2022학년도 연세대학교 수시모집
자연계열 논술시험 문제(수학)

* 문제에 답하시오.

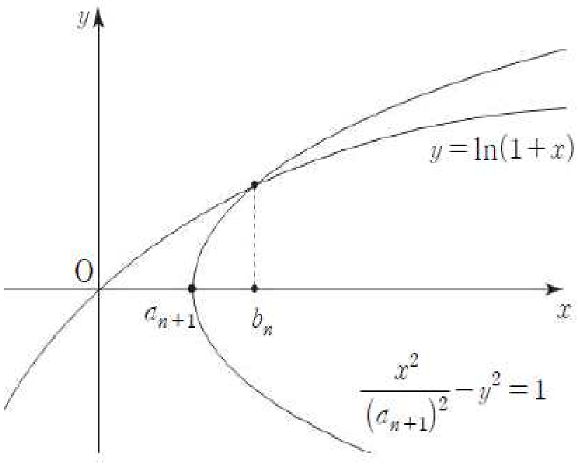
[문제1] 한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수를 a라 하자. x축, y축 및 직선 $x+y=a$로 둘러싸인 직각이등변삼각형에 대하여 다음 물음에 답하시오.

[문제1-1] 직각이등변삼각형의 빗변 위의 점들 중 x좌표와 y좌표가 모두 음이 아닌 정수인 점들의 개수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(X)$의 값을 구하시오. [4점]

[문제1-2] 직각이등변삼각형의 둘레 또는 내부에 있는 점들 중 x좌표와 y좌표가 모두 음이 아닌 정수인 점들의 개수를 확률변수 Y라 할 때, $\mathrm{E}(Y)$의 값을 구하시오. [4점]

[문제2] <그림 1>과 같이 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{(a_{n+1})^2}-y^2=1 \ (x \ge a_{n+1})$과 함수 $y=\ln(1+x)$의 그래프는 한 점에서 만난다. 이 점의 x좌표를 b_n이라 할 때, 아래 제시문을 참고하여 다음 물음에 답하시오.

제시문 1. $x>0$인 실수 x에 대하여 $\ln(1+x)<x$가 성립한다. 제시문 2. 자연수 n에 대하여 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \le \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$이 성립한다.



<그림 1>

[문제2-1] 수열 $\{a_n\}$이 $1+\dfrac{1}{(a_n)^2} \le \dfrac{1}{(a_{n+1})^2}$을 만족시킬 때, $a_{n+1}<b_n<a_n$이 성립함을 보이시오. [10점]

[문제2-2] $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\ln(1+b_n)$의 값을 구하시오. [7점]

[문제3] 자연수 N에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 홀수 m의 값의 합을 $f(N)$이라 하자.

(가) 등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 자연수이고 공차가 1이다.

(나1) $\sum_{k=1}^{m} a_k = N$이다.

예를 들어, $N=21$인 경우에 아래의 두 가지만 가능하므로 $f(21)=1+3=4$이다.

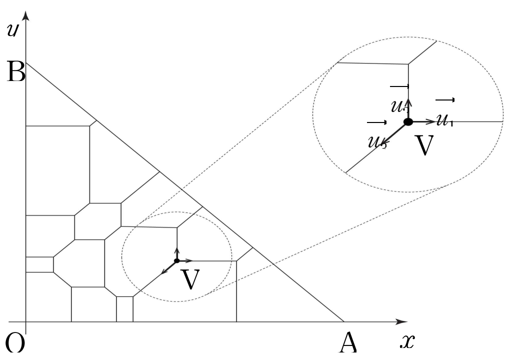
$$21=21=\sum_{k=1}^{1}(20+k), \qquad 21=6+7+8=\sum_{k=1}^{3}(5+k)$$

자연수 N과 홀수 m에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 될 수 있는 자연수의 개수를 $g_N(m)$이라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(가) 등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 자연수이고 공차가 1이다.

(나2) $\sum_{k=1}^{m} a_k \le N$이다.

[문제3-1] N을 m으로 나눈 나머지가 r일 때, $g_N(m)$을 N, m, r를 이용하여 나타내시오. [7점]



<그림 2>

[문제3-2] $\sum_{N=1}^{200} f(N)$의 값을 구하시오. [10점]

[문제4] 세 점 $O(0,0)$, $A(2022,0)$, $B(0,2022)$를 꼭짓점으로 하는 직각이등변삼각형 OAB의 내부 및 둘레에 다음 조건을 만족하도록 여러 개의 선분을 그어 그 선분을 변으로 하는 유한 개의 다각형을 만든다고 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, 양 끝점 중 적어도 한 개의 점이 삼각형 OAB의 내부에 있는 선분은 두 다각형의 변이 되고, 두 끝점이 모두 삼각형 OAB의 둘레에 있는 선분은 오직 한 다각형의 변이 된다.)

(가) 다각형의 모든 변은 x축, y축, 직선 $y=x$, 직선 $y=-x$ 중 하나와 평행하다.
(나) 다각형의 모든 내각의 크기는 180° 보다 작다.
(다) 다각형의 변과 삼각형 OAB의 변이 한 점에서 만날 때, 두 선분은 서로 수직이다.
(라) 다각형의 꼭짓점이 삼각형 OAB의 내부에 있을 때, 이 꼭짓점은 서로 다른 세 선분의 끝점이고 세 선분 중 두 개는 좌표축과 평행하다.

[문제4-1] <그림 2>와 같이 다각형의 꼭짓점 V가 삼각형 OAB의 내부에 있을 때, 점 V에서 점 V와 선분으로 연결된 세 점으로 향하는 벡터와 방향이 같은 세 개의 벡터 $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$가 있다. 가능한 모든 세 개의 벡터에 대하여 $\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}+\overrightarrow{u_3}=\overrightarrow{0}$임을 보이시오. (단, 세 벡터 $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$의 성분은 -1 또는 0 또는 1이다.) [5점]

[문제4-2] 다각형의 꼭짓점 P가 삼각형 OAB의 둘레에 있고 점 P와 선분으로 연결된 점 Q가 삼각형 OAB의 내부에 있을 때, 벡터 $\overrightarrow{QP}$와 방향이 같은 벡터 $\overrightarrow{u}$를 점 P에 대한 경계벡터라 하자. 모든 경계벡터의 합이 $\overrightarrow{0}$임을 보이시오. (단, 경계벡터 $\overrightarrow{u}$의 성분은 -1 또는 0 또는 1이다.) [7점]

[문제4-3] 선분 OA, 선분 OB, 선분 AB와 각각 만나는 다각형의 개수가 모두 같음을 보이시오. (예를 들어, <그림 2>에서 선분 OA, 선분 OB, 선분 AB와 각각 만나는 다각형의 개수는 모두 5이다.) [6점]

2022학년도 연세대학교 수시모집
자연계열 논술시험 문제(수학) 출제 의도 및 해설

◉ 출제의도

[수학 1번] 고등학교 교육과정에서 중요하게 다루는「확률과 통계」과목에서 문제를 출제하였다. 구체적으로 기댓값에 관한 기본적인 개념 및 원리를 묻는 문제를 출제하였다. 고등학교 수학과에서 다루는 중요한 개념의 확실한 이해를 바탕으로 제시된 조건과 상황을 정확히 분석하여 논리적 사고력과 창의적 문제 해결 능력을 발휘할 수 있는지를 평가한다.

[수학 2번] 고등학교 교육과정에서 중요하게 다루는「수학Ⅰ」,「수학Ⅱ」,「미적분」,「기하」과목에서 문제를 출제하였다. 구체적으로 수열, 연속함수의 성질, 로그함수, 쌍곡선에 관한 기본적인 개념 및 원리를 묻는 문제를 출제하였다. 고등학교 수학과에서 다루는 중요한 개념의 확실한 이해를 바탕으로 제시된 조건과 상황을 정확히 분석하여 논리적 사고력과 창의적 문제 해결 능력을 발휘할 수 있는지를 평가한다.

[수학 3번] 고등학교 교육과정에서 중요하게 다루는「수학Ⅰ」과목에서 문제를 출제하였다. 구체적으로 등차수열과 수열의 합에 관한 기본적인 개념 및 원리를 묻는 문제를 출제하였다. 고등학교 수학과에서 다루는 중요한 개념의 확실한 이해를 바탕으로 제시된 조건과 상황을 정확히 분석하여 논리적 사고력과 창의적 문제 해결 능력을 발휘할 수 있는지를 평가한다.

[수학4번] 고등학교 교육과정에서 중요하게 다루는「기하」과목에서 문제를 출제하였다. 구체적으로 평면벡터에 관한 기본적인 개념 및 원리를 묻는 문제를 출제하였다. 고등학교 수학과에서 다루는 중요한 개념의 확실한 이해를 바탕으로 제시된 조건과 상황을 정확히 분석하여 논리적 사고력과 창의적 문제 해결 능력을 발휘할 수 있는지를 평가한다.

◉ 문제 해설

[문제 1] 한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수를 a라 하자. x축, y축 및 직선 $x+y=a$로 둘러싸인 직각이등변삼각형에 대하여 다음 물음에 답하시오.

[문제 1-1] 직각이등변삼각형의 빗변 위의 점들 중 x좌표와 y좌표가 모두 음이 아닌 정수인 점들의 개수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(X)$의 값을 구하시오. [4점]

주사위를 던져서 나오는 눈의 수를 a라 할 때, 빗변 위의 점들 중 x, y좌표가 모두 음이 아닌 정수인 점들의 개수는 $a+1$이다. 따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	6	7
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

따라서 $\mathrm{E}(X)$는 $\dfrac{9}{2}$ 이다.

[문제 1-2] 직각이등변삼각형의 둘레 또는 내부에 있는 점들 중 x좌표와 y좌표가 모두 음이 아닌 정수인 점들의 개수를 확률변수 Y라 할 때, $\mathrm{E}(Y)$의 값을 구하시오. [4점]

주사위를 던져서 나오는 눈의 수를 a라 할 때, 둘레 또는 내부에 있는 점 중 x, y좌표가 모두 음이 아닌 정수인 점들의 개수는 $\dfrac{(a+1)(a+2)}{2}$이다. 따라서 확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

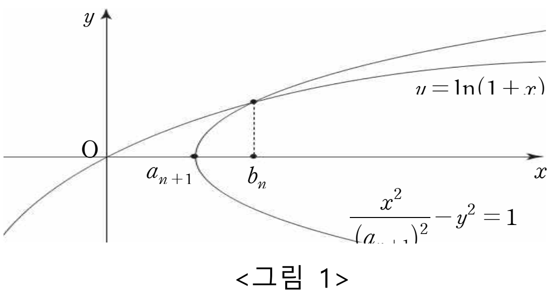
Y	3	6	10	15	21	28
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

따라서 $\mathrm{E}(Y)$는 $\dfrac{83}{6}$ **이다.**

[문제 2] <그림 1>과 같이 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{(a_{n+1})^2}-y^2=1\ \ (x \ge a_{n+1})$과 함수 $y=\ln(1+x)$의 그래프는 한 점에서 만난다. 이 점의 x좌표를 b_n이라 할 때, 아래 제시문을 참고하여 다음 물음에 답하시오.

제시문 1. $x>0$인 실수 x에 대하여 $\ln(1+x)<x$가 성립한다.

제시문 2. 자연수 n에 대하여 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \le \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$이 성립한다.



<그림 1>

[문제 2-1] 수열 $\{a_n\}$이 $1+\dfrac{1}{(a_n)^2} \le \dfrac{1}{(a_{n+1})^2}$을 만족시킬 때, $a_{n+1}<b_n<a_n$이 성립함을 보이시오. [10점]

가정에 의해 수열 $\{a_n\}$이 $\dfrac{1}{(a_n)^2}<1+\dfrac{1}{(a_n)^2} \le \dfrac{1}{(a_{n+1})^2}$이므로 $a_n>a_{n+1}$이다.

$f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{1}{a_{n+1}}\sqrt{x^2-(a_{n+1})^2}$이라 하면 $f(a_{n+1})=\ln(1+a_{n+1})>0$이고,

제시문 1에 의해

$f(a_n) = \ln(1+a_n) - \frac{1}{a_{n+1}}\sqrt{(a_n)^2-(a_{n+1})^2} < a_n - \sqrt{\frac{(a_n)^2}{(a_{n+1})^2}-1} \le 0 \quad \left(\because 1+\frac{1}{(a_n)^2} \le \frac{1}{(a_{n+1})^2}\right)$

함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[a_{n+1}, a_n]$에서 연속이고 $f(a_n) < 0 < f(a_{n+1})$이므로 사잇값 정리와 <그림 1>에 의하여 $f(x)=0$의 한 개의 근 b_n이 열린 구간 (a_{n+1}, a_n)에 존재한다.
따라서 $a_{n+1} < b_n < a_n$ 이다.

[문제 2-2] $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}$일 때, $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\ln(1+b_n)$의 값을 구하시오. [7점]

제시문 2에 의해

$$1+\frac{1}{(a_n)^2} = 1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 1+n\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$
$$= 1+(n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$
$$= 1+\frac{1}{(a_{n+1})^2} - \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \frac{1}{(a_{n+1})^2}$$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 [문제 2-1]의 조건을 만족한다. 따라서 [문제 2-1]에 의해 $a_{n+1} < b_n < a_n$이다.

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,a_n = \frac{1}{\sqrt{e}}$이고

수열의 극한의 성질에 의해 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,b_n = \frac{1}{\sqrt{e}}$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\ln(1+b_n) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,b_n \times \frac{\ln(1+b_n)}{b_n} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ (단, e는 자연상수) 이다.

[문제 3] 자연수 N에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 홀수 m의 값의 합을 $f(N)$이라 하자.

(가) 등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 자연수이고 공차가 1이다.

(나1) $\sum_{k=1}^{m} a_k = N$이다.

예를 들어, $N=21$인 경우에 아래의 두 가지만 가능하므로 $f(21)=1+3=4$이다.

$$21 = 21 = \sum_{k=1}^{1}(20+k), \qquad 21 = 6+7+8 = \sum_{k=1}^{3}(5+k)$$

자연수 N과 홀수 m에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 될 수 있는 자연수의 개수를 $g_N(m)$이라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(가) 등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 자연수이고 공차가 1이다.

(나2) $\sum_{k=1}^{m} a_k \le N$이다.

[문제3-1] N을 m으로 나눈 나머지가 r일 때, $g_N(m)$을 N, m, r를 이용하여 나타내시오. [7점]

첫째항이 a이고 공차가 1인 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m}(a+k-1) = am + \frac{m(m-1)}{2}$$

이고, 이 합이 N보다 작거나 같아야 하므로 $am + \frac{m(m-1)}{2} \le N$이다.

따라서 $a \le \frac{N}{m} - \frac{m-1}{2}$을 만족시켜야 하고, a는 $\frac{N}{m} - \frac{m-1}{2}$보다 작거나 같은 자연수가 될 수 있다.

N을 m으로 나눈 나머지는 r이고 m은 홀수이므로, $\frac{N}{m}-\frac{m-1}{2}$보다 작거나 같은 최대의 자연수는 $\frac{N-r}{m}-\frac{m-1}{2}$이다. 따라서 $g_N(m)=\frac{N-r}{m}-\frac{m-1}{2}$ 이다.

[문제3-2] $\sum_{N=1}^{200} f(N)$의 값을 구하시오. [10점]

1부터 홀수 m까지의 자연수의 합이 200이하가 되려면

$$1+2+\cdots+m=\frac{m(m+1)}{2}\le 200$$

이므로 $m\le 19$이다. 따라서 $\sum_{N=1}^{200} f(N)$은 19 이하인 홀수 m에 대해 각각 $g_{200}(m)$을 구하여 $m\times g_{200}(m)$을 모두 더한 값과 같으므로

$$\sum_{N=1}^{200} f(N)=\sum_{k=1}^{10}\{(2k-1)\times g_{200}(2k-1)\}$$

200을 m으로 나눈 나머지를 r_m이라 두면

$$\sum_{k=1}^{10}\{(2k-1)\times g_{200}(2k-1)\}=\sum_{k=1}^{10}\{200-r_{2k-1}-(k-1)(2k-1)\}=1990-\sum_{k=1}^{10}r_{2k-1}-2\sum_{k=1}^{10}k^2+3\sum_{k=1}^{10}k$$

200을 19 이하의 홀수로 나눈 나머지는 아래 표와 같고, 이들의 합은 43이다.

m	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
r_m	0	2	0	4	2	2	5	5	13	10

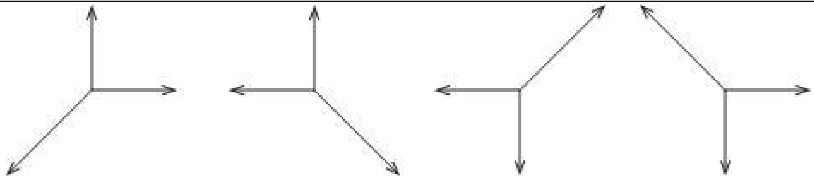
따라서 $\sum_{k=1}^{10}(2k-1)\times g_{200}(2k-1)=1990-\frac{10\times 11\times 21}{3}+3\times 55-43=1342$ 이다.

[문제 4] 세 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(2022,0)$, $\mathrm{B}(0,2022)$를 꼭짓점으로 하는 직각이등변삼각형 OAB의 내부 및 둘레에 다음 조건을 만족하도록 여러 개의 선분을 그어 그 선분을 변으로 하는 유한 개의 다각형을 만든다고 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, 양 끝점 중 적어도 한 개의 점이 삼각형 OAB의 내부에 있는 선분은 두 다각형의 변이 되고, 두 끝점이 모두 삼각형 OAB의 둘레에 있는 선분은 오직 한 다각형의 변이 된다.)

(가) 다각형의 모든 변은 x축, y축, 직선 $y=x$, 직선 $y=-x$ 중 하나와 평행하다.
(나) 다각형의 모든 내각의 크기는 180° 보다 작다.
(다) 다각형의 변과 삼각형 OAB의 변이 한 점에서 만날 때, 두 선분은 서로 수직이다.
(라) 다각형의 꼭짓점이 삼각형 OAB의 내부에 있을 때, 이 꼭짓점은 서로 다른 세 선분의 끝점이고 세 선분 중 두 개는 좌표축과 평행하다.

[문제 4-1] <그림 2>와 같이 다각형의 꼭짓점 V가 삼각형 OAB의 내부에 있을 때, 점 V에서 점 V와 선분으로 연결된 세 점으로 향하는 벡터와 방향이 같은 세 개의 벡터 $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$가 있다. 가능한 모든 세 개의 벡터에 대하여 $\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}+\overrightarrow{u_3}=\vec{0}$임을 보이시오. (단, 세 벡터 $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$의 성분은 -1 또는 0 또는 1이다.) [5점]

다각형의 변이 x축, y축, 직선 $y=x$, 또는 직선 $y=-x$와 평행하므로, 꼭짓점 V에서 만나는 세 선분이 서로 이룰 수 있는 각 중 180° 보다 작은 각은 45°, 90°, 135° 중 하나이다. 조건 (라)에 의하여 두 개의 선분이 좌표축과 평행하므로 남은 하나의 선분은 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$와 평행해야 한다. 따라서, 꼭짓점 V에서 점 V와 선분으로 연결된 세 점으로 향하는 벡터 방향의 조합은 아래 그림과 같다.

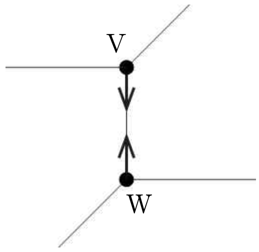


각각의 경우 성분이 $0,1,-1$ 중 하나로 이루어진 벡터들의 집합 $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$는

$\{(-1,-1), (1,0), (0,1)\}, \{(1,-1), (0,1), (-1,0)\}, \{(1,1), (-1,0), (0,-1)\}, \{(-1,1), (0,-1), (1,0)\}$이다.

따라서 네 가지 경우 모두 $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3} = \vec{0}$ 이다.

[문제 4-2] 다각형의 꼭짓점 P가 삼각형 OAB의 둘레에 있고 점 P와 선분으로 연결된 점 Q가 삼각형 OAB의 내부에 있을 때, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$와 방향이 같은 벡터 $\vec{u}$를 점 P에 대한 경계벡터라 하자. 모든 경계벡터의 합이 $\vec{0}$임을 보이시오. (단, 경계벡터 $\vec{u}$의 성분은 -1 또는 0 또는 1이다.) [7점]



삼각형 OAB의 둘레와 만나지 않는 선분의 양 끝점 V, W를 생각해보자.

그림에 의해 위에 모은 벡터 중 V에서 W로, W에서 V로 향하는 두 벡터의 합은 $\vec{0}$이다. 이렇게 삼각형 OAB의 둘레와 만나지 않는 모든 선분을 고려하면, $\overrightarrow{u_{total}}$의 값은 모든 경계벡터의 합과 같다.

따라서 모든 경계벡터의 합은 $\vec{0}$이다.

[문제4-3] 선분 OA, 선분 OB, 선분 AB와 각각 만나는 다각형의 개수가 모두 같음을 보이시오. (예를 들어, <그림 2>에서 선분 OA, 선분 OB, 선분 AB와 각각 만나는 다각형의 개수는 모두 5이다.) [6점]

조건 (다)에 의해 경계벡터는 삼각형 OAB의 한 변에 수직이므로 선분 OA에 수직인 경계벡터는 $(0,-1)$, 선분 OB에 수직인 경계벡터는 $(-1,0)$, 선분 AB에 수직인 경계벡터는 $(1,1)$이다.

이들의 개수를 각각 l, m, n이라 하면,

$\overrightarrow{u_{total}} = l(0,-1) + m(-1,0) + n(1,1) = (n-m, n-l) = \vec{0}$이므로 $l = m = n$이다.

선분 OA, 선분 OB, 선분 AB와 각각 만나는 다각형의 개수는 $l+1$, $m+1$, $n+1$이므로, 다각형의 개수가 모두 같다.