단국대학교 2023학년도 모의논술고사

자연계열 문제

전 형 명	논술우수자	모집단위	
수험번호		성 명	

☑ 수험생 유의사항

1. 시험시간은 120분이며, 고사 종료시까지 퇴실할 수 없습니다. (중도퇴실할 경우 결시처리)
2. 문제번호와 답안번호가 반드시 일치하여야 합니다. (일치하지 않을 경우 0점 처리됨)
3. 문제별 답안작성란을 벗어나지 않게 작성하여야 합니다.
4. 답안 작성 시 인적사항 등 답안과 관련 없는 내용을 작성한 경우 0점처리 됩니다.
5. 답안은 반드시 **검정색 필기구**로 작성하시기 바랍니다.
   (연필, 샤프, 빨간색이나 파란색 필기구 사용금지)
6. 답안지는 교체가 불가하오니 원고지 교정부호 또는 수정테이프를 사용하여 수정하시기 바랍니다.
7. 연습지는 대학에서 제공하는 A4용지를 활용하시기 바랍니다.
8. 휴대폰 등 전자기기는 전원을 끄고 비닐백에 넣어 좌석 아래에 보관하시기 바랍니다. 고사 중에 벨소리, 진동, 알람 등의 소리가 울릴 경우 부정행위자로 간주하여 처리합니다.

※ 시험이 시작되기 전에는 표지를 넘기지 마십시오.

단국대학교 DANKOOK UNIVERSITY

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (55점)

<제시문>

(가) 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$일 때, (i) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n$이면 $\alpha \le \beta$ (ii) 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고 $\alpha = \beta$이면 수열 $\{c_n\}$은 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$
(나) 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a) = 0$이고, $x = a$의 좌우에서 (i) $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x = a$에서 극대 (ii) $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x = a$에서 극소
(다) 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

[논제 1] 다음 극한값을 구하시오. (15점)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(k+1)(k^2+3)}$$

- 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때 [논제 2]와 [논제 3]의 물음에 답하시오.

(1) $f(x)$는 $x = \alpha$, $x = \beta$ $(0 < \alpha < \beta)$에서 극값을 갖는다. (2) $f(0) = f(\beta)$ (3) $\int_0^\beta f(x)dx - \beta f(\beta) = 108$

[논제 2] 함수 $f(x)$의 두 극값의 차를 구하시오. (20점)

[논제 3] 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(t, f(t))$, $\mathrm{Q}(3t, f(3t))$를 $1:3$으로 내분하는 내분점을 R라 하자. 점 R가 나타내는 곡선의 방정식을 $y = g(x)$라 하면, 함수 $g(x)$는 $x = \gamma$에서 극솟값을 갖는다.

$\int_0^{\frac{2}{3}\gamma} f(x)dx = 50$일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. (20점)

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (45점)

<제시문>

(가) 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
(나) 함수 $f(t)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (\text{단, } a < x < b)$$
(다) 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a) = 0$이고, $x = a$의 좌우에서 (i) $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x = a$에서 극대 (ii) $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x = a$에서 극소

[논제 1] 함수 $f(x) = -(x-1)^2 + 1$에 대하여, 열린구간 $(1, 2)$에서 정의된 함수

$$g(x) = \int_0^x |f(x) - f(t)|dt$$

라 하자. $g(x)$가 $x = a$에서 극값을 가질 때, a의 값을 구하시오. (20점)

[논제 2] 양의 실수 α에 대하여 함수

$$h(x) = \alpha x^2 e^{-\frac{2x}{\alpha}}$$

라 하고, 실수 t에 대하여 $k(t)$를 닫힌구간 $[h(t), h(t) + \alpha]$에서 $h(x)$의 최댓값이라 하자. 함수 $k(t)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 α의 최댓값을 구하시오. (25점)

모든 양의 실수 t에 대하여 $k(t)$의 값이 일정하다.

(단, $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \infty$이고 $\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = 0$)

단국대학교 2023학년도 모의논술고사

자연계열 가이드답안

단국대학교

문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 수열의 성질을 이해하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가

[논제 2] 도함수의 성질을 이용하여 극값을 판정할 수 있는지를 평가

[논제 3] 내분점의 개념을 이해하고 다항함수의 정적분을 활용할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 김원경 외(2020), 수학, 102-109쪽
○ 김원경 외(2020), 미적분, 16-19쪽
○ 류희찬 외(2022), 미적분, 18-22쪽
○ 황선옥 외(2022), 수학 II, 82-88쪽, 122-128쪽

[논제 1 평가기준]

- $k^2 < \sqrt{k(k+1)(k^2+3)} < k^2+4k+4$ 를 제시 : 8점
- $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} < \dfrac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)(k^2+3)} < \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} + \dfrac{2(n+1)}{n^2} + \dfrac{4}{n^2}$ 를 제시 : 4점
- 정답을 제시 : 3점

[논제 2 평가기준]

- $\beta = 6$ 임을 제시 : 10점
- $f(x) = x(x-6)^2 + f(6)$을 제시 : 5점
- 정답을 제시 : 5점

[논제 3 평가기준]

- $g(x) = \dfrac{1}{4}f(2x) + \dfrac{3}{4}f\left(\dfrac{2}{3}x\right)$를 제시 : 10점
- $\gamma = 3$ 임을 제시 : 5점
- 정답을 제시 : 5점

□ 예시 답안

[논제 1] 자연수 k에 대하여

$$k^4 < k(k+1)(k^2+3) < k(k+1)(k^2+4k+4) < (k^2+4k+4)^2 \qquad \text{................(A)}$$

이므로 $k^2 < \sqrt{k(k+1)(k^2+3)} < k^2+4k+4$ 이고

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 < \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)(k^2+3)} < \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k^2+4k+4)$$

따라서

$$\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} < \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)(k^2+3)} < \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} + \frac{2(n+1)}{n^2} + \frac{4}{n^2}$$

이때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} + \frac{2(n+1)}{n^2} + \frac{4}{n^2}\right) = \frac{1}{3}$$

이고 제시문 (가)에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)(k^2+3)} = \frac{1}{3}$$

(참고) 부등식 (A)는 다음과 같은 부등식으로 바꾸어 풀이가 가능하다.

$$k^4 < k(k+1)(k^2+3) < (k+1)^4$$

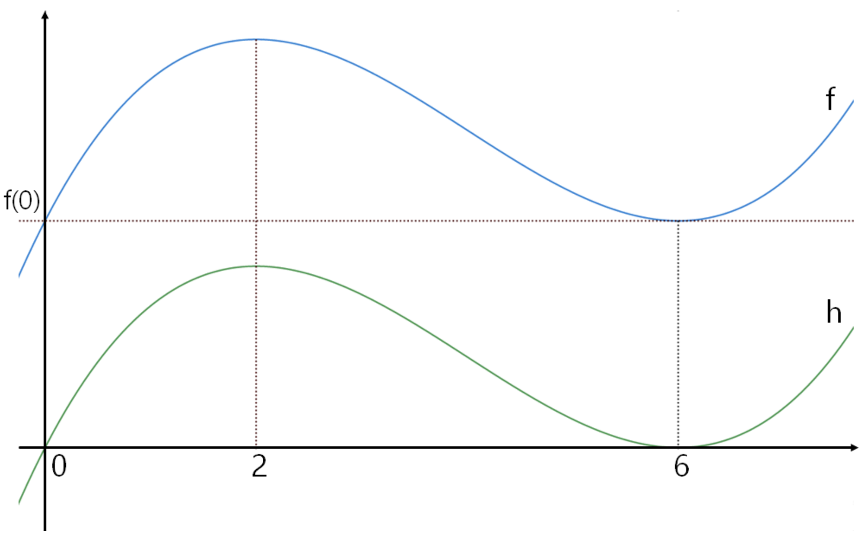
[논제 2] 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고 조건 (1)에 의하여 $f(\alpha)$는 극댓값, $f(\beta)$는 극솟값이며 $f(\alpha) > f(\beta)$이다. 함수 $h(x) = f(x) - f(\beta)$라 하면 $h'(x) = f'(x)$이고 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다. 조건 (1)과 (2)에 의하여

$$h(x) = x(x-\beta)^2$$

조건 (3)에 의하여

$$108 = \int_0^{\beta} f(x)dx - \beta f(\beta) = \int_0^{\beta} h(x)dx = \int_0^{\beta} x(x-\beta)^2 dx = \frac{1}{12}\beta^4$$

이므로 $\beta = 6$이다. 따라서 $h(x) = x(x-6)^2$



$f(2) > f(6)$이므로 두 극값의 차는 32이다.

[논제 3] 주어진 조건을 만족하는 함수 $f(x)$는

$$f(x) = x(x-6)^2 + f(6)$$

이고

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 36 \qquad \text{.................(B)}$$

점 R의 좌표를 (x, y)라 하자. 두 점 $\mathrm{P}(t, f(t))$, $\mathrm{Q}(3t, f(3t))$를 $1:3$으로 내분하는 내분점은

$$\left(\frac{3t+3t}{1+3}, \frac{f(3t)+3f(t)}{1+3}\right)=\left(\frac{3t}{2}, \frac{f(3t)+3f(t)}{4}\right)$$

$x=\frac{3t}{2}$, $y=\frac{f(3t)+3f(t)}{4}$라 할 때 구하는 곡선의 방정식은

$$y=\frac{1}{4}f(2x)+\frac{3}{4}f\left(\frac{2}{3}x\right)$$

따라서 $g(x)=\frac{1}{4}f(2x)+\frac{3}{4}f\left(\frac{2}{3}x\right)$이다. 한편

$$g'(x)=\frac{1}{2}f'(2x)+\frac{1}{2}f'\left(\frac{2}{3}x\right)$$

이고 $g'(x)=0$에서 $f'(2x)+f'\left(\frac{2}{3}x\right)=0$이므로 식 (B)로 부터

$$(5x-9)(x-3)=0$$

$g(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

$$50=\int_0^2 f(x)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-4x^3+18x^2+f(6)x\right]_0^2=44+2f(6)$$

에서 $f(6)=3$이고 극댓값은 $f(2)=35$이다.

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 정적분과 도함수 사이의 관계를 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가

[논제 2] 도함수의 개념을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 권오남 외(2020), 수학 II, 88-95쪽, 130-136쪽
○ 이준열 외(2020), 수학 II, 86-89쪽, 121-126쪽
○ 황선옥 외(2022), 수학 II, 82-88쪽, 122-128쪽

[논제 1 평가기준]

- $g(x) = \int_0^{2-x} \{f(x) - f(t)\}\,dt + \int_{2-x}^{x} \{f(t) - f(x)\}\,dt$ 임을 제시 : 7점
- $g'(x) = 2(x-1)(3x-4)$ 임을 제시 : 10점
- 정답을 제시 : 3점

[논제 2 평가기준]

- $h(x)$ 의 극값을 모두 제시 : 5점
- $h(\alpha) \le \alpha$ 를 제시 : 15점
- 정답을 제시 : 5점

□ 예시 답안

[논제 1] $0 < t \le 2-x$일 때, $f(x) \ge f(t)$이고 $2-x < t \le x$일 때, $f(x) \le f(t)$이므로

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^{2-x} \{f(x) - f(t)\}\,dt + \int_{2-x}^{x} \{f(t) - f(x)\}\,dt \\ &= f(x)\int_0^{2-x} 1\,dt - \int_0^{2-x} f(t)\,dt + \int_{2-x}^{x} f(t)\,dt - f(x)\int_{2-x}^{x} 1\,dt \\ &= f(x)(2-x) - \int_0^{2-x} f(t)\,dt + \int_{2-x}^{x} f(t)\,dt - f(x)(2x-2) \end{aligned}$$

$g'(x) = 2(x-1)(3x-4)$이고 제시문 (다)에 의하여 $x = \frac{4}{3}$에서 극값을 갖는다. 따라서 $a = \frac{4}{3}$이다.

[논제 2] $h'(x)=2x(\alpha-x)e^{-\frac{2x}{\alpha}}$ 이므로 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\alpha^3 e^{-2}$	$\searrow$

$h(x)$의 극솟값은 $h(0)=0$이고 극댓값은 $h(\alpha)=\alpha^3e^{-2}$ 이다.

(i) $h(t)>\alpha$인 양의 실수 t가 존재하는 경우:

$\alpha\notin[h(t),\, h(t)+\alpha]$ 이고 닫힌구간 $[h(t),\, h(t)+\alpha]$ 에서 $h(x)$는 감소하므로 $k(t)=h(h(t))$이다.

$h(\alpha)>\alpha$이므로 곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=\alpha$의 두 교점의 x좌표를 $t_1,\, t_2$ $(0<t_1<t_2)$라 하면(그림 1), 열린구간 $(t_1,\, t_2)$에서 $k(t)=h(h(t))$이고 $k(t)$는 이 구간에서 일정한 값을 갖지 않는다.

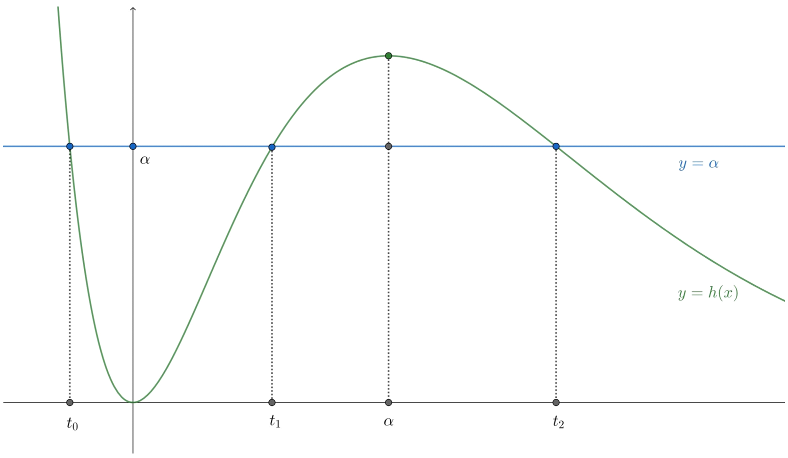


그림 1 : $h(\alpha)>\alpha$인 경우

(ii) 모든 양의 실수 t에 대하여 $0\le h(t)\le\alpha$인 경우:

$\alpha\in[h(t),\, h(t)+\alpha]$ 이므로 $k(t)$는 항상 일정한 값 $h(\alpha)$를 갖는다(그림 2).

$h(\alpha)$는 극댓값이므로 $h(\alpha)=\alpha^3e^{-2}\le\alpha$인 모든 α에 대하여 함수 $k(t)$는 문제의 조건을 만족시킨다.

따라서 최댓값은 e이다.

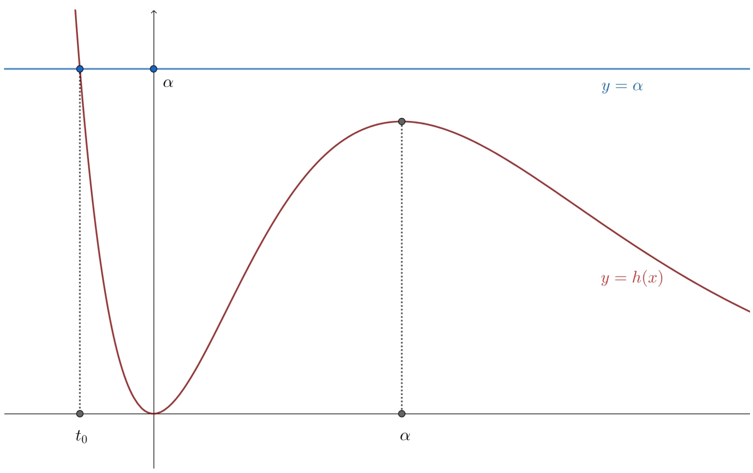


그림 2 : $h(\alpha)\le\alpha$인 경우