2024학년도 6월 모의평가 대비
기대 N제 모의고사
정답 및 해설

정답 및 예상 등급 구분 점수											
공 통				확률과 통계		미적분		기하			
1.	④	12.	③	23.	②	23.	②	23.	⑤		
2.	①	13.	⑤	24.	②	24.	⑤	24.	③		
3.	①	14.	⑤	25.	①	25.	④	25.	④		
4.	③	15.	②	26.	④	26.	⑤	26.	⑤		
5.	①	16.	8	27.	①	27.	①	27.	①		
6.	④	17.	13	28.	③	28.	③	28.	⑤		
7.	②	18.	20	29.	48	29.	30	29.	6		
8.	④	19.	99	30.	262	30.	16	30.	8		
9.	⑤	20.	52	1컷	81	1컷	82	1컷	84		
10.	⑤	21.	18	2컷	74	2컷	74	2컷	76		
11.	②	22.	51	3컷	67	3컷	66	3컷	68		

출제자 소개

이재종(그린란드)

- 성균관대 수학교육과 졸업
- 국가장학재단 이공계장학금 전액 장학생
- 2013년 네이버 파워지식IN
- 녹색지대 모의고사(2020~) 출제 및 제작
- (前) 이투스247
- (現) 경기도교육청 소속 수학과 교사

김기대 T

- 고려대학교 수학과
- 2015~ 기대모의고사 저자
- 2023~ 기대 N제 저자
- 2023~ Show and Prove 1편~4편 저자
- (現) 오르비, 이투스, 대치명인학원 수능 수학 & 수리논술 강의

주의 사항 및 이용 안내

2024년 추가 무료 컨텐츠

- EBS 연계교재 선별 문항 목록 / 변형 문항 및 각종 자료: orbi.kr/profile/416016
- 녹색지대 모의고사: blog.naver.com/wowhd93 (배포 예정)

공 통 과 목(1 ~ 22)

1. [출제 의도] 로그의 값을 계산할 수 있는가?

$\left(2^{\log_3 5}\right)^{\log_2 3} = 2^{\log_3 5 \times \log_2 3} = 2^{\log_2 5} = 5$

2. [출제 의도] 함수의 극한을 계산할 수 있는가?

$\lim\limits_{x \to 2}\left(\sqrt{x^2+ax}-x\right) = \sqrt{4+2a}-2 = 4$에서

$2a+4 = 6^2 \Rightarrow a = 16$

3. [출제 의도] 등비수열의 성질을 이해하고 있는가?

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$\dfrac{a_3}{a_2}+\dfrac{a_5}{a_4} = r+r = 6 \Rightarrow r = 3$

$\therefore\ \dfrac{a_2}{a_1}+\dfrac{a_5}{a_3} = r+r^2 = 12$

4. [출제 의도] 함수의 극한의 뜻을 알고 있는가?

주어진 그림에서

$\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = 2$이므로 $k = 2$

$\therefore\ f(k)+\lim\limits_{x \to k-} f(x) = f(2)+\lim\limits_{x \to 2-} f(x)$

$= 2+1 = 3$

5. [출제 의도] 합의 기호 $\sum$의 성질을 이해하고 있는가?

$\sum\limits_{n=1}^{10}(a_n+b_n) = 20$에서 $\sum\limits_{n=1}^{10}(3a_n+3b_n) = 60$

이고

$\sum\limits_{n=1}^{10}(2a_n-3b_n) = 30$

이므로 위 두 등식을 변변 더하면

$\sum\limits_{n=1}^{10}5a_n = 90 \quad \therefore\ \sum\limits_{n=1}^{10}a_n = 18$

6. [출제 의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 계산할 수 있는가?

직선 $y = \dfrac{2}{3}x+1$과 수직인 직선의 기울기는

$-\dfrac{3}{2}$이므로 $\tan\theta = -\dfrac{3}{2}$이다.

$0 < \theta < \pi$이므로 $\sin\theta > 0$이고,

$\sin\theta = \dfrac{3}{\sqrt{2^2+3^2}} = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$이다.

$\therefore\ \cos\left(\dfrac{3}{2}\pi+\theta\right) = \sin\theta = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

7. [출제 의도] 곡선 밖의 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

직선이 곡선 $y = x^3-4x^2+5x$와 서로 다른 두 점에서 만나려면 직선이 곡선에 접해야 한다.

구하는 직선과 곡선이 접하는 점의 좌표를 $(t,\ t^3-4t^2+5t)$라 하면 접선의 방정식은

$y = (3t^2-8t+5)(x-t)+t^3-4t^2+5t$

$= (3t^2-8t+5)x-2t^3+4t^2$

이고, 이 직선이 점 $(1, 1)$을 지나므로

$(3t^2-8t+5)-2t^3+4t^2 = 1$

$\Rightarrow\ 2t^3-7t^2+8t-4 = 0$

$\Rightarrow\ (t-2)(2t^2-3t+2) = 0$

방정식 $2t^2-3t+2 = 0$은 실근을 갖지 않으므로 $t = 2$이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y = x$이므로 $k = 2$이다.

8. [출제 의도] 삼각함수를 포함한 방정식을 해결할 수 있는가?

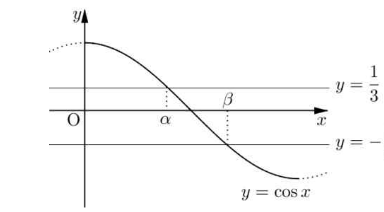
$6\cos^2 x+\cos x-1 = 0$

$\Rightarrow\ (3\cos x-1)(2\cos x+1) = 0$

$\Rightarrow\ \cos x = -\dfrac{1}{2}$ 또는 $\cos x = \dfrac{1}{3}$

$0 < x < \pi$이므로 아래 그림에서

$\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\cos\beta = -\dfrac{1}{2}$



$\sin\alpha > 0$, $\sin\beta > 0$이므로

$\therefore\ \sin\alpha\sin\beta = \sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\therefore\ \tan\alpha\tan\beta = \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$

$= \dfrac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)} = -2\sqrt{6}$

9. [출제 의도] 적분과 미분의 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$g(x) = \int_0^x f(t)dt$라 하자. 조건에 의하여

$x < 1$이면 $g(x) \le 0$, $x \ge 1$이면 $g(x) \ge 0$ ⋯ (*)

이다.

함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

$g(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$이고,

$x < 1$일 때 $g(x) \le 0$이므로 함수 $g(x)$는 $x = 1$에서 극댓값 0을 갖는다.

따라서 다항식 $g(x)$는 x^2을 인수로 갖는다.

또, (*)에서 함수 $g(x)$가 연속함수이므로 $g(1) = 0$이다. 즉, 다항식 $g(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다.

$\therefore\ g(x) = x^2(x-1)$

$\Rightarrow\ \int_0^x f(t)dt = x^2(x-1)$

위 등식의 양변을 미분하면 적분과 미분의 관계에서

$f(x) = 2x(x-1)+x^2$

$\therefore\ f(3) = 12+9 = 21$

10. [출제 의도] 지수함수와 로그함수의 그래프의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

두 함수 $y = \log_a(x+1)+\sqrt{3}$, $y = a^{x-\sqrt{3}}-1$은 서로 역함수 관계에 있으므로

점 A의 좌표를 (p, q)라 하면 점 A는 $y = -x+k$ 위의 점이므로 $q = -p+k \Rightarrow p = -q+k$

즉, 점 (q, p) 또한 직선 $y = -x+k$ 위의 점이므로 역함수의 그래프의 성질에 의하여 점 B의 좌표는 (q, p)이다. $(p < q)$

문제의 조건에서

$\overline{OA} = \overline{AB} = 2\sqrt{2}$이므로

$\overline{OA} = \sqrt{p^2+q^2} = 2\sqrt{2}$

$\overline{AB} = \sqrt{2(p-q)^2} = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow\ p^2+q^2=8,\ (p-q)^2=4$

이 둘을 연립하여 풀면

$p=\sqrt{3}-1,\ q=\sqrt{3}+1$

즉, 점 $(\sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}+1)$은

곡선 $y=\log_a(x+1)+\sqrt{3}$ 위의 점이므로

$\log_a\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{3}+1 \ \Rightarrow\ a=\sqrt{3}$

또한, 점 $(\sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}+1)$은 직선 $y=-x+k$ 위의 점이므로

$\sqrt{3}+1=-(\sqrt{3}-1)+k\ \Rightarrow\ k=2\sqrt{3}$

$\therefore\ (a+k)^2=(3\sqrt{3})^2=27$

11. [출제 의도] 삼각함수를 포함하는 방정식을 풀고, 수열의 일반항을 추론할 수 있는가?

$\tan\left\{\dfrac{a_{n+1}+a_n}{4}\times\pi\right\}=1$ 에서

탄젠트함수의 그래프의 성질에 의하여

$a_{n+1}+a_n=1,\ 5,\ 9,\ 13,\ \cdots$

이다.

$1\le a_2+a_1<5$ 이므로 $a_2+a_1=1$

$2\le a_3+a_2<6$ 이므로 $a_3+a_2=5$

$3\le a_4+a_3<7$ 이므로 $a_4+a_3=5$

식으로 각각의 n에 대하여 $a_{n+1}+a_n$이 가질 수 있는 값을 정한 후, $a_1=1$임을 이용하면

$a_1=1,$

$a_2=0,\ a_3=5,\ a_4=0,\ a_5=5,$

$a_6=0,\ a_7=9,\ a_8=0,\ a_9=9,$

$\cdots$

임을 알 수 있으므로 수열 $\{a_n\}$의 값은 a_2부터

0 5 0 5 / 0 9 0 9 / 0 13 0 13 / $\cdots$ 으로 반복된다.

$\therefore\ \displaystyle\sum_{k=1}^{25}a_k=1+2\times(5+9+13+\ \cdots\ +25)=181$

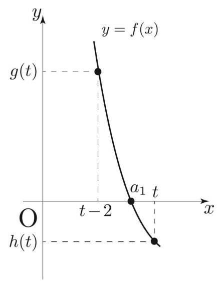
12. [출제 의도] 미분을 이용하여 다항함수의 그래프의 모양을 추론할 수 있는가?

문제의 조건에서 $g(t)\times h(t)=0$ 이므로 $f(x)=0$인 $x=a$가 반드시 존재한다. 이러한 a의 값 중 제일 작은 값을 a_1이라 하자.

$t=a_1$의 좌우에서 $f(x)$의 부호가 바뀌게 되면

충분히 작은 양수 $h(<4)$에 대하여

$t=a_1+h$ (즉, t가 a_1보다 아주 약간 큰 수) 일 때 $g(t)\times h(t)<0$이다.



따라서 문제의 조건과 같이 방정식 $g(t)\times h(t)=0$은 $3\le t\le 7$처럼 연속된 t의 해집합을 가질 수 없게 된다.

따라서 $t=a_1$에서 $f(x)$의 부호가 바뀌지 않는다.

함수 $f(x)$가 $t=a_1$에서 극값을 갖는다.

같은 방법으로 방정식 $f(x)=0$인 x에서 함수 $f(x)$는 극값을 갖는다.

방정식 $g(t)\times h(t)=0$의 가장 작은 근이 $t=3$이므로, 구간 $[1,3]$일 때 $f(x)=0$을 만족시키는 x가 최초로 등장해야 한다.

따라서 $f(x)=(x-3)^2(x-b)^2$ (단, $3<b$) 꼴임을 알 수 있다.

또한 $t=7$이 t의 해집합의 마지막 원소이므로 $b=5$이다.

($b>5$면 3과 b의 간격이 구간 $[t-2,t]$의 간격인 2보다 커지게 돼서 '모든 t의 범위가 하나의 연속된 구간 : $3\le t\le 7$' 조건에 모순이 된다. 예를 들어, $b=6$일 때 $g(t)\times h(t)=0$ 이 되도록 하는 모든 t의 범위는 $3\le t\le 5$ or $6\le t\le 8$이다.)

따라서

$f(x)=(x-3)^2(x-5)^2$

$\Rightarrow\ f'(x)=4(x-3)(x-4)(x-5)$

$\therefore\ f'(6)=24$

13. [출제 의도] 정적분의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$g'(x)=f(x)$이고, (가)에 의하여 $g'(2)=0$이므로 $f(2)=0$이다.

또한 (나)에 의하여 $g'(4)=0,\ g(4)=3$임을 알 수 있다. 따라서 $f(4)=0$이다.

위의 두 결과에 의하여 $f(x)=a(x-2)(x-4)$로 둘 수 있는데, $x=2$에서 $g(x)$가 극솟값을 가지므로, $f(x)(=g'(x))$의 부호가 $x=2$의 좌우에서 음에서 양으로 바뀌어야 한다. 따라서 $a<0$이다.

(ㄱ) $f(x)=a(x-2)(x-4)\ \ (a<0)$이므로 $f(1)=3a<0$이다. (참)

(ㄴ) $y=f(x)$의 그래프가 $x=3$에 대하여 대칭이므로 $y=|f(x)|$의 그래프도 $x=3$에 대하여 대칭이다. 따라서

$\displaystyle\int_1^5|f(x)|dx=2\int_1^3|f(x)|dx$이다.

$\displaystyle\int_1^3|f(x)|dx=\int_1^2-f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx$이므로

$\displaystyle\int_1^5|f(x)|dx=-2\int_1^2 f(x)dx+2\int_2^3 f(x)dx$이다.

한편,

$\displaystyle\int_2^3 f(x)dx=a\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x\right]_2^3=-\frac{2}{3}a$ 이고

$\displaystyle\int_1^2 f(x)dx=a\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x\right]_1^2=\frac{4}{3}a$이므로

$\displaystyle 2\int_2^3 f(x)dx=-\int_1^2 f(x)dx$

이다. 따라서 주어진 등식이 성립한다. (참)

(ㄷ) $f(x)=a(x^2-6x+8)$이고, $g(4)=3$이다.

$g(3)=1$이므로 $g(4)-g(3)=2$이고,

$g'(x)=f(x)$이므로

$\displaystyle\Rightarrow\ g(4)-g(3)=\int_3^4 f(x)dx=2$

$\displaystyle\int_3^4 f(x)dx=a\int_3^4(x^2-6x+8)dx=2$ 에서

$\therefore\ a=-3$

따라서 $f(x)=-3(x-2)(x-4)$이고,

$|f(x)|=9$인 x의 값은 $1,5$이다.

ㄴ에서

$\displaystyle\int_1^2 f(x)dx=a\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x\right]_1^2=\frac{4}{3}a=-4$

이고,

$\displaystyle\int_1^5|f(x)|dx=(-3)\times(-4)=12$ 이다.

또한 곡선 $y=|f(x)|$와 직선 $y=9$로 둘러싸인 부분의 넓이는 네 점 $(1,9),(5,9),(1,0),(5,0)$을 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이에서

$\displaystyle\int_1^5|f(x)|dx$를 빼서 구할 수 있으므로

$36-12=24$이다. (참)

14. [출제 의도] 함수의 극한의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

먼저, (가)에서 $n=3$일 때, 분모가 0으로 수렴하므로 분자도 0으로 수렴해야 한다. $\Rightarrow\ g(3)=0$

$n=1,2$일 때 $\displaystyle\lim_{x\to n}\frac{g(x)}{f(x)}=-1$이므로 다음과 같이 나눠 생각한다.

$i)$ $f(n)=0$이면 $g(n)=0$이어야 주어진 극한이 수렴할 수 있다.

$ii)$ $f(n)\ne 0$인 경우, 극한값이 -1이므로

$g(n)\ne 0$이고 $\displaystyle\lim_{x\to n}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{g(n)}{f(n)}=-1$ 에서

$f(n)+g(n)=0$이다.

위의 $i), ii)$ 경우 모두 $f(n)+g(n)=0$을 만족시키므로 결국 곡선 $y=f(x)+g(x)$가 x축과 만나는 두 점의 x좌표는 $1,2$임을 알 수 있다.

ㄱ. $f(x)+g(x)=(x-1)^2(x-2)$인 경우,

$g(3)=0$이므로 $f(3)=4$.

이를 $n=3$일 때 (가) 조건에 적용시켜주면

$g'(3)=6$임을 알 수 있다.

$f(x)+g(x)=(x-1)^2(x-2)$를 미분해주면

$f'(x)+g'(x)=2(x-1)(x-2)+(x-1)^2$이고,

$x=3$을 대입하면 $f'(3)=2$임을 알 수 있다.

따라서 이 경우 $f(3)f'(3)=8$

ㄴ. $f(x)+g(x)=(x-1)(x-2)^2$인 경우,

$g(3)=0$이므로 $f(3)=2$.

마찬가지로 $n=3$일 때 (가) 조건에 적용시켜주면

$g'(3)=3$임을 알 수 있다.

$f'(x)+g'(x)=2(x-1)(x-2)+(x-2)^2$에 $x=3$을 대입하면 $f'(3)=2$ 임을 알 수 있다.

따라서 이 경우 $f(3)f'(3)=4$

ㄱ, ㄴ에 의하여 $f(3)f'(3)$의 최댓값과 최솟값이 $8,4$임을 그 합은 12이다.

15. [출제 의도] 등차수열과 등비수열의 성질을 이용하여 귀납적으로 정의된 수열의 항을 계산할 수 있는가?

$a_2-a_1=a,\ a_3-a_2=b$라 하자.

$a_4-a_3=2+a,\ a_5-a_4=-2b$

$a_6-a_5=4+a,\ a_7-a_6=4b$

$a_8-a_7=6+a,\ a_9-a_8=-8b$

$a_{10}-a_9=8+a$

이므로

$a_4-a_2=(a_4-a_3)+(a_3-a_2)$

$\quad=(2+a)+b=a+b+2=0\ \cdots\ (*)$

이다. $a_3<a_2\ \Rightarrow\ b<0$이므로 $a>-2$이다.

비슷한 방법으로

$a_7-a_1=3b+3a+6=0\ \Rightarrow\ a_7=a_1\ \ (\because (*))$

$a_5-a_1=2a-b+2$

$a_5=\dfrac{a_7}{2}$ 이므로 $(*)$에서

$\dfrac{a_7}{2}-a_1=\dfrac{a_1}{2}-a_1=-\dfrac{a_1}{2}=2a-b+2$

$\Rightarrow\ a_1=-4a+2b-4$

$\quad=-4a+2(-a-2)-4=-6a-8$

a_1이 자연수이고 $a>-2$이므로 a의 값은

$-\frac{3}{2}, -\frac{5}{3}, -\frac{11}{6}$ 중 하나이다. ⋯ (#)

$a_{10}-a_1=5a-5b+20$

$\Rightarrow\ a_{10}=a_1+5a-5b+20$

$=-6a-8+5a-5(-a-2)+20$

$=4a+22$

이므로 (#)에서 a_{10}의 최댓값은 $a=-\frac{3}{2}$일 때 16이다.

16. [출제 의도] 로그를 포함한 방정식의 해를 구할 수 있는가?

$\log_2(x+6)+\log_2(x-6)=\log_2(x^2-36)$

$2+\log_2(x-1)=\log_2 4(x-1)$ 에서

$x^2-36=4(x-1)$,

$x^2-4x-32=0,\ (x-8)(x+4)=0.$

$\therefore\ x=8\ (\because\ x>6)$

17. [출제 의도] 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

$g(x)=(x+2)f(x)-3x$ 라 하면 $f(1)=1$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{(x+2)f(x)-3x}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$

$g'(x)=f(x)+(x+2)f'(x)-3$이고

$f(1)=1,\ f'(1)=5$이므로

$\therefore\ g'(1)=f(1)+3f'(1)-3$

$=1+3\times5-3=13$

18. [출제 의도] 실수의 거듭제곱근 중 실수인 것의 개수를 구할 수 있는가?

두 그래프 $y=x^n$과 $y=32-2^{\frac{n}{2}}$가 만나는 점의 개수는 방정식 $x^n=32-2^{\frac{n}{2}}$의 실근의 개수와 같다.

즉, $32-2^{\frac{n}{2}}$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수와 같다.

그 개수가 2인 경우는 n이 짝수이고 $32-2^{\frac{n}{2}}>0$인 경우이다. $32-2^{\frac{n}{2}}>0 \Rightarrow 2^{\frac{n}{2}}<2^5$이므로

$\frac{n}{2}<5$, $n<10$이므로 구하는 n의 값의 합은

$2+4+6+8=20$이다.

19. [출제 의도] 등차수열의 일반항과 합을 구할 수 있는가?

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_n=(n-1)d,\ S_n=\frac{n(n-1)d}{2}$

이므로

$2S_k=11a_k$

$\Rightarrow\ k(k-1)d=11(k-1)d$

$\Rightarrow\ k(k-1)=11(k-1)\ (\because\ d>0)$

$\Rightarrow\ (k-1)(k-11)=0$

$a_{k+2}=(a_{k-2})^2$에서 $k>2$이므로 $k=11$이다.

따라서

$a_{k+2}=(a_{k-2})^2$

$\Rightarrow\ a_{13}=(a_9)^2$

$\Rightarrow\ 12d=(8d)^2,\ d=\frac{3}{16}\ \ (\because\ d>0)$

$\therefore\ S_{3k}=S_{33}=\frac{32\times33}{2}\times\frac{3}{16}=99$

20. [출제 의도] 도함수를 활용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가?

(i) $f(x)=0$의 서로 다른 실근이 오직 하나일 때, 그 실근의 값을 $x=k_1$ 이라 하자. 조건 (나)에 의하면 $g(x)=k_1$의 서로 다른 실근의 합은 15여야 하는데, 합의 최댓값이 $5\times2=10$ 이므로 모순이다.

(ii) $f(x)=0$의 서로 다른 실근이 둘일 때, 그 실근의 값을 각각 $x=k_2, k_3$ (단, $k_2<k_3$)라 하자. 조건 (나)에 의하면 서로 다른 실근의 합은 15, 즉 $5+10$이여야 하므로
방정식 $g(x)=k_2$는 중근 $x=5$를 근으로 갖고,
방정식 $g(x)=k_3$는 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
이때 $k_2=g(5)=-1$이고 $k_3>-1$이다.

$\therefore\ f(x)=(x+1)^2(x-k_3)$ or $(x+1)(x-k_3)^2$

(iii) $f(x)=0$의 서로 다른 실근이 셋일 때,
그 실근의 값을 각각

$x=k_4, k_5, k_6$ (단, $k_4<k_5<k_6$)

이라 하자. (ii)와 같은 방법으로 $k_5=g(5)=-1$, $k_4<-1<k_6$이다.

$\therefore\ f(x)=(x-k_4)(x+1)(x-k_6)$이다. ⋯ (*)

(ii-1): $f(x)=(x+1)^2(x-k_3)$인 경우, 극댓값이 0이므로 (가) 조건에 의하여 극솟값은 -4이다.
이 조건을 이용하여 k_3를 구하면 $k_3=2$이다.

이 경우, $f'(x)=0$의 해는 $x=-1, 1$이다.
이때 방정식 $g(x)=1$은 자연수인 해를 갖지 않으므로 (다) 조건을 만족하지 않는다.

(ii-2): $f(x)=(x+1)(x-k_3)^2$인 경우, 극솟값이 0이므로 (가) 조건에 의하여 극댓값은 4이다.
이 조건을 이용하여 k_3를 구하면 $k_3=2$이다.
이 경우 $f'(x)=0$의 해는 $x=0, 2$이다.
이때 방정식 $g(x)=2$은 자연수인 해를 갖지 않으므로 (다) 조건을 만족하지 않는다.

따라서 가능한 케이스는 (iii)뿐이다.
(가) 조건에서 $f(x)$가 $x=\alpha$, β $(\alpha<\beta)$에서 극값을 갖는다고 하면,

$\frac{3(\beta-\alpha)^3}{6}=4\ \Rightarrow\ \beta=\alpha+2$

(*)에서 $\alpha<-1$이고, $-1<\beta<1$이다.
(다)에서 $f'(g(x))=0 \Leftrightarrow g(x)=\beta$이고,
방정식 $g(x)=\beta$가 자연수인 해만을 갖는 경우는
$\beta=0, 3, 8, 15$인 경우이다.
$-1<\beta<1$이므로 $\therefore\ \beta=0$
$\alpha=-2$이므로 $f'(x)=3x(x+2)$
$f(-1)=0$이므로
$\therefore\ f(x)=x^3+3x^2-2$, $f(3)=52$

21. [출제 의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[cf] 이 문제를 해설보다 '훨씬' 쉽게 풀었다면, 찍맞(ex. 90도가 아닌 각도를 90도라고 우기고 풀었다던지 등의 비약)이므로, 반드시 아래의 일반적 해설을 체크하도록 하자.

문제에서 구하려는 것이 사각형 ABCD의 둘레이므로, 네 변의 길이를 모두 구해야 한다.

삼각형 APB에서 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{AB}=5$이다. 여기서 $\angle ABP=\theta$라 하면

$\cos\theta=\frac{4}{5}$, $\sin\theta=\frac{3}{5}$이고 $\angle ABC=90^\circ+\theta$이다.

길이 정보와 각 정보가 있는 삼각형 ABC 부터 보자.
삼각형 ABC의 외접원 O의 반지름의 길이는

$\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{5\sqrt2}{2}$이므로 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{AC}}{\sin(90^\circ+\theta)}=5\sqrt2$이다.

$\sin(90^\circ+\theta)=\cos\theta$이므로 $\overline{AC}=4\sqrt2$이다.

또한 $\angle APB=\angle PBC=90^\circ$ 이므로 점 A에서 선분 BC의 연장선에 수선의 발 H를 내려 삼각형 AHC에서 피타고라스 정리를 사용하면
$\overline{CH}=\sqrt{(4\sqrt2)^2-4^2}=4$, $\overline{BC}=4-3=1$임을 알 수 있다.

한편 사각형 ABCD는 원에 내접하는 사각형이므로
$\angle ADC=180^\circ-\angle ABC=90^\circ-\theta$이다.

사각형 ABCD의 둘레의 길이를 구해야 하므로
$\overline{DC}=a$, $\overline{DA}=b$라 하자.

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여
$a^2+b^2-2ab\times cos(90^\circ-\theta)=32$ 이므로

$a^2+b^2-\frac{6}{5}ab=32$ ⋯ ①

또한 (다) 조건에 의하여

$\frac{1}{2}ab\sin(90^\circ-\theta)=14$, $ab=35$ ⋯ ②

$(a+b)^2=74+70=144$로부터 $a+b=12$이고
$\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=1$ 사각형 ABCD의 둘레의 길이는
$12+5+1=18$

[cf] ①에 ②를 적용하면 $a^2+b^2=74$, $ab=35$이다.
이 둘을 연립하면 a, b를 $(5, 7)$ 혹은 $(7, 5)$로 구할 수 있겠으나 앞서 말했듯이 문제의 목표는 둘레의 길이를 구하는 것이므로 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ 공식을 활용해주는 것도 좋은 방법이다.

22. [출제 의도] 적분과 미분의 관계를 이용하여 함수의 식을 추론할 수 있는가?

함수 $h(x)$가 $x=0$에서 연속이고 $h(0)=0$이므로
$f(0)=0$ ⋯ ① 이고

$\int_0^2 g(t)dt=0$ ⋯ ② 이다.

또한 $h(0)=0$이므로 함수 $|h(x)|$는 $x=0$에서 극솟값을 가지고, $(\because\ |h(x)|\geq0)$
함수 $|h(x)|$가 $x=0$에서 미분가능하므로
$h'(0)=0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0-}\frac{h(x)}{x}=f'(0)=0$ ⋯ ③ 이고

$\lim_{x\to0+}\frac{h(x)}{x}=g(2)-g(0)=0$ ⋯ ④ 이다.

$\left(\because\ \frac{d}{dx}\int_x^{x+2}g(t)dt=g(x+2)-g(x)\right)$

함수 $|h(x)|$가 $x=-2$에서 미분가능하지 않으므로
$h(-2)=f(-2)=0$이어야 한다. ⋯ ⑤

따라서 ①, ③, ⑤에서 $f(x)=x^2(x+2)$이다.

④에서 $g(0)=g(2)=b$라 하면 인수정리에서

$g(x)=x(x-2)(x-a)+b$

로 둘 수 있다. (a, b는 실수)

②에서

$$\int_0^2 g(x)dx = \int_0^2 \{x^3-(a+2)x^2+2ax+b\}dx$$
$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(a+2)x^3 + ax^2 + bx\right]_0^2$$
$$= 4 - \frac{8}{3}(a+2) + 4a + 2b$$
$$= \frac{4}{3}a + 2b - \frac{4}{3} = 0$$

$$\Rightarrow\ b = -\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}$$

$$\therefore\ g(x) = x^3-(a+2)x^2+2ax-\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}$$
$$= x(x-a)(x-2) - \frac{2}{3}(a-1)$$

$x>0$일 때

$$h'(x) = g(x+2)-g(x)$$
$$= x(x+2)(x+2-a) - x(x-a)(x-2)$$
$$= x(6x-4a+4)$$

이고, $\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$이므로

$x>0$일 때 함수 $h(x)$의 함숫값이 0보다 작은 점이 존재하면 사잇값 정리에 의해 함수 $|h(x)|$가 $x>0$에서 미분가능하지 않은 점(즉, $h(x)=0$이고 $h'(x)\neq 0$인 점)이 존재한다.

따라서 조건 (나)를 만족하려면 $x>0$일 때 $h(x)\geq 0$이어야 한다.

$h'(x) = x(6x-4a+4)$에서 $a>1$이면 함수 $h(x)$가 열린구간 $(0, k)$에서 감소하게 되는 양수 k가 존재하고, $a\leq 1$이면 함수 $h(x)$는 열린구간 $(0, \infty)$에서 증가한다.

따라서 조건 (나)를 만족하려면 $a\leq 1$이어야 한다.

$$\therefore\ f(3)+g(3) = 45+27-9(a+2)+6a-\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}$$
$$= 54 - \frac{11}{3}a + \frac{2}{3}$$
$$\geq 54 - \frac{11}{3} + \frac{2}{3} = 51$$

따라서 $f(3)+g(3)$의 최솟값은 51이다.

확률과 통계(23~30)

23. [출제 의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

구하는 경우의 수는 $\dfrac{6!}{2!2!2!} = 90$

24. [출제 의도] 이항정리를 이용하여 전개식의 계수를 구할 수 있는가?

$\left(x^2+\dfrac{3}{x}\right)^5$의 전개식에서 x^4의 계수는 이항정리에 의하여 ${}_5C_3 \times 1^3 \times 3^2 = 90$이다.

25. [출제 의도] 독립인 사건의 성질을 이용하여 문제를 확률을 구할 수 있는가?

$\dfrac{P(A)}{P(B)} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{P(B^C)}{P(A^C)} = \dfrac{1-P(B)}{1-P(A)} = \dfrac{1}{3}$이므로

$P(B) = \dfrac{3}{4}$, $P(A) = \dfrac{1}{4}$이다.

두 사건 A, B가 독립이므로
$P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$,

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$= 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

26. [출제 의도] 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

가능한 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 $6^2 = 36$이다.

(1) 곡선 $y=x^2+ax+b$가 x축과 만나기 위해서는 방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식 $D=a^2-4b$에 대하여 $D\geq 0$이어야 한다.
즉, $a^2\geq 4b$이어야 한다.

$a=1$이면 위 부등식을 만족하는 b는 없다.
$a=2$이면 $b=1$이 위 부등식을 만족한다.
$a=3$이면 $b=1, 2$가 위 부등식을 만족한다.
$a=4$이면 $b=1, 2, 3, 4$가 위 부등식을 만족한다.
$a=5$ 또는 $a=6$이면 $b=1, 2, 3, 4, 5, 6$이 모두 위 부등식을 만족한다.

따라서 곡선 $y=x^2-ax+b$가 x축과 만날 확률은

$$\frac{1+2+4+2\times 6}{36} = \frac{19}{36}$$

(2) 곡선 $y=x^2+ax+b$가 직선 $y=3x$와 한 점에서 만나기 위해서는 방정식

$$x^2+ax+b=3x \Leftrightarrow x^2+(a-3)x+b=0$$

의 판별식 $D'=(a-3)^2-4b$에 대하여 $D'=0$이어야 한다.
즉, $(a-3)^2=4b$이어야 한다. 이때 b는 제곱수이어야 하므로

$b=1$이면 $a=1, 5$가 위 등식을 만족한다.
$b=4$이면 위 등식을 만족시키는 a는 없다.

따라서 곡선 $y=x^2-ax+b$가 직선 $y=3x$와 한 점에서만 만날 확률은

$$\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

(3) 곡선 $y=x^2+ax+b$가 x축과 만나고, 직선 $y=3x$와 한 점에서만 만나는 경우는 (1), (2)에서 $(a, b)=(5, 1)$인 경우뿐이므로 곡선 $y=x^2+ax+b$가 x축과 만나고, 직선 $y=3x$와 한 점에서만 만날 확률은

$$\frac{1}{36}$$

(1)~(3)과 확률의 덧셈정리에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{19}{36}+\frac{1}{18}-\frac{1}{36} = \frac{5}{9}$$

27. [출제 의도] 중복조합을 이용하여 방정식의 정수인 해의 개수를 구할 수 있는가?

$x+y+z+w=14$를 만족시키는 음이 아닌 정수 순서쌍 (x, y, z, w)의 전체 경우의 수는
${}_4H_{14}=680$이고,
이 중 $x+y\geq 4(z+w)$인 경우의 수를 빼면 된다.

$x+y\geq 4(z+w)$의 양변에 $z+w$를 더해주면
$14\geq 5(z+w)$이므로, $z+w=0, 1, 2$이어야 한다.

$i)$ $z+w=0$일 때, $x+y=14$이므로 경우의 수는
${}_2H_0\times{}_2H_{14}=15$.
$ii)$ $z+w=1$일 때, $x+y=13$이므로 경우의 수는
${}_2H_1\times{}_2H_{13}=28$.
$ii)$ $z+w=2$일 때, $x+y=12$이므로 경우의 수는
${}_2H_2\times{}_2H_{12}=39$.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는
$680-(15+28+39)=598$이다.

28. [출제 의도] 조건부확률의 정의를 이해하고 있는가?

세 수 a, b, c 중 두 수만 서로 같은 사건을 A라 하고, $a\times b\times c$가 6의 배수인 사건을 B라 하자.

$n(A) = {}_3C_2\times{}_6P_2 = 90$
이고, 사건 $A\cap B$는 아래와 같은 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(1) 같은 두 수가 1 또는 5인 경우
남은 하나의 수는 6이어야 하므로 가능한 경우의 수는 ${}_3C_2\times 1\times 2=6$

(2) 같은 두 수가 2 또는 4인 경우
남은 하나의 수는 3 또는 6이어야 하므로 가능한 경우의 수는 ${}_3C_2\times 2\times 2=12$

(3) 같은 두 수가 3인 경우
남은 하나의 수는 2 또는 4 또는 6이어야 하므로 가능한 경우의 수는 ${}_3C_2\times 3=9$

(4) 같은 두 수가 6인 경우
남은 하나의 수는 6을 제외한 다섯 개의 수가 모두 될 수 있으므로 가능한 경우의 수는 ${}_3C_2\times 5=15$

(1)~(4)에서

$$n(A\cap B) = 6+12+9+15=42$$

조건부확률의 정의에 의하여 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{n(A\cap B)}{n(A)} = \frac{7}{15}$$

29. [출제 의도] 같은 것이 있는 순열과 확률의 곱셈정리를 이해하고 있는가?

(1) 숫자 1이 적힌 카드를 2장 선택하는 경우

이 경우는 1, 1, 2, 2, 3 또는 1, 1, 2, 3, 3이 적힌 카드를 선택하여 나열하는 경우이다.

숫자 1인 적힌 카드를 2장 선택할 확률은

$$\frac{{}_3C_2\times{}_4C_3}{{}_7C_5} = \frac{4}{7}$$

숫자 1이 적힌 카드끼리 이웃하지 않을 확률은

$$1-\frac{\frac{4!}{2!}}{\frac{5!}{2!2!}} = 1-\frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

따라서 이 경우 문제의 조건을 만족시킬 확률은

$$\frac{4}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{35}$$

(2) 숫자 1이 적힌 카드를 3장 선택하는 경우

이 경우는 1, 1, 1, 2, 2 또는 1, 1, 1, 3, 3 또는 1, 1, 1, 2, 3이 적힌 카드를 선택하여 나열하는 경우이다.

(a) 1, 1, 1, 2, 2 또는 1, 1, 1, 3, 3를 선택할 확률은

$$\frac{{}_3C_3\times{}_2C_2\times2}{{}_7C_5}=\frac{2}{21}$$

이 경우 숫자 1이 적힌 카드끼리 이웃하지 않을 확률은

$$\frac{1}{\frac{5!}{3!\,2!}}=\frac{1}{10}$$

따라서 이 경우 문제의 조건을 만족할 확률은

$$\frac{2}{21}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{105}$$

(b) 1, 1, 1, 2, 3을 선택할 확률은

$$\frac{{}_3C_3\times{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_7C_5}=\frac{4}{21}$$

이 경우 숫자 1이 적힌 카드끼리 이웃하지 않을 확률은

$$\frac{2}{\frac{5!}{3!}}=\frac{1}{10}$$

따라서 이 경우 문제의 조건을 만족할 확률은

$$\frac{4}{21}\times\frac{1}{10}=\frac{2}{105}$$

(1), (2)에 의하여 문제의 조건을 만족할 확률은

$$\frac{12}{35}+\frac{1}{105}+\frac{2}{105}=\frac{13}{35}$$

$\therefore\ p+q=13+35=48$

(다른 풀이) 같은 것이 적힌 카드도 서로 다른 것으로 간주하고 문제를 해결할 수 있다.

(1) 숫자 1이 적힌 카드를 2장 선택하는 경우

1이 적힌 카드를 제외한 3장의 카드를 먼저 일렬로 나열하고, 3장의 카드의 사이에 1이 적힌 카드 2장을 배열하면 되므로 구하는 확률은

$$\frac{{}_4P_3\times\left({}_3C_2\times{}_4P_2\right)}{{}_7P_5}=\frac{12}{35}$$

(2) 숫자 1이 적힌 카드를 3장 선택하는 경우

1이 적힌 카드를 먼저 모두 나열하고, 3장의 카드의 사이에 1이 아닌 수가 적힌 카드 2장을 선택하여 배열하면 되므로 구하는 확률은

$$\frac{3!\times{}_4P_2}{{}_7P_5}=\frac{1}{35}$$

(1), (2)에 의하여 문제의 조건을 만족할 확률은

$$\frac{12}{35}+\frac{1}{35}=\frac{13}{35}$$

$\therefore\ p+q=13+35=48$

30. [출제 의도] 중복조합을 이용하여 조건을 만족하는 경우의 수를 구할 수 있는가?

별 무늬의 공이 2개 이상 들어간 상자를 정하는 경우의 수는

$${}_4C_1=4$$

이다. 이때 조건 (가)를 만족시키는 경우를 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 생각한다.

(1) 별 무늬의 공이 2개 들어간 상자가 있는 경우

(i) 별 무늬의 공이 2개 들어간 상자에 별 무늬의 흰 공이 2개 들어간 경우, 별 무늬의 검은 공은 별 무늬의 흰 공이 들어가지 않은 상자에 들어가야 하므로 별 무늬의 검은 공을 상자에 넣는 방법의 수는

$${}_3C_1=3$$

남은 흰 공 1개와 검은 공 2개를 상자 4개에 나누어 넣는 방법의 수는

$${}_4H_1\times{}_4H_2=40$$

이렇게 공을 나누어 넣는 경우, 항상 조건 (나)를 만족시키므로 (별 무늬의 흰 공이 2개 들어가는 상자가 있다.) 이 경우 문제의 조건을 만족시키는 모든 경우의 수는

$${}_4H_1\times{}_4H_2\times{}_3C_1=120$$

(ii) 별 무늬의 공이 2개 들어간 상자에 별 무늬의 흰 공과 검은 공이 각각 1개씩 들어간 경우,
상자에 들어가지 않은 별 무늬의 흰 공은 위의 상자와 다른 상자에 들어가야 한다.
(i)과 같은 방법으로 남은 별 무늬의 흰 공 하나와 흰 공 1개, 검은 공 2개를 상자에 나누어 담는 방법의 수는

$${}_4H_1\times{}_4H_2\times{}_3C_1=120$$

이때, 조건 (나)를 만족시키기 위하여 위에서 구한 모든 경우에서 각 상자에 흰 공과 검은 공이 각각 1개 이하로 들어가는 경우를 제외해야 한다.
각 상자에 흰 공과 검은 공이 각각 1개 이하로 들어가는 경우의 수는
나머지 3개의 상자 중에서 별 무늬의 흰 공이 들어가는 방법의 수가 3,
별 무늬의 흰 공이 들어가지 않은 두 상자에 흰 공이 들어가는 경우의 수가 2,
검은 색 공이 3개의 상자에 각각 하나씩 들어가는 경우의 수가 ${}_3C_2$이므로

$$3\times2\times{}_3C_2=18$$

이다. 따라서 문제의 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$120-18=102$$

(i), (ii)에서 별 무늬의 공이 2개 들어간 상자가 있는 경우, 문제의 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$120+102=222$$

(2) 별 무늬의 공이 3개 들어간 상자가 있는 경우

이 경우 조건 (나)를 항상 만족시키고, 남은 흰 공 1개와 검은 공 2개만 상자 4개에 나누어 담으면 된다. (1)과 같은 방법으로 문제의 조건을 만족시키는 경우의 수는

$${}_4H_1\times{}_4H_2=40$$

(1), (2)에서 문제의 조건을 만족시키는 모든 경우의 수는

$$4\times(222+40)=4\times262=p$$

이므로 $\frac{p}{4}=262$이다.

미 적 분 (23 ~ 30)

23. [출제 의도] 수열의 극한을 구할 수 있는가?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1}\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1}}=2$$

이다.

24. [출제 의도] 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

방정식 $x^2-xy+e^y=2$의 양변을 x에 대해 미분하면

$2x-y-xy'+y'e^y=0$

$\Rightarrow\ (x-e^y)y'=2x-y\,,\ y'=\dfrac{2x-y}{x-e^y}$

$(x,y)=(-1,0)$을 대입하면

$$y'=\frac{-2}{-1-1}=1$$

이다. 따라서 곡선 $x^2-xy+e^y=2$ 위의 점 $(-1,0)$에서의 접선의 방정식은 $y=x+1$이다.

$\therefore\ a+b=2$

25. [출제 의도] 정적분을 이용하여 급수의 합을 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

즉 $\lim\limits_{x\to2+}f(x)=\lim\limits_{x\to2-}f(x)=f(2)$이므로

$1-a=4+2b\ \Rightarrow\ a+2b=-3\ \cdots$ (#)

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to2+}\frac{e^{x-2}-a-(1-a)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2-}\frac{x^2+bx-(4+2b)}{x-2}$$

$\Rightarrow\ 1=4+b,\ b=-3$

(#)에서 $a=3$

$\therefore\ g'(2)=f'(f(2))\times f'(2)$

$=f'(-2)\times f'(2)$

$=-7\times1=-7$

26. [출제 의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{2}\ \cdots$ ①

$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{4}\ \cdots$ ②

①의 양변을 제곱하면

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{4}$

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\dfrac{3}{4}\ (\because$ ②$)\ \cdots$ ③

②의 양변을 제곱하면

$\sin^2\alpha\sin^2\beta=\dfrac{1}{16}$

$(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)=\dfrac{1}{16}$

$1-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)+\cos^2\alpha\cos^2\beta=\dfrac{1}{16}$

$$1-\left(2-\sin^2\alpha-\sin^2\beta\right)+\cos^2\alpha\cos^2\beta=\frac{1}{16}$$

$$\cos^2\alpha\cos^2\beta=\frac{5}{16}$$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$ 이므로

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$\therefore\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

(다른 풀이)

근의 공식과 주어진 조건으로부터

$\sin\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $\sin\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ 이다.

$\sin\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ 이고 주어진 조건으로부터

$\cos\alpha>0$ 이므로

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

$\sin\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ 이고 주어진 조건으로부터

$\cos\beta>0$ 이므로

$$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

따라서

$$\cos\alpha cos\beta=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}\cdot\frac{5+\sqrt{5}}{8}}=\frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$\therefore\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

27. [출제 의도] 등비수열의 극한을 구할 수 있는가?

다음과 같이 $f(x)$ 의 값에 따라 나누어 계산한다.

(1) $f(x)=1$ 인 경우

$f(x)=1\Leftrightarrow x=3$ 이고, $g(3)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+1}{1+1}=1$

이므로 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

(2) $f(x)=-1$ 인 경우

$f(x)=-1\Leftrightarrow x^2-6x-9=0$ 이므로 이를 만족시키는 정수 x 는 존재하지 않는다.

(3) $-1<f(x)<1$ 인 경우

$\lim_{n\to\infty}\{f(x)\}^n=0$ 이므로

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(x)\}^{2n-1}+f(x)}{\{f(x)\}^{2n}+1}=f(x)$$

이므로 $0<g(x)<1\Leftrightarrow 0<\frac{1}{9}x(6-x)<1$

$$\Leftrightarrow 0<x<6,\ x\neq 3$$

따라서 $0<g(k)<1$ 인 정수 k 는

$$k=1,\ 2,\ 4,\ 5$$

이다.

(4) $|f(x)|>1$ 인 경우

함수 $f(x)$ 의 최댓값이 1 이므로

$|f(x)|>1\ \Leftrightarrow\ f(x)<-1$ 이다. 이때

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\{f(x)\}^n}=0$ 이므로

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(x)\}^{2n-1}+f(x)}{\{f(x)\}^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\{f(x)\}^{2n-2}}}{f(x)+\frac{1}{\{f(x)\}^{2n-1}}}=\frac{1}{f(x)}$$

이다. 따라서 $|f(x)|>1$ 이면 $g(x)<0$ 이다.

즉, 이 경우 $0<g(k)<1$ 인 정수 k 는 존재하지 않는다.

(1)~(4)에서 문제의 조건을 만족시키는 모든 정수 k 의 합은 $1+2+4+5=12$ 이다.

28. [출제 의도] 도형의 성질을 이용하여 등비급수의 합을 구할 수 있는가?

그림 R_1 에서 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{A_1D_1}=\sqrt{3}$ 이고

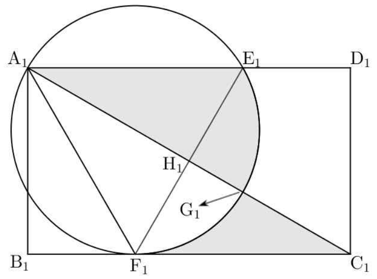
$\angle D_1=\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\angle D_1A_1C_1=\frac{\pi}{6}$

$\angle C_1A_1B_1=\frac{\pi}{3}$ 이고, 선분 A_1F_1 은 $\angle B_1A_1C_1$ 을

이등분하므로 $\angle B_1A_1F_1=\angle C_1A_1F_1=\frac{\pi}{6}$

따라서 $\overline{A_1E_1}=\overline{A_1F_1}$ 이고 $\angle E_1A_1F_1=\frac{\pi}{3}$ 이므로

삼각형 $A_1E_1F_1$ 는 정삼각형이다.



그림과 같이 선분 A_1C_1 과 E_1F_1 이 만나는 점을 H_1 이라 하면 직선 A_1C_1 은 $\angle E_1A_1F_1$ 의 이등분선이므로

$\triangle A_1H_1E_1\equiv\triangle A_1H_1F_1$ (SAS 합동)이고,

점 G_1 은 호 E_1F_1 의 중점이다.

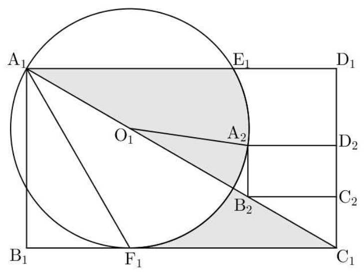
따라서 선분 A_1E_1, A_1G_1 및 호 E_1G_1 으로 둘러싸인 도형은 선분 A_1F_1, A_1G_1 및 호 F_1G_1 으로 둘러싸인 부분과 합동이다.

따라서 S_1 은 삼각형 $A_1F_1C_1$ 의 넓이와 같고,

$\angle F_1A_1C_1=\angle F_1C_1A_1=\frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\overline{A_1F_1}=\overline{C_1F_1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\overline{A_1B_1}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ S_1=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\times\sin(\angle A_1F_1C_1)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$



그림과 같이 세 점 A_1, E_1, F_1 을 지나는 원의 중심을 O_1 이라 하면 사인법칙에서

$$\overline{A_1O_1}=\frac{\overline{A_1F_1}}{2\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}$$

이다. 그림 R_2 에서 $\overline{A_2B_2}=a$ 라 하면

$\overline{B_2C_2}=\sqrt{3}a$, $\overline{C_1C_2}=a\ \Rightarrow\ \overline{B_2C_1}=2a$

이고

$$\overline{O_1A_2}=\overline{A_1O_1}=\frac{2}{3}$$

$$\overline{O_1B_2}=\overline{A_1C_1}-\overline{A_1O_1}-\overline{B_2C_1}=\frac{4}{3}-2a$$

$$\angle O_1B_2A_2=\angle B_2C_1C_2=\frac{\pi}{3}$$

이므로 삼각형 $O_1A_2B_2$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{O_1A_2}^2=\overline{O_1B_2}^2+\overline{A_2B_2}^2-2\times\overline{O_1B_2}\times\overline{A_2B_2}\times\cos(\angle O_1B_2A_2)$$

$$\Rightarrow\ \frac{4}{9}=\left(\frac{4}{3}-2a\right)^2+a^2-2\times\left(\frac{4}{3}-2a\right)\times a\times\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\ 7a^2-\frac{20}{3}a+\frac{4}{3}=0$$

$$\Rightarrow\ 21a^2-20a+4=0,\ (7a-2)(3a-2)=0$$

이때 $\overline{O_1B_2}=\frac{4}{3}-2a>0$ 이므로 $a=\frac{2}{7}$

따라서 그림 R_2 에서 새로 색칠된 도형의 넓이는 넓이는 R_1 에서 색칠된 부분의 넓이의

$$r=\left(\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}}\right)^2=\left(\frac{2}{7}\right)^2=\frac{4}{49}$$

배이고, 이는 모든 자연수 n 에 대하여 R_{n+1} 과 R_n 에 대해서도 동일하므로 등비급수 공식에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{S_1}{1-r}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{4}{49}}=\frac{49}{45}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{49\sqrt{3}}{135}$$

29. [출제 의도] 도형의 성질을 이용하여 함수의 극한을 구할 수 있는가?

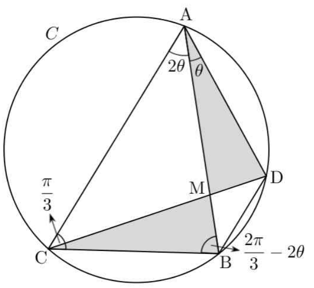
원주각의 성질에서 $\angle BCD=\angle BAD=\theta$ 이고,

사인법칙에서

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle ACB)}=2\ \Rightarrow\ \sin(\angle ACB)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이고, $\angle ACB<\angle ADB$, $\angle ACB+\angle ADB=\pi$

이므로 $\angle ACB=\frac{\pi}{3}$, $\angle ADB=\frac{2\pi}{3}$ 이다.

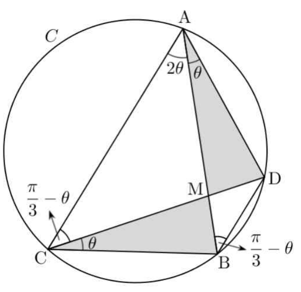


$\angle ABC=\frac{2\pi}{3}-2\theta$ 이므로 삼각형 ABC 에서

사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}=2\sin(\angle ABC)=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2\theta\right)$$

이고,



$$\angle ACD=\angle ACB-\angle BCD=\frac{\pi}{3}-\theta$$

이고 원주각의 성질에서

$$\angle \mathrm{ABD} = \angle \mathrm{ACD} = \frac{\pi}{3} - \theta$$

이므로 삼각형 ABD 에서 사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{AD}} = 2\sin(\angle \mathrm{ABD}) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)$$

이다. 따라서

$$\triangle \mathrm{ACD} = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AC}} \times \overline{\mathrm{AD}} \times \sin(\angle \mathrm{CAD})$$
$$= \frac{1}{2} \times 2\sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2\theta\right) \times 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \times \sin 3\theta$$
$$= 2\sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\sin 3\theta \qquad \cdots ①$$

이고,

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{AC}} \times \sin(\angle \mathrm{CAB})$$
$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 2\sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2\theta\right) \times \sin 2\theta$$
$$= \sqrt{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2\theta\right)\sin 2\theta \qquad \cdots ②$$

$\angle \mathrm{AMC} = \frac{2\pi}{3} - \theta$ 이므로 삼각형 AMC 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{CM}}}{\sin(\angle \mathrm{CAM})} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(\angle \mathrm{AMC})}$$
$$\Rightarrow \overline{\mathrm{CM}} = \frac{2\sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2\theta\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right)} \times \sin 2\theta \qquad \cdots ③$$

①, ②에서

$f(\theta) - g(\theta)$
$= \triangle \mathrm{ACD} - \triangle \mathrm{ABC}$
$= \sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2\theta\right) \times \left\{2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\sin 3\theta - \sqrt{3}\sin 2\theta\right\}$

이므로 ③에서

$$\frac{f(\theta) - g(\theta)}{\overline{\mathrm{CM}}} = \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\sin 3\theta - \sqrt{3}\sin 2\theta}{\dfrac{2\sin 2\theta}{\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right)}}$$
$$= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) \times \frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right)$$

이다.

$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta} = \frac{3}{2}$ 이므로

$$\therefore \lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta) - g(\theta)}{\overline{\mathrm{CM}}}$$
$$= \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3} \times \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{3}{8}$$

$\therefore 80k = 30$

30. [출제 의도] 도함수를 활용하여 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

우선, 이 문제를 풀기에 앞서 함수 $y = f\left(e^{f(x)}\right)$ 가 $x = 0$, $x = k$, $x = 4$ 에서 최대 또는 최소임을 다시 한 번 파악하고 넘어가자.

(최대, 최소란 뜻은 극대, 극소라는 의미도 포함하지만 그 역은 아니므로 동치가 아니다! 더 많은 정보를 담고 있으므로, 극대, 극소 조건만 쓸 경우 문제 풀이에 애를 먹을 수 있다.
이는 (2nd Step)에서 확인해보자.)

(1st Step)

$f\left(e^{f(x)}\right)$ 를 미분하면 $f'\left(e^{f(x)}\right)f'(x)e^{f(x)}$ 이고,
$x = 0$, $x = k$, $x = 4$ 에서 최대 또는 최소이고,
주어진 함수는 미분가능하므로
$x = 0$, $x = k$, $x = 4$ 에서 미분계수가 0 이어야 한다.

따라서 세 등식

$f'\left(e^{f(0)}\right)f'(0) = 0$, $f'\left(e^{f(4)}\right)f'(4) = 0$,
$f'\left(e^{f(k)}\right)f'(k) = 0$

이 성립한다. $f(x)$ 는 이차함수이므로 $f'(x) = 0$ 이 되도록 하는 실수 x 는 하나만 존재하고 어떤 실수 n 에 대하여 $f(x) = n$ 이 되도록 하는 실수 x 는 최대 두 개까지 존재할 수 있으므로
함수 $f\left(e^{f(x)}\right)$ 는 최대 세 개의 극값만을 가질 수 있다.

따라서 함수 $f\left(e^{f(x)}\right)$ 는 $x = 0$, $x = k$, $x = 4$ 에서만 극대 또는 극소이다. 이를 통해 다음의 경우만 가능함을 알 수 있다.

(i) $f'(0) = 0$일 때, $e^{f(4)} = e^{f(k)} = 0$
(ii) $f'(k) = 0$일 때, $e^{f(0)} = e^{f(4)} = k$
(iii) $f'(4) = 0$일 때, $e^{f(0)} = e^{f(k)} = 4$

(i) $e^{f(x)} > 0$ 이므로 $e^{f(4)} = e^{f(k)} = 0$ 임은 가능하지 않다.

(iii) $e^{f(0)} = e^{f(k)} = 4$ 인 경우,

$f\left(e^{f(x)}\right)$ 는 $x = 0$, $x = k$, $x = 4$ 에서만 극대 또는 극소이고 $0 < k < 4$ 이므로 함수 $f\left(e^{f(x)}\right)$ 는
$x = 0$ 에서 극대, $x = k$ 에서 극소이거나 $x = 0$ 에서 극소, $x = k$ 에서 극대이다.
그런데 $f\left(e^{f(0)}\right) = f\left(e^{f(k)}\right) = f(4)$ 이므로
$x = 0$ 에서 극대, $x = k$ 에서 극소이거나
$x = 0$ 에서 극소, $x = k$ 에서 극대일 수 없다.

따라서 (ii)의 경우만 가능하다.

$f'(k) = 0$, $e^{f(0)} = e^{f(4)} = k$,
$\Rightarrow f'(k) = 0$, $f(0) = f(4) = \ln k$

$f(0) = f(4) = \ln k$ 이므로

$$f(x) = ax(x-4) + \ln k \quad (a \neq 0)$$

라 하면, $f'(x) = 2a(x-2)$, $f'(k) = 2a(k-2)$ 이다.
따라서 $f'(k) = 0$ 에서 $k = 2$ 이고,
$f(x) = ax(x-4) + \ln 2$ 이다.

(2nd Step)

함수 $y = f\left(e^{f(x)}\right)$ 가 최댓값과 최솟값을 모두 가지기 위해서는

$\lim_{x \to \infty} f\left(e^{f(x)}\right)$와 $\lim_{x \to -\infty} f\left(e^{f(x)}\right)$가 모두 수렴해야 한다.

$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이면

$\lim_{x \to \pm\infty} e^{f(x)} = \infty$ 이므로 $\lim_{x \to \pm\infty} f\left(e^{f(x)}\right) = \infty$ 이다.

$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수일 때,

$\lim_{x \to \pm\infty} e^{f(x)} = 0$ 이므로

$\lim_{x \to \pm\infty} f\left(e^{f(x)}\right) = f(0) = \ln 2$ 이다.

$\therefore a < 0$

(3rd Step)

문제에서 주어진 함수가 $x = 0$, 4 에서 최대 또는 최소이고, $x = 0$, 4 에서의 함숫값이

$f\left(e^{f(0)}\right) = f\left(e^{f(4)}\right) = f(2) = -4a + \ln 2 > \ln 2$
$(\because a < 0)$

에서 $\lim_{x \to \pm\infty} f\left(e^{f(x)}\right) = \ln 2$ 의 값보다 크므로

$f\left(e^{f(x)}\right)$ 는 $x = 0$, 4 에서 최댓값 $-4a + \ln 2$ 를 갖는다.
따라서 $f\left(e^{f(x)}\right)$ 는 $x = 2$ 에서 최솟값을 가지고,

$f\left(e^{f(2)}\right)$ 의 값은 $\lim_{x \to \pm\infty} f\left(e^{f(x)}\right) = \ln 2$ 보다 작거나 같아야 한다.

$$f\left(e^{f(2)}\right) = f\left(e^{-4a + \ln 2}\right) = f\left(2e^{-4a}\right) \leq \ln 2$$

에서 $4ae^{-8a} - 8ae^{-4a} \leq 0$ 이고,

$a < 0$ 이므로 $a \leq -\frac{\ln 2}{4}$

$f'(1) = -2a \geq \frac{1}{2}\ln 2$ 이므로

$8m = 4\ln 2 = \ln 2^4 = \ln 16$

$\therefore e^{8m} = 16$

기 하 (23 ~ 30)

23. [출제 의도] 두 벡터의 합을 구할 수 있는가?

$2\vec{a}+\vec{b}=(2,4)+(-2,1)=(0,5)$

이므로 그 성분의 합은 5이다.

24. [출제 의도] 두 직선이 이루는 예각의 크기를 구할 수 있는가?

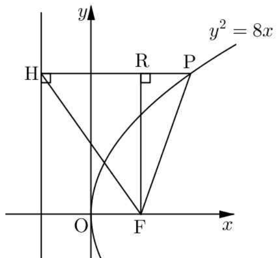
두 직선 $x+1=\frac{y}{2}$와 $-x=\frac{y-1}{3}$의 방향벡터는

각각 $\vec{u}=\left(1,\frac{1}{2}\right)$, $\vec{v}=\left(-1,\frac{1}{3}\right)$이므로

$$\cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{\left|1\times(-1)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right|}{\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\sqrt{(-1)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}}$$

$$=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

25. [출제 의도] 포물선의 정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?



그림과 같이 점 F에서 선분 PH로 내린 수선의 발을 R라 하자.

$\angle\mathrm{FPR}+\angle\mathrm{PFO}=\pi$이므로

$\cos(\angle\mathrm{FPR})=-\cos(\angle\mathrm{PFO})=\frac{1}{3}$

따라서 $\overline{\mathrm{PF}}=x$라 하면

$\overline{\mathrm{PR}}=\cos(\angle\mathrm{FPR})\times\overline{\mathrm{PF}}=\frac{1}{3}x$

이때 직선 $x=-2$는 포물선 $y^2=8x$의 준선이므로

포물선의 정의에서 $\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PF}}=x$이다.

$\overline{\mathrm{RH}}=4$이므로

$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{RH}}$

$\Rightarrow\ x=4+\frac{1}{3}x,\ x=6$

이때

$\sin(\angle\mathrm{FPR})=\sqrt{1-\cos^2(\angle\mathrm{FPR})}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

이므로 삼각형 PHF의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PH}}\times\sin(\angle\mathrm{FPR})$

$=\frac{1}{2}\times6\times6\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=12\sqrt{2}$

26. [출제 의도] 평면벡터의 연산을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

두 벡터 $\vec{a}$, $2\vec{a}-3\vec{b}$가 수직이므로

$\vec{a}\cdot(2\vec{a}-3\vec{b})=0$

$\Rightarrow\ 2|\vec{a}|^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\Rightarrow\ 2|\vec{a}|^2=3|\vec{b}|^2\ \ (\because\ \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|^2)\ \cdots$ ①

한편 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$에서

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=5$

$\Rightarrow\ |\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=5$

$\Rightarrow\ \frac{3}{2}|\vec{b}|^2-2|\vec{b}|^2+|\vec{b}|^2=5\ (\because$ ①$)$

$\Rightarrow\ \frac{1}{2}|\vec{b}|^2=5,\ |\vec{b}|^2=10$

$\therefore\ |\vec{a}|^2=15,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|^2=10$

$\therefore\ |\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$
$=15+2\times10+10=45$

$\therefore\ |\vec{a}+\vec{b}|=3\sqrt{5}$

27. [출제 의도] 벡터를 포함한 방정식이 그리는 도형을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

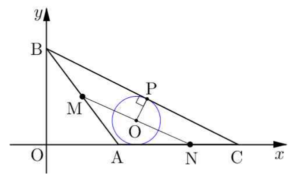
선분 MN의 중점을 O라 하자. 그러면 벡터의 성질에 의하여

$\overrightarrow{\mathrm{PM}}+\overrightarrow{\mathrm{PN}}=(\overrightarrow{\mathrm{PO}}+\overrightarrow{\mathrm{OM}})+(\overrightarrow{\mathrm{PO}}+\overrightarrow{\mathrm{ON}})$
$=2\overrightarrow{\mathrm{PO}}+\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=2\overrightarrow{\mathrm{PO}}$

이 성립한다. 따라서

$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}+\overrightarrow{\mathrm{PN}}|=|2\overrightarrow{\mathrm{PO}}|=2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$

가 성립한다. 즉, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\frac{k}{2}$인 직선 BC 위의 점 P가 단 하나 존재해야 하므로 중심이 O이고 반지름이 $\frac{k}{2}$인 원이 직선 BC와 접해야 한다.



이 경우 점 P는 점 O에서 직선 BC로 내린 수선의 발이다. 점 M, N의 좌표는 각각 $\mathrm{M}\left(\frac{3}{2},2\right)$, $\mathrm{N}(6,0)$이므로 점 O의 좌표는 $\mathrm{O}\left(\frac{15}{4},1\right)$이다.

직선 BC의 방정식은

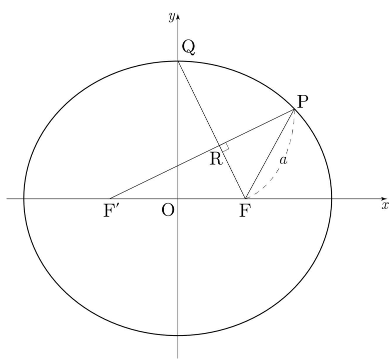
$\frac{x}{8}+\frac{y}{4}=1\ \Rightarrow\ x+2y-8=0$

이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\frac{\left|\frac{15}{4}+2-8\right|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{9\sqrt{5}}{20}$이다.

$\therefore\ \frac{k}{2}=\frac{9\sqrt{5}}{20}\ \Rightarrow\ k=\frac{9\sqrt{5}}{10}$

28. [출제 의도] 타원의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$\overline{\mathrm{PF}}=a$라 하자.



$\triangle\mathrm{F'RF}\backsim\triangle\mathrm{QOF}$이 보이고, 삼각형 PRF가 직각삼각형인 사실에 집중하면, 여러 세부적인 길이 $\overline{\mathrm{RF}},\overline{\mathrm{RP}}$를 구하고, 타원의 정의와 피타고라스 정리를 이용하여 a에 대한 방정식을 만들면, a의 길이를 구할 수 있음을 짐작할 수 있다.

$\angle\mathrm{FF'R}=\angle\mathrm{FQO}$이고, $\cos(\angle\mathrm{FQO})=\frac{\overline{\mathrm{QO}}}{\overline{\mathrm{QF}}}$ 인데

$\overline{\mathrm{QF}}$, $\overline{\mathrm{QO}}$는 각각 장축과 단축의 길이의 절반이므로

$\cos(\angle\mathrm{FQO})=\frac{2\sqrt{5}}{5}=\cos(\angle\mathrm{FF'R})$ 이다.

이 삼각비를 직각삼각형 FF′R에서 이용해주면

$\overline{\mathrm{F'R}}=4$, $\overline{\mathrm{RF}}=2$임을 알 수 있다.

타원의 정의에 의해, $\overline{\mathrm{F'P}}=10-a$ 이므로,

$\overline{\mathrm{RP}}=\overline{\mathrm{F'P}}-\overline{\mathrm{F'R}}=6-a$이다.

삼각형 PRF에서 피타고라스 정리를 이용하면,

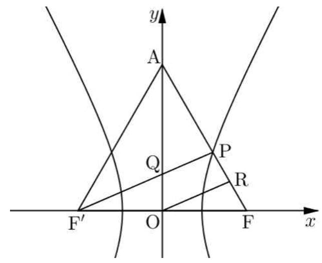
$a^2=(6-a)^2+4$이다.

$\therefore\ a=\frac{10}{3}$

따라서 $\overline{\mathrm{PF}}$의 길이는 $\frac{10}{3}$이다.

29. [출제 의도] 쌍곡선의 성질과 코사인법칙을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

그림과 같이 원점 O를 지나고 선분 PF′에 평행한 직선이 선분 AF와 만나는 점을 R이라 하자.



$\triangle\mathrm{FOR}\backsim\triangle\mathrm{FF'P}$이므로

$\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{OF'}}\ \Rightarrow\ \overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{FR}}$

$\overline{\mathrm{AQ}}=3\overline{\mathrm{OQ}}\ \Rightarrow\ \overline{\mathrm{AP}}=3\overline{\mathrm{PR}}$

이다. 따라서 $\overline{\mathrm{PR}}=x$라 하면

$\overline{\mathrm{PF}}=2x$,

$\overline{\mathrm{FF'}}=\overline{\mathrm{AF}}=2x+3x=5x$

쌍곡선의 성질에서

$\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PF}}+6=2x+6$

$\angle\mathrm{PFF'}=60^\circ$이므로 삼각형 PFF′에서

코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}^2=\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{FF'}}^2-2\times\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{FF'}}\times\cos(\angle\mathrm{PFF'})$

$\Rightarrow\ (2x+6)^2=(2x)^2+(5x)^2-2\times2x\times5x\times\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\ 4x^2+24x+36=4x^2+25x^2-10x^2$

$\Rightarrow\ 5x^2-8x-12=0,\ x=\frac{4\pm2\sqrt{19}}{5}$

$x>0$이므로 $x=\frac{4+2\sqrt{19}}{5}$

따라서 삼각형 AFF′의 한 변의 길이는

$\overline{\mathrm{FF'}}=5x=4+2\sqrt{19}\quad\therefore\ a+b=6$

30. [출제 의도] 평면벡터의 성질을 이용하여 두 벡터의 내적의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

원 위의 점에 대한 벡터 내적, 합의 최대, 최소를 묻는 문제의 경우 스타트는 항상 '원의 중심으로 벡터를 분해'하는 것이 좋다. (해설 마지막을 참고)

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$에서

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$는 크기는 1이고 방향은 어느 방향이든 다 가질 수 있는 벡터이기 때문에, $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$가 결정이 됐을 때 $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$와 같은 방향으로 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$를 결정시켜주면 내적이 최대가 된다.

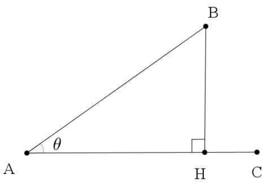
$i)$ $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$가 최대일 때의 상황을 구해보자.

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|\times\cos\theta$를

$|\overrightarrow{AC}| \times (|\overrightarrow{BQ}| \times \cos\theta)$의 관점으로 보면,
두 점 B, Q를 선분 AC에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 할 때
$|\overrightarrow{AC}| \times (|\overrightarrow{BQ}| \times \cos\theta) = |\overrightarrow{AC}| \times |\overrightarrow{H_1H_2}|$와 같다.

==

(참고)

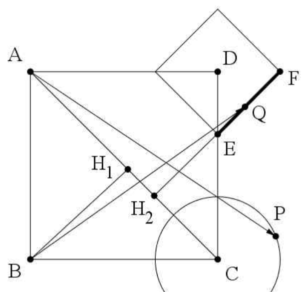


위 그림에서 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AH}| \times |\overrightarrow{AC}|$
(단, θ가 예각)
위 개념은 실전에서 매우 자주 사용되므로
꼭 알아두자.

==

$\overrightarrow{AC}$는 고정된 벡터이고 점 B 역시 고정된 점이므로, Q의 수선의 발 H_2가 점 B의 수선의 발 H_1으로부터 멀리 떨어져 있을 때 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BQ} = |\overrightarrow{AC}| \times |\overrightarrow{H_1H_2}|$가 최대가 나온다.

점 D를 대각선의 교점으로 갖는 정사각형의 두 변은 선분 AC와 평행하고 나머지 두 변은 선분 AC와 수직이므로 점 Q가 아래 그림의 굵은 변 (변 EF) 위에 있을 때 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BQ} = |\overrightarrow{AC}| \times |\overrightarrow{H_1H_2}|$가 최대이다.



〈그림 1〉

(참고 : 만약 점 Q가 변 EF의 반대 변에 있다면 두 벡터 $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BQ}$의 사이각이 둔각이 나와 최솟값이 나오게 된다.)
따라서 이 상황에서 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BQ} = |\overrightarrow{AC}| \times |\overrightarrow{H_1H_2}|$의 값은 $3\sqrt{2} \times \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{2}\right) = 3$이다. ⋯ ①

$ii)$ $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{BQ}$의 최댓값을 결정해보자. 점 Q의 위치는 정사각형의 특정한 한 변 위에 있어야 함이 결정된 상태이다.
또한 $\overrightarrow{CP}$는 점 Q의 위치에 관계없이 $\overrightarrow{BQ}$와 같은 방향을 가질 수 있고 크기가 1로 고정되어 있으므로, 결국 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{BQ}$의 값은 $|\overrightarrow{BQ}|$의 크기에 결정된다.
$|\overrightarrow{BQ}|$의 크기의 최댓값은 $Q = F$ (해설의 〈그림 1〉 참고)일 때이고, 직각삼각형 BAF는 두 변이 3, 4인 직각삼각형이므로 $|\overrightarrow{BF}| = 5$이다.
따라서 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{BQ}$의 최댓값은 $1 \times 5 = 5$ ⋯ ②

①, ② 에 의하여 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BQ} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}) \cdot \overrightarrow{BQ}$의 최댓값은 8이다.

[Cf] 참고로, 위의 풀이는 $i), ii)$에서의 최대가 되는 상황을 동시에 만족시키는 점이 존재해야만 사용할 수 있는 풀이다.

본 풀이에서 점 F가 $i), ii)$에 공통적으로 들어가기 때문에 최댓값을 $3+5=8$이라고 할 수 있었다.