2$이면 한 점에서 만난다.(접한다.) (iii) $D<0$, 즉 $k>2$이면 만나지 않는다. (2) (i) $D>0$, 즉 $-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$이면 서로 다른 두 점에서 만난다. (ii) $D=0$, 즉 $k=\sqrt{5},\ k=-\sqrt{5}$이면 한 점에서 만난다.(접한다.) (iii) $D<0$, 즉 $k>\sqrt{5}$ or $k<-\sqrt{5}$이면 만나지 않는다. (3) (i) $D>0$, 즉 $k>1$ or $k<-1$이면 서로 다른 두 점에서 만난다. (ii) $D=0$, 즉 $k=1$ or $k=-1$이면 한 점에서 만난다.(접한다.) (iii) $D<0$, 즉 $-1<k<1$이면 만나지 않는다.

29	(1) $y=4x-\frac{3}{4}$ (2) $y=\frac{1}{3}x+\frac{9}{2}$
30	(1) $y=\frac{1}{2}x+3$ (2) $y=-\frac{1}{2}x+1$
31	$y=-\frac{1}{2}x+4$ or $y=2x-1$
32	(1) $y=2x+2\sqrt{10}$ or $y=2x-2\sqrt{10}$ (2) $y=\frac{1}{3}x+\sqrt{2}$ or $y=\frac{1}{3}x-\sqrt{2}$
33	(1) $y=-x+3$ (2) $y=x-5$
34	$y=-1$ or $y=-\frac{3}{8}x+\frac{5}{4}$
35	(1) $y=-2x+4$ or $y=-2x-4$ (2) $y=-3x+2\sqrt{13}$ or $y=-3x-2\sqrt{13}$ (3) $y=2x+5$ or $y=2x-5$
36	(1) $y=x-1$ (2) $y=\frac{10}{7}x-\frac{1}{7}$
37	$x=1$ or $y=\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}$
38	405

해설

개념 확인문제 1

$\overline{AC}=\overline{AF}=4$, $\overline{BD}=\overline{BF}=7$이므로

$\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}=4+7=11$이다.

답 11

개념 확인문제 2

(1) 초점이 $F(2,\ 0)$이고, 준선이 $x=-2$인 포물선의 방정식은

$y^2=4px$에서 $p=2$이므로 $y^2=4\times2\times x=8x$,

즉 $y^2=8x$이다.

(2) 초점이 $F(-1,\ 0)$이고, 준선이 $x=1$인 포물선의 방정식은

$y^2=4px$에서 $p=-1$이므로 $y^2=4\times(-1)\times x=-4x$,

즉 $y^2=-4x$이다.

답 (1) $y^2=8x$ (2) $y^2=-4x$

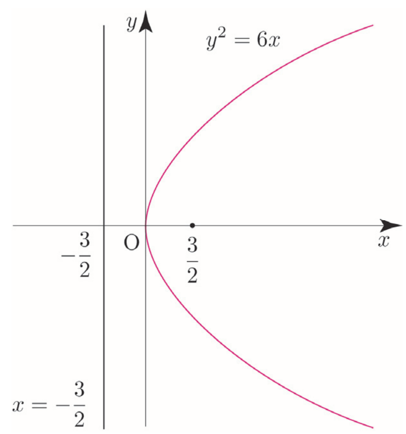
개념 확인문제 3

(1) $y^2=6x=4\times\left(\frac{3}{2}\right)\times x$에서 $p=\frac{3}{2}$이므로

주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$이고,

준선의 방정식은 $x=-\frac{3}{2}$이다.

따라서 포물선 $y^2=6x$의 그래프는 다음 그림과 같다.

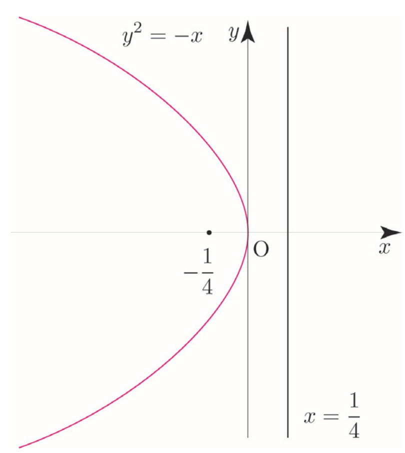


(2) $y^2=-x=4\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times x$에서 $p=-\frac{1}{4}$이므로

주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{4},\ 0\right)$이고,

준선의 방정식은 $x=\frac{1}{4}$이다.

따라서 포물선 $y^2=-x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



답 (1) 초점의 좌표 : $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$, 준선의 방정식 : $x=-\frac{3}{2}$

(2) 초점의 좌표 : $\left(-\frac{1}{4},\ 0\right)$, 준선의 방정식 : $x=\frac{1}{4}$

개념 확인문제 4

(1) $x^2=4py$에서 $p=\frac{1}{3}$이므로 $x^2=\frac{4}{3}y$이다.

(2) $x^2=4py$에서 $p=-2$이므로 $x^2=-8y$이다.

답 (1) $x^2=\frac{4}{3}y$ (2) $x^2=-8y$

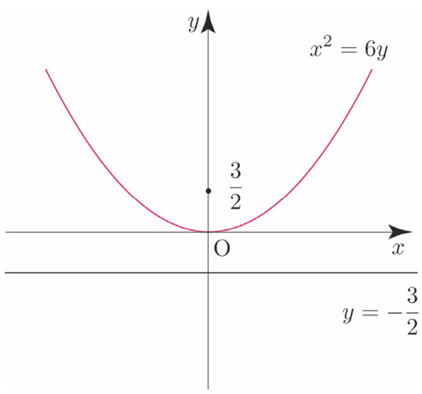
개념 확인문제 5

(1) $x^2=6y=4\times\frac{3}{2}\times y$에서 $p=\frac{3}{2}$이므로

주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$이고,

준선의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}$이다.

따라서 포물선 $x^2=6y$의 그래프는 다음 그림과 같다.

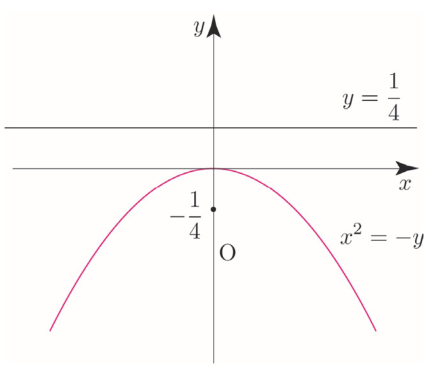


(2) $x^2=-y=4\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times y$에서 $p=-\frac{1}{4}$이므로

주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\left(0,\ -\frac{1}{4}\right)$이고,

준선의 방정식은 $y=\frac{1}{4}$이다.

따라서 포물선 $x^2=-y$의 그래프는 다음 그림과 같다.



답 (1) 초점의 좌표 : $\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$, 준선의 방정식 : $y=-\frac{3}{2}$

(2) 초점의 좌표 : $\left(0,\ -\frac{1}{4}\right)$, 준선의 방정식 : $y=\frac{1}{4}$

개념 확인문제 6

(1) 포물선 $(y+2)^2=-8(x+3)$는 포물선 $y^2=-8x$를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

한편 포물선 $y^2=-8x$의 초점의 좌표는 $(-2,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=2$이다.

따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $(-5,\ -2)$, 준선의 방정식은 $x=-1$이다.

(2) 포물선 $(x-4)^2=y$는 포물선 $x^2=y$를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

한편 포물선 $x^2=y$의 초점의 좌표는 $\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$,

준선의 방정식은 $y=-\frac{1}{4}$이다.

따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\left(4,\ \frac{1}{4}\right)$,

준선의 방정식은 $y=-\frac{1}{4}$이다.

답 (1) 초점의 좌표 : $(-5,\ -2)$, 준선의 방정식 : $x=-1$

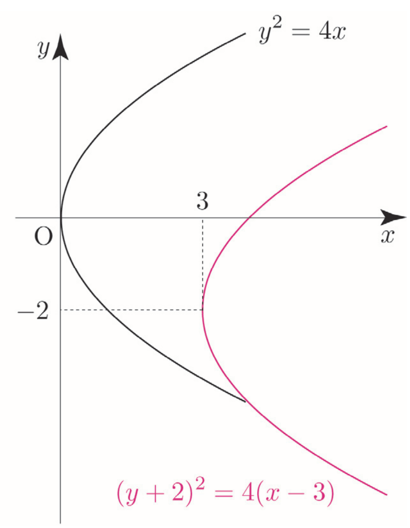
(2) 초점의 좌표 : $\left(4,\ \frac{1}{4}\right)$, 준선의 방정식 : $y=-\frac{1}{4}$

개념 확인문제 7

(1) 주어진 포물선의 방정식을 변형하면

$(y+2)^2=4x-16+4 \Rightarrow (y+2)^2=4(x-3)$이고,

이 포물선은 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 주어진 포물선의 그래프는 다음 그림과 같다.



029

$x^2-6x+5y^2+20y+24=0$

$\Rightarrow (x-3)^2+5(y+2)^2=5$

$\Rightarrow \dfrac{(x-3)^2}{5}+(y+2)^2=1$

타원 $\dfrac{(x-3)^2}{5}+(y+2)^2=1$은 타원 $\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

타원 $\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$의 두 초점이 $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$이므로 타원 $\dfrac{(x-3)^2}{5}+(y+2)^2=1$의 초점은 $(5,\ -2)$, $(1,\ -2)$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{OF}}^2\times\overline{\mathrm{OF'}}^2=(25+4)\times(1+4)=29\times5=145$이다.

답 145

030

타원 $\dfrac{(x+3)^2}{a}+\dfrac{(y-3)^2}{6}=1$은 타원 $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{6}=1$를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

타원 $\dfrac{(x+3)^2}{a}+\dfrac{(y-3)^2}{6}=1$의 두 초점의 좌표가 $(-8,\ b)$, $(2,\ b)$이므로 y좌표가 동일하다.
이를 바탕으로 $a>6$인 것을 알 수 있다.
이때 타원 $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{6}=1$의 두 초점의 y좌표가 모두 0이므로 타원 $\dfrac{(x+3)^2}{a}+\dfrac{(y-3)^2}{6}=1$의 두 초점의 y좌표는 모두 3이어야 한다.
즉, $b=3$이다.

타원 $\dfrac{(x+3)^2}{a}+\dfrac{(y-3)^2}{6}=1$의 두 초점 사이의 거리는 10이고, 타원을 평행이동하여도 두 초점 사이의 거리는 변하지 않으므로 중심이 원점인 타원 $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{6}=1$의 두 초점의 좌표는 $(-5,\ 0)$, $(5,\ 0)$이다.
즉, $a=25+6=31$

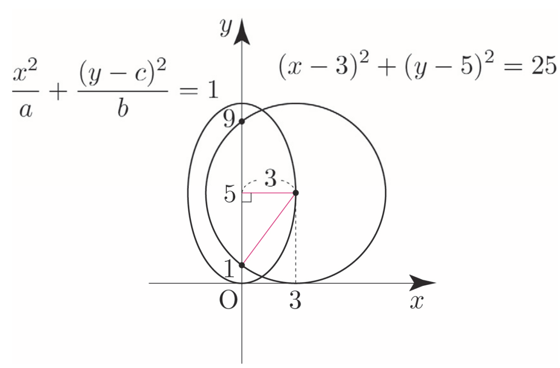
따라서 $a+b=31+3=34$이다.

답 34

031

원 $(x-3)^2+(y-5)^2=25$와 y축이 만나는 두 점은 $(0,\ 9)$, $(0,\ 1)$이다.
타원 $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{(y-c)^2}{b}=1$의 두 초점은 $(0,\ 9)$, $(0,\ 1)$이므로 타원의 중심은 $(0,\ 5)$이다.

타원 $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{(y-c)^2}{b}=1$은 타원 $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}=1$를 y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.
중심이 원점에서 $(0,\ 5)$로 평행이동하였으므로 $c=5$이다.



이때 타원 $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{(y-c)^2}{b}=1$은 원의 중심 $(3,\ 5)$를 지나므로 $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{(y-c)^2}{b}=1$의 단축의 길이는 6이다.

타원을 평행이동하여도 단축의 길이는 변하지 않으므로 중심이 원점인 타원 $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}=1$에서 $a=3^2=9$ ($\because\ a<b$)이다.

두 초점 사이의 거리는 8이고, 타원을 평행이동하여도 두 초점 사이의 거리와 단축의 길이는 변하지 않으므로 중심이 원점인 타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{b}=1$의 두 초점의 좌표는 $(0,\ 4)$, $(0,\ -4)$이므로 $b=16+9=25$이다.

따라서 $a+2b+3c=9+50+15=74$이다.

답 74

$16 \le \overline{\mathrm{PF}} \le 20 \;\Rightarrow\; 16 \le 30-2a \le 20$

$\Rightarrow\; 5 \le a \le 7$

점 A는 x좌표가 양수인 꼭짓점이므로 좌표를 구하면 $\mathrm{A}(a,\ 0)$이다.

두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$이므로

$c^2 = a^2 + b^2 \;\Rightarrow\; c^2 = a^2 + \dfrac{16}{9}a^2 = \dfrac{25}{9}a^2$

$\Rightarrow\; c = \dfrac{5}{3}a$

이다.

즉, 점 F의 좌표를 구하면 $\mathrm{F}\left(\dfrac{5}{3}a,\ 0\right)$이다.

$\overline{\mathrm{AF}} = \dfrac{5}{3}a - a = \dfrac{2}{3}a$

$5 \le a \le 7 \;\Rightarrow\; \dfrac{10}{3} \le \dfrac{2}{3}a \le \dfrac{14}{3}$

$\Rightarrow\; 3 + \dfrac{1}{3} \le \dfrac{2}{3}a \le 4 + \dfrac{2}{3}$

$\overline{\mathrm{AF}} = \dfrac{2}{3}a$는 자연수이므로 $\dfrac{2}{3}a = 4 \;\Rightarrow\; a = 6$이다.

따라서 쌍곡선의 주축의 길이는 $2a = 12$이다.

답 12

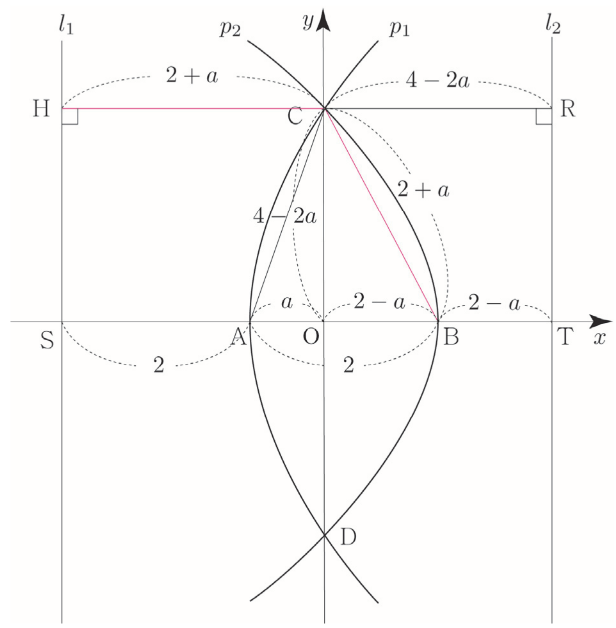
182

포물선 p_1의 준선을 l_1, 포물선 p_2의 준선을 l_2라 하자.
점 C에서 두 준선 l_1, l_2에 내린 수선의 발을 각각 H, R이라 하고, 두 점 H, R에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 S, T라 하자.

$\overline{\mathrm{AO}} = a$라 하면 $\overline{\mathrm{HC}} = \overline{\mathrm{SA}} + \overline{\mathrm{AO}} = 2 + a$이므로
포물선의 정의에 의해서 $\overline{\mathrm{CB}} = \overline{\mathrm{HC}} = 2 + a$이다.

$\overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{AB}} - \overline{\mathrm{AO}} = 2 - a$이고, $\overline{\mathrm{CR}} = 2\overline{\mathrm{OB}} = 4 - 2a$
이므로 포물선의 정의에 의해서 $\overline{\mathrm{OC}} = \overline{\mathrm{CR}} = 4 - 2a$이다.

Tip Guide step에서 배운 포물선 작도법을 활용하여 다음과 같이 $\overline{\mathrm{OC}}$의 값을 빠르게 찾을 수 있다.
$\overline{\mathrm{OC}} = 2\overline{\mathrm{OB}} = 4 - 2a$



삼각형 CBO에서 피타고라스의 정리를 사용하면

$\overline{\mathrm{CB}}^2 = \overline{\mathrm{OB}}^2 + \overline{\mathrm{OC}}^2 \;\Rightarrow\; (2+a)^2 = (2-a)^2 + (4-2a)^2$

$\Rightarrow\; 4 + 4a + a^2 = 4 - 4a + a^2 + 16 - 16a + 4a^2$

$\Rightarrow 4a^2 - 24a + 16 = 0 \;\Rightarrow\; a^2 - 6a + 4 = 0$

$\Rightarrow\; a = 3 - \sqrt{5}\ \ (\because\ 0 < a < 2)$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{OC}} = \dfrac{1}{2} \times 2 \times (2\sqrt{5} - 2) = 2(\sqrt{5} - 1)$이다.

답 ③

Tip <그땐 그랬지>

182번은 2011학년도 수능 가형 14번에 출제된 문제였다. 2011학년도 수능 가형은 1등급 컷이 79점인 핵불수능이었고, 필자가 현장에서 세 번째로 응시했던 시험이기도 하다.

그때 당시 수능을 막 끝마친 학생이 인터뷰에서 “14번에 출제된 이차곡선 문제가 참 어려웠다.” 라고 대답했던 기억이 아직까지 생생하다.

지금이야 워낙 노출이 많이 돼서 큰 어려움 없이 풀어낼 수 있지만 포물선의 정의를 물어보는 이차곡선 문제 중에서 나름 기념비적인 문제이니 확실히 체화하도록 하자.

평면벡터

평면벡터 | Guide step

1	(1) 4 (2) 5 (3) 3
2	$\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{FE}$
3	(1) $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{BC}$ (2) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FO}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{ED}$ (3) 2
4	풀이 참고
5	(1) $\overrightarrow{BD}$ (2) $\overrightarrow{BA}$
6	(가) $\overrightarrow{DB}$ (나) $\overrightarrow{CB}$ (다) $\vec{0}$
7	풀이 참고
8	(1) $\vec{b}-\vec{a}$ (2) $-\vec{a}-\vec{b}$
9	풀이 참고
10	(1) $19\vec{a}+11\vec{b}$ (2) $-7\vec{a}-20\vec{b}+17\vec{c}$
11	(1) $\vec{x}=2\vec{a}-2\vec{b}$ (2) $\vec{x}=-2\vec{a}-6\vec{b}$
12	풀이 참고
13	(1) $\frac{2}{\lvert\vec{a}\rvert}\vec{a}$ (2) $-\frac{\lvert\vec{a}\rvert}{\lvert\vec{b}\rvert}\vec{b}$
14	(가) : 반대, (나) : 5
15	$\frac{3}{2}\pi$
16	$-\frac{3}{2}$
17	$-2\vec{a}+\vec{b}+c$
18	풀이 참고
19	(1) $\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$ (2) $-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$
20	풀이 참고
21	$-\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$
22	(1) $\vec{a}=(4,\ -1)$ (2) $\vec{b}=(-1,\ -5)$ (3) $\vec{c}=(3,\ 0)$ (4) $\vec{d}=(0,\ -6)$
23	(1) $\lvert\vec{a}\rvert=5$ (2) $\lvert\vec{b}\rvert=13$
24	(1) $p=4,\ q=2$ (2) $p=-1,\ q=5$
25	(1) $(5,\ 6)$ (2) $(-10,\ 28)$ (3) $(21,\ -6)$ (4) $(-28,\ 23)$
26	$-3\vec{a}+2\vec{b}$
27	(1) $\overrightarrow{AB}=(2,\ -2)$, $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=2\sqrt{2}$ (2) $\overrightarrow{AB}=(-7,\ 1)$, $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=5\sqrt{2}$
28	(1) $6\sqrt{2}$ (2) $3\sqrt{2}$ (3) 0 (4) -6
29	(1) 0 (2) -16 (3) 16 (4) -36
30	(1) 13 (2) -4
31	풀이 참고
32	$\sqrt{91}$
33	(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\sqrt{19}$
34	(1) 45° (2) 120°
35	(1) 6 (2) $-\frac{7}{2}$
36	$\vec{b}=(2,\ -2\sqrt{3})$ or $\vec{b}=(-2,\ 2\sqrt{3})$
37	풀이 참고
38	-10
39	(1) $\frac{x-4}{3}=\frac{y-3}{-1}$ (2) $x=\frac{y}{2}$ (3) $y=6$ (4) $x=3$
40	(1) $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-3}{2}$ (2) $x=\frac{y+3}{3}$
41	(1) $\frac{x-4}{-6}=y-2$ (2) $\frac{x+3}{5}=\frac{y-1}{-2}$
42	풀이 참고
43	(1) $2x-3y+1=0$ (2) $3x+y-6=0$
44	90°
45	(1) 2 (2) 6
46	중심이 $(3,\ -6)$이고 반지름의 길이가 5인 원
47	풀이 참고
48	$(x-1)^2+(y+1)^2=13$

$\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BP} = (1,\ 1) - \left(\frac{5}{6},\ \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{6},\ \frac{2}{3}\right)$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{PD} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$

이다.

$m=\frac{1}{3},\ n=\frac{5}{6},\ k=\frac{2}{3},\ l=\frac{1}{6}$이므로

$m+2n-3k+6l=\frac{1}{3}+\frac{5}{3}-2+1=1$이다.

018

$\overrightarrow{GD} = k\overrightarrow{MP}$이므로 두 선분 GD, MP는 서로 평행하다.

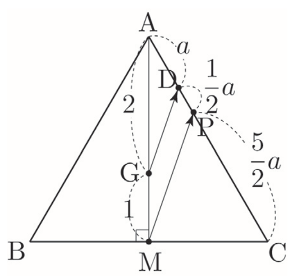
$\overline{AG} : \overline{GM} = 2:1$이므로 $\overline{AD} : \overline{DP} = 2:1$이다.

$\overline{AD} = a$라 하면 $\overline{DP} = \frac{1}{2}\overline{AD} = \frac{1}{2}a$이고,

$\overline{AP} = \overline{AD} + \overline{DP} = a+\frac{1}{2}a=\frac{3}{2}a$이다.

$\overline{AC} = 4\overline{AD} = 4a$이므로

$\overline{PC} = \overline{AC} - \overline{AP} = 4a-\frac{3}{2}a=\frac{5}{2}a$이다.



점 P는 선분 AC를 $3:5$로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{BP} = \frac{5}{8}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{BC}$이다.

$m=\frac{5}{8},\ n=\frac{3}{8}$이므로 $m\times n=\frac{15}{64}$이다.

따라서 $p+q=79$이다.

답 79

019

두 선분 AM, BN이 만나는 점 P(2, 3)은

삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} = (2,\ 3) \Rightarrow \vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = (6,\ 9)$

이다.

따라서 $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 = 36+81=117$이다.

답 117

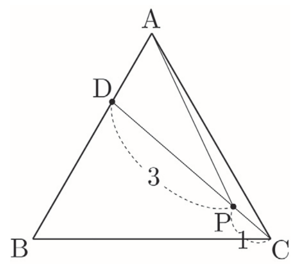
020

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이 D이므로

$2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 9\overrightarrow{PC} = 0 \Rightarrow \frac{2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{3} = -3\overrightarrow{PC}$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{PD} = -3\overrightarrow{PC}$

점 P는 선분 CD를 $1:3$으로 내분하는 점이다.



삼각형 ABC의 넓이가 48이므로 삼각형 ACD의 넓이는

$\frac{1}{3}\times 48=16$이다.

따라서 삼각형 ADP의 넓이는 $\frac{3}{4}\times 16=12$이다.

답 12

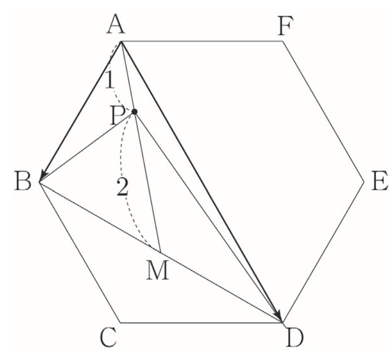
021

선분 BD의 중점을 M이라 하면

$6\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow 3\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}{2}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM}$

이므로 점 P는 선분 AM을 $1:2$로 내분하는 점이다.



$\overline{AB} = 2,\ \overline{BD} = 2\sqrt{3},\ \angle ABD = 90^\circ$이므로

삼각형 ABD의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$이다.

삼각형 ABM의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$이므로

삼각형 PBM의 넓이는 $\frac{2}{3}\sqrt{3}$이다.

삼각형 PBD의 넓이는 $2\times\frac{2}{3}\sqrt{3}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$이므로

$p=3,\ q=4$이다.

따라서 $p+q=7$이다.

답 7

022

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{BD}$

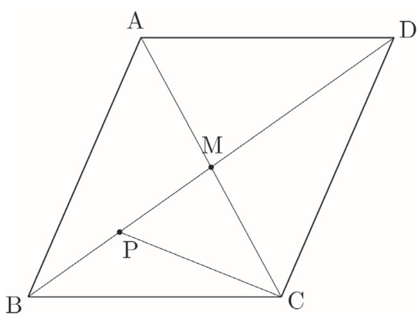
$\Rightarrow \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=-2\overrightarrow{PB}$

$\Rightarrow \dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}}{2}=-\overrightarrow{PB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{PM}=-\overrightarrow{PB}$

즉, 점 P는 선분 BM의 중점이다.



삼각형 PBC의 넓이가 2이므로 삼각형 BCD의 넓이는 $4\times2=8$이다.

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는 $2\times8=16$이다.

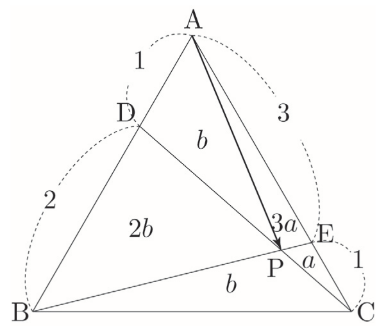
답 16

023

Guide step에서 배운 넓이비를 이용하여 $\overline{BP}:\overline{PE}$를 구해보자.

삼각형 PCE의 넓이를 a라 하면 삼각형 PAE의 넓이는 $3a$이고, 삼각형 PAD의 넓이를 b라 하면 삼각형 PBD의 넓이는 $2b$이다.

삼각형 BAE의 넓이는 $3a+3b$이고,
두 삼각형 BAE, BCE의 넓이는 $3:1$이므로
삼각형 BCE의 넓이는 $a+b$이다.
즉, 삼각형 BPC의 넓이는 b이다.



두 삼각형 CAD, CBD의 넓이비는 $1:2$이므로
$4a+b:3b=1:2 \Rightarrow 3b=8a+2b \Rightarrow b=8a$이다.

삼각형 ABP의 넓이는 $3b=24a$이고,
삼각형 AEP의 넓이는 $3a$이므로 $\overline{BP}:\overline{PE}=8:1$이다.

$\overrightarrow{BE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$이므로

$\overrightarrow{BP}=\frac{8}{9}\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{9}\overrightarrow{BA}$이다.

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{9}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{7}{9}\overrightarrow{BA}$

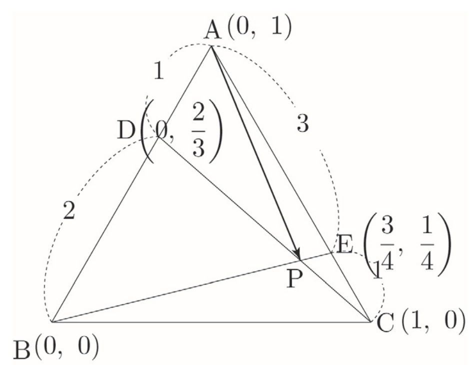
이므로 $m=\frac{2}{3},\ n=-\frac{7}{9}$이다.

따라서 $36(m-n)=36\left(\frac{2}{3}+\frac{7}{9}\right)=24+28=52$이다.

답 52

이번에는 Guide step에서 배운 사교좌표계를 이용하여 풀어보자.

B(0, 0), A(0, 1), C(1, 0)이라 하면
$D\left(0,\ \frac{2}{3}\right)$, $E\left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{4}\right)$이다.



직선 DC의 방정식은 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$이고,

직선 BE의 방정식은 $y=\frac{1}{3}x$이므로

두 직선의 교점의 좌표를 구하면 $P\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{9}\right)$이다.

이때 삼각형 OAB는 한 변의 길이가 12인 정삼각형이므로
$|\vec{a}|=|\vec{b}|=12$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=72$이다.

따라서

$$|\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{CA}|^2=\left|\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}\right|^2$$

$$=\frac{9}{4}|\vec{a}|^2-\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{36}|\vec{b}|^2$$

$$=324-36+4=292$$

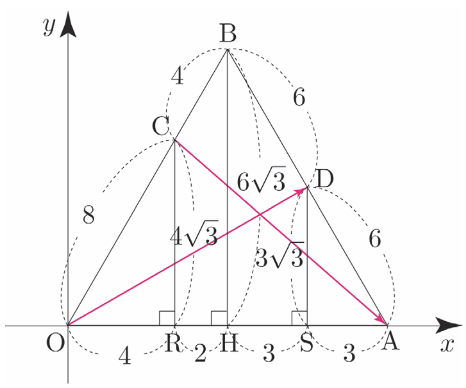
이다.

답 292

이번에는 x축과 y축을 설정한 후 벡터의 분해를 이용하여 벡터를 성분으로 나타내어 $|\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{CA}|^2$의 값을 구해보자.

(개념 파악하기 - (1) 두 평면벡터가 이루는 각의 크기는 어떻게 구할까? 벡터의 분해를 이용하여 벡터를 성분으로 나타내기 참고)

점 C, B, D에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 각각 R, H, S라 하고, 선분들의 길이를 구하면 다음 그림과 같다.



$\overrightarrow{OD}=(9,\ 0)+(0,\ 3\sqrt{3})=(9,\ 3\sqrt{3})$이고,
$\overrightarrow{CA}=(8,\ 0)+(0,\ -4\sqrt{3})=(8,\ -4\sqrt{3})$이므로
$\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{CA}=(17,\ -\sqrt{3})$이다.

따라서 $|\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{CA}|^2=17^2+(-\sqrt{3})^2=292$이다.

048

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라 하자.

선분 OP 위에 점 Q가 존재하므로 $\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$이다.
$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$이므로 $\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}$이다.

점 Q는 직선 MN 위의 점이므로 실수 t에 대하여
$\overrightarrow{OQ}=t\overrightarrow{OM}+(1-t)\overrightarrow{ON}$이 성립한다.

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{ON}=\frac{3}{4}\vec{b}$이므로
$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}t\vec{a}+\frac{3(1-t)}{4}\vec{b}$이다.

$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}$이고, $\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}t\vec{a}+\frac{3(1-t)}{4}\vec{b}$이므로
$\frac{2}{3}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}=\frac{1}{2}t\vec{a}+\frac{3(1-t)}{4}\vec{b}$
$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}k-\frac{1}{2}t\right)\vec{a}+\left(\frac{1}{3}k-\frac{3(1-t)}{4}\right)\vec{b}=\vec{0}$

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 평행하지 않으므로
$\frac{2}{3}k=\frac{1}{2}t$, $\frac{1}{3}k=\frac{3(1-t)}{4}$이다.

$\frac{2}{3}k=\frac{1}{2}t \Rightarrow k=\frac{3}{4}t$이므로
$\frac{1}{3}k=\frac{3(1-t)}{4} \Rightarrow k=\frac{9}{4}(1-t) \Rightarrow \frac{3}{4}t=\frac{9}{4}-\frac{9}{4}t$
$\Rightarrow 3t=\frac{9}{4} \Rightarrow t=\frac{3}{4}$
즉, $k=\frac{3}{4}t=\frac{9}{16}$이다.

$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}=\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{3}{16}\vec{b}$
$\overline{OA}=3$, $\overline{OB}=6$이므로 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=6$이다.

$$|\overrightarrow{OQ}|^2 = \left|\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{3}{16}\vec{b}\right|^2$$
$$=\frac{9}{64}\left|\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right|^2$$
$$=\frac{9}{64}\left(|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{4}|\vec{b}|^2\right)$$
$$=\frac{9}{64}(9+18\cos(\angle AOB)+9)$$
$$=\frac{9}{64}(18+18\cos(\angle AOB))$$

$|\overrightarrow{OQ}| = \frac{3}{4}\sqrt{6}$ 이므로

$$|\overrightarrow{OQ}|^2 = \frac{27}{8} \Rightarrow \frac{9}{64}(18+18\cos(\angle AOB)) = \frac{27}{8}$$

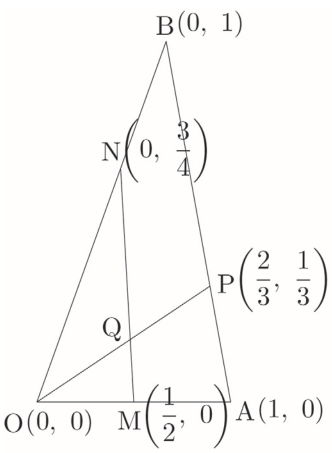
$$\Rightarrow 18+18\cos(\angle AOB)=24 \Rightarrow \cos(\angle AOB)=\frac{1}{3}$$

따라서 $\cos(\angle AOB) = \frac{1}{3}$이다.

답 ④

이번에는 Guide step에서 배운 사교좌표계를 이용하여 벡터 $\overrightarrow{OQ}$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내보자.

$O(0,\ 0)$, $A(1,\ 0)$, $B(0,\ 1)$이라 하면
$M\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$, $N\left(0,\ \frac{3}{4}\right)$, $P\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ 이다.



직선 OP의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x$이고,

직선 MN의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}$이므로

두 직선의 교점의 좌표를 구하면 $Q\left(\frac{3}{8},\ \frac{3}{16}\right)$ 이다.

즉, $\overrightarrow{OQ} = \frac{3}{8}\vec{a}+\frac{3}{16}\vec{b}$이다.

Tip <조심해야 하는 point>

Guide step에서 언급했듯이 $Q\left(\frac{3}{8},\ \frac{3}{16}\right)$ 는 실제 우리가 배웠던 직교좌표계에서의 성분이 아니라 새로 정의한 사교좌표계에서의 성분임을 놓치면 안된다.

즉, $|\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)^2+\left(\frac{3}{16}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{16}$라고 판단하지 않도록 유의해야 한다.

049

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 2$이므로 삼각형 OAB은 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.

$|\overrightarrow{OP}|=1$이므로 점 P의 자취는 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원이다.

선분 AB의 중점을 M이라 하면

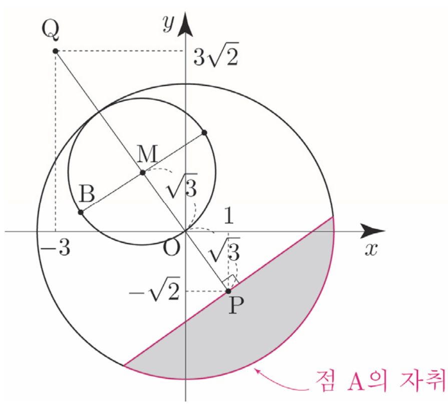
$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})$$
$$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}+|\overrightarrow{OP}|^2$$
$$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+|\overrightarrow{OP}|^2$$
$$=3-\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$$
$$=3-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OM}$$

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=3-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OM}$이고, $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\ge 6$이므로

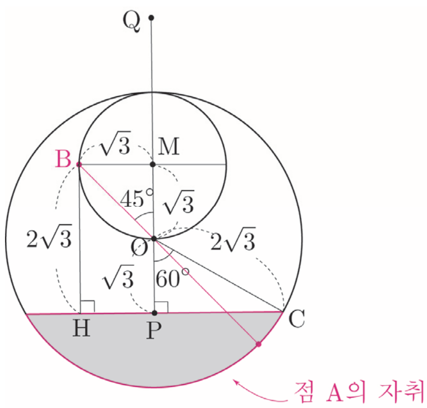
$3-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OM}\ge 6 \Rightarrow \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OM}\le -\frac{3}{2}$

$|\overrightarrow{OP}|=1$이고, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OM}\le -\frac{3}{2}$이므로

점 P의 자취는 다음 그림과 같다.



직선 PQ가 y축과 평행하도록 회전시키면 다음 그림과 같다.



$\angle \mathrm{COP}=60^\circ$ 이고, $\angle \mathrm{BOM}=45^\circ$ 이므로
$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$의 최댓값은 $M=\overline{\mathrm{BO}}+2\sqrt{3}=\sqrt{6}+2\sqrt{3}$이고,
$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$의 최솟값은 $m=\overline{\mathrm{BH}}=2\sqrt{3}$이다.

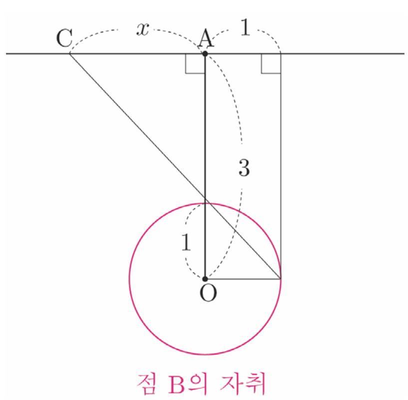
따라서 $(M-m)^2=(\sqrt{6})^2=6$이다.

답 6

057

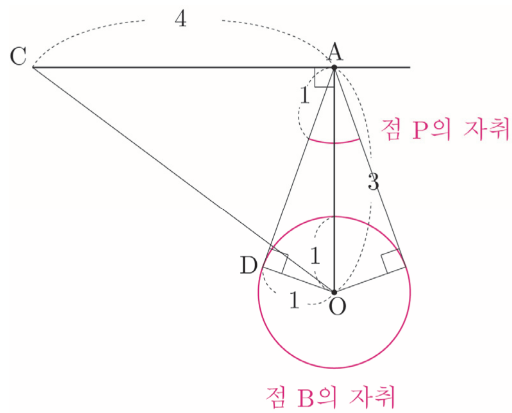
$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$이므로 점 B의 자취는 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원이고, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$이므로 $\angle \mathrm{OAC}=90^\circ$ 이다.

$\overline{\mathrm{CA}}=x$라 하자.

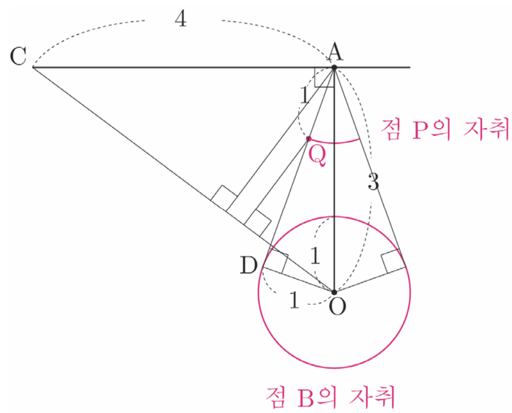


$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}$의 최댓값은 20이므로
$x(x+1)=20 \Rightarrow x=4$ ($\because x>0$)이다.

벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$는 방향이 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$와 같고 크기가 1인 단위벡터이므로 점 P의 자취는 다음 그림과 같다.



$\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P를 Q라 하자.

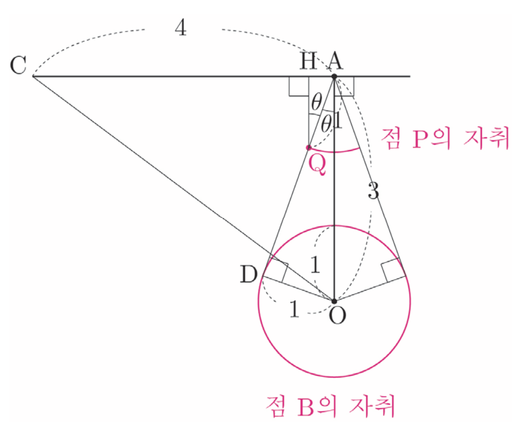


$\angle \mathrm{OAD}=\theta$라 하면 삼각형 AOD에서 $\sin\theta=\dfrac{1}{3}$이다.

점 Q에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\angle \mathrm{AQH}=\theta$이므로 삼각형 AQH에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AQ}}\sin\theta=1\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$이고,

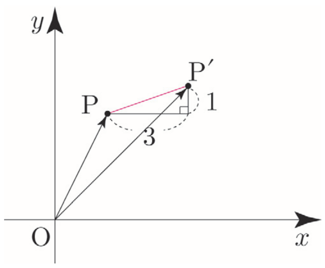
$\overline{\mathrm{HQ}}=\sqrt{1^2-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$이다.



088

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$의 종점 P, Q를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 점을 각각 P′, Q′라 하자.

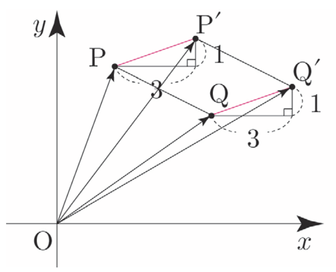
ㄱ. $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OP'}}|=\sqrt{10}$



$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OP'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{P'P}}|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

따라서 ㄱ은 참이다.

ㄴ. $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|$



$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}| \Rightarrow |\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{Q'P'}}|$

사각형 PQQ′P′는 평행사변형이므로 $\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\overrightarrow{\mathrm{Q'P'}}$이다.

따라서 ㄴ은 참이다.

ㄷ. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1,\ 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(2,\ 3)$이라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=(4,\ 2)$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}=(5,\ 4)$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=5$, $\overrightarrow{\mathrm{OP'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}=28$이다.

즉, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\neq\overrightarrow{\mathrm{OP'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$이다. (반례)

따라서 ㄷ은 거짓이다.

답 ③

089

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{b}$라 하자.

$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\frac{1}{3}\vec{b}$이고, $\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{BE}}-\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{b}=\frac{3}{4}\vec{a}-\frac{1}{12}\vec{b}$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{a}-\frac{1}{12}\vec{b}=\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$이므로

$$|\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2=\left|\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right|^2$$

$$=|\vec{a}|^2+\frac{4}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{9}|\vec{b}|^2$$

이다.

이때 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 3인 정삼각형이므로

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=\frac{9}{2}$이다.

따라서

$$|\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2=\left|\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right|^2$$

$$=|\vec{a}|^2+\frac{4}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{9}|\vec{b}|^2$$

$$=9+6+4=19$$

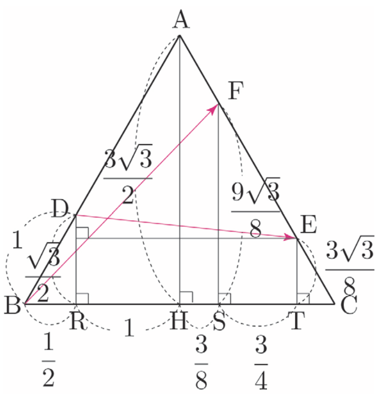
이다.

답 ③

이번에는 x축과 y축을 설정한 후 벡터의 분해를 이용하여 벡터를 성분으로 나타내어 $|\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2$의 값을 구해보자.

(개념 파악하기 - (1) 두 평면벡터가 이루는 각의 크기는 어떻게 구할까? 벡터의 분해를 이용하여 벡터를 성분으로 나타내기 참고)

점 D, A, F, E에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 R, H, S, T라 하고, 선분들의 길이를 구하면 다음 그림과 같다.



$\overrightarrow{BF} = \left(\frac{15}{8},\ 0\right) + \left(0,\ \frac{9\sqrt{3}}{8}\right) = \left(\frac{15}{8},\ \frac{9\sqrt{3}}{8}\right)$이고,

$\overrightarrow{DE} = \left(\frac{17}{8},\ 0\right) + \left(0,\ -\frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \left(\frac{17}{8},\ -\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$이므로

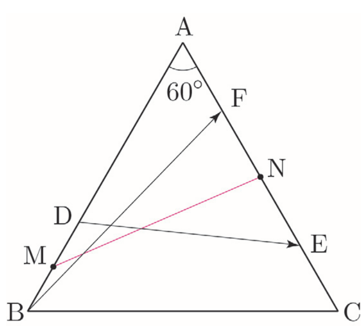
$\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE} = (4,\ \sqrt{3})$이다.

따라서 $|\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}|^2 = 4^2 + (-\sqrt{3})^2 = 19$이다.

이번에는 중점벡터와 코사인법칙을 이용하여
$|\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}|^2$의 값을 구해보자.

Guide step에서 반드시 시점이 일치하지 않아도 중점을 이용하여 두 벡터의 합을 하나의 벡터로 나타낼 수 있다고 학습한 바 있다. 이를 이용하여 두 벡터의 합 $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}$를 하나의 벡터로 나타내보자.

두 선분 BD, FE의 중점을 각각 M, N이라 하면
$|\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}| = 2|\overrightarrow{MN}|$이다.
(개념 파악하기 - (6) 위치벡터란 무엇일까?
두 벡터의 합을 하나의 벡터로 나타내기 참고)



$\overline{AM} = \overline{AB} - \overline{BM} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, $\overline{AN} = \frac{3}{2}$이고

$\angle BAC = 60^\circ$이므로 삼각형 AMN에서 코사인법칙을 사용하면

$$\cos 60^\circ = \frac{\overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 - \overline{MN}^2}{2 \times \overline{AM} \times \overline{AN}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\frac{34}{4} - \overline{MN}^2}{\frac{15}{2}} \Rightarrow \overline{MN} = \frac{\sqrt{19}}{2}$$

이므로 $|\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}| = 2|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{19}$이다.

따라서 $|\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}|^2 = 19$이다.

090

삼각형 ABC의 높이는 $4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$이므로
원 O의 반지름이 길이는 $\sqrt{3}$이다.

원 O의 중심을 O라 하고, 점 O에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

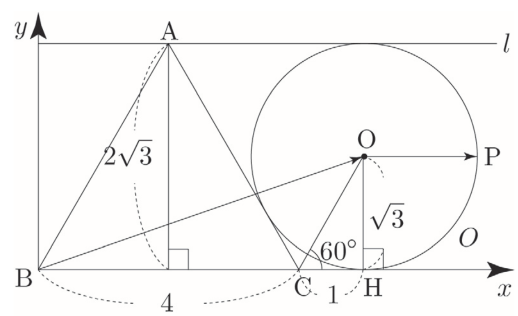
$\angle ACH = 120^\circ$이고, 직선 OC는 $\angle ACH$의 이등분선이므로 $\angle OCH = 60^\circ$이다.

$\overline{OH} = \sqrt{3} \Rightarrow \overline{CH} = 1$

$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OP}$이므로
$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OP}$이다.

$\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BO}$는 고정된 벡터이고 $\overrightarrow{OP}$는 움직이는 벡터이니 우선 두 벡터의 합 $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BO}$를 하나의 벡터로 표현하여 상황을 단순화해보자.

이때 평행이동하여 시점을 통일해주거나 중점벡터를 이용할 수도 있지만 **x축과 y축을 설정한 후 벡터의 분해를 이용하여 벡터 $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BO}$를 성분으로 나타내보자.**



$\overrightarrow{AC} = (2,\ 0) + (0,\ -2\sqrt{3}) = (2,\ -2\sqrt{3})$이고,
$\overrightarrow{BO} = (5,\ 0) + (0,\ \sqrt{3}) = (5,\ \sqrt{3})$이므로

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BO}=(7,\ -\sqrt{3})$이다.

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OX}$라 하면
(꼭 시점을 O로 잡을 필요는 없다. 굳이 시점을 O로 잡은 이유는 $\overrightarrow{OP}$와 시점을 일치시켜 추후 $|\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OP}|$의 최댓값과 최솟값을 구할 때 이해가 쉽도록 하기 위함이다.)
$|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BP}|=|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OP}|$이다.

이때 $|\overrightarrow{OX}|=\sqrt{7^2+(-\sqrt{3})^2}=2\sqrt{13}$이고, $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{3}$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OP}$가 이루는 각에 의해 $|\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OP}|$의 값의 최대와 최소가 결정된다.

$|\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OP}|$의 최댓값은 두 벡터 $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OP}$의 방향이 서로 같을 때이므로 $M=2\sqrt{13}+\sqrt{3}$이다.

$|\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OP}|$는 최솟값은 두 벡터 $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OP}$의 방향이 서로 반대일 때이므로 $m=2\sqrt{13}-\sqrt{3}$이다.

따라서 $Mm=(2\sqrt{13}+\sqrt{3})(2\sqrt{13}-\sqrt{3})=52-3=49$
이다.

답 ④

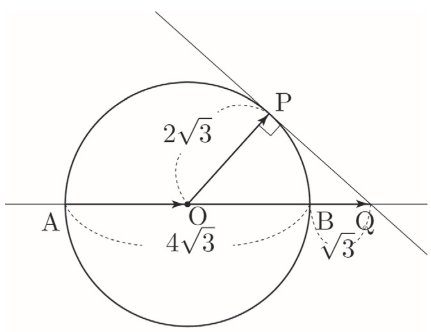
091

점 Q는 선분 AB를 5 : 1로 외분하는 점이므로
$\overline{AQ}=5\overline{BQ}=5\sqrt{3} \Rightarrow \overline{AB}=\overline{AQ}-\overline{BQ}=4\sqrt{3}$이다.
즉, 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{3}$이다.

원의 중심을 O라 하면 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}$이므로

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AQ}$$

이다.



$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AQ}=2\sqrt{3}\times5\sqrt{3}=30$이고,
삼각형 QOP에서 $\angle QOP=\theta$라 하면

$\cos\theta=\dfrac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=\dfrac{2}{3}$이므로

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AQ}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{AQ}|\cos\theta=2\sqrt{3}\times5\sqrt{3}\times\dfrac{2}{3}=20$

이다.

따라서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}&=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{AQ}\\&=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AQ}\\&=30+20=50\end{aligned}$$

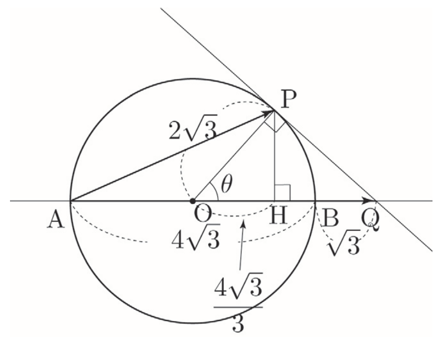
이다.

답 50

다르게 풀어보자.

점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.
삼각형 QOP에서 $\angle QOP=\theta$라 하면 $\cos\theta=\dfrac{2}{3}$이므로

$\overline{OH}=\overline{OP}\cos\theta=2\sqrt{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$이다.



따라서

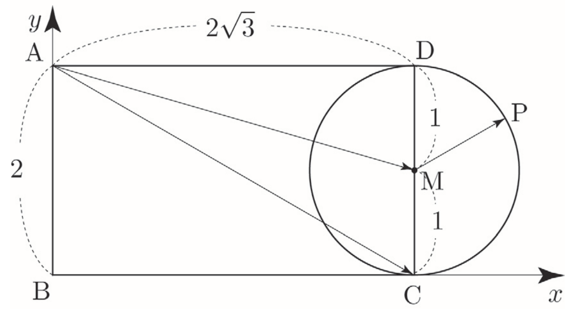
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}&=|\overrightarrow{AH}||\overrightarrow{AQ}|\\&=\left(2\sqrt{3}+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\times5\sqrt{3}\\&=\frac{10}{3}\sqrt{3}\times5\sqrt{3}=50\end{aligned}$$

이다.

092

선분 CD의 중점을 M이라 하면 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}$이므로
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MP}$
이다.

x축과 y축을 설정한 후 벡터의 분해를 이용하여 벡터를 성분으로 나타내어 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AM}$의 값을 구해보자.



$\overrightarrow{AM}=(2\sqrt{3},\ 0)+(0,\ -1)=(2\sqrt{3},\ -1)$이고,
$\overrightarrow{AC}=(2\sqrt{3},\ 0)+(0,\ -2)=(2\sqrt{3},\ -2)$이므로
$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=12+2=14$이다.

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MP}=14+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MP}$
이므로
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MP}$가 최대일 때 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$는 최댓값을 갖는다.

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MP}$의 최댓값은 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MP}$의 방향이 서로 같을 때이므로 $|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{MP}|=4\times1=4$이다.

따라서 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$의 최댓값은 $14+4=18$이다.

답 ④

이번에는 Guide step에서 배운 중점분해 Technique을 이용하여 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}$의 값을 구해보자.

선분 CM의 중점을 N이라 하면
$|\overrightarrow{AN}|=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{57}{4}}$, $|\overrightarrow{MN}|=\frac{1}{2}$이므로

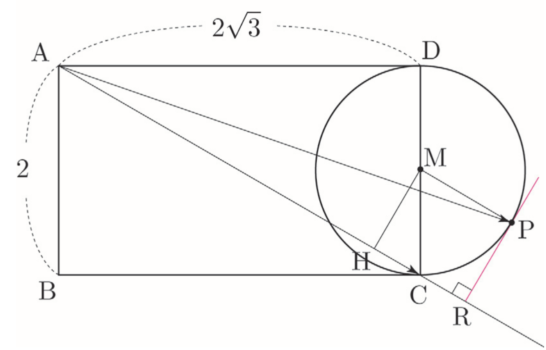
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}&=(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NM})\cdot(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NC})\\&=(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NM})\cdot(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{NM})\\&=|\overrightarrow{AN}|^2-|\overrightarrow{NM}|^2=\frac{57}{4}-\frac{1}{4}=14\end{aligned}$$

이다.

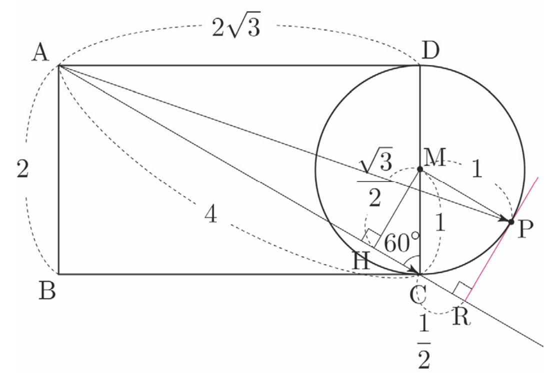
다르게 풀어보자.

선분 CD의 중점을 M이라 하고, 점 M에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

점 P에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 R이라 하면 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AR}|$이므로 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$가 최대가 되도록 하는 점 P는 다음 그림과 같다.



삼각형 ACD에서
$\sin(\angle ACD)=\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \Rightarrow\ \angle ACD=60^\circ$
이므로
$\overline{MH}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{CH}=\frac{1}{2}$, $\overline{CR}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$이다.



$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AR}|=4\times\left(4+\frac{1}{2}\right)=18$이다.

따라서 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$의 최댓값은 18이다.

093

Guide step에서 배운 중점분해 Technique을 이용하여 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$의 최댓값을 구해보자.

선분 AB의 중점을 M이라 하면 $|\overrightarrow{AM}|=12$이므로

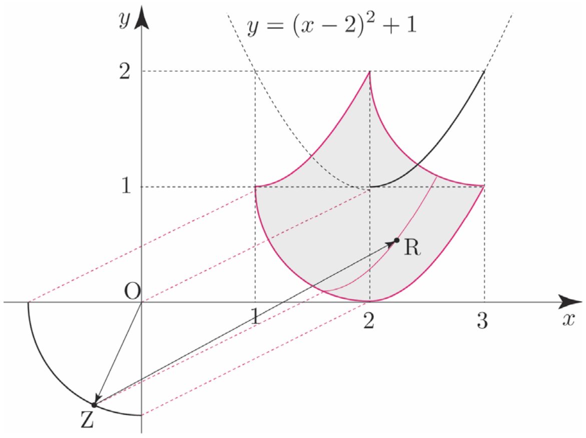
$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}&=(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MB})\\&=(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{MA})\\&=|\overrightarrow{PM}|^2-|\overrightarrow{MA}|^2=|\overrightarrow{PM}|^2-12^2\end{aligned}$$

이다.

즉, $|\overrightarrow{PM}|$의 값이 최대일 때, $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$는 최댓값을 갖는다.

100

$-\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OZ}$이 되도록 점 Z를 잡고,
(호 AB를 점 O에 대하여 대칭이동)
$\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{ZR}$이 되도록 점 R을 잡으면
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{ZR} + \overrightarrow{OZ}$ 이므로 점 P가 나타내는 영역 R은 다음 그림과 같이 색칠한 영역과 같다.



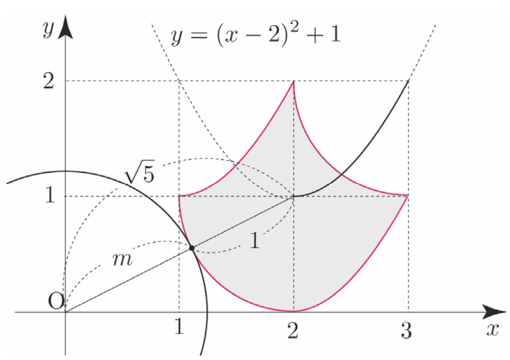
Tip 1 Training 1step에서 자취를 물어보는 문제들을 학습한 바 있었다. 아직 익숙하지 않다면 지난 문제들을 복습하고 난 후 100번을 다시 도전해보도록 하자.

Tip 2 처음부터 한 번에 점 P의 자취를 그리려 하지 말고 점 Z을 점 $(0,\ -1)$부터 점 $(-1,\ 0)$까지 조금씩 이동시켜보면서 해당 점 Z에 대한 점 P의 자취의 그려본 후 감을 찾으면 된다.

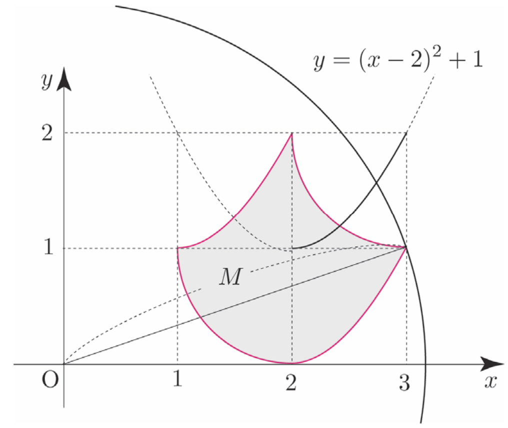
점 O로부터 영역 R에 있는 점까지의 거리는 $|\overrightarrow{OP}|$와 같다.

한 점과 같은 거리에 있는 점들의 집합은 원이므로
점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $|\overrightarrow{OP}|$인 원을 생각해보자.

원이 영역 R과 처음으로 접할 때, $|\overrightarrow{OP}|$는 최솟값
$m = \sqrt{5} - 1$을 갖는다.



원이 $(3,\ 1)$을 지날 때, $|\overrightarrow{OP}|$는 최댓값
$M = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$을 갖는다.

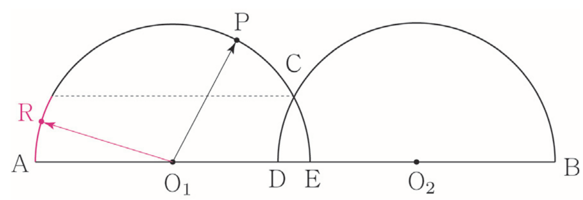


따라서 $M^2 + m^2 = 10 + (\sqrt{5} - 1)^2 = 16 - 2\sqrt{5}$이다.

답 ①

101

$\overrightarrow{O_2Q} = \overrightarrow{O_1R}$이 되도록 점 R을 잡으면
점 R의 자취는 다음 그림과 같다.



$\overrightarrow{O_2Q} = \overrightarrow{O_1R}$이므로 $|\overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{O_2Q}| = |\overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{O_1R}|$이다.

$$|\overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{O_1R}|^2 = |\overrightarrow{O_1P}|^2 + 2\overrightarrow{O_1P} \cdot \overrightarrow{O_1R} + |\overrightarrow{O_1R}|^2$$
$$= |\overrightarrow{O_1P}|^2 + 2|\overrightarrow{O_1P}||\overrightarrow{O_1R}|\cos\theta + |\overrightarrow{O_1R}|^2$$
$$= 2 + 2\cos\theta$$

이므로 두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{O_1R}$가 이루는 각 $\theta\,(0 \le \theta \le \angle AO_1C)$가 최대일 때, ($\cos\theta$가 최소일 때)
$|\overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{O_1R}|^2$는 최솟값 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$를 갖는다.

즉 $\theta = \angle AO_1C$이고 $2 + 2\cos\theta = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos\theta = -\frac{7}{8}$일 때,
$|\overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{O_1R}|$는 최솟값을 갖는다.

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\angle CO_1H = \pi - \theta$이므로

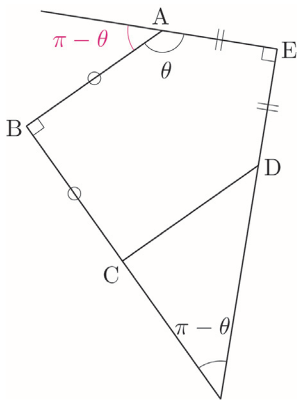
$\overline{O_1H} = \overline{O_1C}\cos(\pi - \theta) = 1 \times (-\cos\theta) = \frac{7}{8}$이고,

$|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}+|\overrightarrow{ED}|^2$

$|\overrightarrow{BE}|^2=|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}|^2$

$=|\overrightarrow{BA}|^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AE}+|\overrightarrow{AE}|^2$

$\overline{AB}=\overline{BC}$, $\overline{AE}=\overline{ED}$이고, 두 벡터 $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AE}$가 이루는 각의 크기는 $\pi-\theta$이다.



$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{AE}|\cos(\pi-\theta)$

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}=|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{ED}|\cos(\pi-\theta)$

이므로 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}$이다.

따라서 ㄷ은 참이다.

답 ⑤

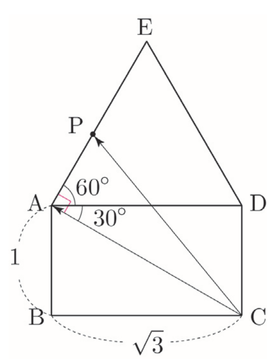
109

ㄱ. $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}|$의 최솟값은 1이다.

$|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}|=|\overrightarrow{PB}|$이므로 점 P가 점 A일 때 $|\overrightarrow{PB}|$는 최솟값 1을 갖는다.
따라서 ㄱ은 참이다.

ㄴ. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}$의 값은 일정하다.

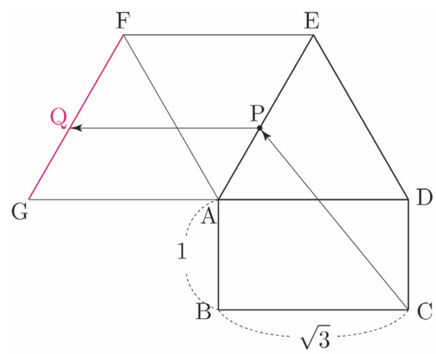
$\tan(\angle DAC)=\dfrac{\overline{DC}}{\overline{AD}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\angle DAC=30^\circ$이고,
$\angle EAD=60^\circ$이므로 $\angle CAE=90^\circ$이다.



즉, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}=|\overrightarrow{CA}|^2=4$이다.
따라서 ㄴ은 참이다.

ㄷ. $|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}|$의 최솟값은 $\dfrac{7}{2}$이다.

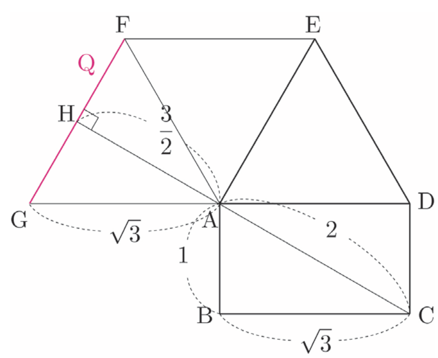
$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{PQ}$가 되도록 점 Q를 잡으면
$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CQ}$이다.
$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{EF}$가 되도록 점 F를 잡고,
$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AG}$가 되도록 점 G를 잡으면
점 Q의 자취는 선분 FG와 같다.



점 C에서 선분 FG에 내린 수선의 발을 H라 하면
$|\overrightarrow{CQ}|$의 최솟값은 $\overline{CH}$와 같다.

좌표평면을 도입하여 생각해보면 직선 FG의 기울기는 $\sqrt{3}$이고, 두 직선 FG, CH는 서로 수직이므로
직선 CH의 기울기는 $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이다.

이때 직선 AC의 기울기가 $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이므로
직선 CH는 점 A를 지난다.



즉, $\overline{CH}=\overline{AH}+\overline{CA}=\dfrac{3}{2}+2$이므로

$|\overrightarrow{CQ}|$의 최솟값은 $\dfrac{7}{2}$이다.

따라서 ㄷ은 참이다.

답 ⑤

실제 109번을 현장에서 푼 학생 중 위와 같이 접근한 학생은 매우 드물었다. 지금이야 노출이 워낙 많이 돼서 위와 같은 풀이를 떠올릴 수 있겠지만 당시 10명중 9명은 좌표를 도입해서 풀었다. (필자도 2011학년도 9평을 현장에서 응시했을 때 좌표로 풀었던 기억이 있다.)

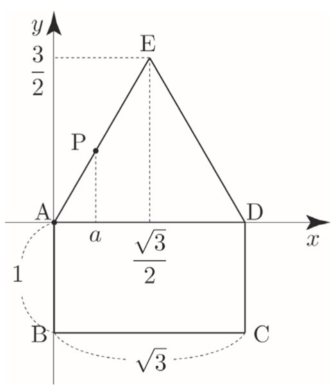
이번에는 좌표를 도입해서 풀어보자.

점 A를 원점으로 잡고, 아래와 같이 좌표축을 설정해보자.

$\mathrm{A}(0,\ 0)$, $\mathrm{E}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$, $\mathrm{C}(\sqrt{3},\ -1)$, $\mathrm{D}(\sqrt{3},\ 0)$

직선 AE는 $y=\sqrt{3}x$이므로 점 P의 x좌표를 $a\left(0\le a\le \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$라 하면 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(a,\ \sqrt{3}a)$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{DA}}=(-\sqrt{3},0)$, $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(a-\sqrt{3},\ \sqrt{3}a+1)$이므로
$\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(a-2\sqrt{3},\ \sqrt{3}a+1)$이다.



$$\left|\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|=\sqrt{(a-2\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}a+1)^2}$$
$$=\sqrt{4a^2-2\sqrt{3}a+13}$$
$$=\sqrt{\left(2a-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{49}{4}}$$

이고, $0\le a\le \dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$일 때,

$\left|\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|$는 최솟값 $\sqrt{\dfrac{49}{4}}=\dfrac{7}{2}$을 갖는다.

따라서 ㄷ은 참이다.

110

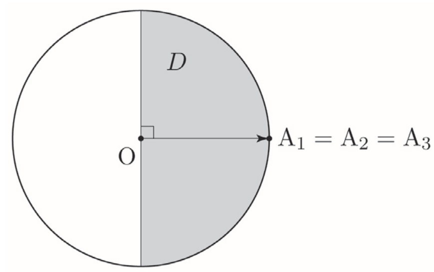
$\left|\overrightarrow{\mathrm{OX}}\right|\le 1$이므로 점 X는 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원과 그 내부에 있어야 한다.
또한 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}\ge 0\ (k=1,\ 2,\ 3)$이므로

$0\le \angle\mathrm{XOA}_k\le \dfrac{\pi}{2}$이어야 한다.

ㄱ. $\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}$이면 D의 넓이는 $\dfrac{\pi}{2}$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}$이므로 세 점 A_1, A_2, A_3은 모두 같은 점이다.

도형 D는 다음 그림과 같이 반원의 둘레와 그 내부이므로 도형 D의 넓이는 $\dfrac{\pi}{2}$이다.

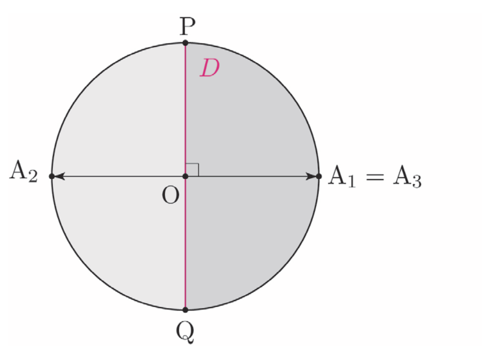


따라서 ㄱ은 참이다.

ㄴ. $\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$이고 $\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$이면 D는 길이가 2인 선분이다.

$\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$이므로 두 점 A_1, A_2는 원점에 대하여 대칭이고, $\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$이므로 두 점 A_1, A_3은 같은 점이다.

선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$를 수직이등분하는 직선과 원의 교점을 각각 P, Q라 하면 도형 D는 다음 그림과 같이 선분 PQ와 같으므로 D의 길이는 2이다.



따라서 ㄴ은 참이다.

$|\overrightarrow{BR}|=\frac{1}{2}$이 되도록 하는 점 R을 R_0라 하자.
점 X에서 선분 BQ_0에 내린 수선의 발이 R_0이 되도록 하는 점 X를 X_0라 하면 $|\overrightarrow{Q_0X}|^2$의 최댓값은 $|\overrightarrow{Q_0X_0}|^2$와 같다.

$\overline{X_0R_0}$의 값은 점 B와 직선 AP_0 사이의 거리와 같다.
직선 AP_0는 기울기가 -1이고 점 $A(-3,\ 1)$를 지나므로
$y=-(x+3)+1 \Rightarrow x+y+2=0$이다.
점 $B(0,\ 2)$와 직선 AP_0 : $x+y+2=0$ 사이의 거리는
$\overline{X_0R_0}=\frac{|4|}{\sqrt{1+1}}=2\sqrt{2}$이다.

$|\overrightarrow{Q_0X_0}|^2=\overline{X_0R_0}^2+\overline{Q_0R_0}^2=(2\sqrt{2})^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{41}{4}$이므로
$|\overrightarrow{Q_0X}|^2$의 최댓값은 $\frac{41}{4}$이다.
따라서 $p+q=45$이다.

답 45

125

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\,(0\le s\le 1,\ 0\le t\le 1)$를 만족시키는 점 P가 나타내는 영역은 평행사변형 OACB와 그 내부이다.

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BC}=2$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=2$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OB}|^2=2$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-6$ ⋯ ㉠

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$의 값을 구해보자.

$\angle AOB=\theta \Rightarrow \angle OBC=\pi-\theta$이므로
$\cos(\angle OBC)=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=-\frac{1}{4}$이다.

$\overline{BC}=\sqrt{2}$, $\overline{OB}=2\sqrt{2}$, $\cos(\angle OBC)=-\frac{1}{4}$이므로
삼각형 OBC에서 코사인법칙을 사용하면
$\cos(\angle OBC)=\frac{\overline{OB}^2+\overline{BC}^2-\overline{OC}^2}{2\times\overline{OB}\times\overline{BC}}$

$\Rightarrow -\frac{1}{4}=\frac{10-\overline{OC}^2}{8}$

$\Rightarrow \overline{OC}=2\sqrt{3}$
이다.

삼각형 OBC에서 코사인법칙을 사용하면
$\cos(\angle BOC)=\frac{\overline{OB}^2+\overline{OC}^2-\overline{BC}^2}{2\times\overline{OB}\times\overline{OC}}=\frac{3\sqrt{6}}{8}$이다.

즉, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|\cos(\angle BOC)$

$=2\sqrt{2}\times2\sqrt{3}\times\frac{3\sqrt{6}}{8}=9$

이다.

㉠에 의해서
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-6$

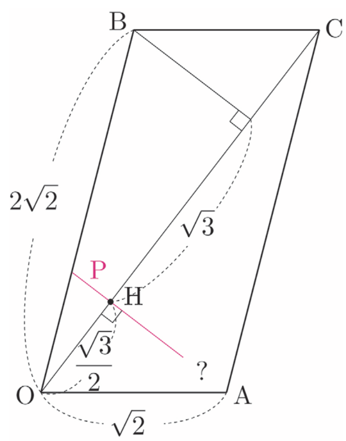
$\Rightarrow \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}-9=-6$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}=3$

점 P에서 선분 OC에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}=3 \Rightarrow |\overrightarrow{OH}||\overrightarrow{OC}|=3 \Rightarrow |\overrightarrow{OH}|\times2\sqrt{3}=3$

$\Rightarrow |\overrightarrow{OH}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이므로 이를 만족시키는 점 P의 자취를 구해보자.

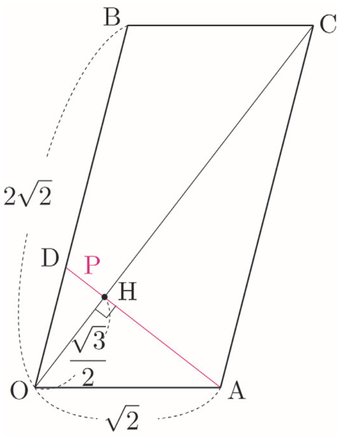


그런데 여기서 의문점이 든다.
점 H를 지나고 직선 OC에 수직인 직선이 선분 OA와 만나는지 혹은 만나지 않는지 그리고 만약 만난다면 어디서 만나는지 단정할 수 없다.
느낌상 점 A에서 만날 것 같지만 정말 그런지 확인해보자.

삼각형 COA에서 코사인법칙을 사용하면
$\cos(\angle COA)=\frac{\overline{OA}^2+\overline{OC}^2-\overline{AC}^2}{2\times\overline{OA}\times\overline{OC}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$이다.
점 A에서 선분 OC에 내린 수선의 발을 H′라 하면
$\overline{OH'}=\overline{OA}\cos(\angle COA)=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로
두 점 H, H′는 서로 같은 점이다.

즉, 점 H를 지나고 직선 OC에 수직인 직선과 선분 OA는 점 A에서 만난다.

점 H를 지나고 직선 OC에 수직인 직선이
선분 OB와 만나는 점을 D라 하면
점 P의 자취는 직선 AD과 평행사변형 OACB와
그 내부의 공통부분이므로 선분 AD이다.



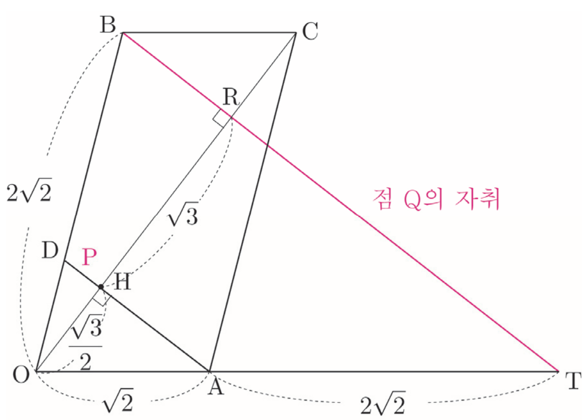
$|3\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OX}|$의 최댓값과 최솟값을 구하기 위해서 055번에서 배운 아이디어를 사용해보자.

$3\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}$라 하면 $|3\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OX}|=|\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OX}|=|\overrightarrow{XQ}|$이므로 구하고자 하는 값을 두 점 X, Q 사이의 거리로 해석할 수 있다.

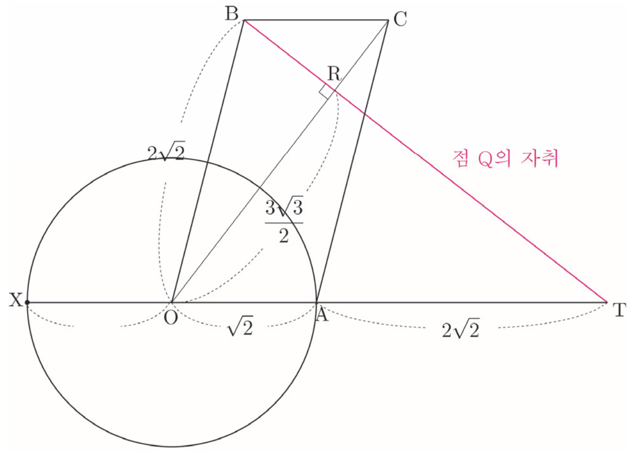
$3\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OS}$가 되도록 점 S를 잡고,
$3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OT}$가 되도록 점 T를 잡으면
점 Q의 자취는 선분 ST이다.

이때 점 B에서 선분 OC에 내린 수선의 발을 R이라 하면 $\overline{OR}=\overline{OB}\cos(\angle BOC)=2\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{6}}{8}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$이다.

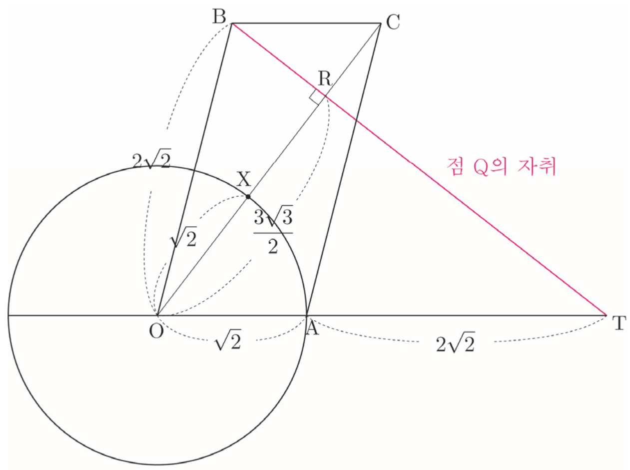
$\overline{OH}:\overline{OR}=1:3$이므로 $\overline{OD}:\overline{OB}=1:3$이다.
즉, 점 S는 점 B와 같으므로 점 Q의 자취는 선분 BT이다.



다음 그림과 같이 세 점 X, O, T가 일직선상에 있을 때, $|\overrightarrow{XQ}|$는 최댓값 $M=\overline{OT}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}+\sqrt{2}=4\sqrt{2}$를 갖는다.



다음 그림과 같이 세 점 O, X, R이 일직선상에 있을 때, $|\overrightarrow{XQ}|$는 최솟값 $m=\overline{OR}-\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}$를 갖는다.



$M\times m=4\sqrt{2}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}\right)=6\sqrt{6}-8$이므로
$a=6,\ b=-8$이다.
따라서 $a^2+b^2=36+64=100$이다.

답 100

공간도형 | Training – 1 step

1	4	**16**	12
2	28	**17**	49
3	ㄱ	**18**	34
4	③	**19**	15
5	8	**20**	③
6	⑤	**21**	12
7	2	**22**	②
8	②	**23**	208
9	④	**24**	②
10	③	**25**	162
11	②	**26**	55
12	④	**27**	④
13	40	**28**	①
14	10	**29**	②
15	80		

해설

001

직육면체 $ABCD-EFGH$에서 세 꼭짓점에 의하여 결정되는 평면 중 직선 BD를 포함하는 서로 다른 평면은 평면 ABD, EDB, FDB, GDB이다.
따라서 서로 다른 평면의 개수는 4이다.

답 4

002

직선 CH와 평행한 직선은 DI, EJ, AF, BG이므로 $a=4$이다.
직선 AB와 꼬인 위치에 있는 직선은 CH, DI, EJ, GH, HI, IJ, JF이므로 $b=7$이다.
따라서 $ab=28$이다.

답 28

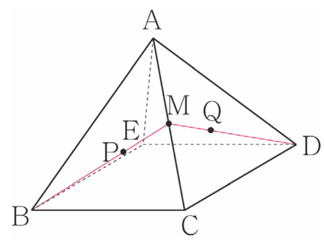
003

ㄱ. 직선 AE와 직선 CD

두 직선 AE, CD는 평행하지도 않고, 한 점에서 만나지도 않으므로 꼬인 위치에 있다.
따라서 ㄱ은 참이다.

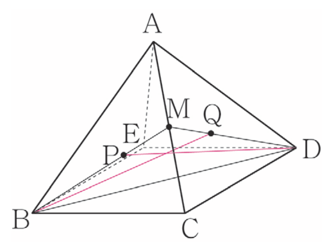
ㄴ. 직선 BP와 직선 DQ

선분 AC의 중점을 M이라 하자.
점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이므로
직선 BP는 점 M을 지나고,
점 Q는 삼각형 ACD의 무게중심이므로
직선 DQ는 점 M을 지난다.
즉, 두 직선 BP, DQ는 한 점에서 만나므로
꼬인 위치에 있지 않다.
따라서 ㄴ은 거짓이다.

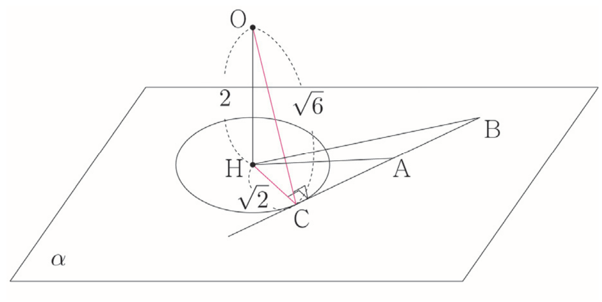


ㄷ. 직선 BQ와 직선 DP

ㄴ에서 살펴본 것처럼 선분 AC의 중점을 M이라 하면
평면 MBD는 두 직선 BQ, DP를 포함한다.
즉, 두 직선 BQ, DP는 한 점에서 만나고
한 평면을 결정하므로 꼬인 위치에 있지 않다.
따라서 ㄷ은 거짓이다.



답 ㄱ



$\overline{AH} = \sqrt{10}$, $\overline{BH} = 2\sqrt{13}$

삼각형 AHC에서 $\overline{AC} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$이고,

삼각형 BHC에서 $\overline{BC} = \sqrt{(2\sqrt{13})^2 - (\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{2}$이다.

$\overline{AB} = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$이므로 삼각형 ABH의

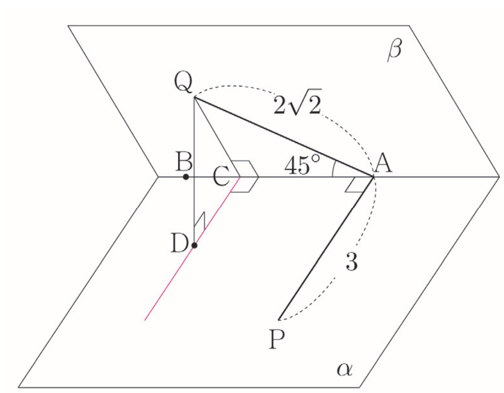
넓이는 $\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{HC} = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 3$이다.

따라서 사면체 OABH의 부피는 $\frac{1}{3} \times 3 \times 2 = 2$이다.

답 2

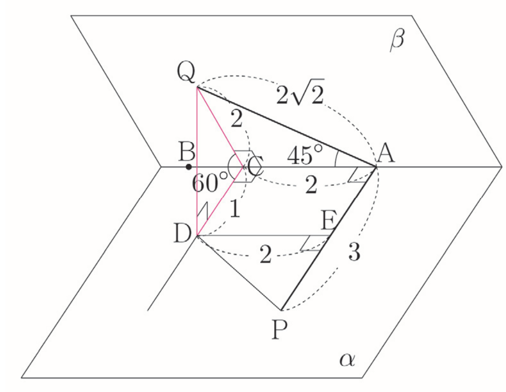
008

점 Q에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 C라 하자.
점 Q에서 평면 α에 내린 수선의 발을 D라 하고, 이를 작도하기 위해서 Guide step에서 배운 것처럼 삼수선의 정리를 이용하면 점 D는 점 C를 지나고 직선 AB에 수직인 직선 위에 떨어진다.



삼각형 QAC에서 $\angle QAC = 45°$, $\overline{AQ} = 2\sqrt{2}$이므로
$\overline{QC} = \overline{CA} = 2$이다.
두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 $60°$이므로
$\angle QCD = 60°$이고, 삼각형 QCD에서
$\overline{DC} = 1$, $\overline{QD} = \sqrt{3}$이다.

점 D에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 E라 하면
$\overline{PE} = \overline{PA} - \overline{EA} = 3 - 1 = 2$이므로
삼각형 DPE에서 $\overline{DP} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$이다.



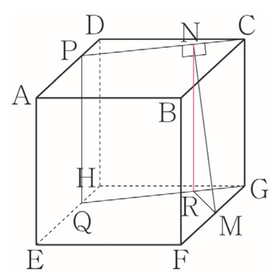
삼각형 QPD에서 $\overline{PQ} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{11}$이다.
따라서 선분 PQ의 길이는 $\sqrt{11}$이다.

답 ②

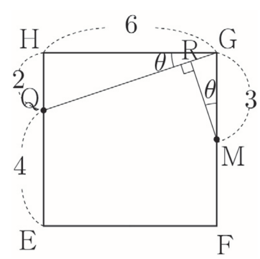
009

평면이 삼각형인 것보다 사각형인 것이 문제를 접근하기 용이하므로 평면 PCG를 연장해보자.
점 P에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발을 Q라 하면 평면 PCG와 평면 PQGC는 같은 평면이다.

점 M에서 평면 PQGC에 내린 수선의 발을 R이라 하고, 이를 작도하기 위해서 Guide step에서 배운 것처럼 삼수선의 정리를 이용하면 점 R은 점 N을 지나고 직선 PC에 수직인 직선 위에 떨어진다.



밑면 사각형 EFGH를 떼어내어 다시 그리면 다음과 같다.



삼각형 QGH에서 $\overline{GQ} = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$이다.

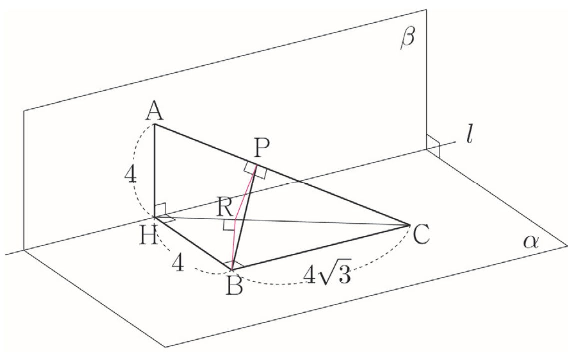
삼각형 HAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

따라서 사면체 PHAB의 부피는 $\frac{1}{3}\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{6}$이다.

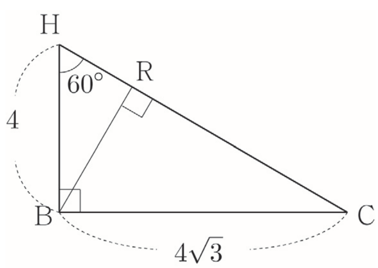
답 ②

012

점 B에서 평면 AHC에 내린 수선의 발을 R이라 하고, 이를 작도하기 위해서 Guide step에서 배운 것처럼 삼수선의 정리를 이용하면 점 R은 점 P을 지나고 직선 AC에 수직인 직선 위에 떨어진다.



삼각형 HCB를 떼어내어 다시 그리면 다음과 같다.



$\tan(\angle \mathrm{CHB})=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{HB}}}=\frac{4\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3} \Rightarrow \angle \mathrm{CHB}=60^\circ$

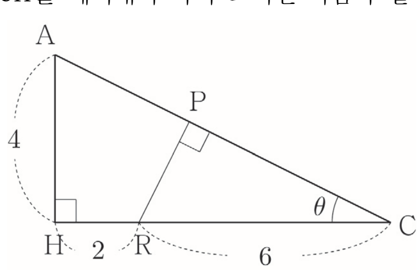
삼각형 HBR에서 $\overline{\mathrm{BR}}=\overline{\mathrm{BH}}\sin60^\circ=2\sqrt{3}$이고,

$\overline{\mathrm{HR}}=\overline{\mathrm{BH}}\cos60^\circ=2$이다.

$\overline{\mathrm{HC}}=\sqrt{4^2+(4\sqrt{3})^2}=8$이므로

$\overline{\mathrm{RC}}=8-2=6$이다.

삼각형 ACH를 떼어내어 다시 그리면 다음과 같다.



$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$

$\angle \mathrm{ACH}=\theta$라 하면 삼각형 ACH에서

$\sin\theta=\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=\frac{4}{4\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$이므로

$\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{RC}}\sin\theta=\frac{6}{\sqrt{5}}$이다.

삼각형 BRP에서

$\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2+(2\sqrt{3})^2}=\frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{30}}{5}$이다.

따라서 선분 BP의 길이는 $\frac{4\sqrt{30}}{5}$이다.

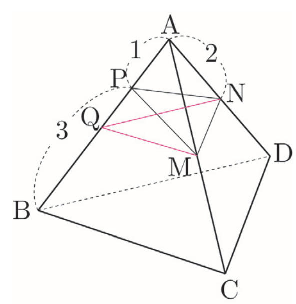
답 ④

013

평면 PMN과 평행 BCD의 교선이 보이지 않아 이면각의 정의를 사용하기 어렵다.

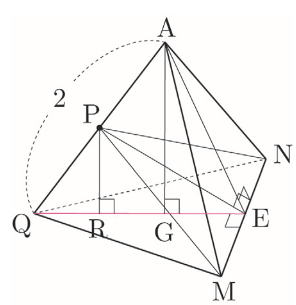
뭔가 방법이 없을까?
여기서 아이디어! 바닥평면 BCD를 평행이동하여 풀어보자.

선분 AB의 중점을 Q라 하면
평면 BCD와 평면 QMN은 서로 평행하므로
평면 PMN과 평면 BCD가 이루는 각의 크기는
평면 PMN과 평면 QMN이 이루는 각의 크기와 같다.



이때 사면체 AQMN은 모든 모서리의 길이가 2인 정사면체이고, 선분 AQ의 중점은 P이다.

이를 바탕으로 정사면체 AQMN을 그리면 다음과 같다.



점 P에서 선분 MN에 내린 수선의 발을 E라 하자.
점 P에서 평면 QMN에 린 수선의 발을 R이라 하고,
점 A에서 평면 QMN에 내린 수선의 발을 G라 하면
두 점 R, G는 직선 QE 위에 떨어진다.

$\overline{AG} = \frac{\sqrt{6}}{3}\times 2 = \frac{2\sqrt{6}}{3}$이고,
두 삼각형 AQG, PQR는 $2:1$ 닮음이므로
$\overline{PR} = \frac{1}{2}\overline{AG} = \frac{\sqrt{6}}{3}$이다.

삼각형 AEQ는 $\overline{AE} = \overline{QE} = \sqrt{3}$인 이등변삼각형이므로
직선 PE는 선분 AQ를 수직이등분한다.
삼각형 AEP에서 $\overline{PE} = \sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2} = \sqrt{2}$이다.

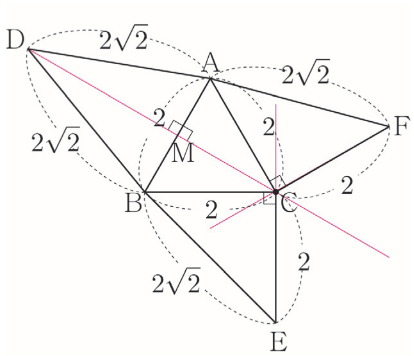
삼각형 PER에서 $\sin\theta = \frac{\overline{PR}}{\overline{PE}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$이므로
$\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$이다.
따라서 $60\cos^2\theta = 60\times\frac{2}{3} = 40$이다.

답 40

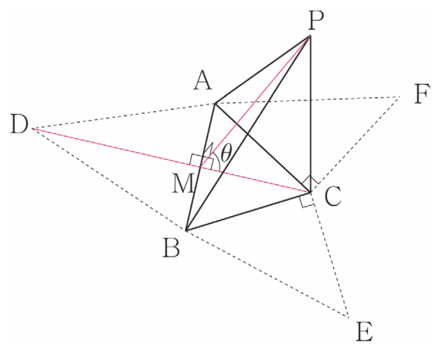
014

$\overline{AC} = \overline{CE} = \overline{AB} = 2$, $\overline{AF} = \overline{AD} = \overline{DB} = 2\sqrt{2}$
점 AB의 중점을 M이라 하자.

점 P에서 평면 ABC에 내린 수선의 발은
삼수선의 정리에 의해 다음 그림과 같이 색칠한 세 직선의
교점인 C에 위치함을 알 수 있다.



삼각형 DAM에서 $\overline{DM} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2-1^2} = \sqrt{7}$이고,
삼각형 ABC에서 $\overline{MC} = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$이다.
$\overline{PM} = \overline{DM} = \sqrt{7}$



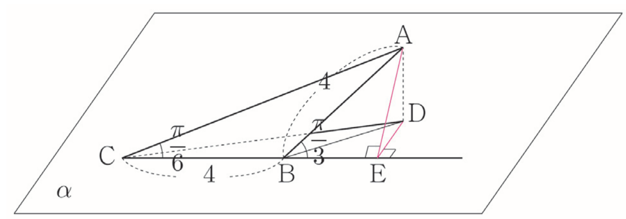
삼각형 PMC에서 $\cos\theta = \frac{\overline{MC}}{\overline{PM}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$이므로
$\cos^2\theta = \frac{3}{7}$이다.
따라서 $p+q=10$이다.

답 10

015

"삼수선의 정리를 사용할 때, 교선이 짧아서 교선에
수선의 발을 내리기 어려운 경우에는 교선을 연장하면
된다."라고 Guide step에서 학습한 바 있다.

선분 BC를 연장하여 점 A에서 직선 BC에 내린
수선의 발을 E라 하면 삼수선의 정리에 의해
$\overline{DE}\perp\overline{BE}$이다.



$\overline{AB} = \overline{BC} = 4$, $\angle ACB = \frac{\pi}{6}$이므로 $\angle ABE = \frac{\pi}{3}$이다.
삼각형 ABE에서
$\overline{BE} = \overline{AB}\cos\frac{\pi}{3} = 2$, $\overline{AE} = \overline{AB}\sin\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$이다.

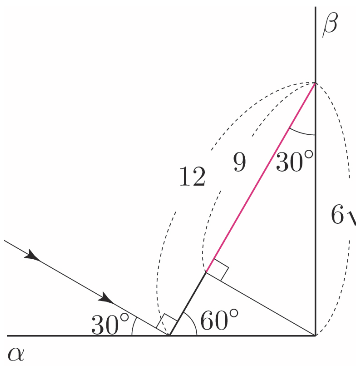
$\overline{BD} = \sqrt{10}$이므로 삼각형 BDE에서
$\overline{ED} = \sqrt{(\sqrt{10})^2-2^2} = \sqrt{6}$이다.

삼각형 AED에서 $\overline{AD} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{6})^2} = \sqrt{6}$이다.

문제에서 구하는 것은 두 평면 ABC와 ACD가 이루는
각의 크기이고, 두 평면 ABC, ACE은 같은 평면이니
평면 ACE를 바닥평면으로 보고 이면각을 구해보자.

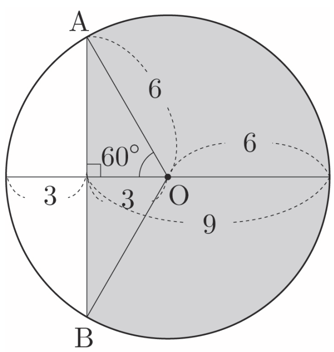
058

원판이 선분으로 보이도록 보는 각도를 바꿔서 다시 그리면 다음 그림과 같다.



위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이를 S'라 하면 (선분처럼 보이지만 실제는 원의 일부분이다.) $S' = S\cos 30^\circ$ 이다.

S'는 다음 그림에서 색칠한 영역의 넓이와 같다.



S' =(원의 넓이) −
(부채꼴 OAB의 넓이 − 삼각형 OAB의 넓이)

$$\Rightarrow S' = 36\pi - \left(\frac{1}{2}\times 6^2 \times \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\times 6^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow S' = 36\pi - (12\pi - 9\sqrt{3}) = 24\pi + 9\sqrt{3}$$

$$S' = S\cos 30^\circ$$

$$\Rightarrow S = (24\pi + 9\sqrt{3}) \times \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow S = 18 + 16\sqrt{3}\pi$$

이므로 $a = 18$, $b = 16$이다.
따라서 $a + b = 34$이다.

답 34

059

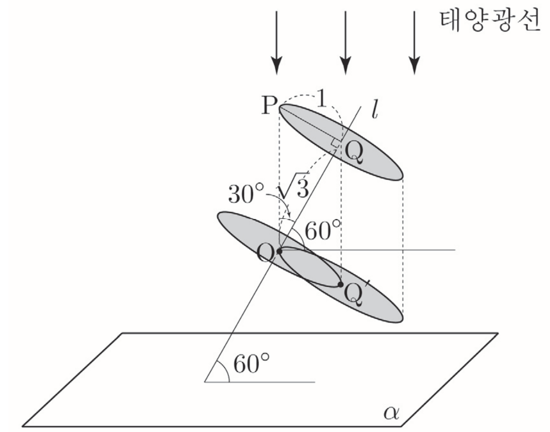
위 원판의 둘레 위의 점 중에서 평면 α으로부터의 거리가 가장 먼 점을 P, 위 원판의 중심을 Q라 하고, 아래 원판의 중심을 O라 하자.

직선 l과 윗 원판은 서로 수직이므로 $\angle PQO = 90^\circ$ 이고, 삼각형 POQ에서

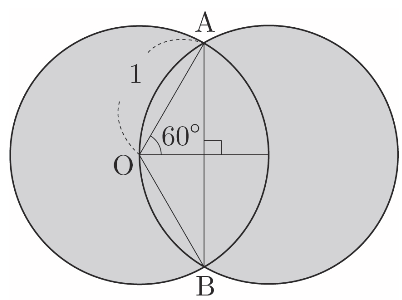
$$\tan(\angle POQ) = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \angle POQ = 30^\circ \text{ 이다.}$$

이때 직선 l와 평면 α가 이루는 각의 크기가 60° 이므로 직선 OP는 평면 α와 수직이다.

즉, 위 원판을 아래 원판을 포함하는 평면에 포함되도록 겹치면 두 원판의 둘레는 각 원판의 중심을 지난다.



두 원판이 겹쳐져서 생기는 영역은 색칠한 영역과 같다.

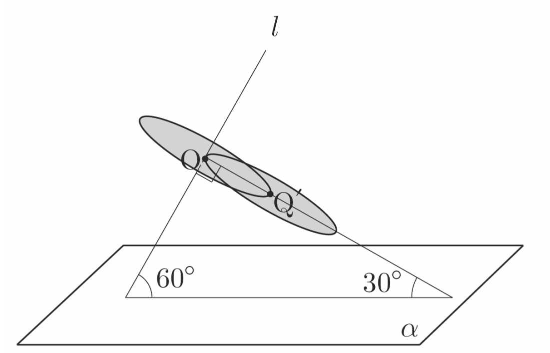


색칠한 영역의 넓이를 S라 하면
$S = 2\times$(선분 AB를 포함하지 않는 부채꼴 OAB의 넓이
+ 삼각형 OAB의 넓이)

$$\Rightarrow S = 2\times\left(\frac{1}{2}\times 1^2 \times \frac{4}{3}\pi + \frac{1}{2}\times 1^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow S = 2\times\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이다.



두 원판에 의해 평면 α에 생기는 그림자의 넓이를 S'라 하면 $S' = S\cos30^\circ = \left(\frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi + \frac{3}{4}$ 이다.

따라서 두 원판에 의해 평면 α에 생기는 그림자의 넓이는 $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi + \frac{3}{4}$이다.

답 ⑤

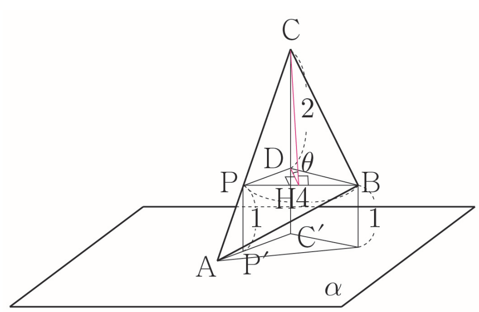
060

두 점 P, C에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 P′, C′라 하자.

$\overline{AP} : \overline{AC} = 1:3$이므로 두 삼각형 APP′, ACC′는 $1:3$ 닮음이고, $\overline{CC'} = 3$이므로 $\overline{PP'} = 1$이다.
즉, 두 점 P, B는 α로부터의 거리가 모두 1로 동일하므로 선분 PB는 평면 α와 평행하다.

평면 α와 평행하고 선분 BP를 포함하는 평면이 선분 CC′와 만나는 점을 D라 하자.

점 D 에서 선분 BP에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선의 정리에 의해 $\overline{CH} \perp \overline{BP}$이다.



평면 ABC와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\angle CHD = \theta$이다.

$\overline{AP} : \overline{PC} = 1:2$이고, 삼각형 ABC의 넓이가 9이므로 삼각형 CBP의 넓이는 $9 \times \frac{2}{3} = 6$이다.

삼각형 CBP의 넓이가 6이므로

$6 = \frac{1}{2} \times \overline{BP} \times \overline{CH}$

$\Rightarrow 6 = \frac{1}{2} \times 4 \times \overline{CH}$

$\Rightarrow \overline{CH} = 3$

이다.

삼각형 CHD에서 $\overline{DH} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$이므로 $\cos\theta = \frac{\overline{DH}}{\overline{CH}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$이다.

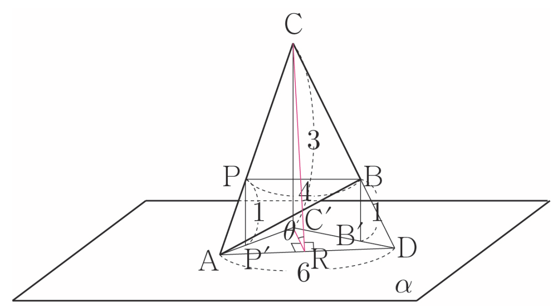
삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 $S = 9\cos\theta = 9 \times \frac{\sqrt{5}}{3} = 3\sqrt{5}$이다.
따라서 $S^2 = 45$이다.

답 45

이번에는 지난 문제들에서 배웠던 평면 연장을 이용하여 풀어보자.

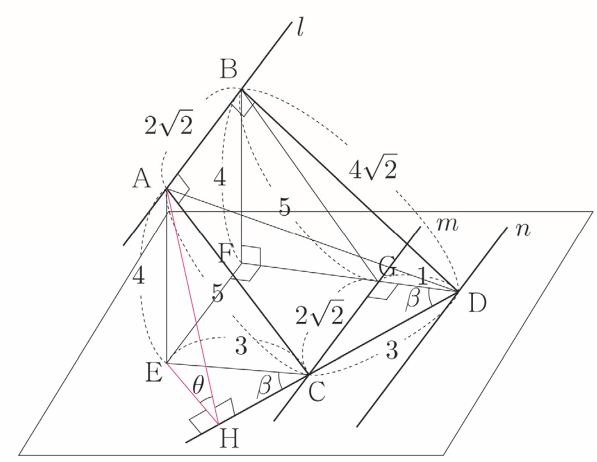
점 B에서 평면 α에 내린 수선의 발을 B′라 하자.
두 직선 BC, B′C′의 교점을 D라 하면
두 평면 ABC, ADC는 서로 같다.

점 C′에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 R라 하면 삼수선의 정리에 의해 $\overline{CR} \perp \overline{AD}$이다.



평면 ABC와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\angle CRC' = \theta$이다.

$\overline{AP} : \overline{PC} = 1:2$이고, 삼각형 ABC의 넓이가 9이므로 삼각형 CBP의 넓이는 $9 \times \frac{2}{3} = 6$이다.



$\angle CDG = \beta$라 하면 $\angle DCG = 90^\circ - \beta$이고,
$\angle ECG = 90^\circ$ 이므로 $\angle ECH = \beta$이다.

삼각형 CDG에서 $\sin\beta = \dfrac{\overline{CG}}{\overline{CD}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ 이므로

삼각형 ECH에서 $\overline{EH} = \overline{EC}\cos\beta = 2\sqrt{2}$ 이다.

$\angle AHE = \theta$이므로 삼각형 AHE에서

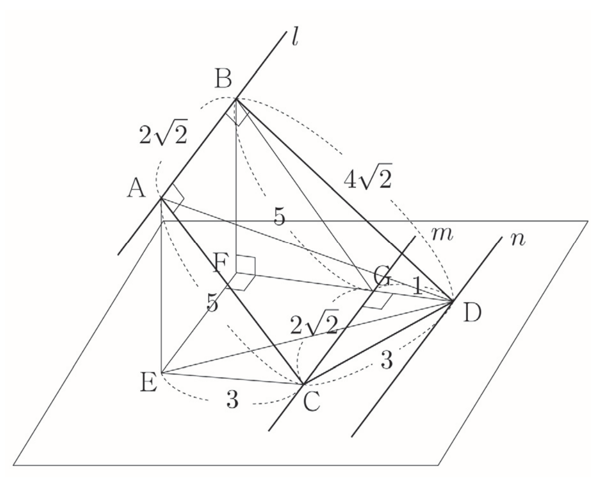
$\tan\theta = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{EH}} = \dfrac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ 이다.

따라서 $15\tan^2\theta = 30$이다.

답 30

이번에는 정사영의 넓이를 이용하여 풀어보자.

삼각형 ACD의 넓이를 S라 하고, 삼각형 ECD의 넓이를 S'라 하면 $S' = S\cos\theta$이다.



삼각형 ADB에서 $\overline{AD} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{10}$ 이다.

$\angle CAD = \gamma$라 하고, 삼각형 ACD에서 코사인법칙을 사용하면

$\cos\gamma = \dfrac{\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{CD}^2}{2 \times \overline{AC} \times \overline{AD}} = \dfrac{56}{20\sqrt{10}} = \dfrac{14}{5\sqrt{10}}$ 이므로

$\sin\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\gamma} = \sqrt{\dfrac{125 - 98}{125}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{5}}$ 이다.

삼각형 ACD의 넓이는

$S = \dfrac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{AD} \times \sin\gamma$

$= \dfrac{1}{2} \times 5 \times 2\sqrt{10} \times \dfrac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{5}} = 3\sqrt{6}$

이다.

삼각형 ECD의 넓이는

$S' = \dfrac{1}{2} \times \overline{EC} \times \overline{CG} = \dfrac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ 이다.

$S' = S\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{S'}{S} = \dfrac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로

$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left(\because\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2} \right)$이다.

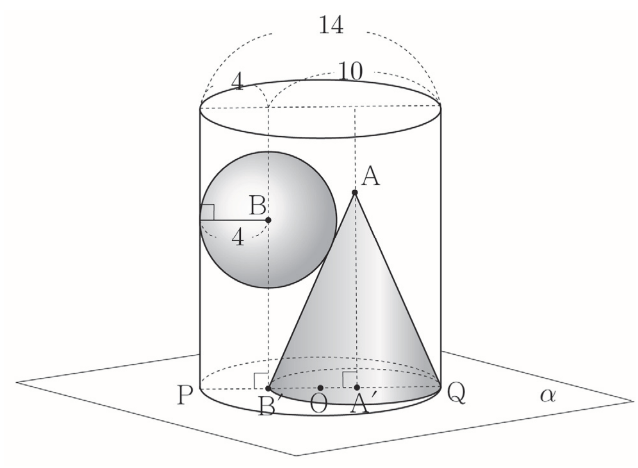
즉, $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{2}$ 이다.

따라서 $15\tan^2\theta = 30$이다.

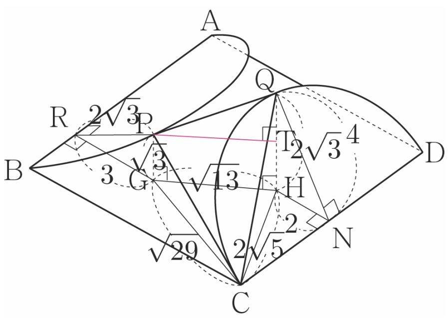
069

원기둥의 밑면의 지름의 길이(14)와 원뿔의 밑면의 지름의 길이(10)의 차가 4이므로 점 B′는 원뿔의 밑면의 둘레 위에 떨어진다.

직선 A′B′와 원기둥의 밑면이 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. (단. $\overline{PB'} < \overline{QB'}$)



주어진 입체도형을 평면 AA′B′B로 자른 단면은 다음 그림과 같다.



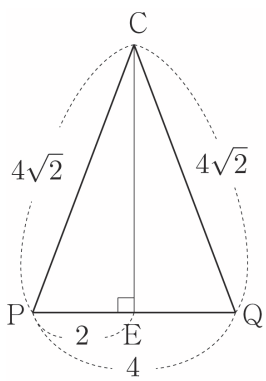
삼각형 PCG에서 $\overline{CP} = \sqrt{(\sqrt{29})^2+(\sqrt{3})^2}=4\sqrt{2}$이고,

삼각형 QCH에서 $\overline{CQ} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2+(2\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{2}$이다.

$\overline{PT} = \sqrt{13}$, $\overline{QT} = \sqrt{3}$이므로 삼각형 PQT에서

$\overline{PQ} = \sqrt{(\sqrt{13})^2+(\sqrt{3})^2}=4$이다.

삼각형 PCQ를 떼어내어 다시 그리면 다음 그림과 같다.



삼각형 PCQ는 $\overline{CP} = \overline{CQ}$인 이등변삼각형이므로

점 C에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 E라 하면

$\overline{PE} = \frac{1}{2}\overline{PE} = 2$이다.

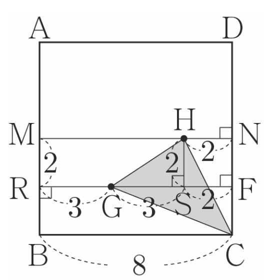
삼각형 PCE에서 $\overline{CE} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2-2^2} = 2\sqrt{7}$이다.

즉, 삼각형 PCQ의 넓이는

$S = \frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{CE} = \frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{7}=4\sqrt{7}$이다.

삼각형 GCH를 구하기 위해서

사각형 ABCD를 떼어내어 다시 그리면 다음 그림과 같다.



삼각형 GCH의 넓이

= (사각형 GCNH의 넓이) − (삼각형 CHN의 넓이)

= (사다리꼴 HGFN의 넓이 + 삼각형 GCF의 넓이)

 − (삼각형 CHN의 넓이)

$$S' = \left\{\frac{1}{2}\times(\overline{HN}+\overline{GF})\times\overline{NF}+\frac{1}{2}\times\overline{GF}\times\overline{FC}\right\}$$

$$-\frac{1}{2}\times\overline{HN}\times\overline{CN}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\times7\times2+\frac{1}{2}\times5\times2\right)-\frac{1}{2}\times2\times4$$

$$=12-4=8$$

즉, $\cos\theta = \frac{S'}{S} = \frac{8}{4\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$이다.

따라서 $70\times cos^2\theta = 70\times\frac{4}{7}=40$이다.

답 40

이번에는 평면을 연장하여 풀어보자.

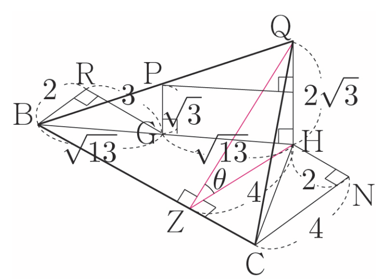
직선 PQ와 직선 GH가 만나는 교점을 X라 하자.

$\overline{PG} : \overline{QH} = 1:2$이므로 두 삼각형 XPG, XQH은

1 : 2 닮음이다. 즉, $\overline{XG} = \sqrt{13}$이다.

이때 삼각형 BGR에서 $\overline{BG} = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$이므로

점 X는 점 B와 같다.



점 Q에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 Z라 하면

삼수선의 정리에 의해 $\overline{ZH}\perp\overline{BC}$이다.

삼각형 ZQH에서 $\overline{ZQ} = \sqrt{4^2+(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$이고,

$\angle QZH=\theta$이므로 $\cos\theta = \frac{\overline{ZQ}}{\overline{ZH}} = \frac{4}{2\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$이다.

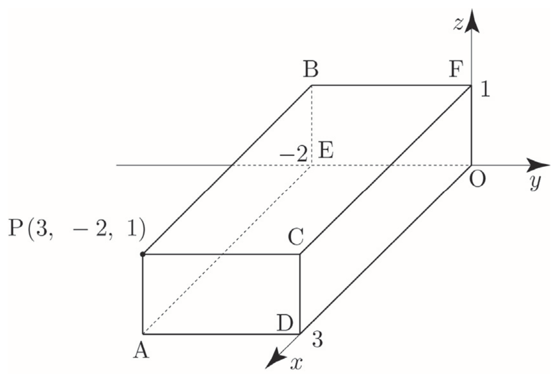
따라서 $70\times cos^2\theta = 70\times\frac{4}{7}=40$이다.

공간좌표 | Guide step

1	(1) xy평면에 내린 수선의 발 : $(3,\ -2,\ 0)$ yz평면에 내린 수선의 발 : $(0,\ -2,\ 1)$ zx평면에 내린 수선의 발 : $(3,\ 0,\ 1)$ (2) x축에 내린 수선의 발 : $(3,\ 0,\ 0)$ y축에 내린 수선의 발 : $(0,\ -2,\ 0)$ z축에 내린 수선의 발 : $(0,\ 0,\ 1)$
2	xy평면에 대한 대칭점 : $(3,\ 5,\ 1)$ yz평면에 대한 대칭점 : $(-3,\ 5,\ -1)$ zx평면에 대한 대칭점 : $(3,\ -5,\ -1)$ x축에 대한 대칭점 : $(3,\ -5,\ 1)$ y축에 대한 대칭점 : $(-3,\ 5,\ 1)$ z축에 대한 대칭점 : $(-3,\ -5,\ -1)$
3	(1) 3 (2) 6
4	$\mathrm{P}\left(0,\ \frac{7}{3},\ 0\right)$
5	$\mathrm{P}(0,\ 0,\ 7)$
6	(1) $\mathrm{P}(2,\ -1,\ -1)$ (2) $\mathrm{M}(1,\ -2,\ 0)$ (3) $\mathrm{Q}(10,\ 7,\ -9)$
7	$\mathrm{D}(-1,\ 0,\ 1)$
8	(1) $\mathrm{G}(3,\ 2,\ -1)$ (2) $\mathrm{C}(3,\ -2,\ 10)$
9	(1) $\mathrm{C}(3\sqrt{3},\ 3,\ 0)$ (2) $\mathrm{H}(\sqrt{3},\ 3,\ 0)$ (3) $\mathrm{A}(\sqrt{3},\ 3,\ 2\sqrt{6})$ (4) $\mathrm{H}'\left(\frac{4\sqrt{3}}{3},\ 2,\ \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ (5) $\left(\sqrt{3},\ 3,\ \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$
10	(1) $(x+3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4$ (2) $x^2+y^2+z^2=25$
11	$(x-4)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=18$
12	(1) 중심 : $(-3,\ -1,\ 2)$, 반지름의 길이 : 3 (2) 중심 : $(1,\ 3,\ -1)$, 반지름의 길이 : 4
13	(1) 중심 : $(1,\ 2,\ 0)$, 반지름의 길이 : $\sqrt{7}$ (2) $2\sqrt{6}$
14	7
15	최댓값 : 5, 최솟값 : 1

해설

개념 확인문제 1



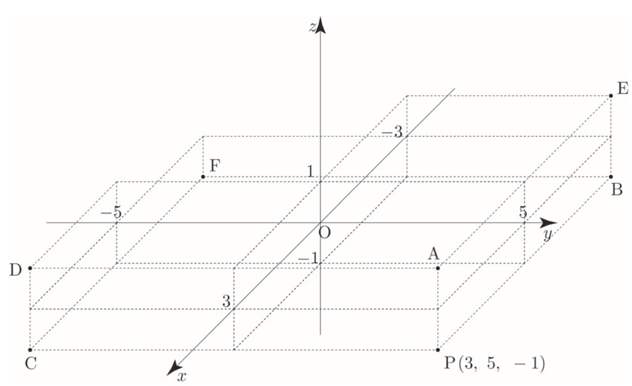
(1) 점 P에서 xy평면, yz평면, zx평면에 내린 수선의 발을 각각 A, B, C라 하면
$\mathrm{A}(3,\ -2,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -2,\ 1)$, $\mathrm{C}(3,\ 0,\ 1)$이다.

(2) 점 P에서 x축, y축, z축에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하면
$\mathrm{D}(3,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{E}(0,\ -2,\ 0)$, $\mathrm{F}(0,\ 0,\ 1)$이다.

답 (1) xy평면에 내린 수선의 발 : $(3,\ -2,\ 0)$
yz평면에 내린 수선의 발 : $(0,\ -2,\ 1)$
zx평면에 내린 수선의 발 : $(3,\ 0,\ 1)$

(2) x축에 내린 수선의 발 : $(3,\ 0,\ 0)$
y축에 내린 수선의 발 : $(0,\ -2,\ 0)$
z축에 내린 수선의 발 : $(0,\ 0,\ 1)$

개념 확인문제 2



점 $\mathrm{P}(3,\ 5,\ -1)$을 xy평면, yz평면, zx평면, x축, y축, z축에 대칭이동한 점을 각각 A, B, C, D, E, F라 하면

즉, $V_p \times V_q = \frac{4}{3}(2\sqrt{6}+2\sqrt{5}) \times \frac{4}{3}(2\sqrt{6}-2\sqrt{5}) = \frac{64}{9}$이다.

따라서 $p+q=73$이다.

답 73

031

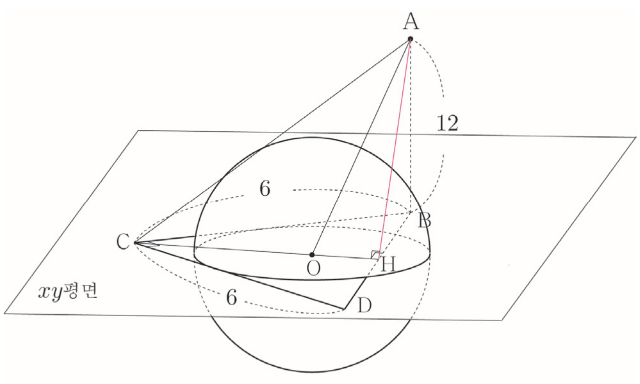
점 A의 z좌표가 12이므로 $\overline{AB}=12$이다.
평면 OAC은 구의 중심 O(0, 0, 0)을 포함하므로
구 S가 평면 OAC와 만나서 생기는 원의 중심은 O이고
반지름의 길이는 2이다.

$\overline{BP}$의 최댓값과 최솟값을 구하기 위해서는 점 B에서
평면 OAC에 내린 수선의 발을 작도해야 하는데
지금 상황에서는 수선의 발을 작도하기 어렵다.

어떻게 해야 할까?

공간도형 단원에서 많이 연습했듯이 평면을 연장해서
접근해보자.

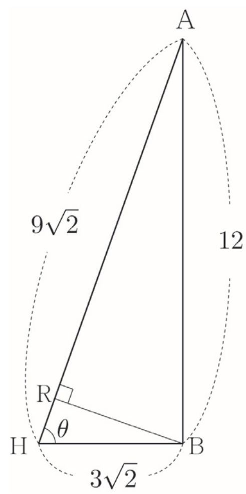
삼각형 BCD는 $\overline{BC}=\overline{CD}=6$이고 $\angle BCD = \frac{\pi}{2}$인
직각이등변삼각형이므로 선분 BD의 중점을 H라 하면
$\overline{HB}=3\sqrt{2}$, $\overline{CH} \perp \overline{HB}$이므로
삼수선의 정리에 의해 $\overline{AH} \perp \overline{CH}$이다.



평면 HAC와 평면 OAC는 서로 같은 평면이다.
평면 HAB와 평면 HAC는 서로 수직이고,
직선 AH는 두 평면 HAB, HAC의 교선이다.

즉, 점 B에서 평면 OAC에 내린 수선의 발을 R이라 하면
점 R은 직선 AH에 떨어진다.

삼각형 AHB를 떼어내어 다시 그리면 다음 그림과 같다.



삼각형 AHB에서 $\overline{AH} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2+12^2} = 9\sqrt{2}$이다.
$\angle AHB = \theta$라 하면 삼각형 AHB에서

$\cos\theta = \frac{\overline{BH}}{\overline{AH}} = \frac{3\sqrt{2}}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$이므로

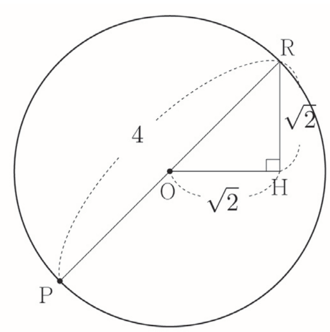
삼각형 BHR에서 $\overline{RH} = \overline{BH}\cos\theta = 3\sqrt{2} \times \frac{1}{3} = \sqrt{2}$이고,

$\overline{BR} = \sqrt{\overline{BH}^2 - \overline{RH}^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2} = 4$ 이다.

구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원을 C라 하면
원 C의 중심은 O이고, 반지름의 길이는 2이고,
원 C는 두 선분 BC, CD에 각각 접하므로 $\overline{CO}=2\sqrt{2}$이다.
이때 $\overline{CH}=3\sqrt{2}$이므로 $\overline{OH} = \overline{CH} - \overline{CO} = \sqrt{2}$이다.

삼각형 BPR에서 $\overline{BP} = \sqrt{\overline{BR}^2+\overline{PR}^2} = \sqrt{16+\overline{PR}^2}$
이므로 $\overline{PR}$이 최대일 때 $\overline{BP}$는 최댓값을 갖고,
$\overline{PR}$이 최소일 때 $\overline{BP}$는 최솟값을 갖는다.

평면 OAC를 떼어내어 다시 그리면 다음 그림과 같다.



$\overline{PR}$의 최댓값은 4이고, $\overline{PR}$의 최솟값은 0이므로
$\overline{BP}$는 최댓값 $M=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$을 갖고,
최솟값 $m=\sqrt{16+0}=4$를 갖는다.

따라서 $M^2-m^2=32-16=16$이다.

답 16

삼각형 ABO에서 삼각형 넓이 같다 Technique를 사용하면

$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB} = \frac{1}{2}\times\overline{OH}\times\overline{AB}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\times a\times 6 = \frac{1}{2}\times 3\times\sqrt{a^2+36}$

$\Rightarrow 2a = \sqrt{a^2+36} \Rightarrow 4a^2 = a^2+36$

$\Rightarrow a^2 = 12$

따라서 $a^2 = 12$이다.

답 ⑤

056

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면
삼각형 ABC는 $\overline{AB} = \overline{AC}$인 이등변삼각형이므로
직선 AH는 선분 BC를 수직이등분한다.

점 Q는 삼각형 ABC의 무게중심이므로
선분 AH 위에 있다.

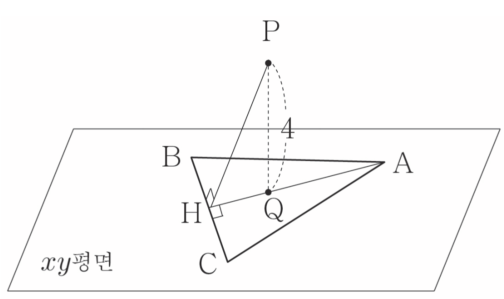
$\overline{QH}\perp\overline{BC}$, $\overline{PQ}\perp$(xy평면)이므로
삼수선의 정리에 의해서 $\overline{PH}\perp\overline{BC}$이다.

선분 PQ의 길이는 점 P의 z좌표와 같으므로 $\overline{PQ} = 4$이다.

$\overline{HC} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \sqrt{7}$이므로

삼각형 ACH에서 $\overline{AH} = \sqrt{5^2-(\sqrt{7})^2} = 3\sqrt{2}$이다.
점 Q는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overline{QH} = \frac{1}{3}\overline{AH} = \sqrt{2}$이다.



삼각형 PHQ에서 $\overline{PH} = \sqrt{(\sqrt{2})^2+4^2} = 3\sqrt{2}$이다.
따라서 점 P에서 직선 BC까지의 거리는 $3\sqrt{2}$이다.

답 ①

057

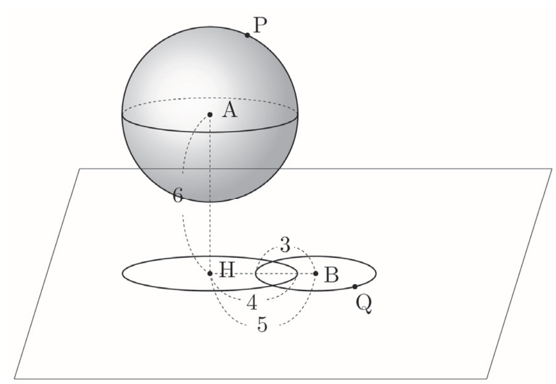
구 $(x-6)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=16$의 중심을 A라 하면
A(6, -1, 5)이고, 반지름의 길이가 4이다.

점 A(6, -1, 5)의 yz평면 위로의 정사영을 H라 하면
H(0, -1, 5)이다.

중심과 yz평면 사이의 거리는 6이고, 구의 반지름의
길이는 4이므로 구와 yz평면은 서로 만나지 않는다.
즉, 구의 yz평면 위로의 정사영은 중심이 H이고,
반지름의 길이가 4인 원이다.

yz평면 위에 있는 원 $(y-2)^2+(z-1)^2=9$의
중심을 B라 하면 B(0, 2, 1)이다.

$\overline{BH} = \sqrt{0^2+(-3)^2+4^2} = 5$



$\overline{PQ} \le \overline{AP}+\overline{AQ} \Rightarrow \overline{PQ} \le 4+\overline{AQ}$가 성립한다.
세 점 P, A, Q가 일직선상에 존재할 때, $\overline{PQ} = 4+\overline{AQ}$가
성립한다. (단, $\overline{PQ} > \overline{AQ}$)

$\overline{AQ} = \sqrt{\overline{AH}^2+\overline{HQ}^2} = \sqrt{36+\overline{HQ}^2}$이므로
$\overline{HQ}$가 최대일 때, $\overline{AQ}$는 최댓값을 갖는다.

다음 그림과 같이 $\overline{HQ} = \overline{HB}+3 = 8$일 때,
$\overline{AQ}$는 최댓값 $\sqrt{36+64} = 10$을 갖는다.