김지석T 프리즘 해설

제 2 교시　3월 학력평가

22. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x)-t|$할 때,

$\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$의 값이 존재하는 서로 다른 실수 k의 개수를 $h(t)$라 하자.

함수 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{t\to 4+}h(t)=5$
(나) 함수 $h(t)$는 $t=-60$과 $t=4$에서만 불연속이다.

$f(2)=4$이고 $f'(2)>0$일 때, $f(4)+h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

[Killer Mind] 숫자의 일치는 우연이 아니다!

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

(Step1) $\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$ 이 존재성 해석

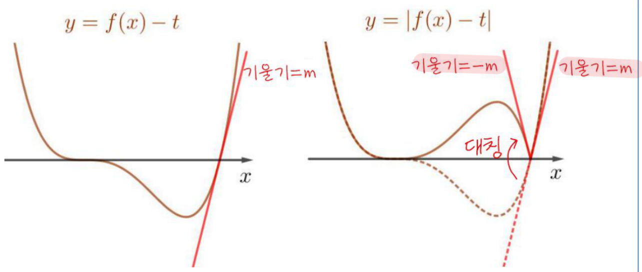
⇔ $-\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}$

① $g'(k)=0$

② $x=k$에서 "-좌미분계수=우미분계수"

절댓값 함수의 뾰족점에서 "-좌미분계수=우미분계수"가 성립한다!

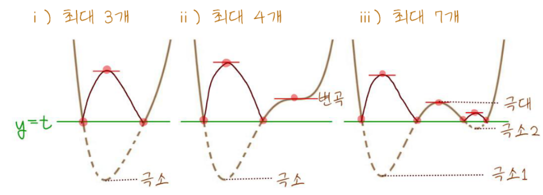
why? 그래프가 대칭되며 접선도 함께 대칭된다.



∴ h(t)는 y=|f(x)-t|에서 뾰족점 or 접선기울기=0 인 점의 개수

(Step2) f(x) 그래프 개형 판단

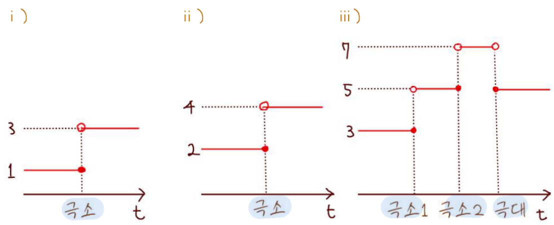
y=|f(x)-t|에서 뾰족점 or 접선기울기=0 인 점의 개수



$\lim_{x\to 4+}h(t)=5$ 불가능　　불가능　　가능

∴ f(x)는 W꼴

[참고] h(t) 그래프

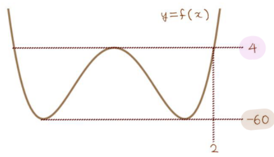


h(t)의 불연속점의 개수는 f(x)의 극값의 개수와 동일하다.

조건 (나)에서 함수 $h(t)$는 $t=-60$과 $t=4$에서만 불연속이다.

⇔ 극소1=극소2

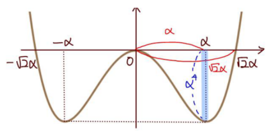
⇔ f(x)의 극솟값은 -60, 극댓값은 4



(Step3)

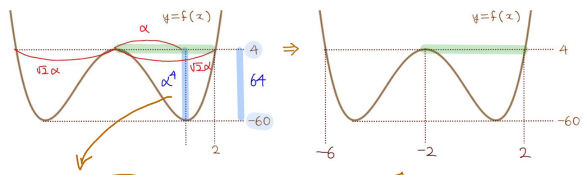
[개념] 사차함수는 극소가 동일하면 좌우대칭

[개념] 사차함수의 $\sqrt{2}:1$ 비례관계



$p(x)=(x-\sqrt{2}\alpha)x^2(x+\sqrt{2}\alpha)=(x^2-2\alpha^2)x^2$

극솟값 $p(\alpha)=-\alpha^2\alpha^2=-\alpha^4$



$\alpha^4=64$

∴ $\alpha=2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}\alpha=4$

∴ $f(x)=(x+6)(x+2)^2(x-2)+4$

∴ $f(4)=10\cdot 6^2\cdot 2+4=724$

∴ $f(4)+h(4)=724+5=729$

※ t=4일 때, g(x)=|f(x)-4|