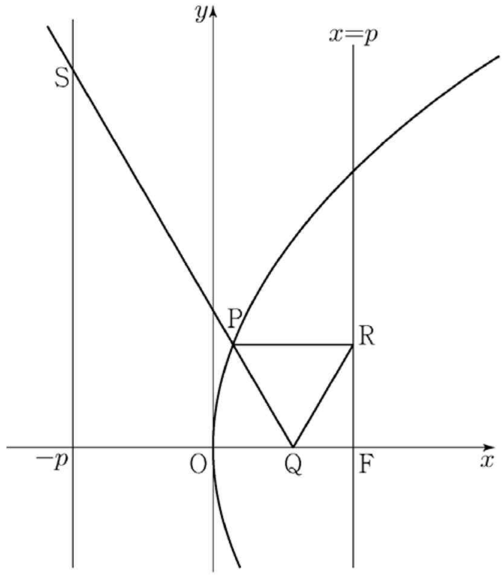
## 07 기하 01 포물선

02 포물선의 정의 활용

01 정의 활용1 (초점, 포물선 위의 점을 이은 선분 관련)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 기하 29

**1.** 그림과 같이 꼭짓점이 원점 O이고 초점이 $\mathrm{F}(p,\ 0)\ (p>0)$인 포물선이 있다. 포물선 위의 점 P, $x$축 위의 점 Q, 직선 $x=p$ 위의 점 R에 대하여 삼각형 PQR는 정삼각형이고 직선 PR는 $x$축과 평행하다. 직선 PQ가 점 $\mathrm{S}(-p,\ \sqrt{21})$을 지날 때, $\overline{\mathrm{QF}}=\dfrac{a+b\sqrt{7}}{6}$이다. $a+b$의 값을 구하시오.
(단, $a$와 $b$는 정수이고, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)



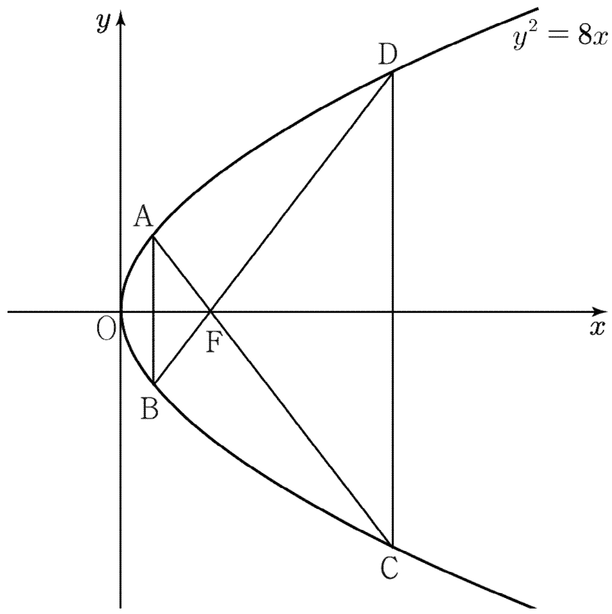

## 07 기하 01 포물선

02 포물선의 정의 활용

02 정의 활용2 (초점을 지나는 직선 관련)

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 07월 17

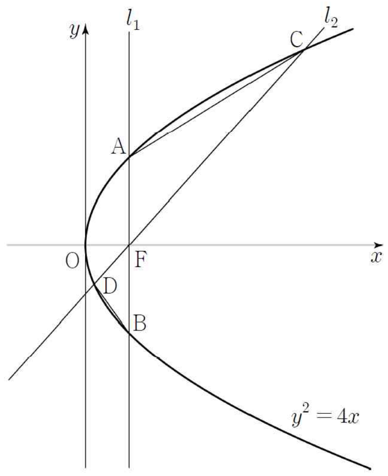
**2.** 그림과 같이 포물선 $y^2=8x$ 위의 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD에 대하여 두 선분 AB와 CD가 각각 $y$축과 평행하다. 사각형 ABCD의 두 대각선의 교점이 포물선의 초점 F와 일치하고 $\overline{\mathrm{DF}}=6$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는?




① $14\sqrt{2}$ ② $15\sqrt{2}$ ③ $16\sqrt{2}$
④ $17\sqrt{2}$ ⑤ $18\sqrt{2}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 기하 28

3. 그림과 같이 좌표평면에서 포물선 $y^2=4x$의 초점 F를 지나고 $x$축과 수직인 직선 $l_1$이 이 포물선과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하고, 점 F를 지나고 기울기가 $m(m>0)$인 직선 $l_2$가 이 포물선과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 C, D라 하자.
삼각형 FCA의 넓이가 삼각형 FDB의 넓이의 5배일 때, $m$의 값은? (단, 두 점 A, C는 제 1사분면 위의 점이고, 두 점 B, D는 제 4사분면 위의 점이다.)




① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② 1 ③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$
④ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{2}$

07 기하 01 포물선

02 포물선의 정의 활용

05 정의 활용5 (두 포물선 관련)

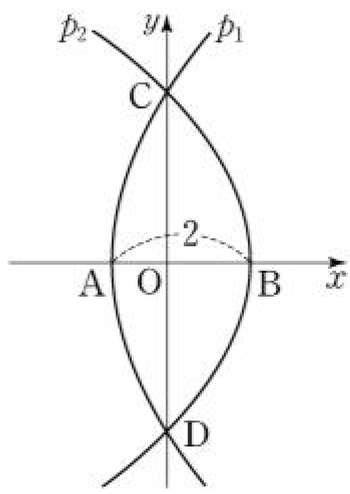
[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 11월 공통범위 14

4. 그림과 같이 좌표평면에서 $x$축 위의 두 점 A, B에 대하여 꼭짓점이 A인 포물선 $p_1$과 꼭짓점이 B인 포물선 $p_2$가 다음 조건을 만족시킨다. 이때, 삼각형 ABC의 넓이는?

(가) $p_1$의 초점은 B이고, $p_2$의 초점은 원점 O이다.

(나) $p_1$과 $p_2$는 $y$축 위의 두 점 C, D에서 만난다.

(다) $\overline{\mathrm{AB}}=2$



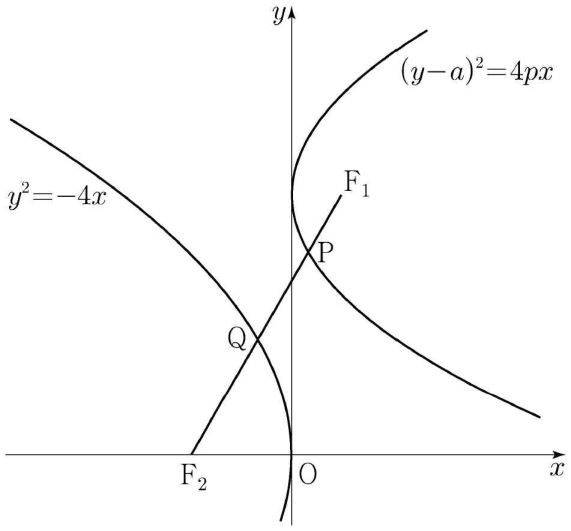

① $4(\sqrt{2}-1)$ ② $3(\sqrt{3}-1)$ ③ $2(\sqrt{5}-1)$
④ $\sqrt{3}+1$ ⑤ $\sqrt{5}+1$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 28

5. 두 양수 $a$, $p$에 대하여 포물선 $(y-a)^2=4px$의 초점을 $F_1$이라 하고, 포물선 $y^2=-4x$의 초점을 $F_2$라 하자. 선분 $F_1F_2$가 두 포물선과 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, $\overline{F_1F_2}=3$, $\overline{PQ}=1$이다. $a^2+p^2$의 값은?

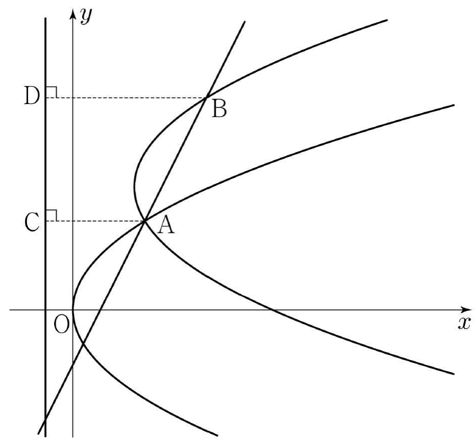
① 6 ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$

④ $\frac{27}{4}$ ⑤ 7



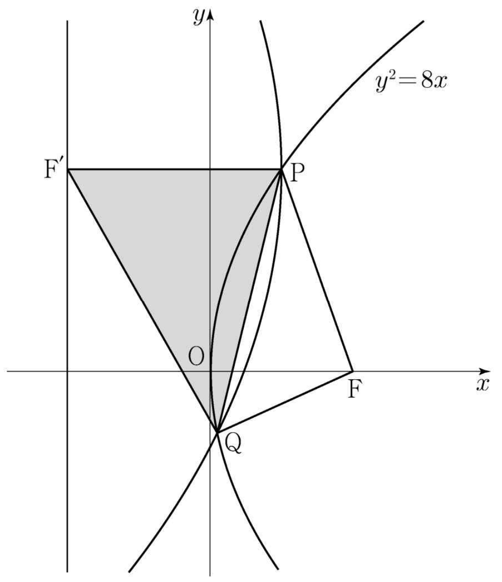

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 기하 29

6. 포물선 $y^2=8x$와 직선 $y=2x-4$가 만나는 점 중 제1사분면 위에 있는 점을 A라 하자. 양수 $a$에 대하여 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$가 점 A를 지날 때, 직선 $y=2x-4$와 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 두 점 A, B에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, $\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}=k$이다. $k^2$의 값을 구하시오.



[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 기하 29

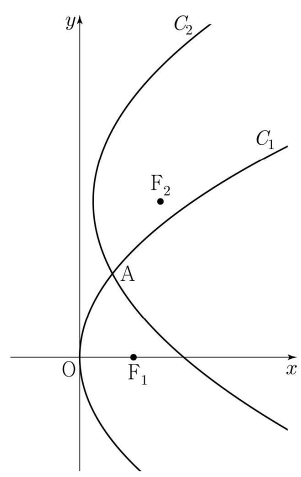
7. 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P를 지나고 $x$축과 평행한 직선이 포물선 $y^2=8x$의 준선과 만나는 점을 F′이라 하자. 점 F′을 초점, 점 P를 꼭짓점으로 하는 포물선이 포물선 $y^2=8x$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 사각형 PF′QF의 둘레의 길이가 12일 때, 삼각형 PF′Q의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 점 P의 $x$좌표는 2보다 작고, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.)




[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 기하 28

8. 실수 $p(p \geq 1)$과 함수 $f(x)=(x+a)^2$에 대하여 두 포물선 $C_1 : y^2=4x$, $C_2 : (y-3)^2=4p\{x-f(p)\}$가 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 두 포물선 $C_1$, $C_2$의 초점을 각각 $F_1$, $F_2$라 할 때, $\overline{AF_1}=\overline{AF_2}$를 만족시키는 $p$가 오직 하나가 되도록 하는 상수 $a$의 값은?

① $-\frac{3}{4}$ ② $-\frac{5}{8}$ ③ $-\frac{1}{2}$
④ $-\frac{3}{8}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$



07 기하 01 포물선

02 포물선의 정의 활용

06 정의 활용6 (포물선과 원 관련)

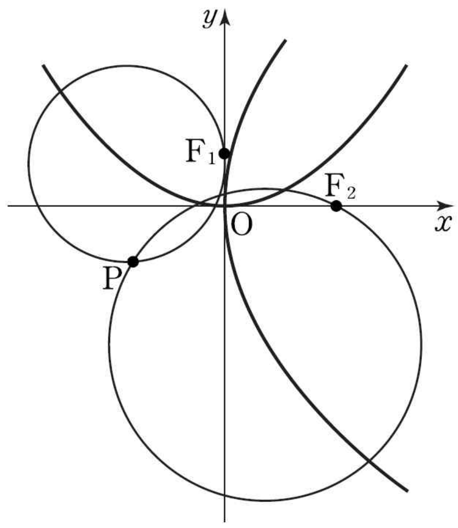
[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 06월

**9.** 좌표평면에서 포물선 $C_1 : x^2 = 4y$ 의 초점을 $\mathrm{F}_1$, 포물선 $C_2 : y^2 = 8x$ 의 초점을 $\mathrm{F}_2$ 라 하자. 점 P는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 중심이 $C_1$ 위에 있고 점 $\mathrm{F}_1$ 을 지나는 원과 중심이 $C_2$ 위에 있고 점 $\mathrm{F}_2$ 를 지나는 원의 교점이다.

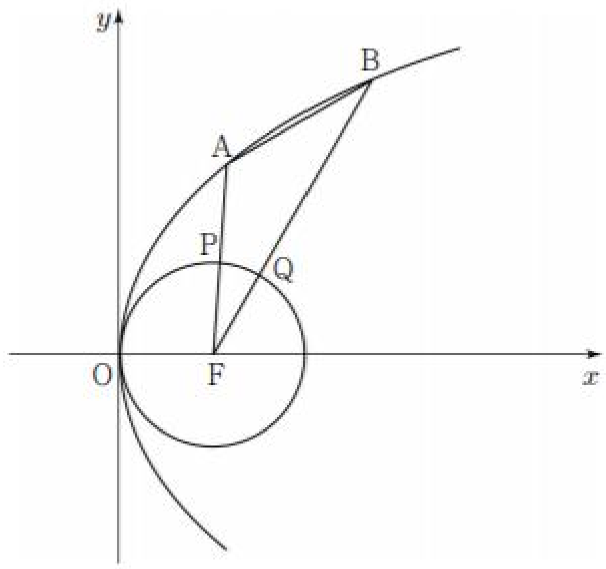
(나) 제 3사분면에 있는 점이다.

원점 O에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}^2$ 의 최댓값을 구하시오.




[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 07월

**10.** 그림과 같이 포물선 $y^2 = 4px$ 의 초점 F를 중심으로 하고 원점을 지나는 원 $C$가 있다. 포물선 위의 점 A와 점 B에 대하여 선분 FA와 선분 FB가 원 $C$와 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, 점 P는 선분 FA의 중점이고, 점 Q는 선분 FB를 $2:5$로 내분하는 점이다. 삼각형 AFB의 넓이가 24일 때, $p$의 값은?
(단, 점 A와 점 B는 제 1사분면 위에 있다.)




① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

# 07 기하

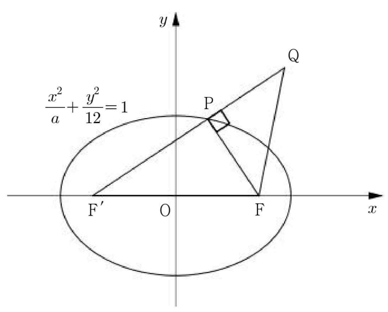
02 타원

02 타원의 정의 활용

01 정의 활용1 (타원의 두 정보)

[출처] 2018 모의_공공 사관학교 고3 07월 15

**11.** 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{12}=1$의 두 초점 중 $x$좌표가 양수인 점을 F, 음수인 점을 F$'$이라 하자. 타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{12}=1$ 위에 있고 제 1사분면에 있는 점 P에 대하여 선분 F$'$P의 연장선 위에 점 Q를 $\overline{\mathrm{F'Q}}=10$이 되도록 잡는다. 삼각형 PFQ가 직각이등변삼각형일 때, 삼각형 QF$'$F의 넓이는? (단, $a>12$)




① 15　② $\frac{35}{2}$　③ 20

④ $\frac{45}{2}$　⑤ 25

# 07 기하

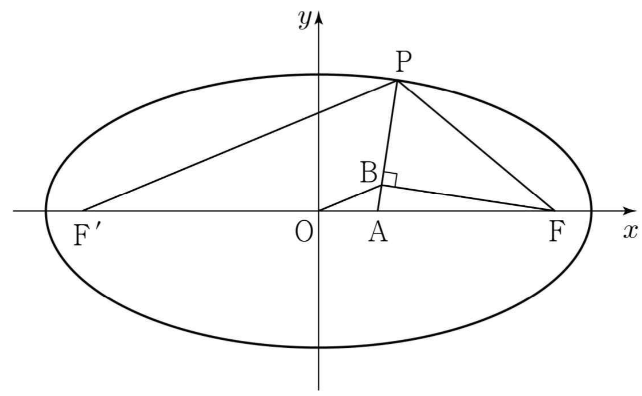
02 타원

02 타원의 정의 활용

02 정의 활용2 (타원의 한 정보)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 기하 28

**12.** 그림과 같이 F(6, 0), F$'$($-6$, 0)을 두 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이 있다. 점 A$\left(\frac{3}{2},\,0\right)$에 대하여 $\angle$FPA$=\angle$F$'$PA를 만족시키는 타원의 제1사분면 위의 점을 P라 할 때, 점 F에서 직선 AP에 내린 수선의 발을 B라 하자. $\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{3}$일 때, $a\times b$의 값은?
(단, $a>0$, $b>0$이고 O는 원점이다.)




① 16　② 20　③ 24

④ 28　⑤ 32

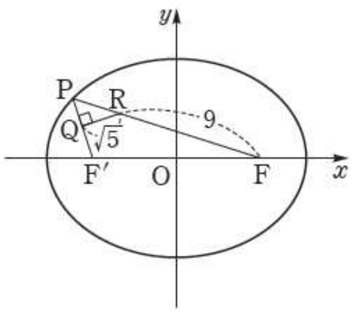
07 기하 02 타원

02 타원의 정의 활용

03 정의 활용3 (타원의 X정보)

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 11월

13. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$인 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이 있다. 타원 위에 있고 제2사분면에 있는 점 P에 대하여 선분 PF′의 중점을 Q, 선분 PF를 $1:3$으로 내분하는 점을 R라 하자. $\angle \mathrm{PQR}=\frac{\pi}{2}$, $\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{RF}}=9$일 때, $a^2+b^2$의 값을 구하시오. (단, $a$, $b$, $c$는 양수이다.)



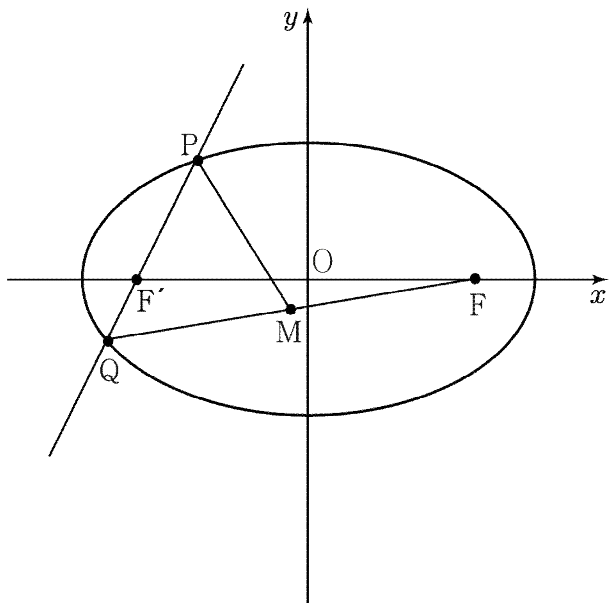

07 기하 02 타원

02 타원의 정의 활용

05 정의 활용5 (원과 타원)

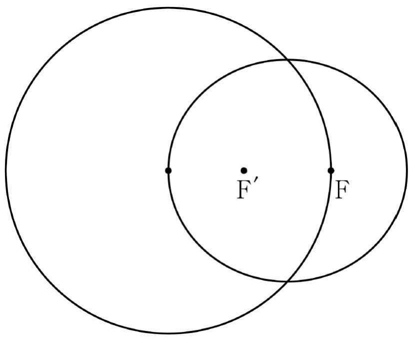
[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 07월 28

14. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$의 두 초점을 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)\,(c>0)$이라 하고 점 F′을 지나는 직선이 타원과 만나는 두 점을 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=6$이고 선분 FQ의 중점 M에 대하여 $\overline{\mathrm{FM}}=\overline{\mathrm{PM}}=5$일 때, 이 타원의 단축의 길이를 구하시오.



[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 기하 28

15. 두 초점이 F, F′이고 장축의 길이가 $2a$인 타원이 있다. 이 타원의 한 꼭짓점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 이 타원의 서로 다른 두 꼭짓점과 한 초점을 지날 때, 상수 $a$의 값은?

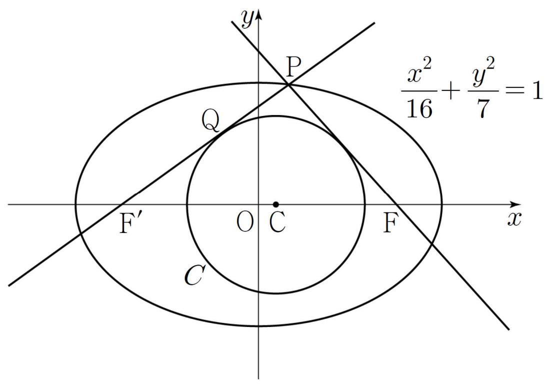



① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{6}-1}{2}$ ③ $\sqrt{3}-1$

④ $2\sqrt{2}-2$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

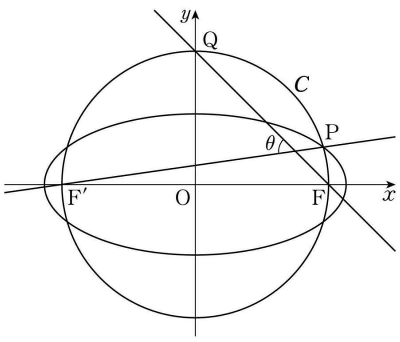
[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 기하 30

16. 그림과 같이 두 점 F$(c, 0)$, F′$(-c, 0)$ $(c>0)$인 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ 위의 점 P에 대하여 직선 FP와 직선 F′P에 동시에 접하고 중심이 선분 F′F 위에 있는 원 $C$가 있다. 원 $C$의 중심을 C, 직선 F′P가 원 $C$와 만나는 점을 Q라 할 때, $2\overline{\text{PQ}}=\overline{\text{PF}}$이다. $24\times\overline{\text{CP}}$의 값을 구하시오.
(단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)



[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 기하 28

17. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점 F, F$'$에 대하여 선분 FF$'$을 지름으로 하는 원을 $C$라 하자. 원 $C$가 타원과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하고, 원 $C$가 $y$축과 만나는 점 중 $y$좌표가 양수인 점을 Q라 하자. 두 직선 F$'$P, QF가 이루는 예각의 크기를 $\theta$라 하자. $\cos\theta=\frac{3}{5}$일 때, $\frac{b^2}{a^2}$의 값은? (단, $a$, $b$는 $a>b>0$인 상수이고, 점 F의 $x$좌표는 양수이다.)




① $\frac{11}{64}$ ② $\frac{3}{16}$ ③ $\frac{13}{64}$
④ $\frac{7}{32}$ ⑤ $\frac{15}{64}$

07 기하 02 타원

02 타원의 정의 활용

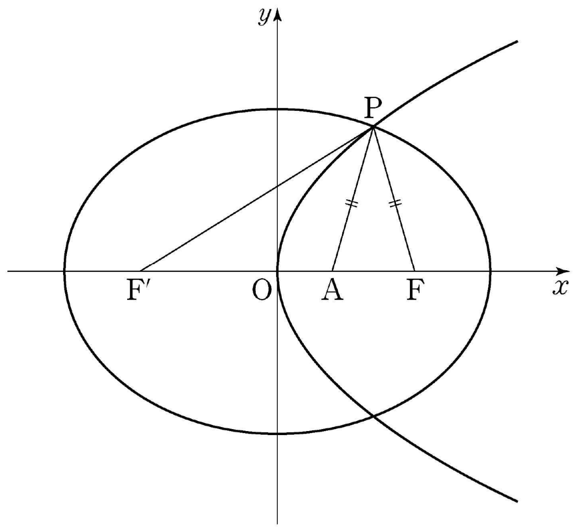
06 정의 활용6 (포물선과 타원)

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 09월 27

18. 좌표평면에서 초점이 A$(a,\ 0)\,(a>0)$이고 꼭짓점이 원점인 포물선과 두 초점이 F$(c,\ 0)$, F$'(-c,\ 0)\,(c>a)$인 타원의 교점 중 제 1사분면 위의 점을 P라 하자.

$$\overline{\mathrm{AF}}=2,\ \overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PF}},\ \overline{\mathrm{FF'}}=\overline{\mathrm{PF'}}$$

일 때, 타원의 장축의 길이는 $p+q\sqrt{7}$이다. $p^2+q^2$의 값을 구하시오. (단, $p$, $q$는 유리수이다.)



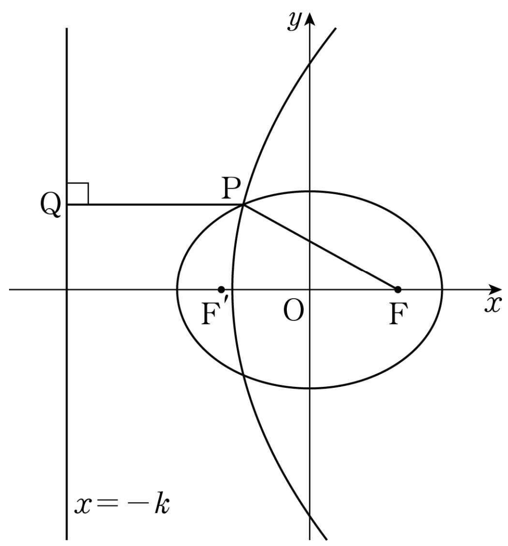
[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 기하 30

19. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$ 이고 장축의 길이가 12인 타원이 있다. 점 F가 초점이고 직선 $x=-k\ (k>0)$ 이 준선인 포물선이 타원과 제2사분면의 점 P에서 만난다. 점 P에서 직선 $x=-k$에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\cos(\angle \mathrm{F}'\mathrm{FP})=\dfrac{7}{8}$

(나) $\overline{\mathrm{FP}}-\overline{\mathrm{F}'\mathrm{Q}}=\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{FF}'}$

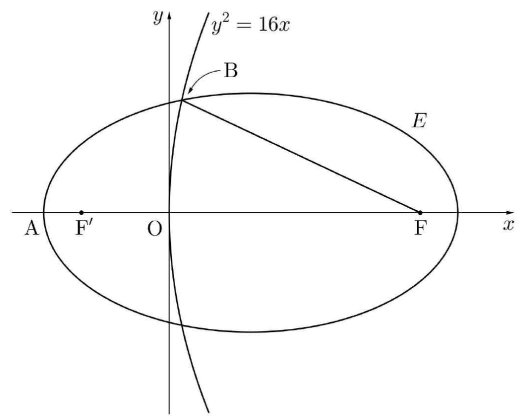
$c+k$의 값을 구하시오.




[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 29

20. 그림과 같이 포물선 $y^2=16x$의 초점을 F라 하자. 점 F를 한 초점으로 하고 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$을 지나며 다른 초점 F′이 선분 AF위에 있는 타원 $E$가 있다. 포물선 $y^2=16x$가 타원 $E$와 제 1사분면에서 만나는 점을 B라 하자.

$\overline{\mathrm{BF}}=\dfrac{21}{5}$일 때, 타원 $E$의 장축의 길이는 $k$이다. $10k$의 값을 구하시오.



## 07 기하

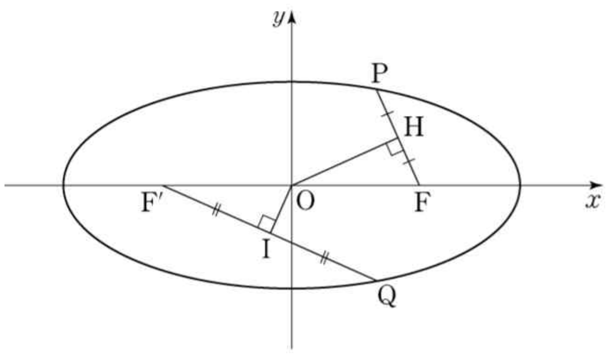
02 타원

02 타원의 정의 활용

07 정의 활용7 (대칭성)

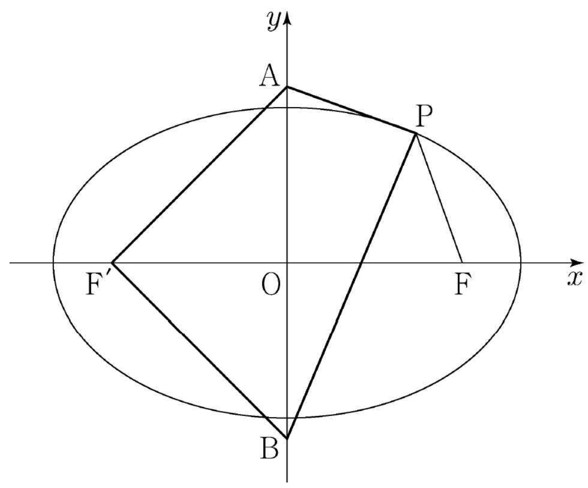
[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 06월 27

**21.** 두 점 $\mathrm{F}(5, 0)$, $\mathrm{F}'(-5, 0)$을 초점으로 하는 타원 위의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 원점 O에서 선분 PF와 선분 QF′에 내린 수선의 발을 각각 H와 I라 하자. 점 H와 점 I가 각각 선분 PF와 선분 QF′의 중점이고, $\overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{OI}}=10$일 때, 이 타원의 장축의 길이를 $l$이라 하자. $l^2$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{OH}}\neq\overline{\mathrm{OI}}$)




[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 09월 27

**22.** 좌표평면에서 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 3)$, $\mathrm{B}(0,\ -3)$에 대하여 두 초점이 F, F′인 타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$위의 점 P가 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{PF}}$를 만족시킨다. 사각형 AF′BP의 둘레의 길이가 $a+b\sqrt{2}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{PF}}<\overline{\mathrm{PF'}}$이고, $a$, $b$는 자연수이다.)



## 07 기하

02 타원

02 타원의 정의 활용

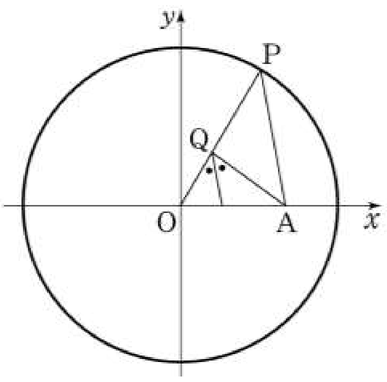
10 자취의 방정식

[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 8

**23.** 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=36$ 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$와 점 $\mathrm{A}(4,\ 0)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점 Q 전체의 집합을 $X$라 하자. (단, $b\neq 0$)

(가) 점 Q는 선분 OP 위에 있다.

(나) 점 Q를 지나고 직선 AP에 평행한 직선이 $\angle\mathrm{OQA}$를 이등분한다.




집합의 포함관계로 옳은 것은?

① $X\subset\left\{(x,\ y)\left|\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{5}=1\right.\right\}$

② $X\subset\left\{(x,\ y)\left|\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{5}=1\right.\right\}$

③ $X\subset\left\{(x,\ y)\left|\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{y^2}{5}=1\right.\right\}$

④ $X\subset\left\{(x,\ y)\left|\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1\right.\right\}$

⑤ $X\subset\left\{(x,\ y)\left|\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1\right.\right\}$

[출처] 2011 모의_공공 사관학교 고3 07월 19

**24.** 좌표평면 위를 움직이는 두 점

$$\mathrm{A}(2+\sin\theta,\ 2\sqrt{3}+\sqrt{3}\sin\theta),\ \mathrm{B}(\cos\theta,\ -\sqrt{3}\cos\theta)$$

와 점 $\mathrm{C}(1,\ 0)$에 대하여 선분 AB의 중점을 M이라 하고, $\overline{\mathrm{CM}}$이 최대일 때 점 M을 D, $\overline{\mathrm{CM}}$이 최소일 때 점 M을 E라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $0\leq\theta<2\pi$)

<보 기>

ㄱ. 점 M이 그리는 도형은 타원이다.

ㄴ. $\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{CE}}=2\sqrt{3}$

ㄷ. $\angle\mathrm{DOE}=\alpha$라 하면 $\tan\alpha=\frac{2}{5}\sqrt{6}$이다.

(단,O는 원점이다.)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

## 07 기하

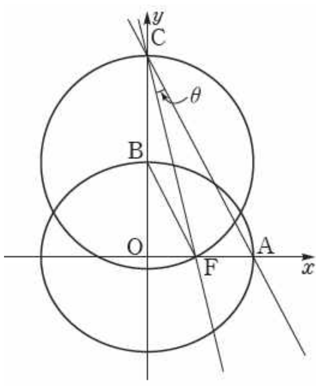
02 타원

03 기타

01 교과외1 (삼각함수의 덧셈정리)

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 06월 17

**25.** 그림과 같이 한 초점이 $F(c, 0)$인 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$과 두 점 $A(a, 0)$, $B(0, b)$가 있다. 점 B를 중심으로 하고 점 F를 지나는 원이 $y$축과 만나는 점 중에서 $y$좌표가 양수인 점을 C라 할 때, 직선 CF와 직선 CA가 이루는 예각의 크기를 $\theta$라 하자. $\tan(\angle CFB)=\frac{1}{4}$일 때, $\tan\theta$의 값은?
(단, $a$, $b$, $c$는 양수이다.)




① $\frac{36}{145}$ ② $\frac{41}{145}$ ③ $\frac{46}{145}$

④ $\frac{51}{145}$ ⑤ $\frac{56}{145}$

## 07 기하

03 쌍곡선

02 쌍곡선의 정의 활용

01 정의 활용1 (쌍곡선의 두 정보)

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 09월 19

**26.** 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) 점 P는 제 1사분면에 있다. |
| (나) 삼각형 PF′F가 이등변삼각형이다. |

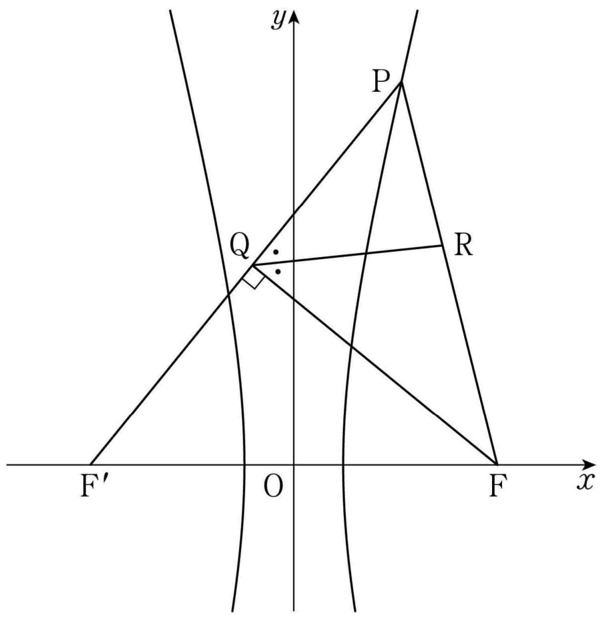
삼각형 PF′F의 넓이를 $a$라 할 때, 모든 $a$의 값의 곱은?

① $3\sqrt{77}$ ② $6\sqrt{21}$ ③ $9\sqrt{10}$

④ $21\sqrt{2}$ ⑤ $3\sqrt{105}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 기하 29

**27.** 그림과 같이 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{16}=1$이 있다. 쌍곡선 위에 있고 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 점 F에서 선분 PF′에 내린 수선의 발을 Q라 하고, ∠FQP의 이등분선이 선분 PF와 만나는 점을 R라 하자.
$4\overline{PR}=3\overline{RF}$일 때, 삼각형 PF′F의 넓이를 구하시오.
(단, 점 F의 $x$좌표는 양수이고, $\angle F'PF<90°$이다.)




## 07 기하
03 쌍곡선

02 쌍곡선의 정의 활용

02 정의 활용2 (쌍곡선의 한 정보)

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 11월 28

**28.** 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{4}{3}x$이고 두 초점이 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)\ (c>0)$인 쌍곡선이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 쌍곡선 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{PF'}=30$, $16\le\overline{PF}\le 20$이다.
>
> (나) $x$좌표가 양수인 꼭짓점 A에 대하여 선분 AF의 길이는 자연수이다.

이 쌍곡선의 주축의 길이를 구하시오.

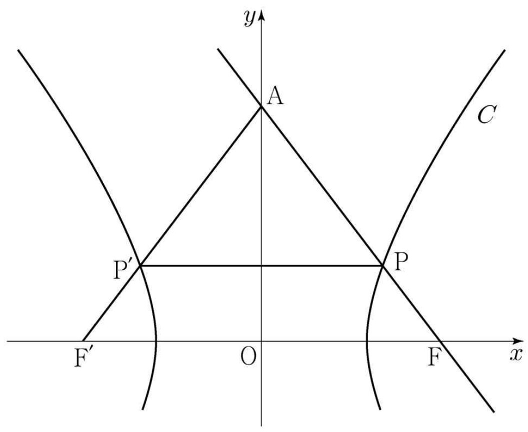
[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 기하 28

29. 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$ $(c>0)$인 쌍곡선 $C$와 $y$축 위의 점 A가 있다. 쌍곡선 $C$가 선분 AF와 만나는 점을 P, 선분 AF′과 만나는 점을 P′이라 하자.
직선 AF는 쌍곡선 $C$의 한 점근선과 평행하고

$$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PP'}} = 5 : 6, \ \overline{\mathrm{PF}} = 1$$

일 때, 쌍곡선 $C$의 주축의 길이는?

① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{7}{3}$
④ $\frac{29}{12}$ ⑤ $\frac{5}{2}$




07 기하 03 쌍곡선

02 쌍곡선의 정의 활용

04 정의 활용4 (둘레의 길이 관련)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 기하 29

30. 두 점 F, F′을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{32} = 1$ 위의 점 A가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{AF}} < \overline{\mathrm{AF'}}$
(나) 선분 AF의 수직이등분선은 점 F′을 지난다.

선분 AF의 중점 M에 대하여 직선 MF′과 쌍곡선의 교점 중 점 A에 가까운 점을 B라 할 때, 삼각형 BFM의 둘레의 길이는 $k$이다. $k^2$의 값을 구하시오.

07 기하 03 쌍곡선

02 쌍곡선의 정의 활용

05 정의 활용5 (원과 쌍곡선)

[출처] 2006 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 9

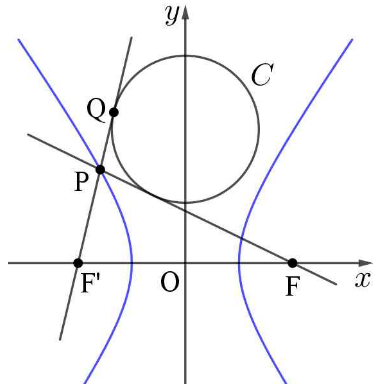
**31.** 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$의 두 초점 $(2\sqrt{3}, 0)$, $(-2\sqrt{3}, 0)$을 각각 F, F′이라 하자. 이 쌍곡선 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x, y)(x>0)$에 대하여 선분 F′P 위의 점 Q가 $\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{PQ}}$를 만족시킬 때, 점 Q가 나타내는 도형 전체의 길이는?

① $\pi$ ② $\sqrt{3}\pi$ ③ $2\pi$

④ $3\pi$ ⑤ $2\sqrt{3}\pi$

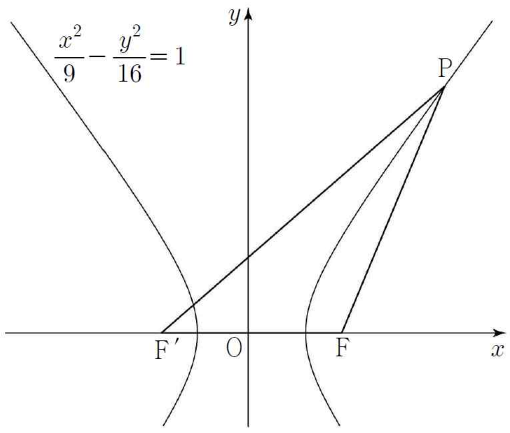
[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 11월 27

**32.** 그림과 같이 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{25}=1$ 위의 점 P에 대하여 직선 FP와 직선 F′P에 동시에 접하고 중심이 $y$축 위에 있는 원 $C$가 있다. 직선 F′P와 원 $C$의 접점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{F'Q}}=4\sqrt{2}$일 때, $\overline{\mathrm{FP}}^2+\overline{\mathrm{F'P}}^2$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{F'P}}<\overline{\mathrm{FP}}$)



[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 07월 28

**33.** 그림과 같이 두 점 F, F′을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$의 제1사분면 위의 점을 P라 하자. 삼각형 PF′F에 내접하는 원의 반지름의 길이가 3일 때, 이 원의 중심을 Q라 하자. 원점 O에 대하여 $\overline{OQ}^2$의 값을 구하시오. (단, 점 F의 $x$좌표는 양수이다.)




## 07 기하

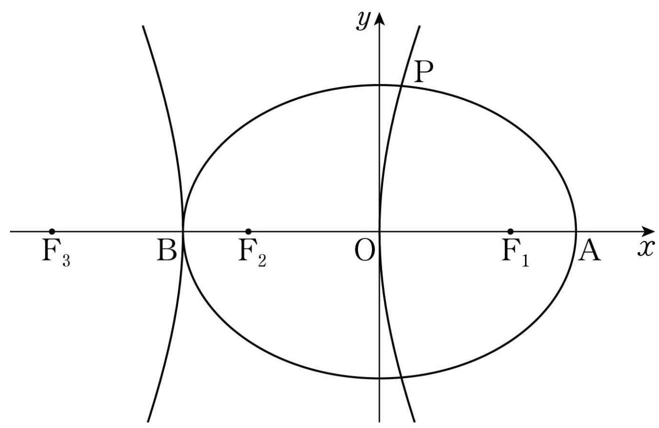
03 쌍곡선

02 쌍곡선의 정의 활용

07 정의 활용7 (타원과 쌍곡선)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 기하 29

**34.** 두 초점이 $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ $(c>0)$인 타원이 $x$축과 두 점 A(3, 0), B(−3, 0)에서 만난다. 선분 BO가 주축이고 점 $F_1$이 한 초점인 쌍곡선의 초점 중 $F_1$이 아닌 점을 $F_3$이라 하자. 쌍곡선이 타원과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 할 때, 삼각형 $PF_3F_2$의 둘레의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다.)



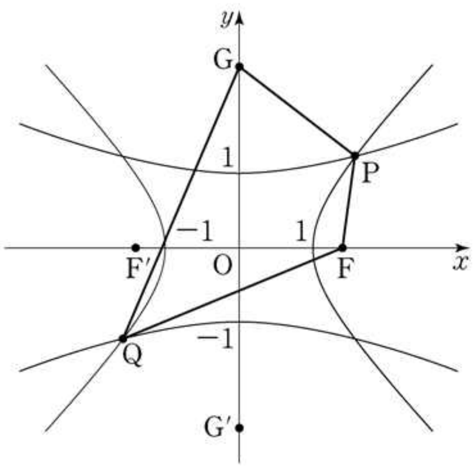
07 기하 03 쌍곡선

02 쌍곡선의 정의 활용

08 정의 활용8 (대칭성)

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 06월 19

35. 그림과 같이 초점이 각각 F, F′과 G, G′이고 주축의 길이가 2, 중심이 원점 O인 두 쌍곡선이 제 1사분면에서 만나는 점을 P, 제 3사분면에서 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{PG}\times\overline{QG}=8$, $\overline{PF}\times\overline{QF}=4$일 때, 사각형 PGQF의 둘레의 길이는? (단, 점 F의 $x$좌표와 점 G의 $y$좌표는 양수이다.)




① $6+2\sqrt{2}$ ② $6+2\sqrt{3}$ ③ 10
④ $6+2\sqrt{5}$ ⑤ $6+2\sqrt{6}$

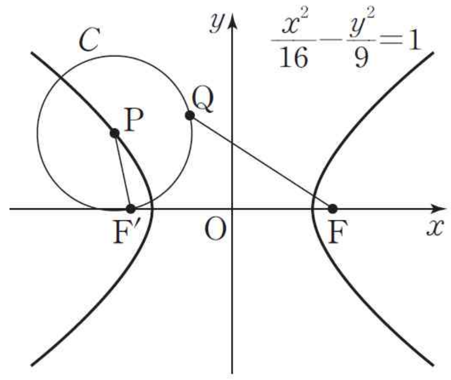
07 기하 03 쌍곡선

02 쌍곡선의 정의 활용

09 정의 활용9 (Mm)

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 06월 18

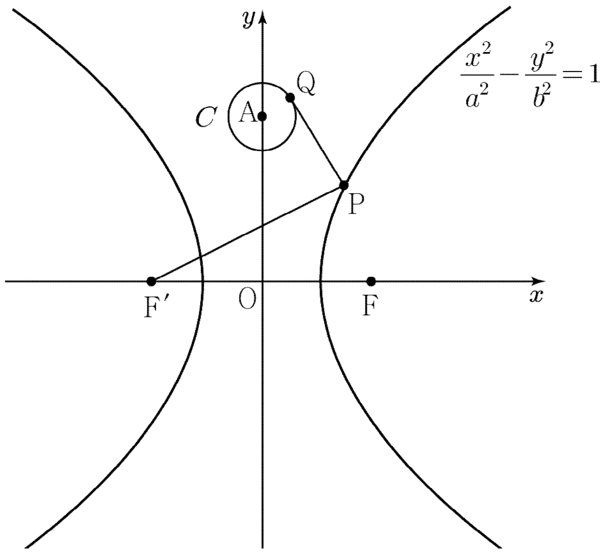
36. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하고, 이 쌍곡선 위의 점 P를 중심으로 하고 선분 PF′을 반지름으로 하는 원을 $C$라 하자. 원 $C$ 위를 움직이는 점 Q에 대하여 선분 FQ의 길이의 최댓값이 14일 때, 원 $C$의 넓이는? (단, $\overline{PF'}<\overline{PF}$)




① $7\pi$ ② $8\pi$ ③ $9\pi$
④ $10\pi$ ⑤ $11\pi$

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 04월 28

37. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)(c>0)$이고, 주축의 길이가 6인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$과 점 $\mathrm{A}(0, 5)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 $C$가 있다. 제 1사분면에 있는 쌍곡선 위를 움직이는 점 P와 원 $C$ 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF'}}$의 최솟값이 12일 때, $a^2+3b^2$의 값을 구하시오. (단, $a$와 $b$는 상수이다.)




[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 11월 17

[출처] 2021 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능특강 대표 기출 문제

[출처] 2022 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능특강 대표 기출 문제

38. 평면에 한 변의 길이가 10인 정삼각형 ABC가 있다. $\overline{\mathrm{PB}}-\overline{\mathrm{PC}}=2$를 만족시키는 점 P에 대하여 선분 PA의 길이가 최소일 때, 삼각형 PBC의 넓이는?

① $20\sqrt{3}$ ② $21\sqrt{3}$ ③ $22\sqrt{3}$
④ $23\sqrt{3}$ ⑤ $24\sqrt{3}$

07 기하 03 쌍곡선

02 쌍곡선의 정의 활용

11 자취의 방정식

[출처] 2005 모의_공공 사관학교 고3 07월 18

**39.** 쌍곡선 $4x^2-9y^2=36$이 $x$축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $x=t$ (단, $t>3$) 가 이 쌍곡선과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. $t$의 값이 변함에 따라 두 직선 AC와 BD의 교점 P는 곡선을 그린다. 이 때, 이 곡선의 두 초점 사이의 거리는?

① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{13}$

④ $2\sqrt{15}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

07 기하 03 쌍곡선

03 기타

03 교과외3 (무리함수의 미분가능성)

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 10월 20

**40.** 쌍곡선 $x^2-y^2=1$ 위의 점 P와 $x$축 위의 점 A$(t, 0)$이 있다. $\overline{\mathrm{AP}}$의 최솟값을 $f(t)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(0)=1$

ㄴ. 방정식 $f(t)=\frac{1}{3}$의 실근의 개수는 4이다.

ㄷ. 함수 $f(t)$가 미분가능하지 않은 $t$의 값의 개수는 5이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

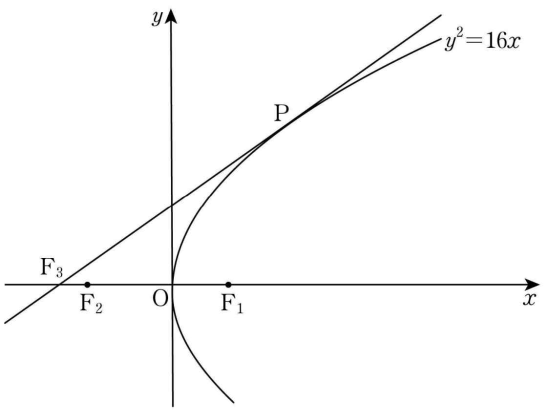
07 기하 04 이차곡선과접선

01 포물선과 접선

02 포물선과 접선2 (접점조건)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 기하 29

41. 두 점 $\mathrm{F}_1(4, 0)$, $\mathrm{F}_2(-6, 0)$에 대하여 포물선 $y^2=16x$ 위의 점 중 제 1사분면에 있는 점 P가 $\overline{\mathrm{PF}_2}-\overline{\mathrm{PF}_1}=6$을 만족시킨다. 포물선 $y^2=16x$ 위의 점 P에서의 접선이 $x$축과 만나는 점을 $\mathrm{F}_3$이라 하면 두 점 $\mathrm{F}_1$, $\mathrm{F}_3$을 초점으로 하는 타원의 한 꼭짓점은 선분 $\mathrm{PF}_3$ 위에 있다. 이 타원의 장축의 길이가 $2a$일 때, $a^2$의 값을 구하시오.




[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 기하 29

42. 초점이 F인 포물선 $y^2=4px\,(p>0)$에 대하여 이 포물선 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 직선 $x=-p$와 만나는 점을 Q라 하고, 점 Q를 지나고 직선 $x=-p$에 수직인 직선이 포물선과 만나는 점을 R라 하자. $\angle\mathrm{PRQ}=\dfrac{\pi}{2}$일 때, 사각형 PQRF의 둘레의 길이가 140이 되도록 하는 상수 $p$의 값을 구하시오.

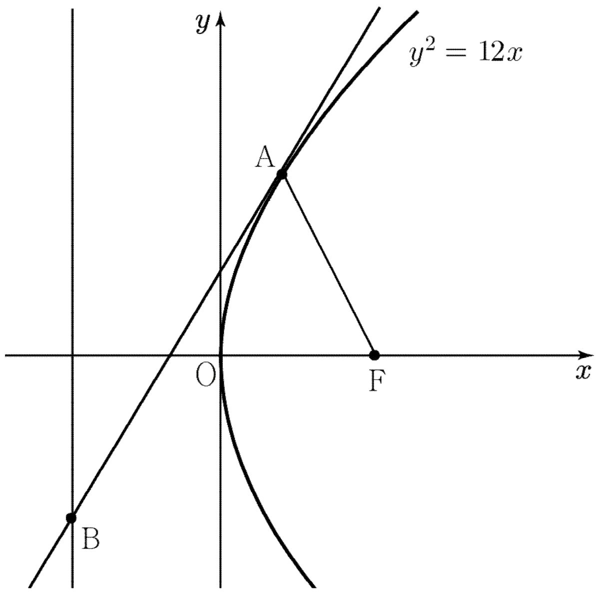
07 기하 04 이차곡선과접선

01 포물선과 접선

04 포물선과 접선4 (기울기조건)

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 07월 28

43. 그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=12x$가 있다. 포물선 위에 있고 제 1사분면에 있는 점 A에서의 접선과 포물선의 준선이 만나는 점을 B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AF}}$일 때, $\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AF}}$의 값을 구하시오.



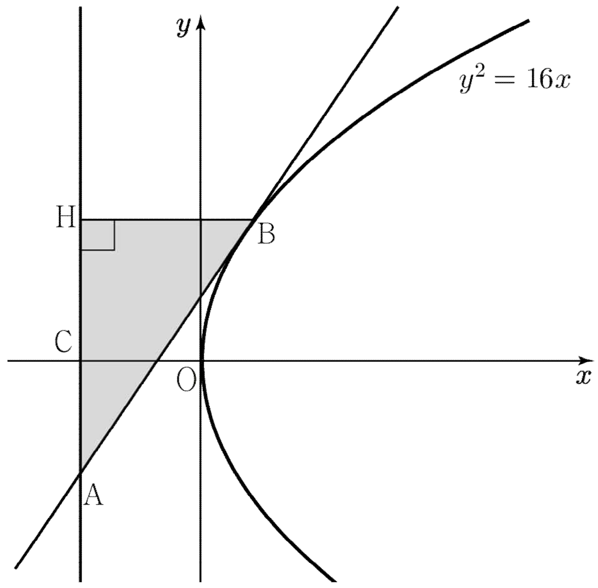

07 기하 04 이차곡선과접선

01 포물선과 접선

06 포물선과 접선6 (곡선 밖의 점)

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 04월 18

44. 그림과 같이 포물선 $y^2=16x$에 대하여 포물선의 준선 위의 한 점 A가 제3사분면에 있다. 점 A에서 포물선에 그은 기울기가 양수인 접선과 포물선이 만나는 점을 B, 점 B에서 준선에 내린 수선의 발을 H, 준선과 $x$축이 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CH}}=8$일 때, 삼각형 ABH의 넓이는?




① $15\sqrt{3}$ ② $\frac{46}{3}\sqrt{3}$ ③ $\frac{47}{3}\sqrt{3}$

④ $16\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{49}{3}\sqrt{3}$

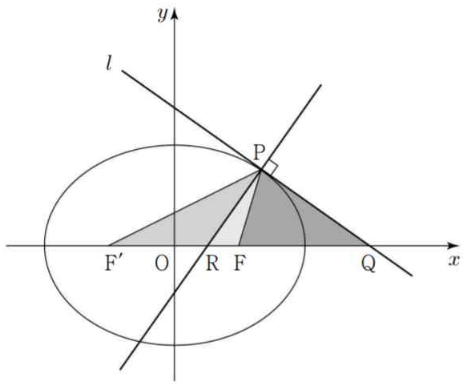
07 기하 04 이차곡선과접선

02 타원과 접선

02 타원과 접선2 (접점조건)

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 07월

**45.** 그림과 같이 두 초점이 F, F′인 타원 $3x^2+4y^2=12$ 위를 움직이는 제 1사분면 위의 점 P에서의 접선 $l$이 $x$축과 만나는 점을 Q, 점 P에서 접선 $l$과 수직인 직선을 그어 $x$축과 만나는 점을 R라 하자. 세 삼각형 PRF, PF′R, PFQ의 넓이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 점 P의 $x$좌표는?

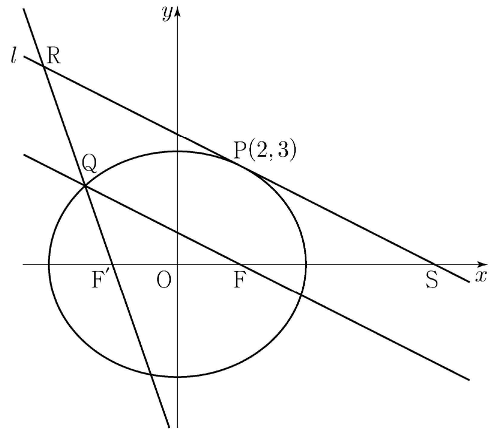



① $\frac{13}{12}$ ② $\frac{7}{6}$ ③ $\frac{5}{4}$

④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{17}{12}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 기하 28

**46.** 그림과 같이 두 점 F$(c,\ 0)$, F′$(-c,\ 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 위의 점 P$(2,\ 3)$에서 타원에 접하는 직선을 $l$이라 하자. 점 F를 지나고 $l$과 평행한 직선이 타원과 만나는 점 중 제2사분면 위에 있는 점을 Q라 하자.
두 직선 F′Q와 $l$이 만나는 점을 R, $l$과 $x$축이 만나는 점을 S라 할 때, 삼각형 SRF′의 둘레의 길이는?




① 30 ② 31 ③ 32
④ 33 ⑤ 34

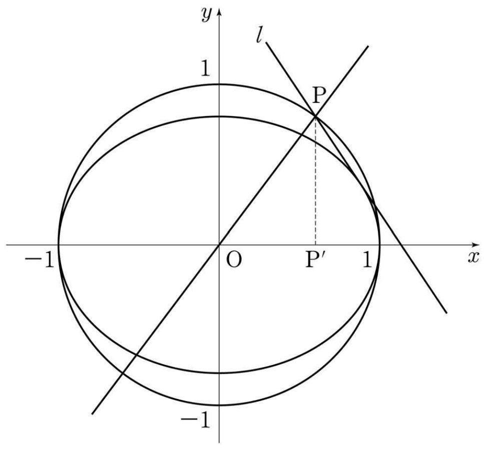
07 기하 04 이차곡선과접선

02 타원과 접선

03 타원과 접선3 (기울기조건)

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 예비 17

**47.** 그림과 같이 좌표평면에서 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 P에서 $x$축에 내린 수선의 발을 P$'$이라 하자. 점 P$'$을 초점으로 하고, $x$축 위에 있는 원의 지름을 장축으로 하는 타원에 대하여 점 P에서 타원에 그은 접선 $l$의 기울기가 $-\frac{3}{2}$일 때, 직선 OP의 기울기는?




① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{4}{3}$

④ $\frac{17}{12}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

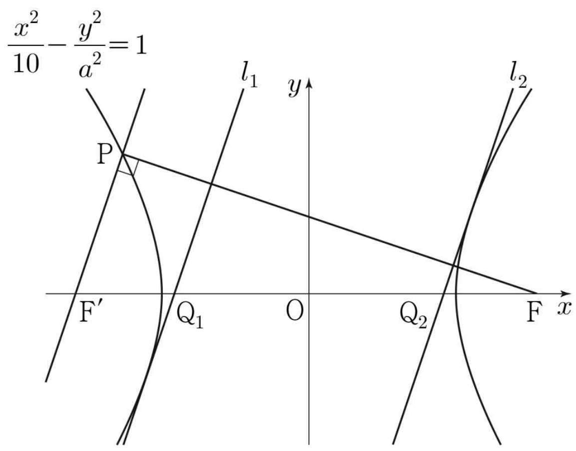
07 기하 04 이차곡선과접선

03 쌍곡선과 접선

03 쌍곡선과 접선3 (기울기조건)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 기하 30

**48.** 그림과 같이 두 점 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)(c>0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{a^2}=1$이 있다. 쌍곡선 위의 점 중 제2사분면에 있는 점 P에 대하여 삼각형 F$'$FP는 넓이가 15이고 $\angle$F$'$PF$=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다. 직선 PF$'$과 평행하고 쌍곡선에 접하는 두 직선을 각각 $l_1$, $l_2$라 하자. 두 직선 $l_1$, $l_2$가 $x$축과 만나는 점을 각각 $Q_1$, $Q_2$라 할 때, $\overline{Q_1Q_2}=\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이고, $a$는 양수이다.)



07 기하 04 이차곡선과접선

04 접선의 활용

01 활용1 (두 개 이상의 이차곡선과 접선의 관계)

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 11월 19

49. 두 양수 $k$, $p$에 대하여 점 A$(-k, 0)$에서 포물선 $y^2=4px$에 그은 두 접선이 $y$축과 만나는 두 점을 각각 F, F′, 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 할 때, $\angle \mathrm{PAQ}=\frac{\pi}{3}$이다. 두 점 F, F′을 초점으로 하고 두 점 P, Q를 지나는 타원의 장축의 길이가 $4\sqrt{3}+12$일 때, $k+p$의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12

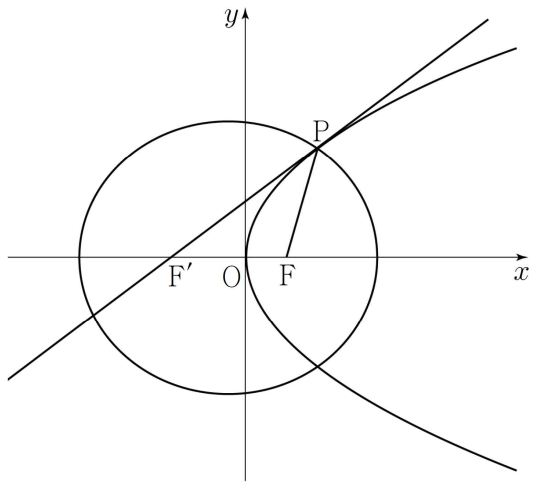
④ 14 ⑤ 16

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 기하 28

50. 좌표평면에서 두 점 $\mathrm{F}\left(\frac{9}{4},\ 0\right)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)(c>0)$을 초점으로 하는 타원과 포물선 $y^2=9x$가 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. $\overline{\mathrm{PF}}=\frac{25}{4}$이고 포물선 $y^2=9x$ 위의 점 P에서의 접선이 점 F′을 지날 때, 타원의 단축의 길이는?

① 13 ② $\frac{27}{2}$ ③ 14

④ $\frac{29}{2}$ ⑤ 15



# 07 기하

04 이차곡선과접선

04 접선의 활용

04 활용4 (자취의 방정식)

[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 11월 공통범위 5

**51.** 좌표평면에서 점 $A(0, 4)$와 타원 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 위의 점 P에 대하여 두 점 A와 P를 지나는 직선이 원 $x^2+(y-3)^2=1$과 만나는 두 점 중에서 A가 아닌 점을 Q라 하자. 점 P가 타원 위의 모든 점을 지날 때, 점 Q가 나타내는 도형의 길이는?

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$

④ $\frac{2}{3}\pi$ ⑤ $\frac{3}{4}\pi$

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 06월 29

**52.** 좌표평면에서 포물선 $y^2=16x$ 위의 점 A에 대하여 점 B는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 점 A가 원점이면 점 B도 원점이다.
>
> (나) 점 A가 원점이 아니면 점 B는 점 A, 원점 그리고 점 A에서의 접선이 $y$축과 만나는 점을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심이다.

점 A가 포물선 $y^2=16x$ 위를 움직일 때 점 B가 나타내는 곡선을 $C$라 하자. 점 $(3, 0)$을 지나는 직선이 곡선 $C$와 두 점 P, Q에서 만나고 $\overline{PQ}=20$일 때, 두 점 P, Q의 $x$좌표의 합을 구하시오.

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 09월 21

53. 좌표평면에서 두 점 A$(-2,\ 0)$, B$(2,\ 0)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 직사각형의 넓이의 최댓값은?

> 직사각형 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 값은 점 P의 좌표가 $(0,\ 6)$일 때 최대이고 $\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$일 때 최소이다.

① $\frac{200}{19}$ ② $\frac{210}{19}$ ③ $\frac{220}{19}$

④ $\frac{230}{19}$ ⑤ $\frac{240}{19}$

## 07 기하

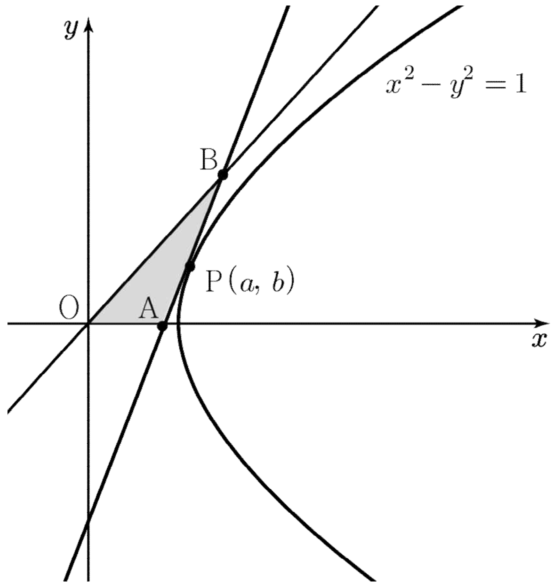
04 이차곡선과접선

04 접선의 활용

06 활용6 (미적분 관련)

[출처] 2006 모의_공공 사관학교 고3 07월 17

54. 그림과 같이 쌍곡선 $x^2-y^2=1$ 위의 점 P$(a,\ b)\,(a>1,\ b>0)$에서의 접선이 $x$축과 만나는 점을 A, 쌍곡선의 점근선 중 기울기가 양수인 직선과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 $S(a)$라 할 때, $\lim_{a\to\infty}S(a)$의 값은? (단, O는 원점이다.)




① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$

④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 04월 21

55. 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 는

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (-2 \le x \le 0) \\ -x+2 & (0 < x \le 2) \end{cases}$$

이다. 좌표평면에서 $k>1$ 인 실수 $k$에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 타원 $\dfrac{x^2}{k^2}+y^2=1$ 이 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(k)$ 라 하자. 함수 $g(k)$ 가 불연속이 되는 모든 $k$ 의 값들의 제곱의 합은?

① 6　② $\dfrac{25}{4}$　③ $\dfrac{13}{2}$　④ $\dfrac{27}{4}$　⑤ 7

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 06월 19

56. 0이 아닌 실수 $p$에 대하여 좌표평면 위의 두 포물선 $x^2=2y$ 와 $\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=4px$ 에 동시에 접하는 직선의 개수를 $f(p)$ 라 하자. $\lim\limits_{p \to k+} f(p) > f(k)$ 를 만족시키는 실수 $k$ 의 값은?

① $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　② $-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$　③ $-\dfrac{\sqrt{3}}{9}$　④ $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

[준킬러][기하] 1이차곡선(빠른 정답)

준킬러기하 2023.01.07

1. [정답] 6
2. [정답] ⑤
3. [정답] ③
4. [정답] ③
5. [정답] ⑤

6. [정답] 80
7. [정답] 23
8. [정답] ①
9. [정답] 5
10. [정답] ④

11. [정답] ③
12. [정답] ③
13. [정답] 104
14. [정답] 8
15. [정답] ③

16. [정답] 63
17. [정답] ④
18. [정답] 29
19. [정답] 15
20. [정답] 66

21. [정답] 180
22. [정답] 14
23. [정답] ⑤
24. [정답] ⑤
25. [정답] ①

26. [정답] ⑤
27. [정답] 32
28. [정답] 12
29. [정답] ②
30. [정답] 128

31. [정답] ③
32. [정답] 116
33. [정답] 18
34. [정답] 12
35. [정답] ④

36. [정답] ③
37. [정답] 54
38. [정답] ⑤
39. [정답] ②
40. [정답] ③

41. [정답] 54
42. [정답] 21
43. [정답] 32
44. [정답] ⑤
45. [정답] ④

46. [정답] ①
47. [정답] ③
48. [정답] 13
49. [정답] ①
50. [정답] ⑤

51. [정답] ④
52. [정답] 14
53. [정답] ⑤
54. [정답] ①
55. [정답] ⑤

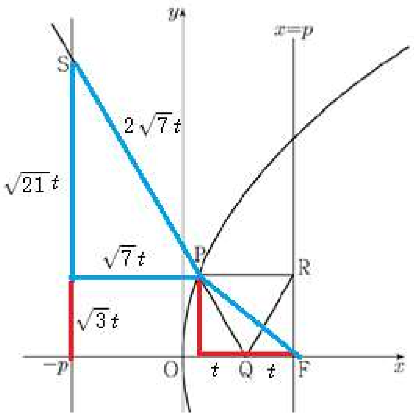
56. [정답] ③

## [준킬러][기하] 1이차곡선(해설)

준킬러기하 2023.01.07

1) [정답] 6

[해설]

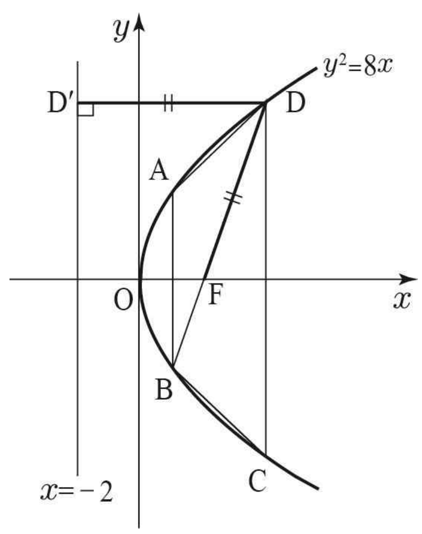



그림에서 $\sqrt{21}t+\sqrt{3}t=\sqrt{21}$ 이므로

$t=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+1}=\dfrac{7-\sqrt{7}}{6}$, $\therefore a+b=6$

2) [정답] ⑤

[해설]




포물선 $y^2=8x$ 의 초점 F의 좌표는 $(2, 0)$

점 D에서 포물선의 준선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 D′이라 하면 $\overline{DD'}=\overline{FD}=6$이므로 점 D의 $x$좌표는 4이고 점 D의 좌표는 $(4, 4\sqrt{2})$

점 B의 좌표를 $(a, b)$라 하면

직선 BF의 기울기와 직선 FD의 기울기가 같으므로

$\dfrac{-b}{2-a}=\dfrac{4\sqrt{2}}{2}$, $b=2\sqrt{2}a-4\sqrt{2}$

$b^2=8a$, $a^2-5a+4=0$

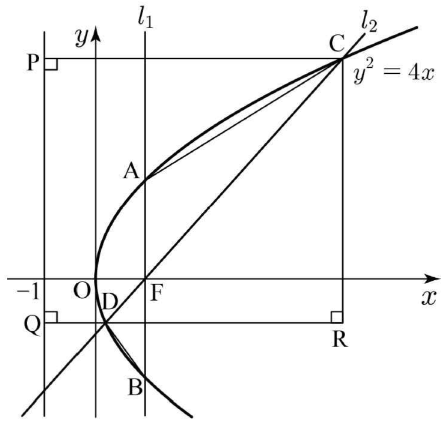
$a<2$ 이므로 $a=1$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(8\sqrt{2}+4\sqrt{2})\times3=18\sqrt{2}$

3) [정답] ③

[해설]




$\angle AFC=\angle DFB$이고 $\overline{FA}=\overline{FB}$이다.

삼각형 FCA의 넓이가 삼각형 FDB의 넓이의 5배이므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{FA}\times\overline{FC}\times\sin(\angle AFC)$$

$$=5\times\frac{1}{2}\times\overline{FB}\times\overline{FD}\times\sin(\angle DFB)$$

$$\overline{FC}=5\overline{FD}$$

두 점 C, D에서 이 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하고, 점 C를 지나고 $x$축에 수직인 직선과 직선 QD가 만나는 점을 R라 하자.

$\overline{FD}=s$라 하면 $\overline{QD}=\overline{FD}=s$, $\overline{PC}=\overline{FC}=5s$

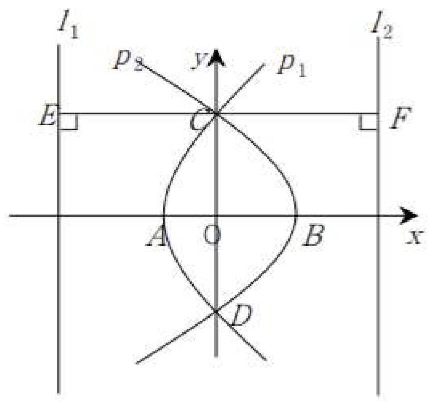
$\overline{DR}=\overline{QR}-\overline{QD}=4s$, $\overline{CD}=6s$에서

$$\overline{CR}=2\sqrt{5}s$$

따라서 $m=\dfrac{\overline{CR}}{\overline{DR}}=\dfrac{2\sqrt{5}s}{4s}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

4) [정답] ③

[해설]




위의 그림과 같이 포물선 $p_1$의 준선을 $l_1$, 포물선 $p_2$의 준선을 $l_2$, $\overline{\mathrm{OB}}=x\,(x>0)$라 두자.

점 C에서 준선 $l_1$, $l_2$에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하면 포물선의 정의에 의해

$\overline{\mathrm{CF}}=\overline{\mathrm{CO}}$, $\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{CB}}$ …… ㉠

이고, 점 A에서 준선 $l_1$에 이르는 거리는 2, 점 B에서 준선 $l_2$에 이르는 거리는 $x$이다.

㉠에서 $\overline{\mathrm{CO}}=2x$, $\overline{\mathrm{CB}}=2+(2-x)=4-x$

이고, 삼각형 COB는 직각삼각형이므로

$(4-x)^2=(2x)^2+x^2$, $x^2+2x-4=0$

$\therefore\ x=\sqrt{5}-1\,(\because\ x>0)$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CO}}\times\frac{1}{2}=2\times2(\sqrt{5}-1)\times\frac{1}{2}$

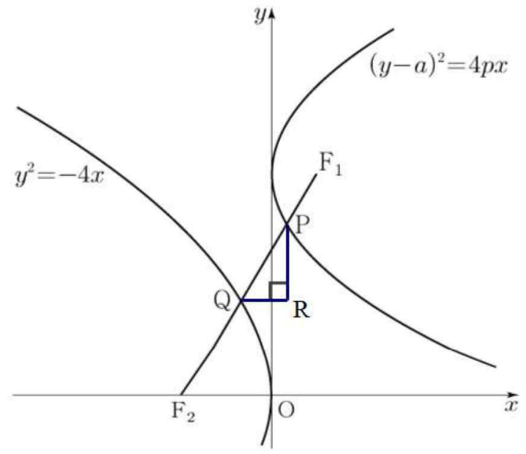
$=2(\sqrt{5}-1)$

5) [정답] ⑤

[해설]
두 점 $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{F_2}$의 좌표가 각각 $\mathrm{F_1}(p,\ a)$, $\mathrm{F_2}(-1,\ 0)$이고, $\overline{\mathrm{F_1F_2}}=3$이므로

$(p+1)^2+a^2=9$ …… ㉠

그림과 같이 점 P를 지나고 $x$축에 수직인 직선과 점 Q를 지나고 $y$축에 수직인 직선이 만나는 점을 R라 하자.




직선 PQ의 기울기는 직선 $\mathrm{F_1F_2}$의 기울기와 같은 $\frac{a}{p+1}$이므로 직각삼각형 PQR에서 양수 $t$에 대하여

$\overline{\mathrm{PR}}=at$, $\overline{\mathrm{QR}}=(p+1)t$로 놓을 수 있다.

이때 $\overline{\mathrm{PQ}}=1$이므로 $a^2t^2+(p+1)^2t^2=1$에서

$t^2=\frac{1}{a^2+(p+1)^2}=\frac{1}{9}$

즉, $t=\frac{1}{3}$

한편, 두 점 P, Q의 $x$좌표를 각각 $x_1$, $x_2$라 하면

$\overline{\mathrm{PF_1}}=p+x_1$, $\overline{\mathrm{QF_2}}=1-x_2$, $\overline{\mathrm{PF_1}}+\overline{\mathrm{QF_2}}=2$이고

$x_1-x_2=(p+1)t=\frac{1}{3}(p+1)$이므로

$(p+x_1)+(1-x_2)=2$에서

$p=1-(x_1-x_2)$

$=1-\frac{1}{3}(p+1)$

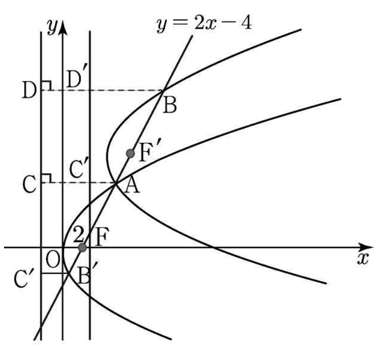
즉, $p=\frac{1}{2}$

㉠에서 $\left(\frac{1}{2}+1\right)^2+a^2=9$이므로 $a^2=\frac{27}{4}$

따라서 $a^2+p^2=\frac{27}{4}+\frac{1}{4}=7$

6) [정답] 80

[해설]




$y^2=8x$와 $y=2x-4$의 교점을 A와 B′이고,

$y^2=8x$와 $y=2x-4$을 연립하여 풀면

$(2x-4)^2=8x,\ 4x^2-24x+16=0$

$x^2-6x+4=0$

이차방정식의 두 근을 $x_1,\ x_2$라 하면 $x=3\pm\sqrt{5}$

따라서 B′의 $x$좌표는 $3-\sqrt{5}$, A의 $x$ 좌표는 $3+\sqrt{5}$

그런데, 포물선 $y^2=8x$이 $x$축으로 $a$만큼 $y$축으로 $2a$만큼 평행이동한 포물선은 $(y-2a)^2=8(x-a)$이고, 각각의 초점이 F$(2,\ 0)$, F′$(2+\mathrm{a},\ 2\mathrm{a})$가 $y=2x-4$위에 있으므로 점 B′가 $x$축으로 $a$만큼 이동한 점이 A가 된다.

따라서 $a=(3+\sqrt{5})-(3-\sqrt{5})=2\sqrt{5}$ …… ㉠

또, 포물선 정의에 의해서 $\overline{AC'}=\overline{AF'}$, $\overline{BD'}=\overline{BF'}$

그리고, $\overline{DD'}=\overline{CC'}=a$이므로

$\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}$

$=\overline{AC'}+\overline{CC'}+\overline{BD'}+\overline{DD'}-\overline{AB}$

$=\overline{AB}+\overline{CC'}+\overline{DD'}-\overline{AB}$

$=\overline{CC'}+\overline{DD'}$

$=2a$

㉠을 대입하면 $\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}=4\sqrt{5}$이므로 $k=4\sqrt{5}$

$\therefore\ k^2=80$

7) [정답] 23

[해설]

포물선 $y^2=8x$의 초점은 F$(2,0)$이고 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

점 P의 $x$좌표를 $a(0<a<2)$라 하면

P$(a,\ 2\sqrt{2a})$

F′$(-2,\ 2\sqrt{2a})$

포물선의 성질에 의해

$\overline{PF}=\overline{PF'}=2+a$

한편, 점 F′을 초점, 점 P를 꼭짓점으로 하는 포물선의 방정식은

$(y-2\sqrt{2a})^2=-4(2+a)(x-a)$

이 포물선의 준선의 방정식은 $x=2a+2$

점 Q에서 두 직선 $x=-2,\ x=2a+2$에 내린 수선의 발을 각각 R, S라 하면

포물선의 성질에 의해

$\overline{QF}=\overline{QR}$

$\overline{QF'}=\overline{QS}$

이므로

$\overline{QF^2}+\overline{QF'}=\overline{QR}+\overline{QS}=\overline{RS}=2a+4$

사각형 PF′QF의 둘레의 길이가 12이므로

$\overline{PF}+\overline{PF'}+\overline{QF}+\overline{QF'}=12$에서

$2\overline{PF'}+\overline{RS}=12$

$2(2+a)+(2a+4)=12$

$4a=4$

$a=1$

이때, P의 좌표는 $(1,\ 2\sqrt{2})$이고

점 F′을 초점, 점 P를 꼭짓점으로 하는 포물선의 방정식은

$(y-2\sqrt{2})^2=-12(x-1)$

이다.

두 포물선

$y^2=8x$……㉠

$(y-2\sqrt{2})^2=-12(x-1)$……㉡

이 만나는 점 Q의 $y$좌표를 구해 보자.

㉠에서

$x=\dfrac{y^2}{8}$

$x=\dfrac{y^2}{8}$을 ㉡에 대입하면

$(y-2\sqrt{2})^2=-12\left(\dfrac{y^2}{8}-1\right)$

$5y^2-8\sqrt{2}y-8=0$

$(y-2\sqrt{2})(5y+2\sqrt{2})=0$

$y=2\sqrt{2}$ 또는 $y=-\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$

점 Q의 $y$좌표는 $-\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$이다.

점 Q에서 선분 PF′에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PF'}=2-(-1)=3$

$\overline{QH}=2\sqrt{2}-\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{5}\right)=\dfrac{12}{5}\sqrt{2}$

삼각형 PF′Q의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{PF'}\times\overline{QH}$

$=\dfrac{1}{2}\times3\times\dfrac{12}{5}\sqrt{2}$

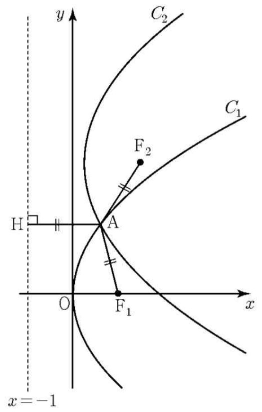
$=\dfrac{18}{5}\sqrt{2}$

따라서 $p=5,\ q=18$이므로

$p+q=5+18=23$

8) [정답] ①

[해설]




A에서 포물선 $C_1$의 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AF_1}=\overline{AH}=\overline{AF_2}$에서 포물선 $C_2$의 준선이 포물선 $C_1$의 준선과 같다.

즉, $C_2$의 준선 $x=-p+f(p)$이 $x=-1$이므로

$-p+f(p)=-1$이다.

$(p+a)^2-p+1=0$

$p^2+(2a-1)p+a^2+1=0$

이 식을 만족하는 $p$가 오직 하나이므로 판별식 $D=0$이다.

따라서, $D=(2a-1)^2-4a^2-4=0$에서 $a=-\dfrac{3}{4}$이다.

9) [정답] 5

[해설]

포물선 $C_1$ : $x^2=4y$위의 점 A를 중심으로 하고 초점 $F_1$을 지나는 원의 반지름의 길이는 선분 $AF_1$의 길이와 같고, 점 A와 포물선 $C_1$의 준선 $y=-1$ 사이의 거리도 이 원의 반지름의 길이와 같으므로 이 원은 포물선 $C_1$의 준선 $y=-1$에 접한다.

그러므로 이 원은 $y\geq-1$인 영역에 존재한다.

포물선 $C_2$ : $y^2=8x$위의 점 B를 중심으로 하고 초점 $F_2$를 지나는 원의 반지름의 길이는 선분 $BF_2$의 길이와 같고, 점 B와 포물선 $C_2$의 준선 $x=-2$사이의 거리도 이 원의 반지름의 길이와 같으므로 이 원은 포물선 $C_2$의 준선 $x=-2$에 접한다.

그러므로 이 원은 $x\geq-2$인 영역에 존재한다.

두 원의 교점 P의 좌표를 $P(x,\ y)$로 놓으면

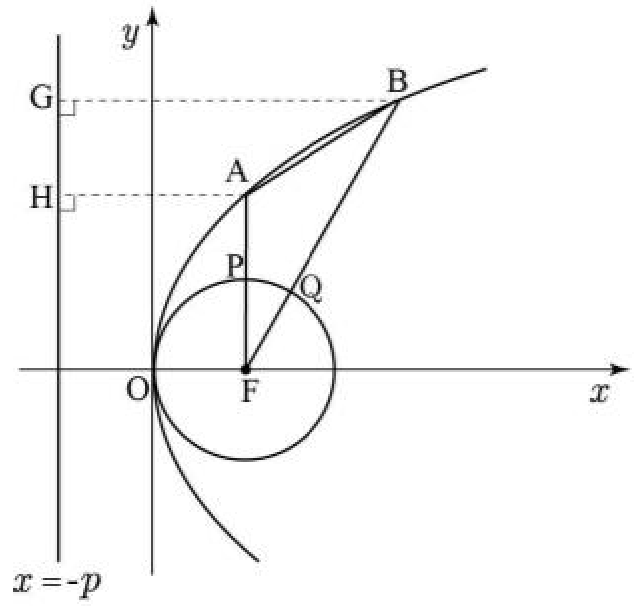
$x\geq-2,\ y\geq-1$이고, 점 P는 제 3사분면에 있는 점이므로

$x<0,\ y<0$이다.

따라서 점 P의 좌표가 $P(-2,\ -1)$일 때, $\overline{OP}^2$의 값이 최대가 되므로 $\overline{OP}^2$의 최댓값은 $(-2)^2+(-1)^2=5$이다.

10) [정답] ④

[해설]




원의 반지름의 길이가 $\overline{FP}=p$이므로 $\overline{AP}=p$

$\overline{AF}=\overline{AH}$이므로 점 A의 $x$좌표는 $p$이다.

$\overline{FQ}=p$이므로 $\overline{BQ}=\dfrac{5}{2}p$

$\overline{BF}=\overline{BG}$이므로 점 B의 $x$좌표는 $\dfrac{5}{2}p$이다.

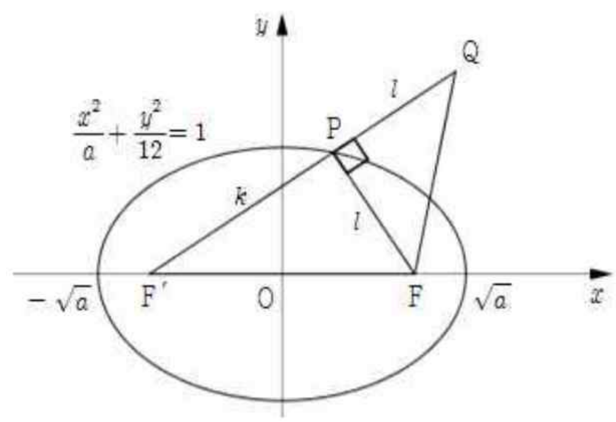
삼각형 AFB의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times2p\times\left(\dfrac{5}{2}p-p\right)=24$

따라서 $p=4$이다.

11) [정답] ③

[해설]

아래 그림과 같이 놓으면




$k+l=10=2\sqrt{a}$이므로 $a=25$

초점 거리를 $2c$라 하면

$k^2+l^2=4c^2=4(a-12)=52$

$2kl=(k+l)^2-(k^2+l^2)=100-52=48$

P가 제1사분면의 점이므로 $k>l$이다.

이제 $k$, $l$을 근으로 하는 이차방정식은

$x^2-10x+24=0$, $(x-6)(x-4)=0$

따라서 $k=6$, $l=4$이고 구하려는 넓이는

$\frac{1}{2}kl+\frac{1}{2}l^2=12+8=20$

12) [정답] ③

[해설]

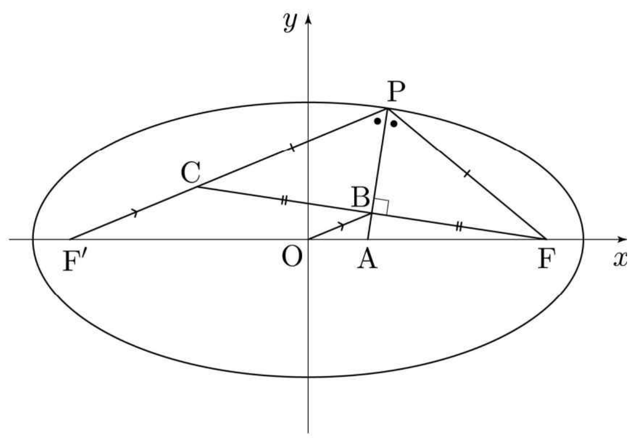
$\overline{AF}=\frac{9}{2}$, $\overline{AF'}=\frac{15}{2}$이므로 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{PF}:\overline{PF'}=3:5$

$\overline{PF}=3k$, $\overline{PF'}=5k(k>0)$이라 하자.

타원의 정의에 의하여 $\overline{PF}+\overline{PF'}=8k=2a$

그러므로 $a=4k$




직선 BF와 선분 PF′이 만나는 점을 C라 하면 각 CPF의 이등분선이 선분 CF와 수직으로 만나므로 삼각형 PCF는 이등변삼각형이다. 그러므로 $\overline{BC}=\overline{BF}$ 두 삼각형 FBO와 FCF′에서 $\overline{FB}:\overline{FC}=\overline{FO}:\overline{FF'}=1:2$ 두 삼각형 FBO, FCF′은 서로 닮음이므로

$\overline{OB}:\overline{F'C}=1:2\overline{F'C}=\overline{PF'}-\overline{PC'}=\overline{PF'}-\overline{PF}=5k-3k=2k$

$\overline{F'C}=2\overline{OB}=2\sqrt{3}$

$k=\sqrt{3}$, $a=4\sqrt{3}$

$c^2=a^2-b^2$이므로 $36=48-b^2$

$b^2=12$, $b=2\sqrt{3}$

따라서 $a\times b=24$

13) [정답] 104

[해설]

$\overline{PR}:\overline{RF}=1:3$이므로 $\overline{PR}=3$

$\therefore\ \overline{PF}=\overline{PR}+\overline{RF}=3+9=12$

직각삼각형 PQR에서

$\overline{PQ}=\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=2$

$\therefore\ \overline{PF'}=2\overline{PQ}=2\times2=4$

타원의 정의에 의하여 $\overline{PF}+\overline{PF'}=2a$이므로

$12+4=2a \therefore a=8$

한편 $\angle QPR=\theta$라고 하면 직각삼각형 PQR에서

$\cos\theta=\frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}}=\frac{2}{3}$

삼각형 PF′F에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{F'F}^2=\overline{PF'}^2+\overline{PF}^2-2\overline{PF'}\cdot\overline{PF}\cos\theta$

$(2c)^2=4^2+12^2-2\cdot4\cdot12\cdot\frac{2}{3}$

$4c^2=96 \quad \therefore\ c^2=24$

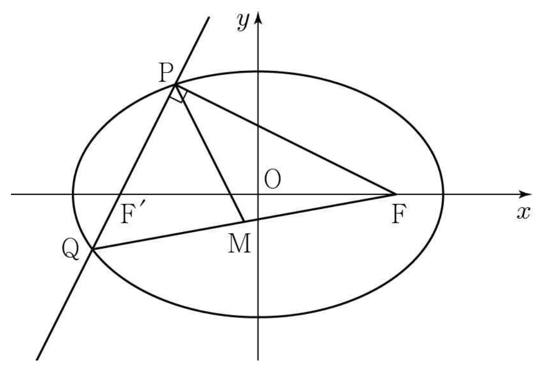
따라서 $b^2=8^2-24=40$이므로

$a^2+b^2=64+40=104$

14) [정답] 8

[해설]

$\overline{QM}=\overline{FM}=\overline{PM}=5$이므로 세 점 P, Q, F는 중심이 M이고 반지름의 길이가 5인 원 위의 점이다.




삼각형 PQF는 직각삼각형이므로 $6^2+\overline{PF}^2=10^2$

$\overline{PF}=8$

$\overline{PF}+\overline{PF'}=2a$, $\overline{QF}+\overline{QF'}=2a$이므로

$\overline{PF}+\overline{PF'}+\overline{QF}+\overline{QF'}=\overline{PF}+\overline{PQ}+\overline{QF}=24=4a$

$a=6$

$\overline{PF}+\overline{PF'}=12$이므로 $\overline{PF'}=4$

삼각형 PF′F는 직각삼각형이므로

$4^2+8^2=\overline{FF'}^2$

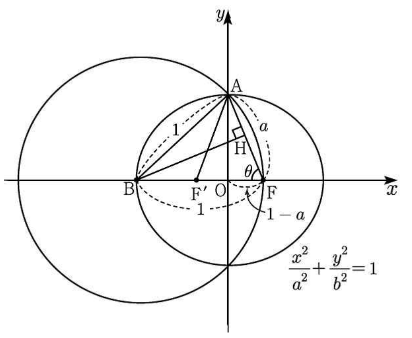
$\overline{FF'}=4\sqrt{5}$ 이므로 $c=2\sqrt{5}$

$c^2=a^2-b^2$ 이므로 $b^2=16$, $b=4$

따라서 이 타원의 단축의 길이는 8

15) [정답] ③

[해설]




두 초점 F, F′의 중점을 O라 하고 점 O를 타원의 중심으로 하고 두 초점이 $x$축 위에 놓여있는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이라 하자.

위의 그림과 같이 $y$축 위에 있는 타원의 한 꼭짓점을 A, $x$축 위에 있는 타원의 한 꼭짓점을 B, 점 B에서 선분 AF에 내린 수선의 발을 H라 하자.

타원의 정의에 의해 거리의 합이 $2a$이므로 $\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AF'}}=2a$

그런데, $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AF'}}$이므로 $\overline{\mathrm{AF}}=a$

또, △ABF는 이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{HF}}=\frac{2}{a}$

$\angle\mathrm{AFO}=\theta$라 하면 △BHF와 △AOF에서

$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{FH}}}=\frac{\overline{\mathrm{OF}}}{\overline{\mathrm{AF}}}$이므로 $\frac{\frac{a}{2}}{1}=\frac{1-a}{a}$

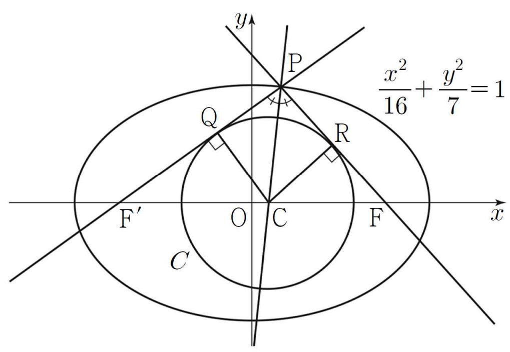
즉, $\frac{a}{2}=\frac{1-a}{a}$에서 $a^2=2-2a$

$\therefore a^2+2a-2=0$

$\therefore\ a=\sqrt{3}-1(\because\ a>0)$

16) [정답] 63

[해설]




$c^2=16-7=9,\ c=3$

$\overline{\mathrm{FF'}}=2c=6$

직선 FP가 원 $C$와 접하는 점을 R라 하고

$\overline{\mathrm{PQ}}=a$라 하면

$\overline{\mathrm{PF}}=2\overline{\mathrm{PQ}}=2a$이므로 $\overline{\mathrm{RF}}=\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PQ}}=a$

$\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{RF}}$이고, $\angle\mathrm{PRC}=90°$이므로

삼각형 PCR, FCR가 서로 합동이다.

$\overline{\mathrm{CP}}=l$이라 하면 $\overline{\mathrm{CP}}=\overline{\mathrm{FC}}$에서 $\overline{\mathrm{F'C}}=6-l$

$\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QF'}}$이고

$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=8$이므로 $\overline{\mathrm{QF'}}=8-3a$

점 P가 제1사분면 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}>\overline{\mathrm{PF}}$에서 $a<2$ …… ㉠

삼각형 FPF′에서 $\angle\mathrm{F'PC}=\angle\mathrm{CPF}$이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}:\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{F'C}}:\overline{\mathrm{CF}}$

$(8-2a):2a=(6-l):l$에서 $l=\frac{3}{2}a$ …… ㉡

점 Q는 점 C에서 선분 PF′에 내린 수선의 발이므로

$\overline{\mathrm{F'C}}^2-\overline{\mathrm{F'Q}}^2=\overline{\mathrm{CP}}^2-\overline{\mathrm{PQ}}^2$

$(6-l)^2-(8-3a)^2=l^2-a^2$ …… ㉢

㉡, ㉢에 의해 $4a^2-15a+14=0$

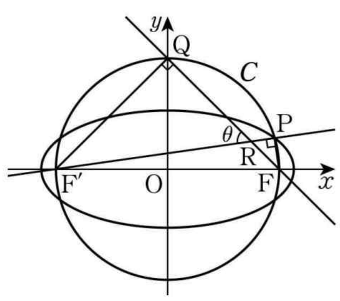
$(a-2)(4a-7)=0$에서 $a=2$ 또는 $a=\frac{7}{4}$

㉠에 의해 $a=\frac{7}{4},\ l=\frac{21}{8}$

따라서 $24\times\overline{\mathrm{CP}}=63$

17) [정답] ④

[해설]




두 직선 F′P, QF의 교점을 R라 하면 두 직각삼각형 QF′R, PFR가 서로 닮음이고

$\cos(\angle \mathrm{QRF}') = \cos(\angle \mathrm{PRF}) = \cos\theta = \dfrac{3}{5}$

$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \dfrac{4}{5}$

$\overline{\mathrm{QR}} = 3t\,(t>0)$이라 할 때

$\overline{\mathrm{RF}'} = \dfrac{\overline{\mathrm{QR}}}{\cos\theta} = 5t,$

$\overline{\mathrm{QF}} = \overline{\mathrm{QF}'} = \overline{\mathrm{RF}'}\sin\theta = 4t,$

$\overline{\mathrm{RF}} = \overline{\mathrm{QF}} - \overline{\mathrm{QR}} = 4t - 3t = t,$

$\overline{\mathrm{RP}} = \overline{\mathrm{RF}}\cos\theta = \dfrac{3}{5}t$

$\overline{\mathrm{PF}} = \overline{\mathrm{RF}}\sin\theta = \dfrac{4}{5}t$

점 P는 타원 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{PF}'} + \overline{\mathrm{PF}} = \overline{\mathrm{RF}'} + \overline{\mathrm{RP}} + \overline{\mathrm{PF}}$

$= 5t + \dfrac{3}{5}t + \dfrac{4}{5}t$

$= \dfrac{32}{5}t$

$2a = \dfrac{32}{5}t$에서 $a = \dfrac{16}{5}t$

점 F의 좌표를 $(c,\,0)(c>0)$이라 할 때

$\overline{\mathrm{FF}'} = \sqrt{2} \times \overline{\mathrm{QF}}$에서 $c = 2\sqrt{2}\,t$

$b^2 = a^2 - c^2 = \dfrac{256}{25}t^2 - 8t^2 = \dfrac{56}{25}t^2$

따라서 $\dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{\dfrac{56}{25}t^2}{\dfrac{256}{25}t^2} = \dfrac{7}{32}$

18) [정답] **29**

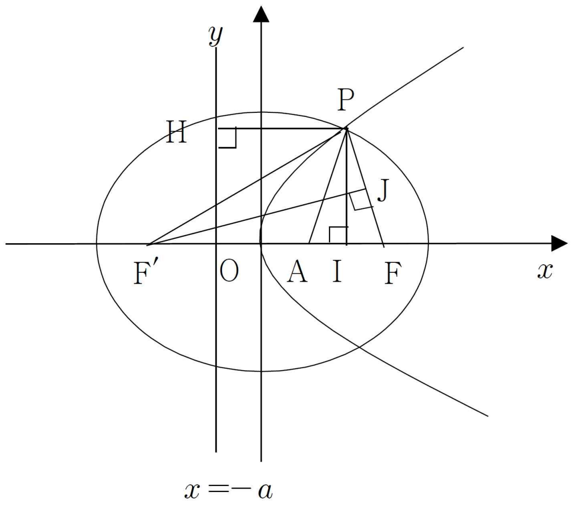
[해설]

$\overline{\mathrm{AF}} = 2$, $\mathrm{A}(a,\ 0)$이고 삼각형 PAF가 $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PF}}$인 이등변삼각형이므로 점 P의 $x$좌표는 $a+1$이다.

한편, 점 P에서 포물선의 준선 $x=-a$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PH}} = (a+1)-(-a) = 2a+1$

이때, 이등변삼각형 PAF의 꼭짓점 P에서 $x$축에 내린 수선의 발을 I라 하고 $\angle \mathrm{PFI} = \alpha$라 하면

$$\cos\alpha = \frac{\overline{\mathrm{IF}}}{\overline{\mathrm{PF}}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AF}}}{\overline{\mathrm{PF}}} = \frac{1}{2a+1} \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$




또, 이등변삼각형 PF′F의 꼭짓점 F′에서 변 FP에 내린 수선의 발을 J라 하면 $\mathrm{F}(a+2,\ 0)$이므로

$$\cos\alpha = \frac{\overline{\mathrm{FJ}}}{\overline{\mathrm{FF}'}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PF}}}{\overline{\mathrm{FF}'}} = \frac{a+\frac{1}{2}}{2a+4} = \frac{2a+1}{4a+8} \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$\dfrac{1}{2a+1} = \dfrac{2a+1}{4a+8}$, $\quad (2a+1)^2 = 4a+8$

$4a^2 + 4a + 1 = 4a + 8, \quad a = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$

따라서 타원의 장축의 길이는

$\overline{\mathrm{PF}'} + \overline{\mathrm{PF}} = \overline{\mathrm{FF}'} + \overline{\mathrm{PF}}$

$= (2a+4) + (2a+1)$

$= 4a + 5$

$= 4 \times \dfrac{\sqrt{7}}{2} + 5$

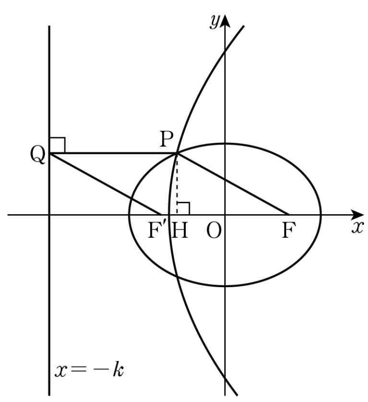
$= 5 + 2\sqrt{7}$

이므로

$p^2 + q^2 = 5^2 + 2^2 = 29$

19) [정답] 15

[해설]



점 F가 포물선의 초점이므로 포물선의 정의에 의하여

$\overline{FP}=\overline{PQ}$이다.

조건 (나)의 $\overline{FP}-\overline{F'Q}=\overline{PQ}-\overline{FF'}$에서

$\overline{F'Q}=\overline{FF'}$

두 직선 FF′, PQ가 서로 평행하므로

두 삼각형 PQF, F′FQ에서

$\angle PQF=\angle F'FQ$

두 삼각형 PQF, F′FQ는 모두 이등변삼각형이므로

$\angle QFP=\angle PQF=\angle F'FQ=\angle F'QF$

이고, 선분 FQ는 공통이므로

두 삼각형 PQF, F′FQ는 서로 합동이다.

즉 $\overline{FP}=\overline{PQ}=\overline{F'Q}=\overline{FF'}$

장축의 길이가 12 이고 $\overline{FP}=\overline{FF'}=2c$이므로

$\overline{PF'}=12-2c$

삼각형 PFF′에서 코사인법칙에 의하여

$(12-2c)^2=(2c)^2+(2c)^2-2\times(2c)^2\times\cos(\angle F'FP)$

$c^2-16c+48=0$

$(c-4)(c-12)=0$

장축의 길이가 12이므로 $c<6$에서 $c=4$

점 P에서 $x$축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{FP}=8$에서

$\overline{FH}=\overline{FP}\times\cos(\angle F'FP)=7$

$\overline{FH}=7$에서 점 H의 $x$좌표는 $4-7=-3$이고

$\overline{PQ}=\overline{FP}=8$에서 점 H의 $x$좌표는 $-k+8$이므로

$-3=-k+8$, 즉 $k=11$

따라서 $c+k=15$

20) [정답] **66**

[해설]

$y^2=16x$의 초점 F$(4,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-4$이다. 점 A$(-2,\ 0)$을 지나고 초점이 선분 AF 위에 있으므로 점 A는 꼭짓점이다. 타원과 포물선의 교점 B에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{BH}=\overline{BF}$이다.

그러므로 점 B의 $x$좌표는 $-4+\dfrac{21}{5}=\dfrac{1}{5}$이다.

그러므로 점 B$\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)$

중심의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면 F$(4,\ 0)$이고 중심에서 거리가 $4-a$이므로 F′$(2a-4,\ 0)$, $\overline{BF'}+\overline{BF}$가 장축의 길이이므로 장축의 길이는 $(a+2)\times2$이다.

$$\therefore \overline{BF'}=2a+4-\frac{21}{5}=2a-\frac{1}{5}$$

$$\sqrt{\left(2a-4-\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2}=2a-\frac{1}{5}$$

$$\left(2a-\frac{21}{5}\right)^2+\frac{16}{5}=4a^2-\frac{4}{5}a+\frac{1}{25}$$

$$4a^2-\frac{84}{5}a+\frac{441}{25}+\frac{80}{25}=4a^2-\frac{4}{5}a+\frac{1}{25}$$

$$\frac{520}{25}=16a \qquad \therefore\ a=\frac{13}{10}$$

$$\therefore\ 10k=20a+40=26+40=66$$

21) [정답] **180**

[해설]

원점에서 $\overline{PF'}$에 내린 수선의 발을 I′이라 하면

F′O : F′F = 1 : 2이므로 $\triangle$F′OI′과 $\triangle$F′FP는 1 : 2 닮음

$\therefore\ \overline{F'I'}=\overline{I'P}$

때문에 I′은 I의 대칭점 P는 Q의 대칭점이라 할 수 있다

$\therefore\ OI'=OI$

$\overline{PF}=$a라 하면 $\overline{OI'}=\dfrac{a}{2}$, $\overline{PF'}=$b라 하면 $\overline{OI'}=\overline{OH}=\dfrac{b}{2}$

$\dfrac{a}{2}\times\dfrac{b}{2}=10$에서 $ab=40$

닮음조건에서 $\angle F'PF=\angle OHF=\dfrac{\pi}{2}$

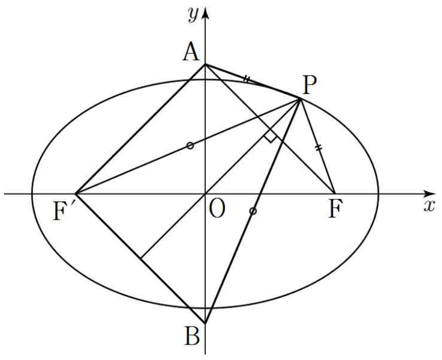
피타고라스정리에 의해 $a^2+b^2=100$

장축의 길이는 $a+b$이므로

$l^2=(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=180$

22) [정답] **14**

[해설]




$\triangle$AFP, $\triangle$PF′B는 이등변 삼각형이고, $y=x$에 대칭이므로

$\overline{AP}=\overline{PF}$, $\overline{PF'}=\overline{PB}$

또, 삼각형 AF′O와 삼각형 OBF′는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{AF'}=\overline{F'B}=3\sqrt{2}$

따라서 사각형 AF′BP의 둘레의 길이는

$\overline{AF'}+\overline{F'B}+\overline{PB}+\overline{PA}$

$=3\sqrt{2}+3\sqrt{2}+\overline{PF'}+\overline{PF}$

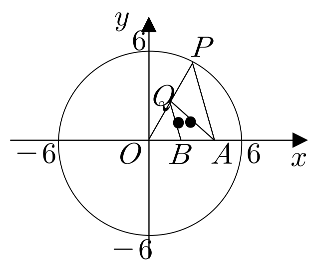
$=6\sqrt{2}+8$ ($\because$ 타원의 정의에 의해)

$\therefore\ a+b=14$

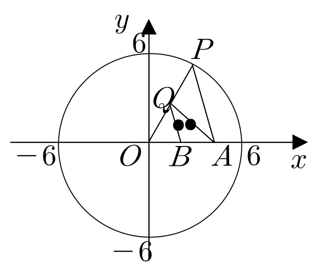
23) [정답] ⑤

[해설]

$\overline{AP}\,//\,\overline{BQ}$ 이므로




$\angle AQB=\angle QAP$




$\angle OQB=\angle QPA$

따라서 $\angle QAP=\angle QPA$ 이므로

삼각형QAP는 $\overline{QA}=\overline{QP}$ 인 이등변삼각형이고,

$\overline{OQ}+\overline{QB}=\overline{OQ}+\overline{QP}=\overline{OP}=6$

따라서, 점Q는 두 점O,Q에 이르는 거리의 합이 6으로 일정하다. 점Q의 좌표를 $(x,y)$라 하면

$\overline{OQ}+\overline{QA}=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+y^2}=6$

$\sqrt{(x-4)^2+y^2}=6-\sqrt{x^2+y^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-8x+16+y^2=36-12\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2$

$3\sqrt{x^2+y^2}=2x+5$

양변을 제곱하면

$9x^2+9y^2=4x^2+20x+25$, $5(x-2)^2+9y^2=45$

따라서, 점 Q 의 차줘는

$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ (단, $y\neq 0$)이므로

$X\subset\left\{(x,y)\middle|\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1\right\}$

24) [정답] ⑤

[해설]

$(1,\ \sqrt{3})+\left(\frac{1}{2}(\sin\theta+\cos\theta),\ \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin\theta-\cos\theta)\right)$

$X=\frac{1}{2}(\sin\theta+\cos\theta)$, $Y=\frac{\sqrt{3}}{2}(\sin\theta-\cos\theta)$라 하면

$3X^2+Y^2=\frac{3}{4}(2\sin^2\theta+2\cos^2\theta)=\frac{3}{2}$

$\therefore\ \frac{X^2}{\frac{1}{2}}+\frac{Y^2}{\frac{3}{2}}=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

따라서 $(X,\ Y)$는 타원위에 존재한다.

ㄱ. 중점 M은 ㉠을 $x$축 방향으로 1만큼 $y$축 방향으로 $\sqrt{3}$만큼 평행이동시킨 것이므로 중점 M이 그리는 도형은 타원이다. (참)

ㄴ. ㄱ에서 점 C(1, 0)은 장축의 연장선 위에 존재하므로 점 C와 D는 타원의 장축의 양 끝점이다.

$\therefore\ \overline{CD}=\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\overline{CE}=\sqrt{3}-\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\therefore\ \overline{CD}+\overline{CE}=2\sqrt{3}$

ㄷ. $\angle DOC=\theta_1$, $\angle EOC=\theta_2$라 하면 $\overline{OC}=1$이므로

$\tan\theta_1=\overline{CD}=\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\tan\theta_2=\overline{CE}=\sqrt{3}-\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\alpha=\theta_1-\theta_2$이므로

$$\tan\alpha=\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{2\sqrt{\frac{3}{2}}}{1+\left(3-\frac{3}{2}\right)}$$

$$=\frac{2}{5}\sqrt{6}$$

25) [정답] ①

[해설]

$\overline{BC}=\overline{BF}=a$이므로 $\quad C(0,\ a+b)$

$\angle CFB=\theta'$이라고 하면 $\quad \angle BCF=\theta'$

삼각형 COF에서

$\tan\theta'=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}$

이므로 $\quad \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}=\dfrac{1}{4}$

$\dfrac{a^2-b^2}{(a+b)^2}=\dfrac{1}{16},\quad \dfrac{(a+b)(a-b)}{(a+b)^2}=\dfrac{1}{16}$

$\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{1}{16},\quad 16a-16b=a+b$

$\therefore b=\dfrac{15}{17}a$

$\tan(\theta+\theta')=\dfrac{\tan\theta+\tan\theta'}{1-\tan\theta\tan\theta'}$에서

$$\tan(\theta+\theta')=\frac{\tan\theta+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}\tan\theta}$$

$$=\frac{4\tan\theta+1}{4-\tan\theta}\quad\cdots\cdots ㉠$$

삼각형 COA에서

$$\tan(\theta+\theta')=\frac{a}{a+b}=\frac{a}{a+\frac{15}{17}a}$$

$$=\frac{17}{32}\quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\quad \dfrac{4\tan\theta+1}{4-\tan\theta}=\dfrac{17}{32}$

$145\tan\theta=36 \therefore \tan\theta=\dfrac{36}{145}$

26) [정답] ⑤

[해설]

쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$의 두 초점의 좌표는

$F(2,\ 0),\ F'(-2,\ 0)$이므로

$\quad \overline{FF'}=2-(-2)=4$

삼각형 $PF'F$에서 $\overline{PF'}>\overline{PF}$이므로 이 삼각형이 이등변삼각형인 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) $\overline{PF'}=\overline{FF'}$일 때

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'}-\overline{PF}=2$이고 $\overline{FF'}=4$이므로

$\quad \overline{PF}=\overline{PF'}-2=\overline{FF'}-2=4-2=2$

점 $F'$에서 선분 PF에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\quad \overline{FH}=\dfrac{\overline{PF}}{2}=\dfrac{2}{2}=1,$

$\quad \overline{F'H}=\sqrt{\overline{FF'}^2-\overline{FH}^2}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$

삼각형 $PF'F$의 넓이 $a$는

$\quad a=\dfrac{1}{2}\times\overline{PF}\times\overline{F'H}=\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{15}=\sqrt{15}$

(ⅱ) $\overline{PF}=\overline{FF'}$일 때

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'}-\overline{PF}=2$이고 $\overline{FF'}=4$이므로

$\quad \overline{PF'}=\overline{PF}+2=\overline{FF'}+2=4+2=6$

점 F에서 선분 $PF'$에 내린 수선의 발을 K라 하면

$\quad \overline{F'K}=\dfrac{\overline{PF'}}{2}=\dfrac{6}{2}=3,$

$\quad \overline{FK}=\sqrt{\overline{FF'}^2-\overline{F'K}^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

삼각형 $PF'F$의 넓이 $a$는

$\quad a=\dfrac{1}{2}\times\overline{PF'}\times\overline{FK}=\dfrac{1}{2}\times6\times\sqrt{7}=3\sqrt{7}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 $a$의 값의 곱은

$\quad \sqrt{15}\times3\sqrt{7}=3\sqrt{105}$

27) [정답] 32

[해설]

직선 QR가 $\angle FQP$를 이등분하므로 $\overline{PQ}:\overline{QF}=\overline{PR}:\overline{RF}$

이때 $4\overline{PR}=3\overline{RF}$이므로 $\overline{PQ}:\overline{QF}=3:4$

$\overline{PQ}=3k(k>0)$이라 하면 $\overline{QF}=4k$이고 $\angle PQF=90°$이므로

삼각형 PQF에서 $\overline{PF}=5k$

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'}-\overline{PF}=2$이므로

$\overline{\mathrm{PF}'}=5k+2$, $\overline{\mathrm{QF}'}=\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{PQ}}=(5k+2)-3k=2k+2$

$\mathrm{F}(\sqrt{17},\ 0)$, $\mathrm{F}'(-\sqrt{17},\ 0)$이므로 직각삼각형 $\mathrm{QF'F}$에서

$\overline{\mathrm{FF}'}^2=\overline{\mathrm{QF}}^2+\overline{\mathrm{QF}'}^2$, $(2\sqrt{17})^2=(4k)^2+(2k+2)^2$

$5k^2+2k-16=0$, $(5k-8)(k+2)=0$, $k=\dfrac{8}{5}\,(k>0)$

따라서 삼각형 $\mathrm{PF'F}$의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PF}'}\times\overline{\mathrm{QF}}=\dfrac{1}{2}\times 10\times\dfrac{32}{5}=32$

28) [정답] 12

[해설]

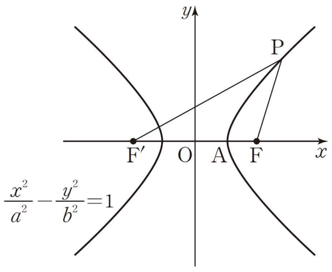
쌍곡선의 방정식을

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,\ b>0)$으로

놓으면 점근선의 방정식이

$y=\pm\dfrac{b}{a}x$이므로 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{3}$에서

$b=\dfrac{4}{3}a$




또 조건 (가)에서 $\overline{\mathrm{PF}'}>\overline{\mathrm{PF}}$이고 점 P가 쌍곡선 위의 점이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{PF}}=2a$

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PF}'}-2a=30-2a$

이때 $16\le\overline{\mathrm{PF}}\le 20$이므로 $16\le 30-2a\le 20$에서

$5\le a\le 7$

한편, $c^2=a^2+b^2=a^2+\left(\dfrac{4}{3}a\right)^2=\dfrac{25}{9}a^2$이므로 $\mathrm{F}\left(\dfrac{5}{3}a,\ 0\right)$이고,

$\mathrm{A}(a,\ 0)$이므로 $\overline{\mathrm{AF}}=\dfrac{5}{3}a-a=\dfrac{2}{3}a$

조건 (나)에서 선분 AF의 길이가 자연수이므로

$\dfrac{10}{3}\le\dfrac{2}{3}a\le\dfrac{14}{3}$에서

$\dfrac{2}{3}a=4$, $a=6$

따라서 구하는 쌍곡선의 주축의 길이는

$2a=2\times 6=12$

29) [정답] ②

[해설]

선분 $\mathrm{PP}'$의 중점을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PP}'}=5:6$에서

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PM}}=5:3$

삼각형 AMP에서 $\dfrac{\overline{\mathrm{AM}}}{\overline{\mathrm{PM}}}=\dfrac{4}{3}$이므로 직선 AF의 기울기는 $-\dfrac{4}{3}$이고, 직선 $\mathrm{AF}'$의 기울기는 $\dfrac{4}{3}$이다.

쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a>0$, $b>0$)라 하면

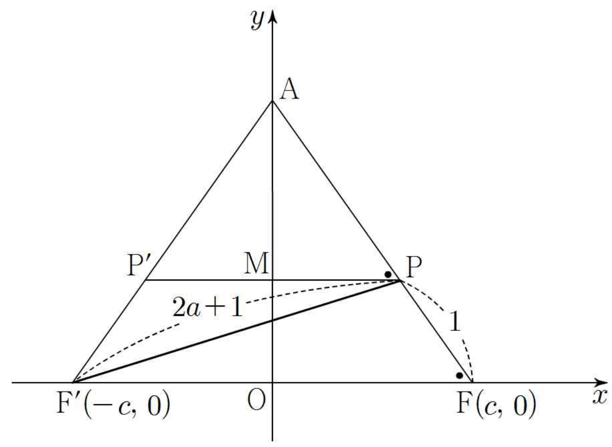
점근선의 기울기가 $\pm\dfrac{4}{3}$이므로

$\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{3}$, $b=\dfrac{4}{3}a$

$c^2=a^2+b^2=a^2+\left(\dfrac{4}{3}a\right)^2=\dfrac{25}{9}a^2$에서 $c=\dfrac{5}{3}a$

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{PF}}=2a$이므로

$\overline{\mathrm{PF}'}=2a+1$




삼각형 $\mathrm{PFF}'$에서 코사인법칙을 이용하면

$(2a+1)^2=(2c)^2+1^2-2\cdot 2c\cdot 1\cos(\angle\mathrm{PFF}')$

$c=\dfrac{5}{3}a$, $\cos(\angle\mathrm{PFF}')=\dfrac{3}{5}$ 이므로

$4a^2+4a+1=\dfrac{100}{9}a^2+1-4a$

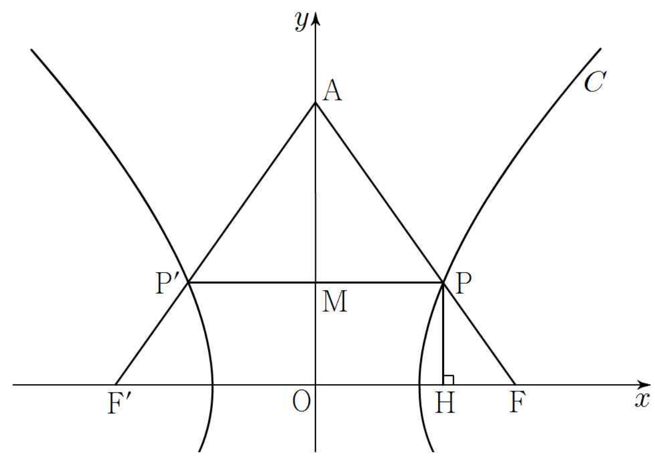
$\dfrac{8}{9}a(8a-9)=0$

$a>0$이므로 $a=\dfrac{9}{8}$

따라서 쌍곡선 $C$의 주축의 길이는 $\dfrac{9}{4}$이다.

[다른 풀이]

그림과 같이 점 P에서 $x$축에 내린 수선의 발을 H, 선분 $\mathrm{PP}'$이 $y$축과 만나는 점을 M이라 하자.




$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PP}'}=5:6$이고 점 M은 선분 $\mathrm{PP}'$의 중점이므로

$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{MP}} = 5:3$

직각삼각형 AMP에서 $\dfrac{\overline{\mathrm{AM}}}{\overline{\mathrm{MP}}} = \dfrac{4}{3}$이므로 직선 AF의 기울기는 $-\dfrac{4}{3}$이고 직선 AF′의 기울기는 $\dfrac{4}{3}$이다.

쌍곡선 $C$의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (\text{단, } a>0,\ b>0)$$

으로 놓으면 점근선의 기울기가 $\pm\dfrac{4}{3}$ 이므로

$$\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$$

$a = 3k,\ b = 4k$ (단, $k > 0$)

이라 하면 쌍곡선 $C$의 방정식은

$$\frac{x^2}{9k^2} - \frac{y^2}{16k^2} = 1 \qquad \cdots\cdots \ ㉠$$

이때 점 F의 $x$좌표는

$$\sqrt{9k^2 + 16k^2} = \sqrt{25k^2} = 5k$$

이고, 직각삼각형 PHF에서 $\overline{\mathrm{PF}} = 1$이므로

$$\overline{\mathrm{HF}} = \frac{3}{5},\ \overline{\mathrm{PH}} = \frac{4}{5}$$

따라서 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}\left(5k - \dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$

점 P가 쌍곡선 $C$ 위의 점이므로 ㉠에 대입하면

$$\frac{\left(5k - \frac{3}{5}\right)^2}{9k^2} - \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^2}{16k^2} = 1$$

$$16k^2 - 6k = 0, \qquad 2k(8k-3) = 0$$

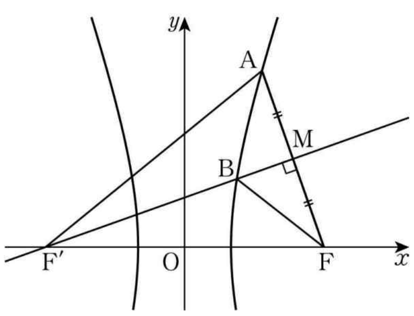
$k > 0$이므로 $\quad k = \dfrac{3}{8}$

따라서 구하는 쌍곡선 $C$의 주축의 길이는

$$2a = 6k = \frac{9}{4}$$

30) [정답] 128

[해설]




그림과 같이 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{32} = 1$의 두 초점의 좌표를 F(6, 0), F′(−6, 0)이라 하자.

점 F′이 선분 AF의 수직이등분선 위의 점이므로 두 직각삼각형 AF′M, FF′M이 합동이다.

그러므로 $\overline{\mathrm{AF'}} = \overline{\mathrm{FF'}} = 12$

점 A가 쌍곡선 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{AF'}} - \overline{\mathrm{AF}} = 4$에서 $\overline{\mathrm{AF}} = 8$

점 M은 선분 AF의 중점이므로

$\overline{\mathrm{AM}} = 4$

직각삼각형 AF′M에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{MF'}} = \sqrt{12^2 - 4^2} = 8\sqrt{2}$

점 B가 쌍곡선 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{BF}}^2 = \overline{\mathrm{BF'}} - 4$이고

$\overline{\mathrm{BM}} = 8\sqrt{2} - \overline{\mathrm{BF'}}$이므로

삼각형 BFM의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{BF}} + \overline{\mathrm{FM}} + \overline{\mathrm{BM}}^2 = \left(\overline{\mathrm{BF'}} - 4\right) + 4 + \left(8\sqrt{2} - \overline{\mathrm{BF'}}\right)$

$= 8\sqrt{2}$

따라서 $k = 8\sqrt{2}$이므로 $k^2 = 128$

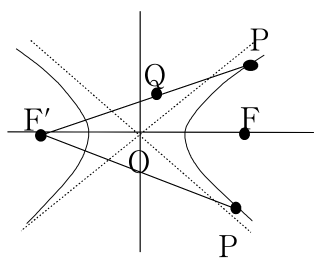
31) [정답] ③

[해설]

다음 그림에서 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}} - \overline{\mathrm{PF}} = 6,\ \overline{\mathrm{PF}} = \overline{\mathrm{PQ}}$

이므로 $\overline{\mathrm{PF'}} - \overline{\mathrm{PQ}} = 6$




따라서 점 Q는 점 F′으로부터 거리가 항상 6인 점이므로 점 F′을 중심으로 하고 반지름의 길이가 6인 원위의 점이다. 한편 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식이

$y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 이므로 점근선이 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 각각 $\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5\pi}{6}$ 이고 이 때 $\angle \mathrm{PF'F} = \theta$ 라 하면 $x > 0$일 때 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{6}$ 이다.

따라서 점 Q가 움직이는 도형의 길이는

중심각의 크기가 $\dfrac{\pi}{3}$ 이고 반지름의 길이가 6인 부채꼴의

호의 길이이므로 $6\times\frac{\pi}{3}=2\pi$

32) [정답] 116

[해설]

원의 중심을 $\mathrm{A}(0,\ a)$라 하고, 원과 직선 PF의 접점을 R라 하자.

$\overline{\mathrm{PF'}}=p$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}=q$, $\overline{\mathrm{RF}}=r$라 하자.

$\overline{\mathrm{F'Q}}=5\sqrt{2}$ 이므로

$p+q=5\sqrt{2}\cdots\cdots$ ㉠

쌍곡선의 주축의 길이가

$2\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

이므로 쌍곡선의 정의에 의해

$\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}=q+r-p=4\sqrt{2}\cdots\cdots$ ㉡

$\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{AR}}$, $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AF'}}$이고 $\angle\mathrm{AQF'}=\angle\mathrm{ARF}=90^\circ$ 이므로 두 삼각형 AQF′과 직각삼각형 ARF는 서로 합동이다.

따라서 $\overline{\mathrm{RF}}=\overline{\mathrm{QF'}}$ 이므로

$r=5\sqrt{2}$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$p-q=\sqrt{2}$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉠, ㉣을 연립하면

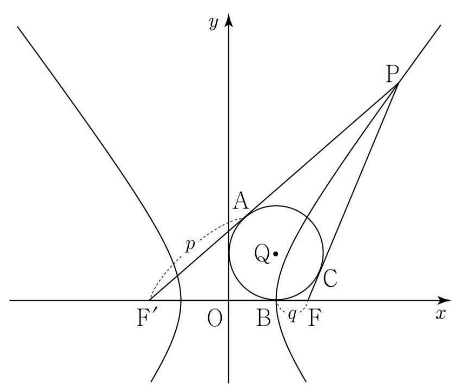
$p=3\sqrt{2}$, $q=2\sqrt{2}$

따라서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{FP}}^2+\overline{\mathrm{F'P}}^2&=p^2+(q+r)^2\\&=(3\sqrt{2})^2+(7\sqrt{2})^2\\&=18+98=116\end{aligned}$$

33) [정답] 18

[해설]




주어진 쌍곡선의 두 초점 F′, F의 좌표는 $\mathrm{F'}(-5,\ 0)$, $\mathrm{F}(5,\ 0)$이다.

그림과 같이 삼각형 PF′F에 내접하는 원과 삼각형의 세 변의 접점을 각각 A, B, C라 하자.

$\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{F'B}}=p$, $\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{FC}}=q$라 하면

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=p-q=6$, $\overline{\mathrm{F'B}}+\overline{\mathrm{BF}}=p+q=10$

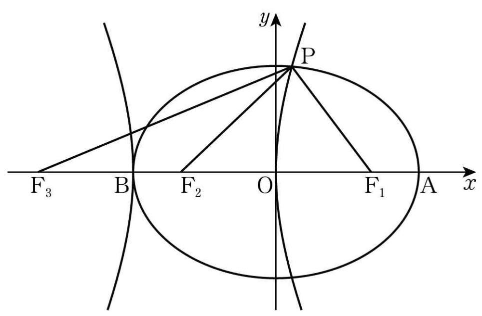
$p=8$이므로 점 B의 좌표는 $(3,\ 0)$이다.

삼각형 PF′F에 내접하는 원의 중심 Q의 좌표는 $(3,\ 3)$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{OQ}}^2=18$

34) [정답] 12

[해설]




점 P에서 타원의 두 초점 $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{F_2}$까지의 거리의 합은 장축인 선분 AB의 길이와 같다.

즉 $\overline{\mathrm{PF_2}}+\overline{\mathrm{PF_1}}=6\cdots\cdots$ ㉠

점 P에서 쌍곡선의 두 초점 $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{F_3}$까지의 거리의 차는 주축인 선분 BO의 길이와 같다.

즉 $\overline{\mathrm{PF_3}}-\overline{\mathrm{PF_1}}=3\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 더하면

$\overline{\mathrm{PF_2}}+\overline{\mathrm{PF_3}}=9$

쌍곡선의 두 초점이 $\mathrm{F_3}$, $\mathrm{F_1}$ 이므로

$\overline{\mathrm{F_3B}}=\overline{\mathrm{OF_1}}=\mathrm{c}$

$\overline{\mathrm{BF_2}}=\overline{\mathrm{BO}}-\overline{\mathrm{F_2O}}=3-c$

그러므로 $\overline{\mathrm{F_3F_2}}=\overline{\mathrm{F_3B}}+\overline{\mathrm{BF_2}}=3$

따라서 삼각형 $\mathrm{PF_3F_2}$ 의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{PF_2}}+\overline{\mathrm{PF_3}}+\overline{\mathrm{F_3F_2}}=12$

35) [정답] ④

[해설]

두 쌍곡선은 각각 원점에 대하여 대칭이므로 두 쌍곡선의 교점인 P, Q도 원점에 대하여 대칭이다.

즉, $\overline{PG}=\overline{QG'}$, $\overline{PF}=\overline{QF'}$

주어진 두 쌍곡선의 주축의 길이가 모두 2이므로

(ⅰ) $\overline{PG}=k$라고 하면 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{QG}=\overline{QG'}+2$이므로

$$\overline{PG}\times\overline{QG}=\overline{QG'}\times\overline{QG}=k(k+2)=8$$

$$k^2+2k-8=0,\ (k+4)(k-2)=0$$

$k>0$이므로 $k=2$

(ⅱ) $\overline{PF}=l$이라고 하면 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{QF}=\overline{QF'}+2$이므로

$$\overline{PF}\times\overline{QF}=\overline{QF'}\times\overline{QF}=l(l+2)=4$$

$$l^2+2l-4=0$$

$l>0$이므로 $l=-1+\sqrt{5}$

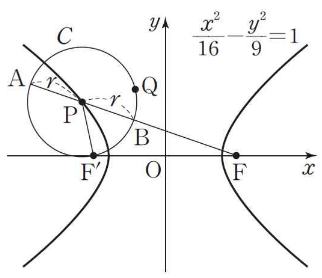
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 사각형 PGQF의 둘레의 길이는

$$\overline{PG}+\overline{QG}+\overline{PF}+\overline{QF}$$
$$=k+(k+2)+l+(l+2)$$
$$=2k+2l+4$$
$$=2\times2+2(-1+\sqrt{5})+4$$
$$=6+2\sqrt{5}$$

36) [정답] ③

[해설]

그림과 같이 직선 FP가 원 $C$와 만나는 두 점을 각각 A, B라 하면




선분 FQ의 길이의 최댓값은 선분 AF의 길이와 같다.

한편, 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{BF}=\overline{PF}-\overline{PB}=\overline{PF}-\overline{PF'}$$
$=2\times4=8$

이므로 원의 반지름의 길이를 $r$라 하면

$$\overline{AF}=\overline{AP}+\overline{PB}+\overline{BF}$$
$=2r+8$
$=14$

따라서 $r=3$이므로 원 $C$의 넓이는 $9\pi$이다.

37) [정답] **54**

[해설]

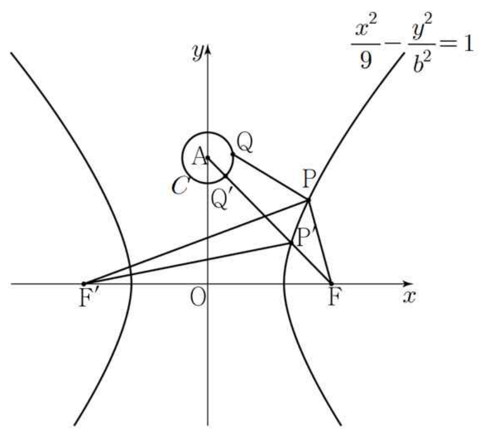
쌍곡선의 주축의 길이가 6이므로 $a^2=9$

점 P가 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\overline{PF'}-\overline{PF}=6$

$\overline{PQ}+\overline{PF'}=\overline{PQ}+(\overline{PF}+6)=(\overline{PQ}+\overline{PF})+6$

$\overline{PQ}+\overline{PF}$는 두 점 P, Q가 선분 AF 위의 점일 때 최소이다.




그림과 같이 선분 AF가 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{b^2}=1$과 원 $C$와 만나는 점을 각각 P′, Q′이라 하면

$\overline{PQ}+\overline{PF'}\ge(\overline{P'Q'}+\overline{P'F})+6$
$=(\overline{AF}-1)+6$
$=\sqrt{c^2+25}+5$

$\overline{PQ}+\overline{PF'}$의 최솟값이 12이므로 $\sqrt{c^2+25}+5=12$

$c^2=24$

$\therefore b^2=c^2-a^2=24-9=15$

따라서 $a^2+3b^2=9+3\times15=54$

38) [정답] ⑤

[해설]

선분 BC의 중점이 원점 O, 직선 BC가 $x$축, 직선 OA가 $y$축이고 세 점 A, B, C의 좌표가 각각 A$(0,\ 5\sqrt{3})$, B$(-5,\ 0)$, C$(5,\ 0)$인 좌표평면을 생각하자.

$\overline{PB}-\overline{PC}=2$를 만족시키는 점 P는 두 점 B$(-5, 0)$, C$(5, 0)$이 초점이고, 주축의 길이가 2인 쌍곡선 위의 점이다.

이 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 이라 하면

$2a=2,\ a=1$

$b^2=25-a^2=24$

즉, 쌍곡선의 방정식은 $x^2-\frac{y^2}{24}=1$이다.

점 P의 좌표를 $(p, q)$라 하면 $p^2-\frac{q^2}{24}=1$이므로

$\overline{PA}^2=p^2+(q-5\sqrt{3})^2$

$=1+\frac{q^2}{24}+(q-5\sqrt{3})^2$

$=\frac{25}{24}\left(q-\frac{24\sqrt{3}}{5}\right)^2+4$

따라서 $q=\frac{24\sqrt{3}}{5}$일 때 선분 PA의 길이가 최소이고, 이때

삼각형 PBC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times10\times\frac{24\sqrt{3}}{5}=24\sqrt{3}$

39) [정답] ②

[해설]

쌍곡선의 꼭짓점 A, B는 각각 $(3, 0)$, $(-3, 0)$이다. 직선 $x=t\ \ (t>3)$와 쌍곡선의 교점을 C, D라 하면

C$\left(t, \frac{\sqrt{4t^2-36}}{3}\right)$, D$\left(t, \frac{\sqrt{4t^2-36}}{3}\right)$

이므로 직선 AC 와 직선 BD 는 각각

$y=\frac{2\sqrt{t^2-9}}{3(t+3)}(x+3)$ , $y=-\frac{2\sqrt{t^2-9}}{3(t+3)}(x-3)$

두 직선의 교점을 P$(X, Y)$라 하면

$\frac{2\sqrt{t^2-9}}{3(t+3)}(X+3)=-\frac{2\sqrt{t^2-9}}{3(t+3)}(X-3)$

관계로부터

$X=\frac{9}{t}$ …… ㉠

$Y=-\frac{2\sqrt{t^2-9}}{3(t+3)}(X-3)$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}=1$

따라서 두 초점 사이의 거리는 $2\sqrt{5}$ 이다.

40) [정답] ③

[해설]

점 P의 좌표를 $(x, y)$라 할 때

$\overline{AP}^2=(x-t)^2+y^2$

$=(x-t)^2+x^2-1$

$=2x^2-2tx+t^2-1$

$=2\left(x-\frac{t}{2}\right)^2+\frac{t^2}{2}-1$

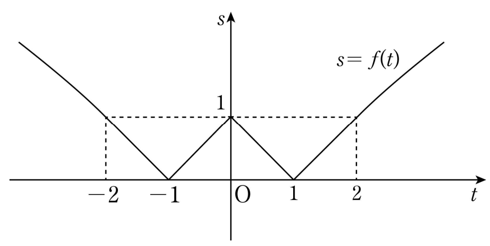
$x^2=y^2+1\geq1$이므로 $|x|\geq1$

$|x|\geq1$이므로 $\frac{t}{2}$의 값에 따라 $\overline{AP}^2$의 최솟값이 달라진다.

즉, 각 경우에 따라 $f(t)$의 값을 구하면

$$f(t)=\begin{cases}\sqrt{\frac{t^2}{2}-1} & (|t|\geq2)\\ |t+1| & (-2<t\leq0)\\ |t-1| & (0<t<2)\end{cases}$$

그러므로 $s=f(t)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.




ㄱ. $f(t)$에서 $t=0$을 대입하면 $f(0)=1$(참)

ㄴ. 직선 $s=\frac{1}{3}$과 곡선 $s=f(t)$의 교점의 개수는 4이다.

(참)

ㄷ. $\lim_{t\to-2-}\frac{f(t)-f(-2)}{t-(-2)}=\lim_{t\to-2-}\frac{\sqrt{\frac{t^2}{2}-1}-1}{t+2}$

$=\lim_{t\to-2-}\frac{t^2-4}{(t+2)\sqrt{2}\left(\sqrt{t^2-2}+\sqrt{2}\right)}$

$=\lim_{t\to-2-}\frac{t-2}{\sqrt{2}\left(\sqrt{t^2-2}+\sqrt{2}\right)}=-1$

$\lim_{t\to-2+}\frac{f(t)-f(-2)}{t-(-2)}$

$=\lim_{t\to-2+}\frac{|t+1|-1}{t+2}=\lim_{t\to-2+}\frac{-(t+1)-1}{(t+2)}=-1$

따라서 함수 $f(t)$는 $t=-2$에서 미분가능하다.

같은 방법을 이용하면 함수 $f(t)$는 $t=2$에서도 미분가능하다는 사실을 알 수 있다.

그러므로 함수 $f(t)$가 미분가능하지 않은 $t$의 값은 $-1$, 0,

1이므로 그 개수는 3이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

41) [정답] 54

[해설]

$\overline{PF_2}-\overline{PF_1}=6$에서 점 P는 두 초점이 $F_1(4, 0)$, $F_2(-6, 0)$이고 주축의 길이가 6인 쌍곡선 위의 점이다. 쌍곡선의 중심의 좌표는 $(-1, 0)$이므로 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

점 P는 포물선 $y^2=16x$와 쌍곡선 ㉠의 교점이므로

$\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{16x}{16}=1$, $x^2-7x-8=0$, $(x-8)(x+1)=0$, $x=8$ 또는 $x=-1$

제 1사분면 위의 점 P의 좌표는 $(8, 8\sqrt{2})$이다.

포물선 $y^2=16x$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식이

$$8\sqrt{2}y=8(x+8),\ \text{즉}\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+8) \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

이므로 점 $F_3$의 좌표는 $(-8, 0)$이다.

두 점 $F_1(4, 0)$, $F_3(-8, 0)$을 초점으로 하는 타원의 꼭짓점은 $x$축 또는 직선 $x=-2$ 위에 있다.

이때 선분 $PF_3$ 위에 있는 꼭짓점은 직선 $x=-2$위에 있으므로 ㉡에 $x=-2$를 대입하면 $y=3\sqrt{2}$이 타원의 단축의 길이는 $6\sqrt{2}$이고 두 초점 사이의 거리는 12이다.

따라서 $a^2=6^2+(3\sqrt{2})^2=54$

42) [정답] 21

[해설]

점 P의 $x$좌표를 $k$라 하면 점 P의 좌표는 $(k, 2\sqrt{kp})$이다.

직선 QR는 $x$축과 평행하고 $\angle PRQ=\frac{\pi}{2}$에서

직선 PR는 $y$축과 평행하므로 두 점 P, R의 $x$좌표는 서로 같고 두 점 Q, R의 $y$좌표는 서로 같다.

그러므로 두 점 R, Q의 좌표는

$R(k,\ -2\sqrt{kp})$, $Q(-p,\ -2\sqrt{kp})$

포물선 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$2\sqrt{kp}y=2p(x+k)$이고 점 Q를 지나므로

$-4kp=2p(-p+k)$, $p=3k$

$\overline{QR}=p+k=4k$에서 $\overline{RF}=\overline{FP}=4k$이고

$\overline{PR}=4\sqrt{kp}=4\sqrt{3}k$이므로

직각삼각형 PQR에서

$\overline{PQ}^2=(4k)^2+(4\sqrt{3}k)^2=64k^2$

$\overline{PQ}=8k$

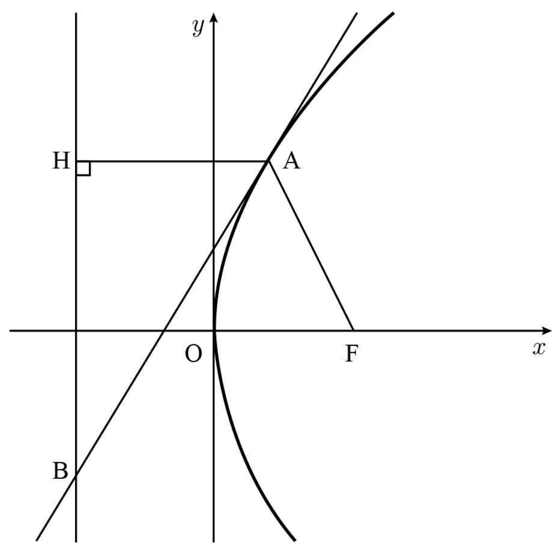
사각형 PQRF의 둘레의 길이는

$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RF}+\overline{FP}=8k+4k+4k+4k=140$, $\quad k=7$

따라서 $p=3k=21$

43) [정답] **32**

[해설]




점 A의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$, 점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{AB}=2\overline{AF}$, $\overline{AF}=\overline{AH}$이므로 $\overline{AH}:\overline{AB}=1:2$

점 A에서의 접선의 기울기는 $\frac{\overline{BH}}{\overline{AH}}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$

$y^2=12x$에서 $2y\frac{dy}{dx}=12$

$\frac{dy}{dx}=\frac{6}{y}$이므로 $\frac{6}{y_1}=\sqrt{3}$

그러므로 $A(1,\ 2\sqrt{3})$이다.

$\overline{AF}=x_1+3=4$, $\overline{AB}=2\overline{AF}=8$

따라서 $\overline{AB}\times\overline{AF}=32$

44) [정답] ⑤

[해설]

점 A에서 포물선에 그은 기울기가 양수인 접선과 포물선이 만나는 점을 $B(x_1, y_1)$이라 하면

점 B에서의 접선의 방정식은 $y=\frac{8}{y_1}(x+x_1)$

포물선의 준선의 방정식이 $x=-4$이므로

$A\left(-4, \frac{8}{y_1}(x_1-4)\right)$, $H(-4, y_1)$

점 A가 제3사분면 위의 점이므로 $\overline{AC}=\frac{8}{y_1}(4-x_1)$

$\overline{AC}\times\overline{CH}=\frac{8}{y_1}(4-x_1)\times y_1=8$

$\therefore x_1=3,\ y_1=4\sqrt{3}$

$A\left(-4, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $B(3, 4\sqrt{3})$, $H(-4, 4\sqrt{3})$

따라서 삼각형 ABH의 넓이는

$\frac{1}{2}\times7\times\frac{14}{3}\sqrt{3}=\frac{49}{3}\sqrt{3}$

45) [정답] ④

[해설]

초점 $F(1, 0)$, $F'(-1, 0)$, $P(x_1, y_1)$에서 접선의 방정식은

$3x_1x+4y_1y=12$

접선의 $x$절편은 $\frac{4}{x_1}$, $P(x_1, y_1)$에서 접선에 수직인 직선의

방정식은 $y-y_1=\frac{4y_1}{3x_1}(x-x_1)$

접선에 수직인 직선의 방정식의 $x$절편은 $\frac{x_1}{4}$

세 삼각형의 높이는 모두 같으므로 세 삼각형의 밑변의 길이가 등차수열을 이룬다.

$\overline{RF}=1-\frac{x_1}{4}$, $\overline{F'R}=\frac{x_1}{4}+1$, $\overline{FQ}=\frac{4}{x_1}-1$

$2\left(\frac{x_1}{4}+1\right)=\left(1-\frac{x_1}{4}\right)+\left(\frac{4}{x_1}-1\right)$

양변에 $4x_1$을 곱하여 정리하면

$3x_1^2+8x_1-16=(3x_1-4)(x_1+4)=0$

$\therefore\ x_1=\frac{4}{3}$

46) [정답] ①

[해설]

점 P(2, 3)에서의 접선의 방정식은 $\frac{2x}{16}+\frac{3y}{12}=1$

$\frac{x}{8}+\frac{y}{4}=1$

그러므로 점 S의 좌표는 (8, 0)이다.

한편, $c=\sqrt{16-12}=2$이므로 $F(2, 0)$, $F'(-2, 0)$

이때, 두 삼각형 F′FQ, F′SR는 $\angle QF'F=\angle RF'S$이고

$\overline{FQ}\,/\!/\,\overline{SR}$이므로 닮은 삼각형이다.

한편, $\overline{F'F}=4$, $\overline{F'S}=10$이므로 두 삼각형 F′FQ, F′SR의 둘레의 길이의 비는 2 : 5

한편, 삼각형 F′FQ의 둘레의 길이는 타원의 정의에 의해

$\overline{FQ}+\overline{QF'}=2\times4=8$이므로

$\overline{FF'}+\overline{FQ}+\overline{QF'}=4+8=12$

따라서 구하는 삼각형 SRF′의 둘레의 길이를 $l$이라 하면

$12 : l=2 : 5$이므로 $l=30$

47) [정답] ③

[해설]

중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원의 방정식은

$x^2+y^2=1$

원 위의 점 P의 $x$좌표를 $t$라 하면

$P(t, \sqrt{1-t^2})$, $P'(t, 0)$

따라서, 점 P′을 초점으로 하고, 원의 지름을 장축으로 하는 타원의 방정식은

$x^2+\frac{y^2}{1-t^2}=1$

이때, 점 P에서 타원에 그은 접선 $l$의 기울기가 $-\frac{3}{2}$이므로

접선 $l$의 방정식은

$l : y=-\frac{3}{2}x+\sqrt{1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2+1-t^2}$

$=-\frac{3}{2}x+\sqrt{\frac{13}{4}-t^2}$

점 $P(t, \sqrt{1-t^2})$이 접선 $l$ 위의 점이므로

$\sqrt{1-t^2}=-\frac{3}{2}t+\sqrt{\frac{13}{4}-t^2}$

$\sqrt{1-t^2}+\frac{3}{2}t=\sqrt{\frac{13}{4}-t^2}$

$(1-t^2)+\frac{9}{4}t^2+3t\sqrt{1-t^2}=\frac{13}{4}-t^2$

$4t\sqrt{1-t^2}=3-3t^2$

$16t^2(1-t^2)=9(1-t^2)^2$

$25t^4-34t^2+9=0$

$(25t^2-9)(t^2-1)=0$

$t^2=\frac{9}{25}\ (\because t\neq\pm1)$ $\qquad\therefore\ t=\frac{3}{5}\ (\because t>0)$

$\therefore\ P\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

따라서, 직선 OP의 기울기는

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$$

48) [정답] 13

[해설]

쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{a^2}=1$의 주축의 길이가 $2\sqrt{10}$이므로

$\overline{PF}=k$라 하면 $\overline{PF'}=k-2\sqrt{10}$

삼각형 F′FP는 넓이가 15인 직각삼각형이므로

$\frac{1}{2}\times k\times(k-2\sqrt{10})=15$

$k^2-2\sqrt{10}k-30=(k-3\sqrt{10})(k+\sqrt{10})=0$

$k=3\sqrt{10}$이므로 $\overline{PF}=3\sqrt{10}$, $\overline{PF'}=\sqrt{10}$

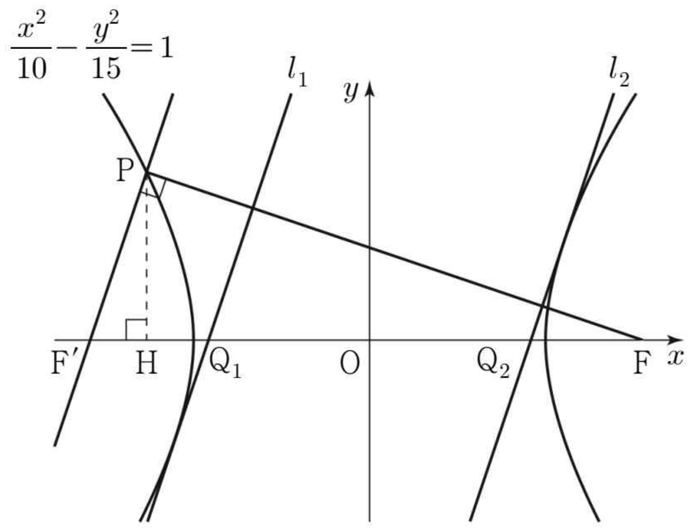
직각삼각형 F′FP에서

$\overline{F'F}^2=(\sqrt{10})^2+(3\sqrt{10})^2=100$이므로

$\overline{F'F}=2c=10$, $c=5$

쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{a^2}=1$에서

$10+a^2=c^2=25$이므로 $a^2=15$




점 P에서 $x$축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

삼각형 F′FP와 삼각형 F′PH는 서로 닮음이므로

직선 PF′의 기울기는

$\frac{\overline{PH}}{\overline{F'H}}=\frac{\overline{PF}}{\overline{PF'}}=\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=3$

쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{15}=1$에 접하고 기울기가 3인

직선의 방정식은

$y=3x\pm\sqrt{10\times3^2-15}=3x\pm5\sqrt{3}$이므로

$l_1: y=3x+5\sqrt{3}$, $l_2: y=3x-5\sqrt{3}$

에서 두 점 $Q_1$, $Q_2$의 좌표는 각각

$Q_1\left(-\frac{5\sqrt{3}}{3}, 0\right)$, $Q_2\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}, 0\right)$

따라서 $\overline{Q_1Q_2}=\frac{10}{3}\sqrt{3}=\frac{q}{p}\sqrt{3}$에서

$p=3$, $q=10$이므로 $p+q=3+10=13$

49) [정답] ①

[해설]

$y^2=4px$의 양변을 $x$에

대하여 미분하면

$2y=\frac{dy}{dx}=4p$에서 $\frac{dy}{dx}=\frac{2p}{y}$

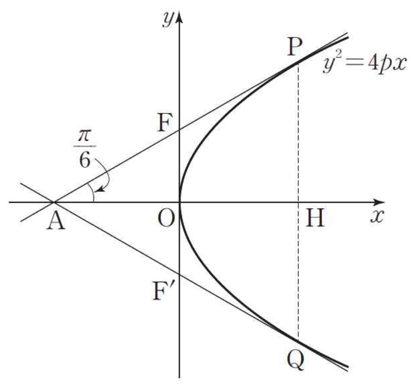
(단, $y\neq0$)

포물선 $y^2=4px$ 위의

제1사분면의 점

$P(t, 2\sqrt{pt})$에서의 접선의

방정식은




$y-2\sqrt{pt}=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{t}}(x-t)$

점 $A(-k, 0)$이 이 접선 위의 점이므로

$0-2\sqrt{pt}=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{t}}(-k-t)$에서 $t=k$

즉 점 P에서 $x$축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$H(k, 0)$이다. $\angle PAH=\frac{\pi}{6}$이므로

$\overline{FO}=\frac{k}{\sqrt{3}}$, $\overline{PH}=\frac{2k}{\sqrt{3}}$, $\overline{AF}=\overline{FP}=\frac{2k}{\sqrt{3}}$

$P\left(k, \frac{2}{\sqrt{3}}k\right)$, $F'\left(0, -\frac{k}{\sqrt{3}}\right)$에서

$\overline{PF'}=\sqrt{k^2+\left(\frac{3k}{\sqrt{3}}\right)^2}=2k$이므로 타원의 장축의 길이는

$\overline{PF}+\overline{PF'}=\frac{2k}{\sqrt{3}}+2k$

$\frac{2k}{\sqrt{3}}+2k=4\sqrt{3}+12$에서 $k=6$

또 점 $P(6, 4\sqrt{3})$이 포물선 $y^2=4px$ 위의 점이므로

$(4\sqrt{3})^2=4p\times6$

$48=24p$에서 $p=2$

따라서 $k+p=6+2=8$

50) [정답] ⑤

[해설]

점 $F\left(\frac{9}{4}, 0\right)$이 포물선의 초점이므로

준선의 방정식은 $x=-\frac{9}{4}$

점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면

$\overline{\mathrm{PF}}=x_1+\frac{9}{4}=\frac{25}{4}$에서 $x_1=4,\ y_1=6$

포물선 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$6y=\frac{9}{2}(x+4)$이고 점 F′을 지나므로 $c=4$

$\mathrm{P}(4,\ 6),\ \mathrm{F}'(-4,\ 0)$이므로 $\overline{\mathrm{PF}'}=10$

타원의 장축의 길이는 $\overline{\mathrm{PF}'}+\overline{\mathrm{PF}}=\frac{65}{4}$이고

$\overline{\mathrm{F'F}}=4+\frac{9}{4}=\frac{25}{4}$이므로

타원의 단축의 길이를 $k$라 하면

$\left(\frac{k}{2}\right)^2=\left(\frac{65}{8}\right)^2-\left(\frac{25}{8}\right)^2=\frac{225}{4}$

따라서 타원의 단축의 길이는 15

51) [정답] ④

[해설]

점 $\mathrm{A}(0,\ 4)$에서 타원 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$에 그은 접선의 기울기를 $m$이라 하면 접선의 방정식은

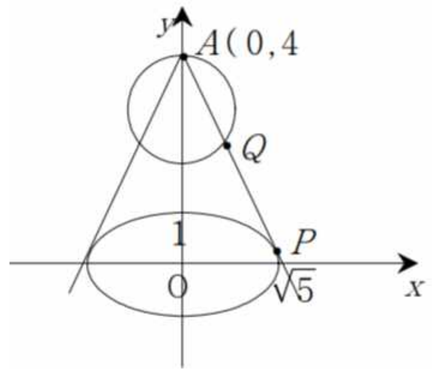
$y=mx\pm\sqrt{5m^2+1}$

이 접선이 점 $\mathrm{A}(0,\ 4)$를 지나므로

$4=\pm\sqrt{5m^2+1}$

$5m^2+1=16,\quad m^2=3\ \therefore\ m=\pm\sqrt{3}$

이때, $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$이므로 다음 그림과 같이 점 Q는 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이고, 반지름의 길이가 2인 부채꼴의 호 위의 점이다.




따라서 점 Q가 나타내는 도형의 길이는 $\frac{\pi}{3}\times2=\frac{2}{3}\pi$이다.

52) [정답] **14**

[해설]

$\mathrm{A}(\mathrm{x}_1,\ \mathrm{y}_1)$이라 두면 접선 $\quad y_1y=8(x+x_1)$

$x=0$이면 $y=\frac{8x_1}{y_1}$, $y$축과 교점 $\quad \mathrm{D}\left(0,\ \frac{8\mathrm{x}_1}{\mathrm{y}_1}\right)$

${y_1}^2=16x_1$이므로

$\frac{y_1}{2}=\frac{8x_1}{y_1}\quad \therefore\ \mathrm{D}\left(0,\ \frac{\mathrm{y}_1}{2}\right)$

따라서, △OAD의 무게중심

$\mathrm{B}\left(\frac{0+0+\mathrm{x}_1}{3},\ \frac{0+\frac{\mathrm{y}_1}{2}+\mathrm{y}_1}{3}\right)=\left(\frac{x_1}{3},\ \frac{y_1}{2}\right)$

$\frac{x_1}{3}=x,\ \frac{y_1}{2}=y$라 두면 $x_1=3x,\ y_1=2y,\ {y_1}^2=16x_1$이므로

$4y^2=16\times3x$ 따라서, $\ y^2=12x$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}}=(3+x_1)+(3+x_2)=20$

$x_1+x_2+6=20$

$\therefore\ x_1+x_2=14$

53) [정답] ⑤

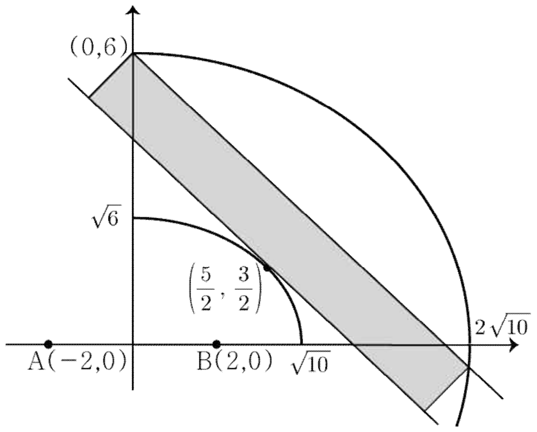
[해설]

$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=2a$라 하면 $2\sqrt{10}\le 2a\le 4\sqrt{10}$ 이다.

$a$가 일정할 때, 점 P의 자취는 타원이므로

$a=\sqrt{10}$일 때, $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$ 이고

$a=2\sqrt{10}$ 일 때, $\dfrac{x^2}{40}+\dfrac{y^2}{36}=1$ 이다.




위 그림과 같이 조건을 만족하는 넓이가 최대인 직사각형은 타원 $\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{6}=1$과 점 $\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2}\right)$에서 접하면서 외부에 있고 점 $(0,6)$ 을 지나고 타원 $\dfrac{x^2}{40}+\dfrac{y^2}{36}=1$ 내부에 위치한다.

점 $\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2}\right)$에서 타원 $\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{6}=1$의 접선은

$\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{4}=1$이므로 넓이가 최대인 직사각형의 한 변의 길이는

점 $(0,6)$ 에서 $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{4}=1$ 이르는 거리와 같으므로 $\sqrt{2}$ 이다.

점 $(0,6)$ 을 지나고 $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{4}=1$에 평행한 직선의 방정식은

$x+y=6$이므로 이 직선과 타원 $\dfrac{x^2}{40}+\dfrac{y^2}{36}=1$의 교점은

$\left(\dfrac{120}{19},-\dfrac{6}{19}\right)$이다. 따라서 넓이가 최대인 직사각형의 다른 한 변의 길이는 $\dfrac{120\sqrt{2}}{19}$이므로 넓이의 최댓값은 $\dfrac{240}{19}$이다.

54) [정답] ①

[해설]

주어진 쌍곡선의 도함수를 구하기 위하여 음함수 미분법을 이용하면

$2xdx-2ydy=0$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}$

따라서, 점 $\mathrm{P}(a,b)$ 에서의 접선의 방정식은

$y=\dfrac{a}{b}(x-a)+b$ ,  $ax-by=1$

이다. 한편, 기울기가 양인 점근선은 $y=x$ 이므로, 접선과의 교점 B 는

$ax-bx=1$ ,  $x=y=\dfrac{1}{a-b}$

이므로 $\left(\dfrac{1}{a-b},\dfrac{1}{a-b}\right)$ 이다. 또한, 접선의 $x$ 절편, A 는 $\left(\dfrac{1}{a},0\right)$ 이다. 그러므로 점근선 $y=x$ 와 점 A 사이의 수직거리 $d$ 는 $d=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left|\dfrac{1}{a}\right|$

따라서, 삼각형 OAB 의 면적 $S(a)$ 는

$S(a)=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OB}}\cdot d$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{|a-b|}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left|\dfrac{1}{a}\right|$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{|a(a-b)|}$

그러므로 구하는 값은

$\lim\limits_{a\to\infty}S(a)=\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{|a(a-b)|}$

$=\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{a\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)}$

$=\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a+\sqrt{a^2-1}}{a(a^2-a^2+1)}=1$

55) [정답] ⑤

[해설]

타원 $\dfrac{x^2}{k^2}+y^2=1$은 네 점 $(k,0)$, $(-k,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$을 네 꼭짓점으로 하는 타원이다.

타원 $\dfrac{x^2}{k^2}+y^2=1$과 함수 $y=f(x)$의 그래프가 접할 때 $k$의 값을 구하자.

$\dfrac{x^2}{k^2}+y^2=1$ 위의 점 $(x_1,y_1)(x_1>0)$에서의 접선의 방정식을 구하면

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{k^2y}$이므로 접선의 기울기는 $-\dfrac{x_1}{k^2y_1}$이고

접선의 방정식은 $y-y_1=-\dfrac{x_1}{k^2y_1}(x-x_1)(y_1\neq 0)$

$\therefore y=-\dfrac{x_1}{k^2y_1}x+\dfrac{1}{y_1}$

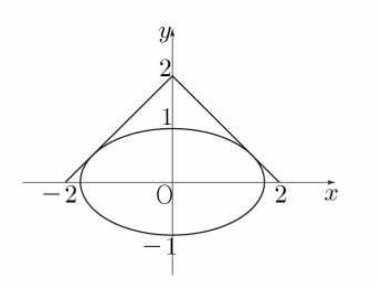
타원이 직선 $y=-x+2$에 접하므로

$\frac{x_1}{k^2 y_1}=1,\ \frac{1}{y_1}=2$

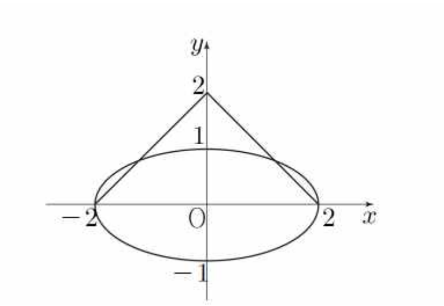
$\therefore x_1=\frac{k^2}{2},\ y_1=\frac{1}{2}$

점 $(x_1, y_1)$은 $y=-x+2$ 위의 점이므로 $k^2=3$

$\therefore k=\sqrt{3}$




타원 $\frac{x^2}{k^2}+y^2=1$이 점 $(2, 0)$을 지날 때, $k=2$

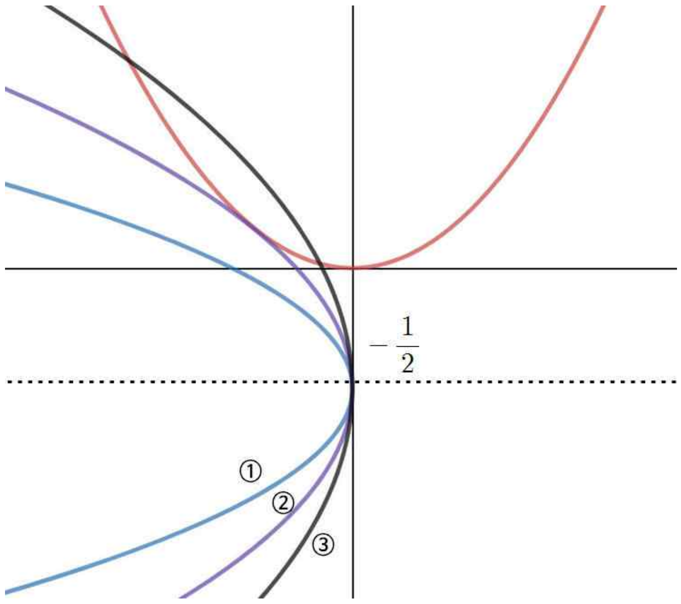



$$\therefore g(k)=\begin{cases} 0 & (1<k<\sqrt{3}) \\ 2 & (k=\sqrt{3}) \\ 4 & (\sqrt{3}<k\le 2) \\ 2 & (k>2) \end{cases}$$

따라서 함수 $g(k)$는 $k=\sqrt{3}$, $k=2$에서 불연속이고,불연속이 되는 모든 $k$의 값들의 제곱의 합은 $(\sqrt{3})^2+2^2=7$이다.

56) [정답] ③

[해설]




이차곡선 $\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=4px$이 위 그림에서

① 의 경우 공통접선이 3개,

② 의 경우 공통접선이 2개

③ 의 경우 공통접선이 1개 이므로

$\lim_{p\to k+} f(p)>f(k)$를 만족하는 경우는 $p$의 크기가 증가하며 ① → ② 임을 알 수 있다.

따라서 $p$는 음수이고 극한값 $k$는 두 이차곡선이 접할 때 $p$의 값이 된다.

두 곡선의 접점을 $(x_1, y_1)$이라고 하면

$x^2=2y$에서 $\frac{dy}{dx}=x_1$이고,

$\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=4px$에서 $\frac{dy}{dx}=\frac{2p}{y_1+\frac{1}{2}}$이므로 두 식을 연립하면

$2p=x_1\left(y_1+\frac{1}{2}\right)$이고 이 식을 $\left(y_1+\frac{1}{2}\right)^2=4px_1$에 대입하면

$y_1=\frac{1}{6}, x_1=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ 가 된다. $p$가 음수이므로

$\therefore p=-\frac{\sqrt{3}}{9}$