

제2교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. 2 이상의 두 자연수 a, n 에 대하여 $(\sqrt[n]{a})^3$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 자연수 n 의 값을 $f(a)$ 라고 할게요. $f(4) + f(27)$ 의 값은 얼마일까요? [2점]

- ① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

2. 삼차함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값은 얼마일까요? [2점]

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

3. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대해서

$$a_n + a_{n+1} = 2n$$

을 만족시킬 때, $a_1 + a_{22}$ 의 값은 얼마일까요? [3점]

- ① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0 \\ -\frac{1}{2}x + 7, & x > 0 \end{cases}$$

이 있을 때, 함수 $f(x)f(x-a)$ 가 $x = a$ 에서 연속이 되게 하는 모든 실수 a 의 값의 합은 얼마일까요? [3점]

- ① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

5. 공차가 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$ 과, 공비가 자연수인 등비수열 $\{b_n\}$ 이 $a_6 = b_6 = 9$ 이고, 아래 조건을 만족하고 있어요.

- (가) $a_7 = b_7$
- (나) $94 < a_{11} < 109$

$a_7 + b_8$ 의 값은 얼마일까요? [3점]

- ① 96
- ② 99
- ③ 102
- ④ 105
- ⑤ 108

6. 함수 $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 10x$ 에 대해서 x 에 대한 방정식

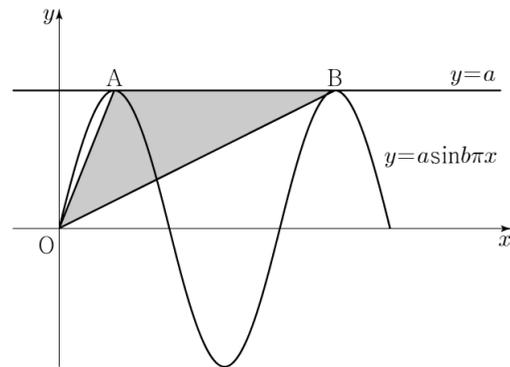
$$f(x) + |f(x) + x| = 6x + k$$

의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되게 하는 모든 정수 k 의 값의 합은 얼마일까요? [3점]

- ① 20
- ② 21
- ③ 22
- ④ 23
- ⑤ 24

7. 두 양수 a, b 에 대해서 곡선 $y = a \sin b\pi x, 0 \leq x \leq \frac{3}{b}$ 이 직선 $y = a$ 와 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라고 할게요. 삼각형 OAB의 넓이가 5이고, 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$ 일 때, $a + b$ 의 값은 얼마일까요?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5



8. 실수 a 와 함수 $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 3$ 에 대해서 함수

$$g(x) = \int_a^x \{f(x) - f(t)\}\{f(t)\}^4 dt$$

가 오직 하나의 극값만 갖게 하는 모든 a 의 값의 합은 얼마일까요? [3점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

9. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 에 대해서 네 수 $f(-1), f(0), f(1), f(2)$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$ 위에서의 접선과 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선은 점 $(k, 0)$ 에서 만나요. $f(2k) = 20$ 일 때 $f(4k)$ 의 값은 얼마일까요? [4점]

- ① 44 ② 43 ③ 42 ④ 41 ⑤ 40

10. 상수 k 에 대해서 정의역과 공역이 각각 실수 전체 집합인 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x-2} - 2, & x < k \\ -\log_2(x+2) - 2, & x \geq k \end{cases}$$

는 일대일대응이에요. 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} \log_2(2-x) + 2, & x < -k \\ -2^{x-2} + 2, & x \geq -k \end{cases}$$

라 할 때, $f(a) \leq b \leq g(a)$ 를 만족시키는 정수 a, b 의 모든 순서쌍 a, b 은 일까요? [4점]

- ① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

11. 두 실수 a, b 에 대해서 함수 $f(x)$ 를

$f(x) = a \sin \frac{\pi}{6}(x - 1) + b$ 라고 하고, 양수 t 에 대해서 $0 < x < t$ 에서 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프가 직선 $y = 4$ 와 만나는 점의 개수를 $g(t)$ 라고 할게요. $f(0) = 8, g(18) = 5$ 일 때, $g(\alpha) = |a - b|$ 를 만족시키는 양수 α 의 최댓값은 얼마일까요? [4점]

- ① 45 ② 46 ③ 47 ④ 48 ⑤ 49

12. 실수 전체 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1이고 상수항이 0인 삼차함수 $g(x)$ 가 있어요. a 가 양의 실수일 때 두 함수 $f(x), g(x)$ 는 아래 조건을 만족시켜요.

(가) 모든 실수 x 에 대해 $x|g(x)| = \int_{2a}^x (a - t)f(t)dt$ 입니다..

(나) 방정식 $g(f(x)) = 0$ 은 서로 다른 실근이 4개입니다.

$\int_{-2a}^{2a} f(x)dx$ 의 값은 얼마일까요?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

13. $2 \leq k < 500$ 인 자연수 k 가 있을 때, 네 자연수 a, b, c, d 가 아래 조건을 만족시켜요.

(가) a, b, c, d 는 2 이상, k 이하입니다.

(나) $a^{\frac{1}{b}} \times c^{\frac{1}{d}} = 24^{\frac{1}{5}}$

모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수가 59개가 되도록 하는 k 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라고 할 때, $M + m$ 의 값은 얼마일까요? [4점]

- ① 152 ② 153 ③ 154 ④ 155 ⑤ 156

14. 세 실수 $a(a \neq 0), b, k$ 에 대해서 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + (2b - 3)x + a^2 - 3, & x < k \\ -\frac{1}{3}ax^2 + (b + 5)x + a^2 - 1, & x \geq k \end{cases}$$

라고 할게요. 함수

$$g(x) = \lim_{t \rightarrow x^+} \frac{|f(t)|}{f(t)} - \lim_{t \rightarrow x^-} \frac{|f(t)|}{f(t)}$$

가 있을 때, 두 함수 $f(x), g(x)$ 는 아래 조건을 만족시켜요.

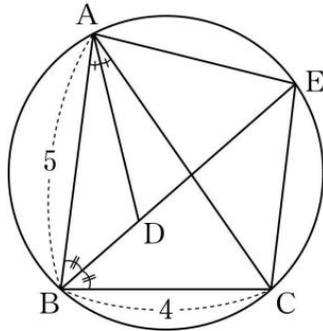
(가) 임의의 실수 α 가 있을 때, $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$ 가 존재합니다.

(나) 두 함수 $y = g(x)$ 와 $y = -4|\log_2 x - 1| + 2$ 의 그래프가 만나는 서로 다른 점이 5개입니다.

$k = p + q\sqrt{17}$ 일 때, $p + q$ 의 값은 얼마일까요? (단, p, q 는 유리수입니다.) [4점]

- ① 3/2 ② 7/4 ③ 2 ④ 9/4 ⑤ 5/2

15. 그림처럼 $\overline{AB} = 5, \overline{BC} = 4, \cos(\angle ABC) = \frac{1}{8}$ 인 삼각형 ABC가 있어요. 각 ABC의 이등분선과 각 CAB의 이등분선이 만나는 점을 D, 선분 BD의 연장선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 E라고 할 때, <보기>에서 옳은 것만 골라주세요.



- ㉠. $\overline{AC} = 6$
- ㉡. $\overline{EA} = \overline{EC}$
- ㉢. $\overline{ED} = \frac{31}{8}$

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠㉡ ⑤ 모두

단답형

16. x 에 대한 부등식

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x - (3n + 16)\left(\frac{1}{2}\right)^x + 48n \leq 0$$

을 만족시키는 정수 x 가 2개가 되게 하는 모든 자연수 n 의 개수를 구해주세요. [3점]

17. 이차함수 $f(x)$ 가 $f(0) = 0$ 이고, 아래 조건을 만족시켜요.

(가) $\int_0^2 |f(x)|dx = -\int_0^2 f(x)dx = 4$

(나) $\int_2^3 |f(x)|dx = \int_2^3 f(x)dx$

$f(5)$ 의 값을 구해주세요. [3점]

18. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 1에서 $t(t > 1)$ 까지 변할 때의 평균변화율을 $g(t)$ 라 정의할 때, 함수 $g(t)$ 는 $t = 2$ 에서 극댓값 0을 가져요. 함수 $g(t)$ 의 최솟값이 존재할 때, 방정식 $f(x) = f(1)$ 의 서로 다른 실근의 합의 최솟값을 구해주세요. [4점]

19. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대해서 아래 조건을 만족시켜요.

- (가) $a_{2n} = a_n - 1$
 (나) $a_{2n+1} = 2a_n + 1$

$a_{20} = 1$ 일 때, $\sum_{n=1}^{63} a_n$ 의 값을 구해주세요. [3점]

20. 양수 a 에 대해서 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 실수 전체 집합에서 정의된 함수 $g(x)$ 가 아래 조건을 만족시켜요.

(가) 모든 실수 x 에 대해서

$$|x(x - 2)|g(x) = x(x - 2)(|f(x)| - a)$$

입니다.

(나) 함수 $g(x)$ 는 $x = 0, x = 2$ 에서 미분가능해요.

$g(3a)$ 의 값을 구해주세요. [4점]

21. 두 정수 l, m 에 대해서 두 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 일반항이

$$a_n = 12 + l(n - 1), b_n = -10 + m(n - 1)$$

일 때,

$$\sum_{k=1}^{10} |a_k + b_k| = \sum_{k=1}^{10} (|a_k| - |b_k|) = 31$$

을 만족시키는 모든 순서쌍 (l, m) 의 개수를 구해주세요.

[4점]

22. 실수 t 에 대해서 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x - t|, & |x - t| \leq 1 \\ 0, & |x - t| > 1 \end{cases}$$

이고, 모든 정수 n 에 대해서 함수 $g(x)$ 가

$$g(x + 2n) = -2(x - 2n)^2 \{x - 2(n + 1)\}^2 + 1,$$

$$2n \leq x < 2n + 2$$

를 만족시킬 때, 어떤 홀수 k 에 대해서 함수

$$h(t) = \int_k^{k+8} f(x)g(x)dx$$

는 아래 조건을 만족시켜요.

함수 $h(t)$ 가 $t = \alpha$ 에서 극소이고, $h(\alpha) < 0$ 인 모든 α 를 작은 수부터 크기 순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m \in \mathbb{N})$ 이라 할 때, $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 45$ 입니다.

$k - 9 \sum_{i=1}^m h(\alpha_i)$ 의 값을 구해주세요. [4점]