지금부터 보실 행동강령과 해설은 아드레날린을 통해 다른 기출 문제에서도 보실 수 있습니다!

자세한 내용은

https://orbi.kr/00043463424

에서 확인해주세요! 판매 페이지 링크는

https://atom.ac/books/9395

입니다. 감사합니다!

아드레날린 ex
공통

1. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?
〔2023학년도 사관학교 10〕

(가) $f(0)=2$이고 $f'(4)=-24$이다. (나) 부등식 $xf'(x)>0$을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 범위는 $1<x<3$이다.

① 3 ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$ ④ 4 ⑤ $\frac{13}{3}$

1. 정답 ② 〔2023학년도 사관학교 10〕

1) 조건해석

사차함수 $f(x)$가 있는데 (가)조건에서 $f(0)=2$이고 $f'(4)=-24$라고 합니다. 뭐 그렇다네요.

(나)조건에서 $xf'(x)>0$을 만족시키는 x의 범위가 $1<x<3$이라고 합니다. 일단 함수가 곱해져 있어요. x를 기준으로 양수냐 음수냐가 나뉘니까 이걸 기준으로 생각해보면 $f'(x)>0$가 되겠죠. $x<0$이라면? $f'(x)<0$가 될 거예요. 이걸 만족시키는 범위가 $1<x<3$이라는 거예요.

다시 말하면 $x<0$일 때는 항상 $f'(x)\geq 0$이고 $x>0$일 때는 $1<x<3$에서만 $f'(x)>0$이 된다는 거겠네요.

정리하면 $x<0$일 때는 $f'(x)\geq 0$이고 $0<x\leq 1$일 때는 $f'(x)\leq 0$,
$1<x<3$일 때 $f'(x)>0$이고 $x\geq 3$일 때는 $f'(x)\leq 0$이어야 합니다.

생각해보세요. $f'(x)$의 값이 양수이다가 갑자기 음수가 될 수 있나요? $f(x)$는 사차함수라 연속이라서 그럴 수 없어요. 다시 말하면 0을 지나는 점이 있다는 말이죠. 그게 각 부분의 경계겠네요. $x=0$, $x=1$, $x=3$에서 $f'(x)=0$이어야 합니다. 따라서 $f'(0)=f'(1)=f'(3)=0$입니다.

2) 함수 구하기 - 인수정리

$f'(0)=f'(1)=f'(3)=0$로 $f'(x)$를 구한 후 부정적분해서 $f(x)$로 올라오도록 할게요. $f'(x)$의 최고차항의 계수를 a라 하면 $f'(x)$는 x, $(x-1)$, $(x-3)$의 인수를 각각 적어도 하나씩 가지니까 $f'(x)=ax(x-1)(x-3)$입니다. $f'(4)=-24$이니까 넣어보면 $12a=-24$이고 $a=-2$입니다.

$f'(x)=-2x^3+8x^2-6x$이네요. 부정적분하면 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^4+\dfrac{8}{3}x^3-3x^2+b$인데 $f(0)=2$이니까

$f(x)=-\dfrac{1}{2}x^4+\dfrac{8}{3}x^3-3x^2+2$입니다. $f(2)=-8+\dfrac{64}{3}-12+2=\dfrac{10}{3}$이네요. 답은 ②번입니다.

2. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x \le 2) \\ ax+b & (x > 2) \end{cases}$$

에 대하여 $f(\alpha)+\lim_{x \to \alpha+} f(x)=4$를 만족시키는 실수 α의 개수가 4이고, 이 네 수의 합이 8이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) 〔2023학년도 사관학교 12〕

① $-\frac{7}{4}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

2. 정답 ① 〔2023학년도 사관학교 12〕

1) 좌극한 우극한, 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인

$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x \le 2) \\ ax+b & (x > 2) \end{cases}$ 인데 $f(\alpha)+\lim_{x \to \alpha+} f(x)=4$를 만족시키는 α의 개수가 4이고 합이 8이랍니다.

일단 좀 볼까요? 만약 $x=2$를 제외한 나머지 부분이라면? 다항함수니까 연속이므로 $f(\alpha)$와 $\lim_{x \to \alpha+} f(x)$가 같겠죠? 따라서 $f(\alpha)=2$를 만족시키는 α를 찾으면 됩니다.

일단 $f(x)=x^2+1$에서는 만족시키는 α가 두 개가 있죠? $x^2+1=2$하면 $x=-1,\ 1$이 가능합니다.

$f(x)=ax+b$에서는.... 만약 여기서 없다고 가정하면 아예 개수가 4개가 나올 수가 없어요. 우리가 마지막으로 확인해야 할 부분은 $x=2$인데 여기서 나온다고 해도 3개잖아요. 따라서 $ax+b=2$해서 $x=\frac{2-b}{a}$에서 하나가 있습니다.

그러면 마지막 하나는 $x=2$여야겠네요. 먼저 $f(2)=5$이니까 $\lim_{x \to 2+} f(x)=-1$입니다. 따라서 $2a+b=-1$이네요.

4개의 수의 합이 8이어야 하죠? 모두 더하면 $-1+1+2+\frac{2-b}{a}=8$이고 $\frac{2-b}{a}=6$입니다. $2-b=6a$이네요. $2a+b=-1$랑 연립하면 $a=\frac{3}{4},\ b=-\frac{5}{2}$입니다. $a+b=-\frac{7}{4}$이네요. 답은 ①번입니다.

3. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<1) \\ 2f(1)-f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 〔2023학년도 사관학교 14〕

<보 기>

ㄱ. 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄴ. $\displaystyle\lim_{h \to 0+} \frac{g(-1+h)+g(-1-h)-6}{h}=a$ (a는 상수)이고 $g(1)=1$이면 $g(a)=1$이다.

ㄷ. $\displaystyle\lim_{h \to 0+} \frac{g(b+h)+g(b-h)-6}{h}=4$ (b는 상수)이면 $g(4)=1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 정답 ② 〔2023학년도 사관학교 14〕

1) 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인, 함수 극한은 논리다

$f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 이차함수인데 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<1) \\ 2f(1)-f(x) & (x\geq 1) \end{cases}$랍니다.

ㄱ에서 $g(x)$가 연속이냐고 물어보네요. 일단 $x=1$을 제외하고는 다항함수니까 연속이죠? $x=1$에서 좌극한 값과 우극한 값, 함숫값은 모두 $f(1)$으로 동일하니까 연속 맞습니다.

2) 함수 구하기 - 차함수

ㄴ에서 $\lim_{h\to 0+}\frac{g(-1+h)+g(-1-h)-6}{h}=a$이고 $g(1)=1$이면 $g(a)=1$이냐고 물어봅니다. 분모가 0으로 가는데 극한값이 존재하니까 분자도 0으로 가야겠죠? 따라서 $\lim_{h\to 0+}g(-1+h)+g(-1-h)-6=0$이고 $2g(-1)=6$입니다. $g(-1)=f(-1)=3$이네요. 그리고 $g(1)=f(1)=1$이구요.

지금 $f(-1)=3$이고 $f(1)=1$이죠? 이 두 점을 지나는 직선은 $-x+2$입니다. 그러면 $f(x)$와 $-x+2$는 $x=-1$, $x=1$에서 만나는 거네요? 따라서 차함수에 의하여 $f(x)-(-x+2)$는 $(x+1)$, $(x-1)$ 인수를 각각 적어도 하나 가져야 합니다. $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x)+x-2=(x+1)(x-1)$이고 $f(x)=x^2-x+1$이네요.

한편, $\lim_{h\to 0+}\frac{g(-1+h)+g(-1-h)-6}{h}=a$에서 6 대신에 $g(-1)+g(-1)$을 넣으면 $\lim_{h\to 0+}\frac{g(-1+h)-g(-1)+g(-1-h)-g(-1)}{h}=a$으로 고칠 수 있죠? 이때 각각 극한값이 존재하니까 $\lim_{h\to 0+}\frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}+\lim_{h\to 0+}\frac{g(-1-h)-g(-1)}{h}=a$입니다. 오른쪽은 $-h=k$로 바꿔버리면 $\lim_{h\to 0+}\frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}-\lim_{k\to 0-}\frac{g(-1+k)-g(-1)}{k}$인데 이건 $g'(-1)-g'(-1)=a=0$이죠? $a=0$입니다.

그럼 이제 $g(a)=g(0)=f(0)=1$인지만 확인하면 되겠네요. 방금 $f(x)=x^2-x+1$을 구해놨으니까 넣어보면 $f(0)=1$ 맞습니다. ㄴ도 맞네요.

ㄷ에서 $\lim_{h\to 0+}\frac{g(b+h)+g(b-h)-6}{h}=4$이면 $g(4)=1$이냐고 물어보네요. 먼저 분모가 0으로 가는데 극한값이

존재하니까 분자도 0으로 가야 합니다. $\lim_{h\to 0+} g(b+h)+g(b-h)-6=0$이고 $2g(b)=6$이고 $g(b)=3$입니다.

ㄴ과 마찬가지의 방식으로 해보면 $\lim_{h\to 0+}\dfrac{g(b+h)-g(b)+g(b-h)-g(b)}{h}=4$이고

$\lim_{h\to 0+}\dfrac{g(b+h)-g(b)}{h}-\lim_{k\to 0-}\dfrac{g(b+k)-g(b)}{k}$이 됩니다. $g'(b+)-g'(b-)=4$이네요.

$g'(b+)-g'(b-)=4$를 한 번 생각해보세요. 일반적으로 다항함수는 미분가능이라 좌미분계수와 우미분계수가 다를 수가 없어요. 함수가 끊기지 않는다면요. 그런데 지금은 끊긴 부분이 있죠? $x=1$ 말이에요. 따라서 $b=1$입니다.

$g(1)=f(1)=3$이구요, $g'(1+)-g'(1-)=4$를 활용해봅시다. 먼저 $g'(1+)$의 경우 우미분계수니까 $g(x)=2f(1)-f(x)$에서 $-f'(1)$입니다. $g'(1-)$의 경우는 $g(x)=f(x)$에서 $f'(1)$입니다. 따라서 $-2f'(1)=4$이고 $f'(1)=-2$이네요.

$f(1)=3$, $f'(1)=-2$를 사용해서 $f(x)$를 구해봅시다. 이건 사실상 기울기가 -2인 일차함수가 (1, 3)에서 $f(x)$와 접한 것과 같죠? 일차함수는 $-2x+5$이니까 차함수에 의하여 $f(x)-(-2x+5)=(x-1)^2$이고 $f(x)=(x-1)^2-2x+5$입니다.

그러면 $g(4)=2f(1)-f(4)=6-9+3=0$입니다. $g(4)=1$이 아니죠? ㄷ은 맞지 않습니다. 따라서 맞는 건 ㄱ, ㄴ이고 답은 ②번이네요.

4. 함수

$$f(x)=\left|2a\cos\frac{b}{2}x-(a-2)(b-2)\right|$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 10 이하의 자연수 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는? [2023학년도 사관학교 15]

(가) 함수 $f(x)$는 주기가 π인 주기함수이다. (나) $0 \le x \le 2\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2a-1$의 교점의 개수는 4이다.

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

4. 정답 ⑤ 〔2023학년도 사관학교 15〕

1) 자연수 보이면 숫자 넣을 준비, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$f(x)=\left|2a\cos\frac{b}{2}x-(a-2)(b-2)\right|$가 있습니다. 보기만 해도 무시무시하네요.

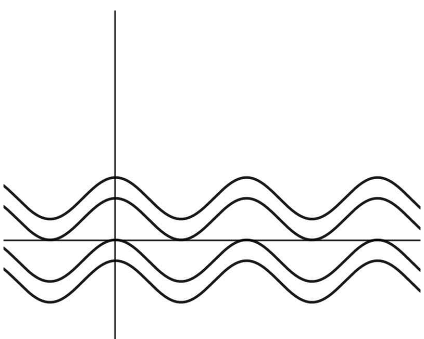
이때 (가)와 (나)조건을 만족시키는 10 이하의 자연수 a, b의 순서쌍의 개수를 구하라네요. 한 번 봅시다.

(가)조건에서 $f(x)$는 주기가 π인 주기함수랍니다. 여기서 조심해야 할 건 바로 $b=4$라고 확정 지으면 안 된다는 거예요. 절댓값이 씌워져 있어서 어떻게 될지 모르거든요.

(나)조건에서 $0\leq x\leq 2\pi$에서 $y=f(x)$와 $y=2a-1$이 4점에서 만난다고 합니다. (가)와 (나)조건 모두 실제로 그래프를 그려봐야 알겠네요.

일단 $2a\cos\frac{b}{2}x-(a-2)(b-2)$에 대하여 좀 알아봅시다. 주기는 $\frac{4}{b}\pi$이고, 최댓값은 $4a+2b-ab-4$, 최솟값은 $2b-ab-4$인 함수네요. 이 함수를 절댓값을 씌우면 $f(x)$가 될 거예요.

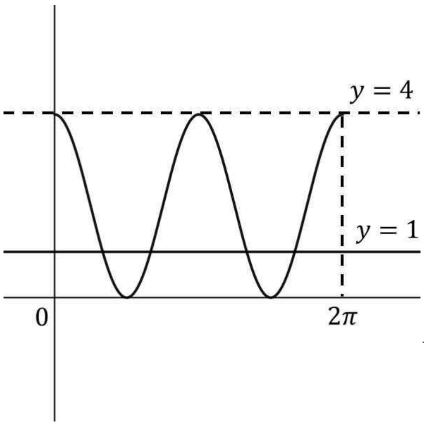
근데 여러분 생각해보세요. 만약 $2a\cos\frac{b}{2}x-(a-2)(b-2)$가 x축과 아예 안 만나거나 접한다면? 그러니까



요런 모양이라면? 절댓값을 씌워도 주기는 변하지 않죠? 이러면 주기는 $\frac{4}{b}\pi$인데 이게 π이니까 $b=4$입니다.

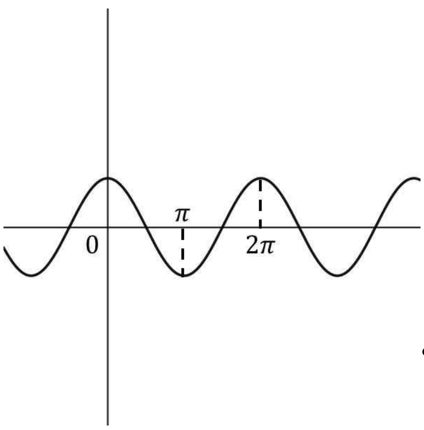
그리고 또한 최솟값이 0보다 크거나 같거나 최댓값이 0보다 작거나 같아야죠? 따라서 $2b-ab-4\geq 0$이거나 $4a+2b-ab-4\leq 0$입니다. $b=4$니까 넣어서 정리하면 $1\geq a$ 혹은 $4\leq 0$입니다. $4\leq 0$는 말이 안 되니까 무조건 $a=1$일 때만 가능하네요. 결국 $2+2\cos 2x$입니다.

그럼 이제 $0 \leq x \leq 2\pi$에서 $y = 1$과 4개의 점에서 만나는지 확인해볼까요?

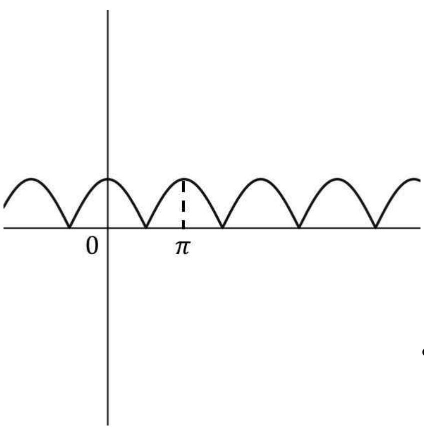


만나네요! (4, 1) 하나 찾았어요.

그러면 이제 $f(x)$가 x축과 만나는 경우를 생각해볼게요. 먼저 함수가 최댓값과 최솟값의 절댓값이 같아서

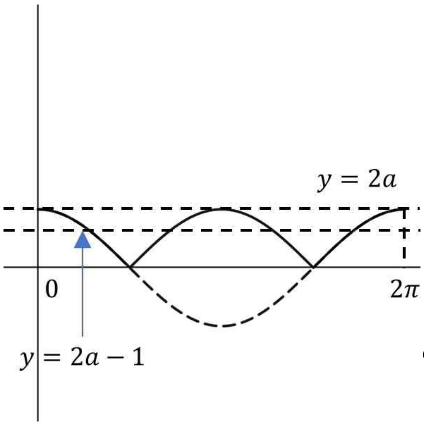


이렇게 되는 모양을 생각해봅시다. 이 경우 절댓값을 씌우면

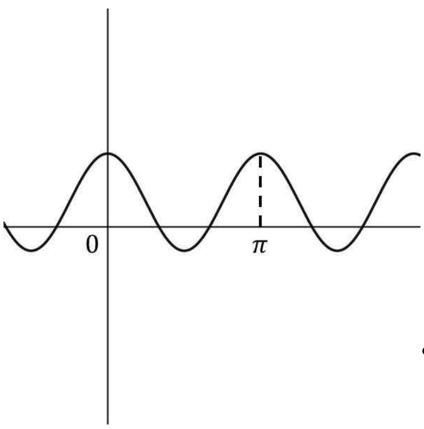


이렇게 최솟값의 절댓값과 최댓값이 같아지면서 주기가 절반으로 줄어들 수 있죠. 결국 주기인 $\dfrac{4}{b}\pi$의 절반이 π이 되도록 해야 하니까 $b = 2$입니다. $b = 2$이니까 $2a\cos x$이죠? 이 경우 a가 자연수이기만 하면 다 됩니다. 1부터 10까지죠.

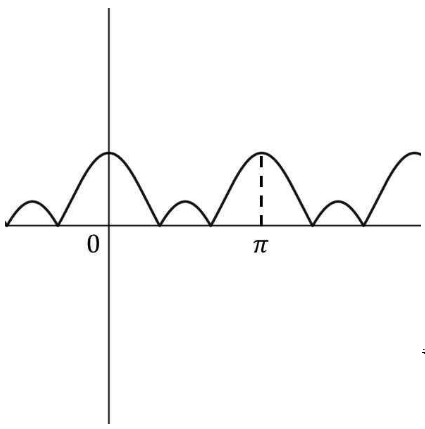
그럼 이제 $0 \le x \le 2\pi$에서 $y=2a-1$과 4개의 점에서 만나는지 확인해봅시다.



a는 자연수니까 무조건 만나네요. $b=4$일 때 $a=1$부터 10까지 10개 찾았어요.

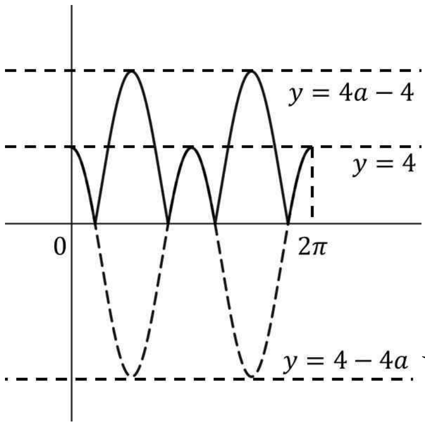


이런 모양은요?



주기가 변하지 않게 되네요. 이러면 $b=4$여야 합니다. 그리고 최댓값과 최솟값 사이에 $y=0$이 있어야 하니까 $2b-ab-4<0<4a+2b-ab-4$입니다. $b=4$를 넣어 정리하면 $4-4a<0<4$이고 $a>1$이어야 합니다. (가)조건은 $b=4$일 때 $a=2$부터 9까지 9개가 가능하네요.

이제 $0 \le x \le 2\pi$에서 $y=2a-1$과 4개의 점에서 만나는지 확인해봅시다. $2a\cos 2x-2a+4$이니까 최댓값은 4, 최솟값은 $4-4a$이고



요렇게 됩니다. $y=2a-1$이 4개의 점에서 만나려면

$4<2a-1<4a-4$여야 합니다. $a>\frac{5}{2}$이고 $a>\frac{3}{2}$이니까 $a>\frac{5}{2}$인 $a=3$부터 $a=10$까지 8개가 가능하겠네요.

그럼 총 $1+10+8=19$개입니다. 답은 ⑤번이네요.

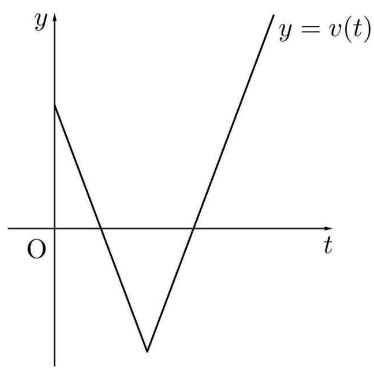
5. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$ 에서의 속도는

$$v(t) = |at - b| - 4 \quad (a > 0,\ b > 4)$$

이다. 시각 $t = 0$에서 $t = k$까지 점 P가 움직인 거리를 $s(k)$, 시각 $t = 0$에서 $t = k$까지 점 P의 위치의 변화량을 $x(k)$라 할 때, 두 함수 $s(k)$, $x(k)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \leq k < 3$이면 $s(k) - x(k) < 8$이다.
(나) $k \geq 3$이면 $s(k) - x(k) = 8$이다.

시각 $t = 1$에서 $t = 6$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) 〔2023학년도 6월 20〕



5. 정답 14 〔2023학년도 사관학교 20〕

1) 위치, 속도, 가속도는 수직선 위를 움직인다

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도가

$v(t)=|at-b|-4$ $(a>0,\ b>4)$랍니다. 그림도 친절하게 줬죠? $t=\dfrac{b}{a}$에서 방향이 반대가 되는 속도 함수입니다.

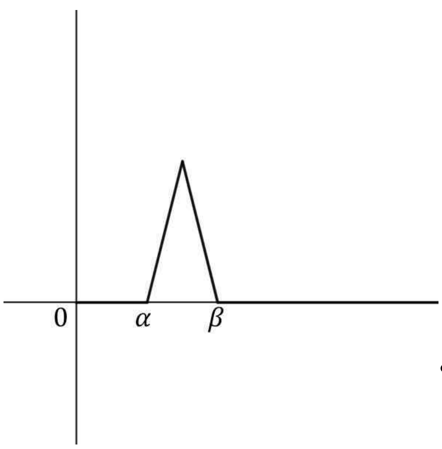
이때 시각 $t=0$에서 $t=k$까지 움직인 거리를 $s(k)$, 위치의 변화량을 $x(k)$라고 한다네요. 일단 위치의 변화량은 $x(k)=\displaystyle\int_0^k v(t)dt$이죠? 움직인 거리는 절댓값을 씌우고 정적분하면 되니까 $s(k)=\displaystyle\int_0^k |v(t)|dt$입니다.

2) 조건해석

이때 (가)조건에서 $0 \leq k < 3$이면 $s(k)-x(k)<8$이고, $k \geq 3$이면 $s(k)-x(k)=8$이라고 합니다.

일단 $s(k)-x(k)=\displaystyle\int_0^k (|v(t)|-v(t))dt$입니다. $|v(t)|-v(t)$는 $v(t) \geq 0$일 땐 0이고, $v(t)<0$일 땐 $-2v(t)$가 되는 함수죠? 그러니까 $|v(t)|-v(t)=\begin{cases} 0 & (v(t) \geq 0) \\ -2v(t) & (v(t)<0) \end{cases}$이네요.

그림을 활용해서 이 함수를 그려봅시다. 0보다 큰 부분은 0으로, 0보다 작은 부분은 -2를 곱해보세요.



이렇게 되겠네요. 이 함수를 0부터 k까지 적분한 함수가 $s(k)-x(k)$입니다.

이제 k를 0부터 천천히 늘려보세요. 0부터 α까진 값이 0이다가 α부터 β까지는 값이 점점 커지겠죠? 그리고 그 후에는 그 값이 계속 유지가 됩니다. 추가로 정적분하는 값이 0이니까요.

3) 정적분 관찰

아까 $0 \leq k < 3$이면 $s(k) - x(k) < 8$이고, $k \geq 3$이면 $s(k) - x(k) = 8$라고 했었죠? 그러면 그 정적분값이 8이 되어야겠네요. 저 삼각형의 넓이 말이에요. 계속 유지가 되는 값이니까요. 그리고 $\beta = 3$이어야 합니다. β 이후로 값이 유지가 되잖아요.

그리고 삼각형의 높이는 8입니다. $v(t) = |at - b| - 4 \ \ (a > 0, \ b > 4)$가 가장 낮아지는 부분의 함숫값은 -4인데 우리는 -2를 곱했죠? 정적분 값인 삼각형의 넓이가 8인데 $\beta = 3$이니까 $\frac{1}{2} \times 8 \times (3 - \alpha) = 8$이므로 $\alpha = 1$입니다.

여기서 V자 모양의 왼쪽 부분을 식으로 표현하면 $v(t) = -at + b - 4$이죠? $a > 0$이니까 기울기가 음수가 되도록 만들어준 거예요. 이게 $t = 1$에서 값이 0이 되니까 $b - a - 4 = 0$입니다.
오른쪽 부분은 $v(t) = at - b - 4$인데 $t = 3$에서 값이 0이 되니까 $3a - b - 4 = 0$이네요. 연립하면 $a = 4, \ b = 8$입니다.

이제 시각 $t = 1$에서 $t = 6$까지 점 P의 위치의 변화량을 구해야 합니다. 이건 그냥 정적분 하면 되겠네요.
1부터 3까지 정적분 값은 이미 알고 있어요. -4이죠. 아까 구했던 8은 -2를 곱한 값이니까 되돌려놔야죠.

그러면 3부터 6까지 정적분 값은 삼각형 넓이를 구하면 되겠어요. V자 모양의 오른쪽 부분이 $v(t) = 4t - 12$이니까 $\frac{1}{2} \times 3 \times 12 = 18$입니다. 둘을 더하면 14이네요.

6. 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_6 + a_7 = -\frac{1}{2}$
(나) $a_l + a_m = 1$이 되도록 하는 두 자연수 l, m $(l < m)$의 모든 순서쌍 $(l,\ m)$의 개수는 6이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제14항까지의 합을 S라 할 때, $2S$의 값을 구하시오. 〔2023학년도 사관학교 21〕

6. 정답 35 〔2023학년도 사관학교 21〕

1) 등차수열은 $a_n = a+(n-1)d$로 놓기, 조건해석

$\{a_n\}$이 등차수열이랍니다. 일단 첫 항을 a라 하고 공차를 d라 하면 $a_n = a+(n-1)d$라 할게요.

(가)조건에서 $a_6 + a_7 = -\dfrac{1}{2}$랍니다. $a_n = a+(n-1)d$에 넣어서 정리하면 $2a+11d = -\dfrac{1}{2}$가 나옵니다.

2) 자연수 보이면 숫자 넣기

(나)조건에서 $a_l + a_m = 1$이 되도록 하는 두 자연수 $l,\ m\ (l<m)$의 모든 순서쌍이 6개라고 하네요. 일단 $a_l + a_m = 1$도 $a_n = a+(n-1)d$에 넣어보면 $2a+(l+m-2)d = 1$이 됩니다.

이때 $2a+11d = -\dfrac{1}{2}$이었죠? $2a = -\dfrac{1}{2} - 11d$로 정리해서 $2a+(l+m-2)d = 1$에 넣으면 $(l+m-13)d = \dfrac{3}{2}$가 되네요.

그런데.... 여기서 뭘 어떡하죠? $l,\ m$이 자연수이고 순서쌍이 6개라는 거 말고는 공차인 d에 대한 정보도 없어서 뭘 할 수가 없겠는데요?

그럼 이렇게 생각해봅시다. 어차피 $l+m$만 결정되면 d는 자동으로 결정되는 거잖아요? 다시 말하면 $l+m=k$라고 정해지면 d는 자동적으로 결정된다는 말이에요. 이걸 다시 표현하면 $l+m=k$를 만족시키는 순서쌍이 6개가 되어야 한다는 거죠.

만약 $l+m=3$이라면? 순서쌍 $(l,\ m)$은 $(1,\ 2)$만 가능합니다. 그럼 개수는 1이 되죠. $l+m=4$라면? 순서쌍은 $(1,\ 3)$만 가능해 개수가 1입니다. $l+m=5$가 되면 $(1,\ 4)$, $(2,\ 3)$으로 개수가 2개가 되죠. $l+m=6$이라면? $(1,\ 5)$, $(2,\ 4)$로 2개가 됩니다. $l+m=7$이면 $(1,\ 6)$, $(2,\ 5)$, $(3,\ 4)$로 3개가 되네요.

이거 규칙이 있네요. $k=3,\ 4$일 때 1개, $k=5,\ 6$일 때 2개, $k=7,\ 8$일 때 3개, $k=9,\ 10$일 때 4개, $k=11,\ 12$일 때 5개, $k=13,\ 14$일 때 6개가 됩니다.

그러면 가능한 k가 2개인데요? 그런데 $k=13$일 때를 생각해보세요. $(l+m-13)d = \dfrac{3}{2}$에서 $l+m=13$이라면 값이 0이 나오는데 이러면 등호가 성립하지 않게 됩니다. 따라서 $k=14$이네요. $d=\dfrac{3}{2}$입니다.

$2a+11d=-\frac{1}{2}$이니까 $a=-\frac{17}{2}$입니다. $a_n=-\frac{17}{2}+\frac{3}{2}(n-1)$이네요.

이때 첫 항부터 14항까지 합을 S라고 할 때 $2S$를 구하라네요. 가봅시다.

$\frac{(a_1+a_{14})}{2}\times 14\times 2=14\left(-\frac{17}{2}-\frac{17}{2}+\frac{39}{2}\right)=35$입니다. 답은 35네요.

7. 최고차항의 계수가 정수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=1$, $f'(1)=0$이다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+|f(x)-1|$$

이라 할 때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 함수 $f(x)$의 개수를 구하시오. 〔2023학년도 사관학교 22〕

(가) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 모든 교점의 x좌표의 합은 3이다.
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $n<\int_0^n g(x)dx<n+16$이다.

7. 정답 11 〔2023학년도 사관학교 22〕

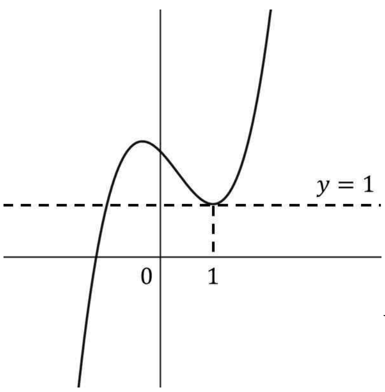
1) 절댓값 함수, 문제해석

최고차항의 계수가 정수인 삼차함수 $f(x)$가 있는데 $f(1)=1$, $f'(1)=0$이랍니다. $x=1$에서 극대값 1을 가질지, 아니면 극솟값 1을 가질지, 아니면 아예 그 점이 변곡점일지는 아직 잘 모르겠어요. 가능한 경우는 3가지입니다.

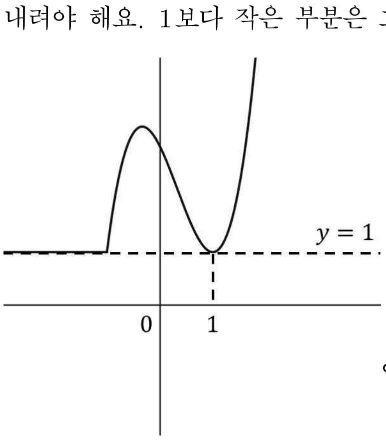
거기에 최고차항의 계수가 정수라고 했으니까(당연히 0은 아니겠죠? 그러면 이미 삼차함수가 아니니까요.) 양수인지 음수인지도 몰라요. 계속 가봅시다.

이때 $g(x)=f(x)+|f(x)-1|$이랍니다. 절댓값이 있으니까 벗겨볼게요. $f(x)\geq 1$이라면 $g(x)=2f(x)-1$이고 $f(x)<1$이면 $g(x)=1$입니다. 정리하면 $g(x)=\begin{cases} 2f(x)-1 & (f(x)\geq 1) \\ 1 & (f(x)<1) \end{cases}$이네요.

이걸 그래프로 해석해볼게요. 일단 함수를 이해하기 위해서 아무런 $f(x)$를 그려봅시다. 지금은 어차피 $g(x)$가 어떤 함수인지 알아보기 위함이니까 아무렇게나 그려보는 거예요. $x=1$에서 극솟값을 가지도록 그려볼까요?



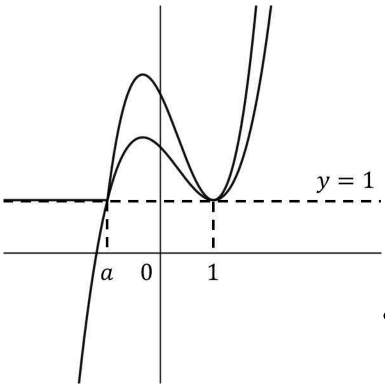
대충 이렇게 그려보면 1보다 크거나 같은 부분은 2를 곱하고 1만큼 아래로 내려야 해요. 1보다 작은 부분은 그냥 1이어야 하구요. 그려보면



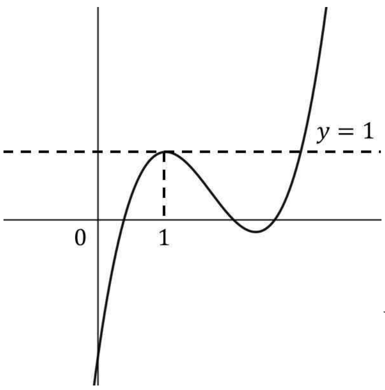
이렇게 되네요. 이걸 다시 표현해보면 1보다 큰 부분은 2배 더 날카롭게 그리고, 1보다 작은 부분은 그냥 1로 해버리는 함수네요.

2) 조건 해석, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

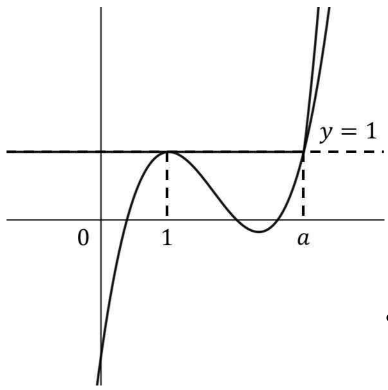
이때 (가)조건에서 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 모든 교점의 x좌표의 합이 3이라고 합니다. 저 위의 그래프 두 개를 겹쳐보세요.



이렇게 되는데 교점은 $x=a$와 $x=1$이 있죠? 지금 보면 a는 1보다 작잖아요? 그러면 합이 3이 될 수는 없겠네요. 이는 최고차항의 계수가 음수가 되어도 마찬가지입니다. 그러면 $x=1$에서 극댓값을 가지도록 그려봅시다.



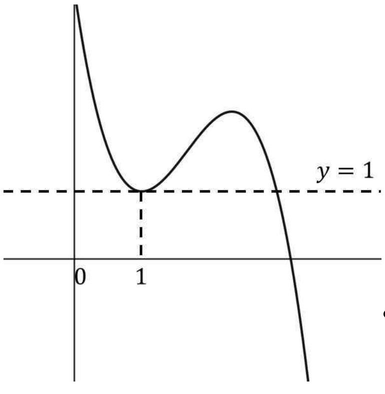
만약 이런 함수라면



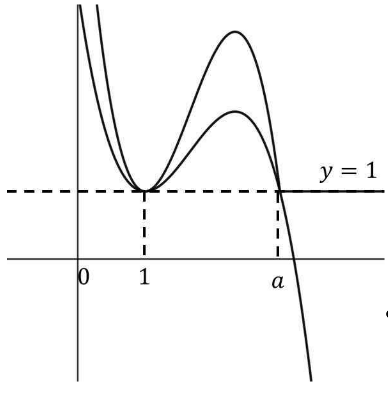
이렇게 되겠죠.

$a=2$입니다.

만약 최고차항의 계수가 음수라고 해도

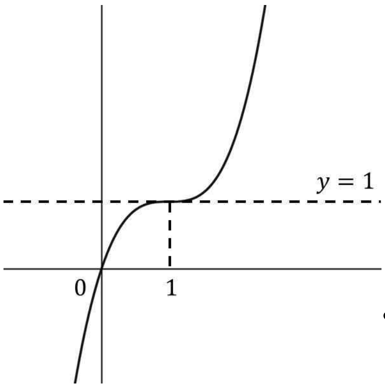


이 함수가

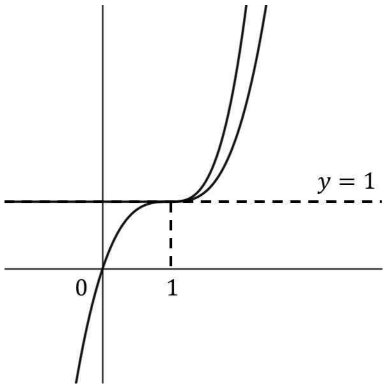


이렇게 되니까 딱 $a=2$가 됩니다.

그러면 $x=1$에서 변곡점을 가질 때는요?



이런 함수가 되면



$x=1$에서만 만나게 되네요. 그럼 모든 교점의 x좌표의 합이 3이 될 수 없겠죠?

3) 함수 구하기 - 인수정리

$y=f(x)$와 $y=1$은 $x=1$에서 접하고 $x=2$에서는 그냥 만나야 하니까 $f(x)-1$은 $(x-1)$인수를 적어도 두 개, $(x-2)$인수를 적어도 하나 가져야 합니다. $f(x)$의 최고차항의 계수를 k라 하면

$f(x)-1=k(x-1)^2(x-2)$이고 $f(x)=k(x-1)^2(x-2)+1$이네요. k는 정수입니다.

4) 케이스 분류, 자연수 보이면 숫자 넣기, 정적분 나누기

(나)조건에서 모든 자연수 n에 대하여 $n<\int_0^n g(x)dx<n+16$이라고 합니다. 이 경우는 최고차항의 계수가 음수일 때랑 양수일 때가 달라요. 그래프를 보면 $g(x)=1$이 되는 범위가 서로 다르거든요. 나눠서 생각합시다.

4-1) 최고차항의 계수가 양수인 경우

일단 $x=2$까지는 $g(x)=1$이에요. 그러니까 $n\le 2$일 때랑 $n>2$일 때랑 나눠서 생각해야겠죠?

$n=1$이라면 $1<\int_0^1 g(x)dx<17$인데 $\int_0^1 g(x)dx=1$이죠? 범위에 해당하지 않습니다. 모든 자연수 n에 대하여 성립해야 하는데 $n=1$부터 성립하지 않네요? 이건 더 볼 필요도 없이 조건을 만족시키지 않는 경우입니다. 다음으로 넘어가죠.

4-2) 최고차항의 계수가 음수인 경우

이 역시 $n\le 2$일 때랑 $n>2$일 때랑 나눠서 생각해야겠어요.

$n=1$이라면 $1<\int_0^1 g(x)dx<17$이어야 합니다. $\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 (2f(x)-1)dx$이고 이건 결국

$$1+2k\int_0^1((x-1)^2(x-2))dx = 1+2k\int_0^1(x^3-4x^2+5x-2)dx = 1+2k\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-2x\right]_0^1 = 1-\frac{7k}{6}$$

입니다. $1 < 1-\frac{7k}{6} < 17$이고 정리하면 $-\frac{102}{7} < k < 0$입니다. 가능한 k는 -1부터 -14까지 14개입니다.

$n=2$이라면 $2 < \int_0^2 g(x)dx < 18$이어야 합니다. $\int_0^2 g(x)dx = \int_0^2 (2f(x)-1)dx$이고, 방금과 마찬가지로 계산해보면

$2+2k\int_0^2((x-1)^2(x-2))dx = 2+2k\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-2x\right]_0^2 = 2-\frac{4k}{3}$이죠? $2 < 2-\frac{4k}{3} < 18$이네요.

정리하면 $0 < -\frac{4k}{3} < 16$이고 $-12 < k < 0$입니다. -1부터 -11까지 11개가 가능하죠?

$n > 2$이라면 $n < \int_0^n g(x)dx < n+16$이어야 하는데 $\int_0^n g(x)dx$는 $\int_0^2 g(x)dx$에다가 2부터 n까지는 높이가 1이고 길이가 $n-2$인 직사각형의 넓이를 더한 것과 같죠? 따라서 $\int_0^2 g(x)dx + n-2$인데 아까 $\int_0^2 g(x)dx = 2-\frac{4k}{3}$이라고 구했어요. 따라서 $n < n-\frac{4k}{3} < n+16$여야 하겠네요. 정리하면 $-12 < k < 0$입니다. 이거 아까랑 똑같네요?

모든 자연수 n에 대하여 조건을 만족시키라고 했으니까 위의 세 가지 경우를 모두 만족시켜야 합니다. 그러면 겹치는 부분을 찾아야겠죠? 셋 모두 -1부터 -11까지 11개가 겹치네요. 따라서 답은 11입니다.