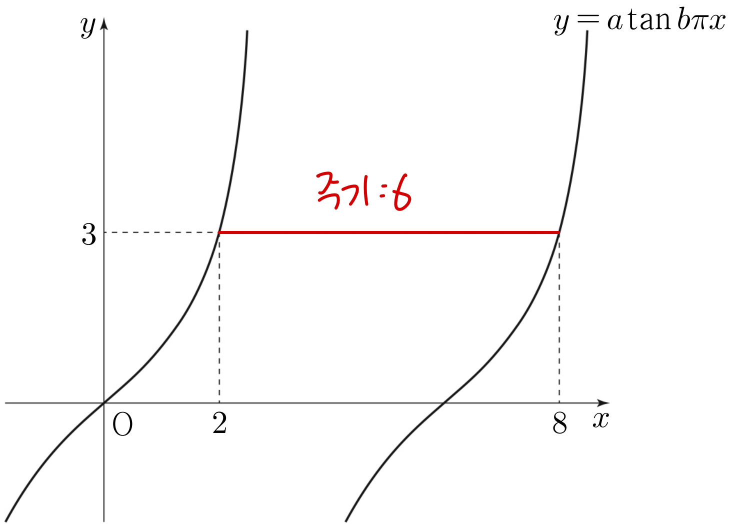
8. 그림과 같이 함수 $y=a\tan b\pi x$의 그래프가 두 점 $(2,\ 3)$, $(8,\ 3)$을 지날 때, $a^2\times b$의 값은? (단, a, b는 양수이다.) [3점]



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

① 주기 $\Rightarrow \frac{1}{b}=6 \quad \therefore b=\frac{1}{6}$

② 대입 $\Rightarrow a\underbrace{\tan\frac{\pi}{3}}_{\sqrt{3}}=3 \quad \therefore a=\sqrt{3}$

9. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2-4x+1$이고 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\underbrace{\int_0^x f(t)dt}_{g(x)}=1$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

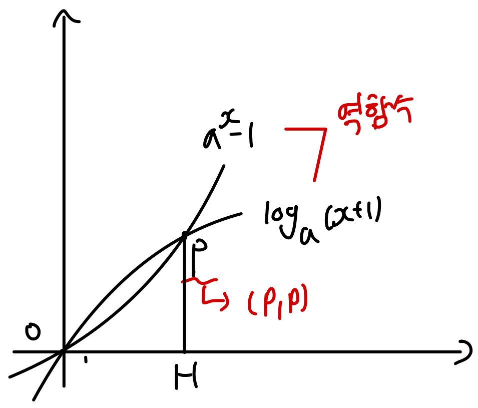
$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=1 \longrightarrow \frac{0}{0}$꼴

$\therefore g'(0)=1 \longrightarrow f(0)=1$

$\therefore f(x)=x^3-2x^2+x+1$

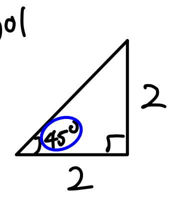
10. 상수 $a\,(a>1)$에 대하여 곡선 $y=a^x-1$과 곡선 $y=\log_a(x+1)$이 원점 O를 포함한 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 두 점 중 O가 아닌 점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 OHP의 넓이가 2일 때, a의 값은? [4점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$



① $a^p-1=\log_a(p+1) \longrightarrow \boxed{a^2-1=2}$

② 넓이



why? 기울기=1

$\therefore p=2$

무조건 비율 & 변곡점!

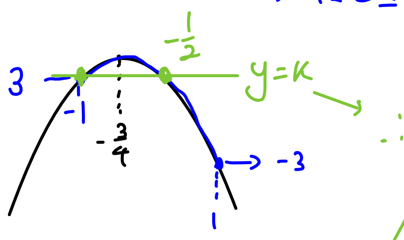
치환

11. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식 $\boxed{2\sin^2 x} - 3\cos x = k$의 서로 다른 실근의 개수가 3이다. 이 세 실근 중 가장 큰 실근을 α라 할 때, $k \times \alpha$의 값은? (단, k는 상수이다.) [4점]

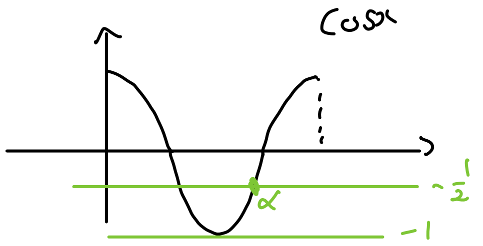
① $\frac{7}{2}\pi$　② 4π　③ $\frac{9}{2}\pi$　④ 5π　⑤ $\frac{11}{2}\pi$

$2-2c^2-3c=K \longrightarrow -2c^2-3c+2$와 $y=K$ 교점

↳ $-1 \le c \le 1$

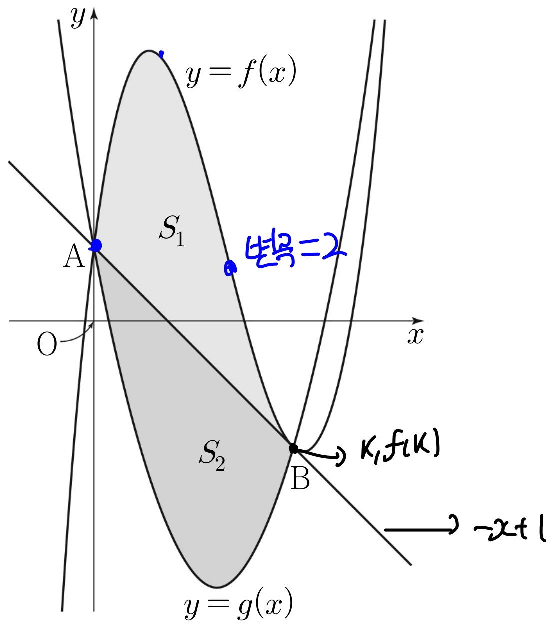


$\therefore \cos x = -1, -\frac{1}{2}$



$\therefore K=3, \alpha = \frac{4}{3}\pi$

12. 그림과 같이 삼차함수 $f(x)=x^3-6x^2+8x+1$의 그래프와 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, 점 $\mathrm{B}(k,\ f(k))$에서 만나고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B에서의 접선이 점 A를 지난다.
곡선 $y=f(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=g(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자.
$S_1 = S_2$일 때, $\int_0^k g(x)dx$의 값은? (단, k는 양수이다.) [4점]

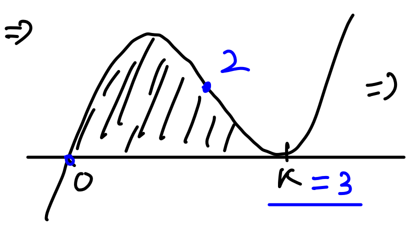


① $-\frac{17}{2}$　② $-\frac{33}{4}$　③ -8　④ $-\frac{31}{4}$　⑤ $-\frac{15}{2}$

차함수로 세팅

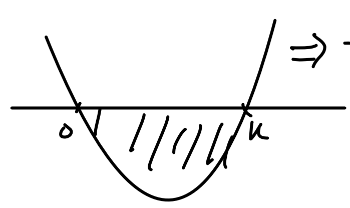
$g(x)=ax^2+\sim$

$S_1 \Rightarrow$



$\Rightarrow \frac{k^4}{12}$

$S_2 \Rightarrow$



$\Rightarrow \frac{a}{6}k^3$

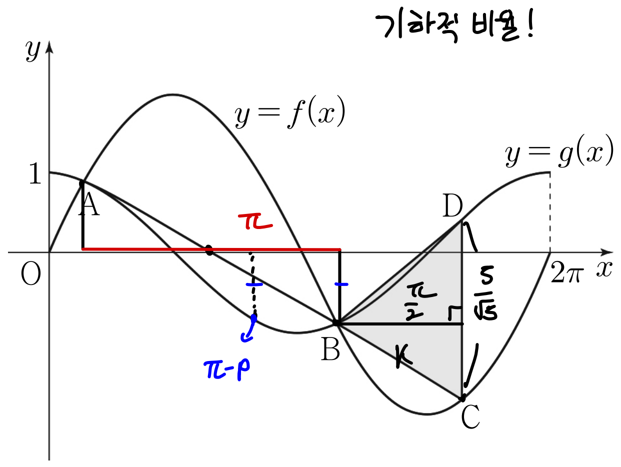
$S_1 = S_2 \longrightarrow a = \frac{k}{2} = \frac{3}{2}$, $g(0)=1$, $g(3)=-2$

$g(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x + 1$

$S_2 = \int_0^3 g(x) - (-x+1)\,dx$

13. 그림과 같이 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 두 함수 $f(x)=k\sin x$, $g(x)=\cos x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점을 C라 할 때, 점 C는 곡선 $y=f(x)$ 위에 있다. 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점을 D라 할 때, 삼각형 BCD의 넓이는? (단, k는 양수이고, 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.) [4점]

기하적 비율!



① $\dfrac{\sqrt{15}}{8}\pi$ ② $\dfrac{9\sqrt{5}}{40}\pi$ ③ $\dfrac{\sqrt{5}}{4}\pi$ ④ $\dfrac{3\sqrt{10}}{16}\pi$ ⑤ $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}\pi$

$A(p, \cos p)$

$B(\pi+p, -\cos p)$

$C(\frac{3}{2}\pi+p, \ K\sin(\frac{3}{2}\pi+p))$

$-2\cos p = -K\cos p$

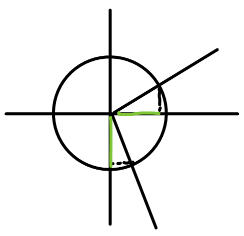
$\therefore K=2$

$\hookrightarrow A(p, \cos p) = (p, 2\sin p)$

$\tan p = \frac{1}{2}$

$\cos p = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin p = \frac{1}{\sqrt{5}}$



14. 양의 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-3t^2x$$

라 할 때, 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$의 최댓값을 각각 $M_1(t)$, $M_2(t)$라 하자. 함수

$$g(t)=M_1(t)+M_2(t)$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

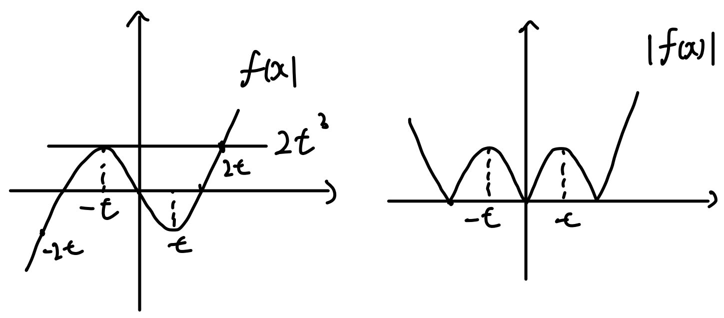
ㄱ. $g(2)=32$

ㄴ. $g(t)=2f(-t)$를 만족시키는 t의 최댓값과 최솟값의 합은 3이다.

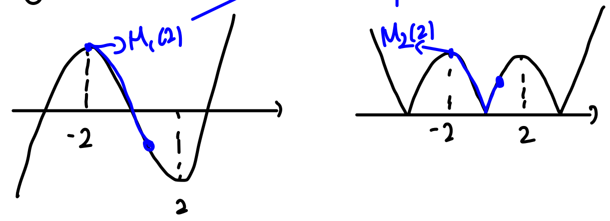
ㄷ. $\displaystyle\lim_{h\to0+}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}-\lim_{h\to0-}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}=5$

$\hookrightarrow g'(\frac{1}{2}^{+})$

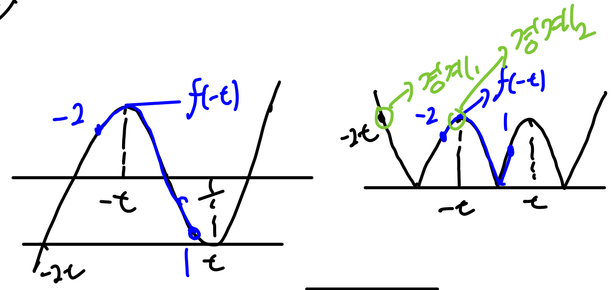
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



ㄱ. $g(2) \Rightarrow t=2$ $\boxed{16}$

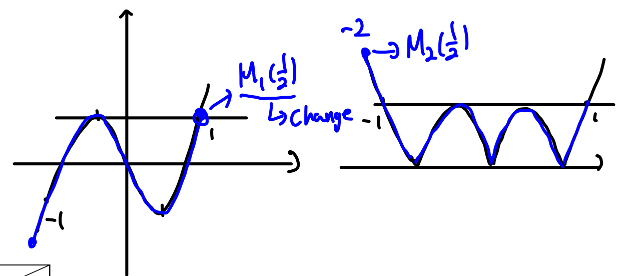


ㄴ.



$\boxed{1 \le t \le 2}$

ㄷ. $g'(\frac{1}{2}^{+}) - g'(\frac{1}{2}^{-}) = 5 \longrightarrow t=\frac{1}{2}$ 일 때 check



$f'(x)=3x^2-\frac{3}{4}$

$g'(\frac{1}{2}^{+}) = 3-\frac{3}{4}+12-\frac{3}{4}$

$g'(\frac{1}{2}^{-}) = 0+12-\frac{3}{4}$

15. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $\log_2 \frac{M}{m}$의 값은? [4점]

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{n-2} & (a_n < 1) \\ \log_2 a_n & (a_n \ge 1) \end{cases}$$
> 이다.
> (나) $a_5 + a_6 = 1$

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

역추적

$a_5 = p$

$a_6 = 2^3$ $(p<1)$ or $\log_2 p$ $(p \ge 1)$

(나) $p + 8 = 1$ or $p + \log_2 p = 1$

$\hookrightarrow p = -7$ $\hookrightarrow p = 1$

① $p = -7$

$a_5 = -7$

$a_4 = 2^{-7}$ 모순

② $p = 1$

$a_5 = 1$

$a_4 = 2$

$a_3 = K$ $(K<1)$ or 4 ~ M 최대의 흐름

$a_2 = 2^K$ $(2^K \ge 1)$ or 2^4

$\hookrightarrow 0 \le K < 1$

$a_1 = 2^{2^K}$

$\therefore M = 2^{16}$

$m = 2^1$

단답형

16. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $y = 4^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프가 점 $\left(\frac{3}{2}, 5\right)$를 지날 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

→ 함수처럼

18. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xf(x)-2x^3+1}{x^2}=5,\ f(0)=1$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 위치 $x(t)$가

$$x(t)=\frac{3}{2}t^4-8t^3+15t^2-12t$$

이다. 점 P의 운동 방향이 바뀌는 순간 점 P의 가속도를 구하시오. [3점]

$v(t)=6t^3-24t^2+30t-12=6(t-1)^2(t-2)$ 바뀌는 순간

$a(2)=18\times4-48\times2+30$

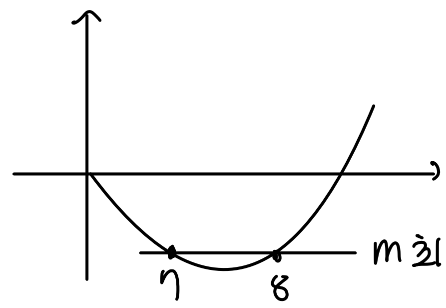
$\boxed{6}$

20. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. S_n이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{13}의 값을 구하시오. [4점]

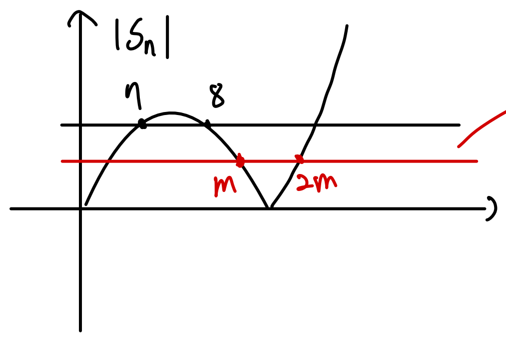
(가) S_n은 $n=7$, $n=8$에서 최솟값을 갖는다.
(나) $\lvert S_m\rvert=\lvert S_{2m}\rvert=162$인 자연수 $m(m>8)$이 존재한다.

$S_n \approx 2$차

$\boxed{30}$



→ $a_8=0$ → $a_1=-7d$



→ $S_m=-162$, $S_{2m}=162$

→ $S_9=\frac{9\times-6d}{2}=-162$

$\therefore d=6$

① $\frac{\cancel{m}(a_1+a_m)}{2}=-\frac{2\cancel{m}(a_1+a_{2m})}{2}$

$\therefore 3a_1=-a_m-2a_{2m}$

$3a_1=-a_1-d(m-1)-2a_1-2d(2m-1)$

$-42d=-d(5m-3)$

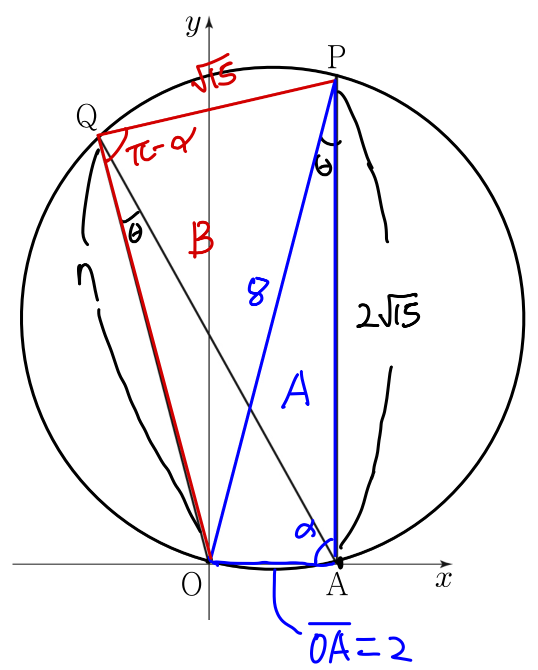
$\boxed{m=9}$

21. 좌표평면 위의 두 점 O(0, 0), A(2, 0)과 y좌표가 양수인 서로 다른 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{AQ}} = 2\sqrt{15}$ 이고 $\overline{\mathrm{OP}} > \overline{\mathrm{OQ}}$ 이다.
>
> (나) $\cos(\angle\mathrm{OPA}) = \cos(\angle\mathrm{OQA}) = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$
>
> 원

사각형 OAPQ의 넓이가 $\dfrac{q}{p}\sqrt{15}$ 일 때, $p \times q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\boxed{22}$



(나) $\cos\theta = \frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{4} \longrightarrow \boxed{r = 4}$

사각형 $\Rightarrow$ A + B

① $\overline{OP}$: cos $\Rightarrow 4 = 60 + a^2 - 4\sqrt{15}\,a \times \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\overline{OP}$ and $\overline{OQ}$

$\therefore \overline{OP} = 8,\ \overline{OQ} = 7$

② $\cos\alpha \Rightarrow 64 = 60 + 4 - 8\sqrt{15} \times \underbrace{\cos\alpha}_{0}$ $\quad\therefore \alpha = \frac{\pi}{2}$

$\therefore A = 2\sqrt{15},\ B = \frac{7}{2}\sqrt{15}$

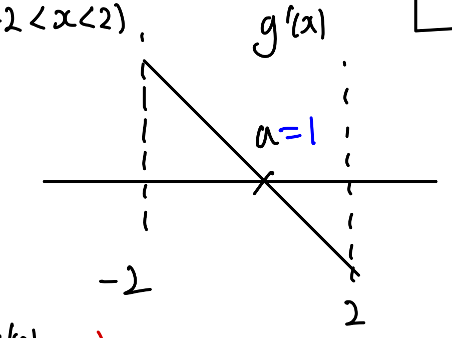
22. 두 상수 a, $b\,(b \neq 1)$과 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 연속
>
> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 도함수 $g'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
>
> (나) $|x| < 2$일 때, $g(x) = \displaystyle\int_0^x (-t+a)\,dt$ 이고
>
> $|x| \geq 2$일 때, $|g'(x)| = f(x)$이다.
>
> (다) 함수 $g(x)$는 $x = 1$, $x = b$에서 극값을 갖는다.

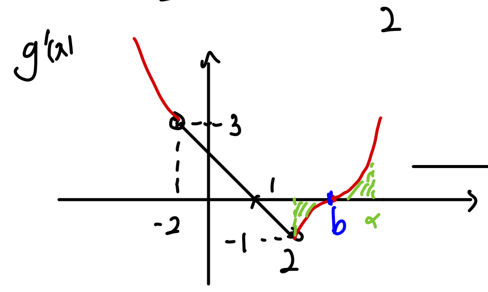
$g(k) = 0$을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합이 $p + q\sqrt{3}$ 일 때, $p \times q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]

$\longrightarrow 0, 2, \alpha$

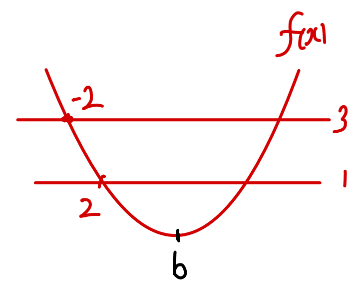
$(-2 < x < 2)$

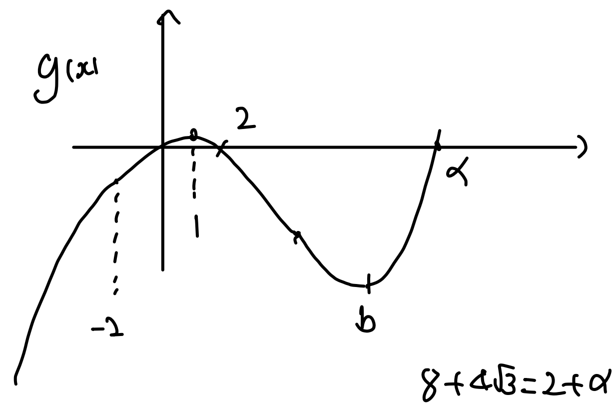


$\boxed{32}$



$\longrightarrow |g'(x)|$





$p(x-b)^2 \longrightarrow p(2-b)^2 = 1$

$\longrightarrow p(2+b)^2 = 3$

$\underline{b = 4+2\sqrt{3}}$

$8 + 4\sqrt{3} = 2 + \alpha$

$\therefore \alpha = \underline{6 + 4\sqrt{3}}$

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.