[아주대학교 문항정보 3]

## 1. 일반 정보

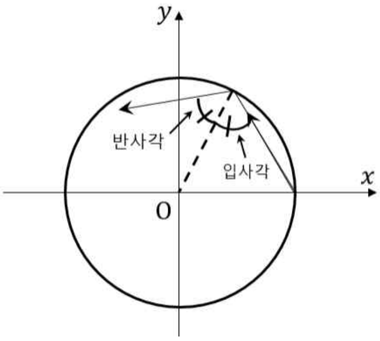
| 유형 | ■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형 고사 | |
|---|---|---|
| 전형명 | 논술우수자전형 | |
| 해당 대학의 계열(과목) / 문항번호 | 자연(오전) 대문항 1번 | |
| 출제 범위 | 수학과 교육과정 과목명 | 수학, 수학 I, 미적분 |
| | 핵심개념 및 용어 | 귀류법, 시초선, 동경, 일반각, 호도법, 라디안, 사인법칙, 주기, 덧셈정리 |
| 예상 소요 시간 | 120분 중 60분 | |

## 2. 문항 및 제시문

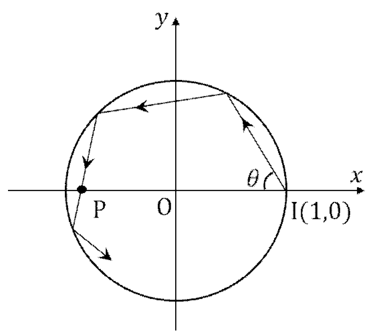
[제시문]

직진하던 빛이 물체에 부딪칠 때 진행 방향이 바뀌어 나아가는 현상을 **빛의 반사**라고 한다. 빛이 원에서 반사될 때, [그림 1-1]에서와 같이 입사각과 반사각의 크기가 같다.

중심이 원점 $\mathrm{O}$이고 반지름이 $1$인 원 $x^2+y^2=1$을 단위원이라 한다. 점 $\mathrm{I}(1,0)$에서 빛이 $x$축과 각 $\theta$ (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)를 이루며 단위원 내부로 발사되고 계속해서 원에서 반사된다고 하자. 이때, 각 $\theta$를 **발사각**이라 한다. 반사가 일어나는 원 위의 점을 **반사지점**이라 하고, $n$번째 반사가 일어나는 반사지점을 $n$**번째 반사지점**이라 한다. [그림 1-2]는 점 $\mathrm{I}(1,0)$에서 발사된 빛이 원 위에 $2$번 반사된 후, $x$축 위의 점 $\mathrm{P}$를 통과하는 예를 보여준다. 모든 각의 단위는 라디안(radian)이다.




[그림 1-1]




[그림 1-2]

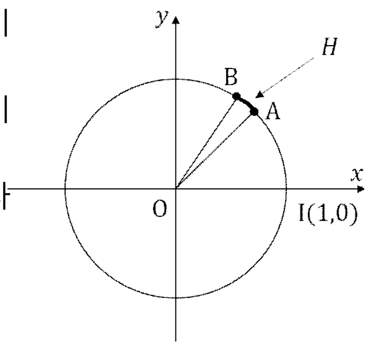
[문항]

[문제 1-1] (25점) [그림 1-2]와 같이 단위원 위의 점 $\mathrm{I}$에서 빛이 발사각 $\theta$를 이루며 발사되어 제$2$사분면에서 원 위의 $2$번째 반사지점을 지나 제$3$사분면에서 원 위의 $3$번째 반사지점을 갖게 된다고 하자.

(1) 발사각 $\theta$의 범위를 구하고, 빛이 통과하는 $x$축 위의 점 $\mathrm{P}$의 $x$좌표를 $\theta$를 이용하여 나타내라.

(2) $\theta = \dfrac{7\pi}{24}$이고 $a = \cos\dfrac{\pi}{24}$라 할 때, $2$번째 반사지점에서 점 $\mathrm{P}$까지 빛이 이동한 거리를 $a$에 대한 식으로 나타내라.

[문제 1-2] (15점) [그림 1-3]에서 $\angle \mathrm{IOA} = \dfrac{18\pi}{64}$ 이고 $\angle \mathrm{IOB} = \dfrac{21\pi}{64}$이다. 호 $\mathrm{AB}$를 $H$라 하자. 발사각이 $\theta = \dfrac{59\pi}{128}$일 때, 점 $\mathrm{I}$에서 발사된 빛이 $n$번째 반사지점에서 $H$와 $2$번째로 만난다고 하자. $n$을 구하라.




[그림 1-3]

[문제 1-3] (10점) 점 $\mathrm{I}$에서 빛이 발사각 $\theta = \dfrac{\pi}{\sqrt{6}}$로 발사되었을 때, 점 $\mathrm{I}$가 반사지점이 될 수 없음을 $\sqrt{6}$이 무리수라는 사실을 이용하여 증명하라.

## 3. 출제 의도

[문제 1-1] 사각형 또는 삼각형의 도형을 잘 관찰하고, 사인법칙, 덧셈정리, 피타고라스 정리를 잘 활용할 수 있는지를 평가한다.

[문제 1-2] 문제에 주어진 상황을 수학적으로 표현한 후 답을 찾아가는 관찰을 잘 할 수 있는지를 평가한다.

[문제 1-3] 무리수와 유리수의 차이를 알고 귀류법을 사용할 수 있는지를 평가한다.

## 4. 출제 근거

### 가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

| 적용 교육과정 | 교육부 고시 제 2015-74호 [별책8] 수학과 교육과정 |
|---|---|
| 문항 및 제시문 | 학습내용 성취 기준 |
| | 수학<br>[10수학03-07] 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다.<br>수학 I<br>[12수학 I 02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다.<br>[12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.<br>[12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.<br>미적분<br>[12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. |

### 나) 자료 출처

| 참고자료 | 도서명 | 저자 | 발행처 | 발행년도 | 쪽수 |
|---|---|---|---|---|---|
| 고등학교 교과서 | 수학 | 황선욱 외 8 | 미래앤 | 2021 | 201 |
| | 수학 | 박교식 외 19 | 동아 | 2021 | 196 |
| | 수학 | 이준열 외 9 | 천재교육 | 2021 | 207 |
| | 수학 Ⅰ | 박교식 외 19 | 동아 | 2021 | 61,62,74,87 |
| | 수학 Ⅰ | 고성은 외 5 | 신사고 | 2021 | 65,66,77,92 |
| | 수학 Ⅰ | 이준열 외 9 | 천재교육 | 2021 | 69,70,83,99 |
| | 수학 Ⅰ | 김원경 외 14 | 비상 | 2021 | 65,66,78,96 |
| | 미적분 | 김원경 외 14 | 비상 | 2021 | 59,60 |
| | 미적분 | 황선욱 외 8 | 미래엔 | 2021 | 66,67 |
| | 미적분 | 고성은 외 5 | 신사고 | 2021 | 62,63 |

## 5. 문항 해설

본 문항은 수학의 귀류법을 이용한 증명, 수학Ⅰ의 삼각함수에서 시초선, 동경, 호도법, 라디안의 기본 개념을 이해하고 사인법칙의 활용에 대한 내용, 미적분에서 삼각함수의 덧셈정리에 대한 지식을 활용하고 있다. 따라서 본 문항을 통해 학생들이 제시문을 읽고 주어진 상황에서 각을 표현하고 규칙성을 발견하는 과정과 사인법칙을 활용하여 삼각형에서 변의 길이를 문자를 이용하여 표현하고, 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 식을 간단하게 변형할 수 있는지 확인한다. 이러한 과정을 통해 학생들이 대수적인 조작과 함께 기하적 사고를 융합하여 적용할 수 있는지 측정하고 문제 해결의 효율적인 해결 전략을 찾는 문제해결력과 귀류법을 이해하고 이를 활용하여 논리적으로 자신의 사고를 전개하는 추론 역량을 평가하는 문항이다.

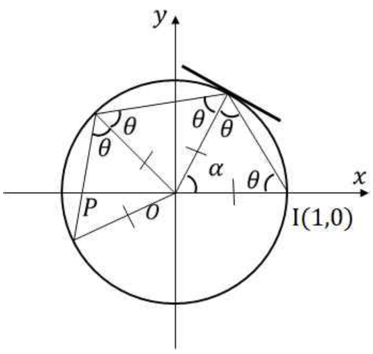
## 6. 채점 기준

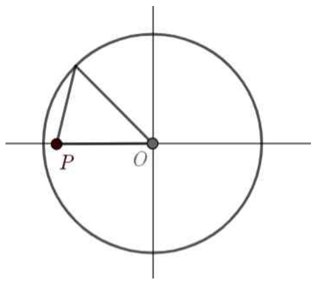
| 하위문항 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| [1-1] (1) | $\alpha = \pi - 2\theta$을 관찰하고 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{3}$을 유도 | 4점 |
| | $-x$를 한 변의 길이로 가지는 삼각형을 찾고, 사인법칙을 이용하여 $x$와 $\theta$의 관계 유도 | 4점 |
| | 사인함수의 성질을 이용하여 $x$를 $\frac{\sin\theta}{\sin 5\theta}$로 표현 | 2점 |
| [1-1] (2) | $\theta$와 $5\theta$를 $\frac{\pi}{24}$를 이용하여 표현한 후 덧셈정리를 이용하여 $a$로 표현한 후, $\mathrm{P}$의 $x$좌표를 $a$의 식으로 구함 | 8점 |
| | 두 번째 반사지점의 좌표를 구한 후 피타고라스 정리를 이용하여 그 점과 점 $\mathrm{P}$ 사이의 거리를 구함 | 7점 |

| 하위문항 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| [1-2] | $n$번째 반사지점을 지나는 동경과 시초선이 이루는 각을 구함. | 4점 |
| | $n$번째 반사지점과 호 $H$가 만난다는 것을 수식으로 표현해냄 | 4점 |
| | $p=0,1,2,\cdots$을 따라 빛이 호 $H$와 만나게 되는 상황들을 추적하여 두 번째 만나게 되는 $n$(번째)을 구함 | 7점 |
| [1-3] | 점 $\mathrm{I}$이 반사지점이 된다고 가정하고 $\sqrt{6}$을 유리식으로 표현 | 5점 |
| | 귀류법에 의하여 점 $\mathrm{I}$가 반사지점이 될 수 없음으로 결론냄 | 5점 |

## 7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 1-1]




(1) 빛의 입사각과 반사각이 같으므로 첫 번째 반사지점을 지나는 동경과 시초선($x$축의 양의 방향 반직선)이 이루는 각을 $\alpha$라고 두면, $\alpha=\pi-2\theta$이고 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $0<\alpha<\pi$이다. 또한 $2$번째, $3$번째 반사지점을 지나는 동경과 시초선이 이루는 각은 각각 $2\alpha, 3\alpha$가 된다. 문제의 가정에 의해 $2\alpha<\pi<3\alpha$이므로 $\alpha=\pi-2\theta$로부터 부등식 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{3}$을 얻는다. 이때, 점 $\mathrm{P}(x,0)$에 대하여 선분 $\mathrm{OP}$의 길이는 $-x$이므로, 두 번째 반사지점과 점 $\mathrm{P}$, 원점 $\mathrm{O}$를 꼭지점으로 하는 삼각형과 사인법칙에 의해,

$$\frac{-x}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin(2\pi - 5\theta)}$$

이다. 따라서, $\sin(2\pi-5\theta) = -\sin 5\theta$에 의해서 $x = \dfrac{\sin\theta}{\sin 5\theta}$이다.

(2) $\theta = \dfrac{7\pi}{24}$이므로 덧셈정리를 이용하여

$$\sin\theta = \sin\frac{7\pi}{24} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{24}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{24} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{24} = \frac{1}{2}\left\{a\sqrt{3} - \sqrt{1-a^2}\right\}$$

을 얻고

$$\sin 5\theta = \sin\frac{35\pi}{24} = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{24}\right) = \sin\frac{3\pi}{2}\cos\frac{\pi}{24} - \cos\frac{3\pi}{2}\sin\frac{\pi}{24} = -a$$

이므로, 점 $\mathrm{P}$의 $x$좌표는

$$x = \frac{\sin\theta}{\sin 5\theta} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{1-a^2}}{2a}$$

이다. 한편 $2\alpha = 2\pi - 4\theta = \dfrac{5\pi}{6}$이므로 2번째 반사지점의 좌표는 $(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha) = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$이다. 따라서, 2번째 반사지점에서 점 $\mathrm{P}$까지 빛의 이동거리는

$$\sqrt{(x - \cos 2\alpha)^2 + (\sin 2\alpha)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{2a}\right)^2 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2a}$$

이다.

[문제 1-2]

첫 번째 반사지점을 지나는 동경이 시초선과 이루는 각은 $\alpha = \pi - 2\theta = \dfrac{5\pi}{64}$이다. 두 번째 이상의 각 반사지점의 동경과 시초선이 이루는 각은 직전 반사지점

을 지나는 동경과 시초선이 이루는 각에 $\alpha=\dfrac{5\pi}{64}$을 더한 것이므로, $n$번째 반사지점의 동경과 시초선이 이루는 각은 $n\alpha=\dfrac{5n\pi}{64}$가 된다. 따라서 문제에서 주어진 호 $H$에 $n$번째 반사지점이 있다는 것은 어떤 $p=0,1,2,\cdots$에 대하여

$$2p\pi+\frac{18\pi}{64}\ \le\ \frac{5n\pi}{64}\ \le 2p\pi+\frac{21\pi}{64}$$

를 만족한다는 의미가 된다. 빛이 2번째로 호 $H$와 만나게 되는 순간의 $n$을 $p$의 값을 키워가며 찾아간다.

• $p=0$일 때, $\dfrac{18\pi}{64}\ \le\ \dfrac{5n\pi}{64}\ \le\ \dfrac{21\pi}{64}$를 정리하면 $18\ \le\ 5n\ \le 21$, 즉 $n=4$이다. 따라서 빛은 4번째 반사지점에서 호 $H$와 첫 번째로 만난다.

• $p=1$일 때, $2\pi+\dfrac{18\pi}{64}\ \le\ \dfrac{5n\pi}{64}\ \le 2\pi+\dfrac{21\pi}{64}$를 정리하면 $146\ \le\ 5n\ \le\ 149$인데, 이 부등식을 만족하는 자연수 $n$은 없다.

• $p=2$일 때, $4\pi+\dfrac{18\pi}{64}\ \le\ \dfrac{5n\pi}{64}\ \le 4\pi+\dfrac{21\pi}{64}$를 정리하면 $274\ \le\ 5n\ \le\ 277$이고, $n=55$이다. 따라서, 빛이 2번째로 호 $H$와 만나는 반사지점은 $55$번째 반사지점이다.

[문제 1-3]

점 $\mathrm{I}(1,0)$이 발사된 빛의 반사지점 중 하나가 된다고 가정하자. 그러면 적당한 자연수 $n$과 $p$에 대해

$$n\left(\pi-\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\right)=2p\pi \text{ 또는 } \sqrt{6}\ =\ \frac{n}{n-2p}$$

을 만족해야 한다. 하지만, 두 번째 식의 우변이 유리수이므로 $\sqrt{6}$이 무리수라는 사실에 모순이다. 따라서 귀류법에 의하여, 위 식을 만족하는 $n$과 $p$를 찾을 수 없고, 점 $\mathrm{I}(1,0)$은 발사각이 $\theta=\dfrac{\pi}{\sqrt{6}}$인 빛의 반사지점 중 하나가 될 수 없다.

[아주대학교 문항정보 4]

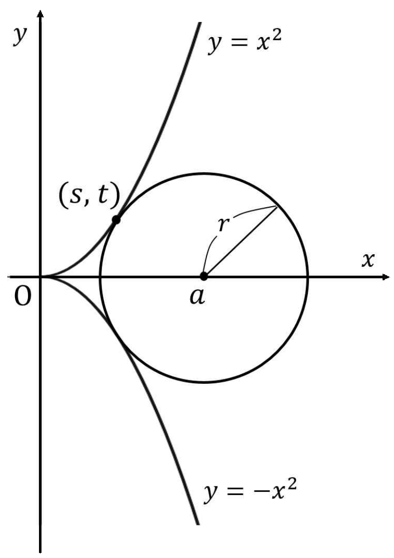
## 1. 일반 정보

| 유형 | ■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형 고사 | |
|---|---|---|
| 전형명 | 논술우수자전형 | |
| 해당 대학의 계열(과목) / 문항번호 | 자연(오전) 대문항 2번 | |
| 출제 범위 | 수학과 교육과정 과목명 | 수학 II, 미적분 |
| | 핵심개념 및 용어 | 수렴, 극한(값), 발산, 무한대, 정적분, $\lim_{x \to a+} f(x)$, $\int_a^b f(x)\,dx$ |
| 예상 소요 시간 | 120분 중 60분 | |

## 2. 문항 및 제시문

[제시문]

양수 $a$에 대해, 중심이 점 $(a,0)$인 원이 아래 그림과 같이 $x \geq 0$에서 정의된 두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2$과 각각 한 점에서만 만난다. 이때 원의 반지름을 $r$이라고 하고 원과 곡선 $y=x^2$이 만나는 점을 $(s,t)$라고 하자.



점 $(a,0)$이 $x$축을 따라 원점으로 다가갈수록 원의 반지름 $r$은 작아지고, $s$와 $t$도 작아진다. 즉, 세 양수 $r$, $s$, $t$는 $a$에 의존하여 변한다. 특히, 점 $(s,t)$는 다음의 식을 만족함이 알려져 있다.

$$t = \frac{a-s}{2s} \qquad \text{또는} \qquad 2st + s - a = 0 \quad \text{--- ㉠}$$

식 ㉠과 $t = s^2$를 이용하면

$$2s^3 + s = a$$

를 얻는다. $s$는 양수이므로 $0 < s < a$이어야 한다. 그러므로 $\lim_{a \to 0+} s = 0$이 된다.

[문항]

[문제 2-1] (10점) 원의 중심 $(a,0)$과 점 $(s,t)$를 잇는 선분을 $\ell_1$이라 하고 $\ell_1$과 $x$축이 이루는 예각을 $\theta$(라디안)이라고 하자. $a$가 $0$에 한없이 가까워질 때, $\theta$가 $\frac{\pi}{2}$에 한없이 가까워짐을 보여라.

[문제 2-2] (20점) $n = 0, 1, 2, \cdots$에 대하여 다음의 물음에 답하라.

(1) $\frac{a^n}{r}$을 $a$, $r$, $t$를 포함하지 않는 $s$만의 식으로 나타내라.

(2) $\lim_{a \to 0+} \frac{a^n}{r}$이 정수가 되는 $n$을 모두 구하라.

[문제 2-3] (20점) 제시문과 [문제 2-1]을 참고하여 다음의 물음에 답하라.

(1) $x$축에 대하여 선분 $\ell_1$과 대칭인 선분을 $\ell_2$라 하자. $x \geq 0$에서 정의된 두 곡선 $y = x^2$, $y = -x^2$과 두 선분 $\ell_1$, $\ell_2$로 둘러싸인 영역의 넓이를 $S$라 하자. $S$를 $a$, $r$, $t$를 포함하지 않는 $s$만의 식으로 나타내라.

(2) (1)에서 서술한 영역 중 원 내부에 포함된 부분의 넓이를 $T$라 할 때, $\lim_{a \to 0+} \frac{T}{S}$을 구하라.

## 3. 출제 의도

[문제 2-1] 상황에 따라 변하는 양들 사이의 관계를 알아차릴 수 있는지와 삼각함수의 연속성을 이용할 수 있는지를 평가한다.

[문제 2-2] 연결되어 있는 양들을 하나의 양으로 표현할 수 있는지와 극한값을 잘 구할 수 있는지를 평가한다.

[문제 2-3] 간단한 정적분을 할 수 있는지와, 앞선 문제로부터의 정보를 이용하여 극한값을 찾을 수 있는지를 평가한다.

## 4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

| 적용 교육과정 | 교육부 고시 제 2015-74호 [별책8] 수학과 교육과정 |
|---|---|
| 문항 및 제시문 | 학습내용 성취 기준 |
| | 수학 II<br>[12수학Ⅱ01-01] 함수의 극한의 뜻을 안다.<br>[12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.<br>[12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.<br>[12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.<br><br>미적분<br>[12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다. |

나) 자료 출처

| 참고자료 | 도서명 | 저자 | 발행처 | 발행년도 | 쪽수 |
|---|---|---|---|---|---|
| 고등학교 교과서 | 수학 Ⅱ | 박교식 외 19 | 동아 | 2021 | 12~15, 20,140 |
| | 수학 Ⅱ | 고성은 외 5 | 신사고 | 2021 | 11~15,19,134 |
| | 수학 Ⅱ | 이준열 외 9 | 천재교육 | 2021 | 12~15,20,134 |
| | 수학 Ⅱ | 김원경 외 14 | 비상 | 2021 | 12~15,19,127 |
| | 수학 Ⅱ | 류희찬 외10 | 천재교과서 | 2021 | 13~16,22,133 |
| | 미적분 | 김원경 외 14 | 비상 | 2021 | 65 |
| | 미적분 | 황선욱 외 8 | 미래엔 | 2021 | 73 |
| | 미적분 | 고성은 외 5 | 신사고 | 2021 | 67 |

## 5. 문항 해설

본 문항은 수학Ⅱ의 함수의 극한과 극한값, 함수의 극한에 대한 성질, 다항함수의 정적분, 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이, 미적분의 삼각함수의 극한에 관한 기초적인 내용을 근간으로 하는 수학 내적 연결 융합형 문항이다. 따라서 본 문항을 통해 학생들이 제시문을 읽고 주어진 상황에서 여러 가지 조건을 이용하여 식을 정리하고 정적분을 이용하여 다항함수에서 도형의 넓이를 표현한 후 이를 함수의 극한에 관한 기초적인 수학적 사실을 활용하여 함수의 수렴과 발산을 판단하여 문제를 전략적으로 해결할 수 있는지 파악하고자 하는 문항이다. 또한 학생들이 제시문에 주어진 수학적 설명과 시각적 정보를 관찰하여 식을 세우고 주어진 식을 변형하거나 정리하는 과정을 통해 수학적 사실을 추측하고 적절한 근거에 기초하여 문제 해결과정을 전개할 수 있는지 확인한다. 이러한 과정을 통해 문제해결력 역량과 효율적인 방법을 찾거나 정교화하는 융합 역량을 평가하는 문항이다.

## 6. 채점 기준

| 하위문항 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| [2-1] (1) | 식 ㉠을 이용하여 $\sin\theta$를 $s$의 식으로 표현 | 6점 |
| | 제시문의 $\lim_{a\to 0+} s = 0$을 이용하여 $\lim_{a\to 0+} \sin\theta = 1$이 되고, 사인함수의 연속성을 이용하여 $\lim_{a\to 0+} \theta = \frac{\pi}{2}$임을 보임 | 4점 |
| [2-2] (1) | 식 ㉠을 비롯한 여러 가지 관계식을 이용하여 $r$을 $s$(만)의 식으로 표현 | 2점 |
| | $\frac{a^n}{r}$을 $s$(만)의 식으로 나타냄. | 3점 |
| [2-2] (2) | $n=0$일 때 극한을 관찰 | 2점 |
| | $n=1$일 때 극한을 관찰 | 4점 |
| | $n=2$일 때 극한을 관찰 | 5점 |
| | $n \geq 3$일 때 극한을 관찰 후, 답을 확정함 | 4점 |
| [2-3] (1) | 삼각형의 면적의 공식과 적분식을 이용하여 $S$의 식을 세움 | 5점 |
| | $S$의 정적분을 계산하고 $s$(만)의 식으로 표현 | 5점 |
| [2-3] (2) | 부채꼴의 넓이 공식을 이용하여 $T$를 $s$와 $\theta$에 관하여 표현 | 4점 |
| | $\lim_{a\to 0+} \theta = \frac{\pi}{2}$을 이용하여 $\lim_{a\to 0+} \frac{T}{S}$의 극한값을 구함 | 6점 |

## 7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 2-1]

식 ㉠을 이용하면

$$\sin\theta = \frac{t}{r} = \frac{t}{\sqrt{(a-s)^2+t^2}} = \frac{t}{\sqrt{(2st)^2+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{4s^2+1}}$$

이고 $\lim_{a\to0+}\sin\theta = \lim_{s\to0+}\frac{1}{\sqrt{4s^2+1}} = 1$이 된다. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고 $1=\sin\frac{\pi}{2}$이므로 사인 함수의 연속성에 의하여 $\lim_{a\to0+}\theta = \frac{\pi}{2}$이다.

[문제 2-2]

(1) 점 $(s,t)$와 점 $(a,0)$사이의 거리가 원의 반지름 $r$이다. 이와 함께 식 ㉠과 점 $(s,t)$가 포물선 위에 있다는 것을 이용하면 식

$$r = t\sqrt{4s^2+1} = s^2\sqrt{4s^2+1}$$

을 얻는다. 위 식과 식 $2s^3+s=a$를 이용하면

$$\frac{a^n}{r} = \frac{(2s^3+s)^n}{s^2\sqrt{4s^2+1}}$$

의 식을 얻게 된다.

(2) $n$에 따라 다음의 극한을 관찰할 수 있다.

$$n=0; \qquad \lim_{a\to0+}\frac{a^0}{r} = \lim_{s\to0+}\frac{1}{s^2\sqrt{4s^2+1}} = \infty.$$

$$n=1; \qquad \lim_{a\to0+}\frac{a}{r} = \lim_{s\to0+}\frac{2s^3+s}{s^2\sqrt{4s^2+1}} = \lim_{s\to0+}\frac{2s^2+1}{s\sqrt{4s^2+1}} = \infty.$$

$n=2;$ $$\lim_{a\to 0+}\frac{a^2}{r}=\lim_{s\to 0+}\frac{(2s^3+s)^2}{s^2\sqrt{4s^2+1}}=\lim_{s\to 0+}\frac{(2s^2+1)^2}{\sqrt{4s^2+1}}=1.$$

$n\ge 3;$ $$\lim_{a\to 0+}\frac{a^n}{r}=\lim_{s\to 0+}\frac{(2s^3+s)^n}{s^2\sqrt{4s^2+1}}=\lim_{s\to 0+}\frac{(2s^2+1)^n s^{n-2}}{\sqrt{4s^2+1}}=0.$$

따라서 문제에서 구하는 답은 $2$이상의 정수가 된다.

[문제 2-3]

(1) 관찰을 통해 $S=(a-s)t+2\int_0^s x^2\,dx$ 임을 알 수 있다. 따라서, 식 ㉠과 점 $(s,t)$가 포물선 위에 있다는 것에 의하여 식

$$S=(2st)t+\frac{2}{3}s^3=2s^5+\frac{2}{3}s^3$$

을 얻는다.

(2) 부채꼴의 넓이의 공식을 이용하면 $T=r^2\theta=s^4(4s^2+1)\theta$이다. 따라서 $\lim_{a\to 0+}\theta=\frac{\pi}{2}$를 이용하면

$$\lim_{a\to 0+}\frac{T}{S}=\lim_{s\to 0+}\frac{s(4s^2+1)}{2s^2+\frac{2}{3}}\lim_{a\to 0+}\theta=0$$

의 극한값을 얻게 된다.

[아주대학교 문항정보 5]

## 1. 일반 정보

| 유형 | | ■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형 고사 |
|---|---|---|
| 전형명 | | 논술우수자전형 |
| 해당 대학의 계열(과목) / 문항번호 | | 자연(오후) 대문항 1번 |
| 출제 범위 | 수학과 교육과정 과목명 | 수학, 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분 |
| | 핵심개념 및 용어 | 합의 법칙, 수열, 수학적 귀납법, 수렴, 사잇값 정리, 도함수, 그래프의 개형, 수열의 극한 |
| 예상 소요 시간 | | 120분 중 60분 |

## 2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 짧은 신호(**S**)와 긴 신호(**L**)만으로 구성된 전신부호를 **모스부호**라 한다. 모스부호에 들어 있는 신호의 총 개수를 그 모스부호의 **길이**라 한다. 예를 들어, **SSL**은 길이가 $3$인 모스부호이고, **LSLLS**는 길이가 $5$인 모스부호이다. 길이가 $n$인 모든 모스부호의 개수가 $2^n$인 것은 자명하다. 아래 조건 ㈀을 만족하며 길이가 $n$인 모스부호의 개수를 $a_n$이라 하자.

| |
|---|
| ㈀ 긴 신호(**L**)가 $2$개 이상 연속해서 나타나지 않는다. |

조건 ㈀을 만족하는 모스부호 중에서 길이가 $1$인 것은 **S**, **L**이므로 $a_1 = 2$, 길이가 $2$인 것은 **SS**, **SL**, **LS**이므로 $a_2 = 3$, 길이가 $3$인 것은 **SSS**, **SSL**, **SLS**, **LSS**, **LSL**이므로 $a_3 = 5$이다. 따라서, $a_3 = a_2 + a_1$이다. 일반적으로 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

이 성립한다. 그리고 수열 $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$이 수렴한다는 것이 알려져 있다.

(나) 위에서 주어진 조건을 바꾸면 모스부호들의 개수가 달라진다. 아래의 조건 ㈁을 만족하며 길이가 $n$인 모스부호의 개수를 $b_n$이라 하자.

(ㄴ) 긴 신호(**L**)가 $3$개 이상 연속해서 나타나지 않는다.

조건 (ㄴ)을 만족하는 모스부호 중에서 길이가 $1$인 것은 **S**, **L**이므로 $b_1 = 2$, 길이가 $2$인 것은 **SS**, **SL**, **LS**, **LL**이므로 $b_2 = 4$이고, 길이가 $3$인 것은 **SSS**, **SSL**, **SLS**, **SLL**, **LSS**, **LSL**, **LLS**이므로 $b_3 = 7$이다. 한편, 수열 $\left\{\frac{b_{n+1}}{b_n}\right\}$이 수렴한다는 것이 알려져 있다.

[문항]
[문제 1-1] (20점) 제시문 (가)를 읽고 다음 질문에 답하라.
(1) 모든 자연수 $n$에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하라.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \le a_n \le 2^n$$

(2) $A = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$라 하자. $A$의 값을 구하라.

[문제 1-2] (30점) 제시문 (나)를 읽고 다음 질문에 답하라.
(1) 모든 자연수 $n$에 대하여 성립하는 $b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, b_{n+3}$의 관계식을 구하라.

(2) $B = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}$라 하자. 부등식 $\frac{3}{2} < B < 2$이 성립함을 증명하라.

## 3. 출제 의도

[문제 1-1] 제시문에 주어진 수열의 성질을 이해하고 이를 활용하여 수학적 귀납법과 극한 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

[문제 1-2] 제시문에 주어진 수열의 성질을 이해하고 함수의 그래프를 활용해 부등식을 해결할 수 있는지 평가한다.

## 4. 출제 근거

### 가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

| 적용 교육과정 | 교육부 고시 제 2015-74호 [별책8] 수학과 교육과정 |
|---|---|
| 문항 및 제시문 | 학습내용 성취 기준 |
| | 수학<br>[10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.<br>수학Ⅰ<br>[12수학Ⅰ03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.<br><br>수학Ⅱ<br>[12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.<br>[12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.<br>[12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.<br><br>미적분<br>[12미적01-01] 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.<br>[12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다. |

### 나) 자료 출처

| 참고자료 | 도서명 | 저자 | 발행처 | 발행년도 | 쪽수 |
|---|---|---|---|---|---|
| 고등학교 교과서 | 수학 | 김원경 외 14 | 비상 | 2021 | 243 |
| | 수학 | 이준열 외 9 | 천재교육 | 2021 | 263 |
| | 수학Ⅰ | 고성은 외 6 | 신사고 | 2021 | 147, 148 |
| | 수학Ⅰ | 홍성복 외 10 | 지학사 | 2021 | 154, 155 |
| | 수학Ⅱ | 박교식 외 19 | 동아 | 2021 | 40, 41, 89, 93 |
| | 수학Ⅱ | 김원경 외 14 | 비상 | 2021 | 38, 86, 90 |
| | 수학Ⅱ | 고성은 외 6 | 신사고 | 2021 | 38, 87, 94 |
| | 수학Ⅱ | 류희찬 외 10 | 천재교과서 | 2021 | 38, 86, 92 |
| | 미적분 | 황선욱 외 8 | 미래엔 | 2021 | 12, 17 |
| | 미적분 | 김원경 외 14 | 비상 | 2021 | 12, 17, 24 |
| | 미적분 | 고성은 외 5 | 신사고 | 2021 | 12, 15 |

## 5. 문항 해설

본 문항은 수학의 합의 법칙, 수학Ⅰ의 수열, 수학적 귀납법, 미적분의 수열의 극한, 수학Ⅱ의 함수 그래프의 개형, 연속함수의 성질 등의 교육과정 수학 내용을 활용하여 문제해결력을 평가하기 위한 문항이다. 이러한 다양한 수학적 지식을 토대로 수열의 극한을 계산하고, 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 명제를 증명할 수 있는지에 대한 수학적 문제해결력 및 추론 역량을 평가하는 문제이다. 또한, 도함수를 이용하여 함수의 그래프의 개형을 파악하고 사잇값 정리를 이용하여 주어진 구간에서 방정식의 실근이 존재함을 확인할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

## 6. 채점 기준

| 하위문항 | 채점 기준 | 배점 |
| --- | --- | --- |
| [1-1] (1) | $n=1$일 때 확인 | 1점 |
| | $n=2$일 때 확인 | 2점 |
| | $a_{k+1} \le 2a_k \le 2\times 2^k = 2^{k+1}$ | 3점 |
| | $a_{k+1} \ge \frac{3}{2}a_k \ge \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k \ge \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}$ | 4점 |
| [1-1] (2) | $A$는 $x^2-x-1=0$의 근이다 | 7점 |
| | $A=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ | 3점 |
| [1-2] (1) | 첫 번째 신호가 S인 경우 | 3점 |
| | 첫 번째 신호는 L이고, 두 번째 신호는 S인 경우 | 3점 |
| | 첫 번째 신호와 두 번째 신호가 모두 L인 경우 | 3점 |
| | $b_{n+3}=b_{n+2}+b_{n+1}+b_n$ | 6점 |
| [1-2] (2) | $B^3 = B^2+B+1$ | 5점 |
| | $f(x)$의 증감을 조사하면 $y=f(x)$의 그래프는 $x$축과 한 번 만난다는 사실을 알 수 있다. | 5점 |
| | 사잇값 정리에 의하여 $\frac{3}{2}<B<2$이 증명 | 5점 |

## 7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 1-1]

(1) $a_2 \le 2a_1$이고, $n \ge 3$이면 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \le 2a_{n-1}$이다. 그러므로

$$a_n \le 2a_{n-1}, \quad (n \ge 2) \text{ .....㉠}$$

이 성립한다.

$n=1$일 때, $a_1 = 2$이므로 $\frac{3}{2} \le a_1 \le 2$이 성립한다. $n=2$일 때, $a_2 = 3$이므로 $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \le a_2 \le 2^2$이 성립한다. $k \ge 2$이라 하자. 주어진 부등식이 $n=k$일 때 성립한다고 가정하고 $n=k+1$일 때 성립함을 증명한다. ㉠을 이용하면 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$a_{k+1} \le 2a_k \le 2 \times 2^k = 2^{k+1}$$

한편 ㉠을 이용하면, $3a_k = 2a_k + a_k \le 2a_k + 2a_{k-1} = 2(a_k + a_{k-1}) = 2a_{k+1}$이다. 즉, $a_{k+1} \ge \frac{3}{2}a_k$이다. 따라서

$$a_{k+1} \ge \frac{3}{2}a_k \ge \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k \ge \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}$$

이 성립한다.

(2) 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_{n+1} \ge a_n$이므로 $A \ge 1$이다. 관계식 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$의 양변을 $a_{n+1}$로 나누면

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

을 얻는다. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = A$이고 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{A}$이므로 위의 식의 양변에서 $n$을 무한대로 보내면 $A = 1 + \frac{1}{A}$이 된다. 즉 $A^2 - A - 1 = 0$. 그러므로 $A$는 $x^2 - x - 1 = 0$의 근이다. 이 방정식의 두 근은 $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$인데, $A \ge 1$이므로 $A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$이다.

[문제 1-2]

(1) 길이 $(n+3)$이며 조건 ㈏을 만족하는 모스부호의 첫 번째와 두 번째 신호에 따라 경우를 나누어 생각한다.

(a) 첫 번째 신호가 S인 경우: $2$번째부터 $(n+3)$번째까지 신호로 이루어진 모스부호는 길이가 $(n+2)$이며 조건 ㈏을 만족하므로 이 경우의 모스부호 개수는 $b_{n+2}$이다.

(b) 첫 번째 신호는 L이고, 두 번째 신호는 S인 경우: $3$번째부터 $(n+3)$번째까지 신호로 이루어진 모스부호는 길이가 $(n+1)$이며 조건 ㈏을 만족하므로 이 경우의 모스부호 개수는 $b_{n+1}$이다.

(c) 첫 번째 신호와 두 번째 신호가 모두 L인 경우: $3$번째 신호는 자동적으로 S이다. 그리고 $4$번째부터 $(n+3)$번째까지 신호로 이루어진 모스부호는 길이가 $n$이며 조건 ㈏을 만족하므로 이 경우의 모스부호 개수는 $b_n$이다.

세 가지 경우의 개수를 모두 합하여 관계식

$$b_{n+3} = b_{n+2} + b_{n+1} + b_n$$

을 얻는다.

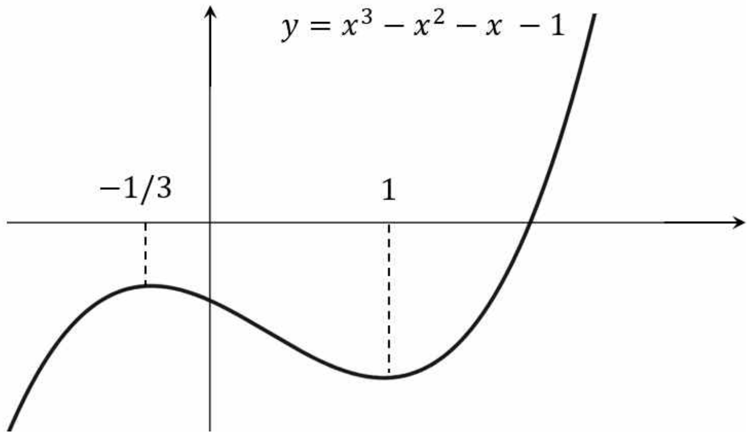
(2) 문제 (1)에서 얻은 관계식의 양변을 $b_n$으로 나누면

$\dfrac{b_{n+3}}{b_n} = \dfrac{b_{n+2}}{b_n} + \dfrac{b_{n+1}}{b_n} + 1$이 된다. 그런데

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+3}}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+3}}{b_{n+2}}\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}}\frac{b_{n+1}}{b_n} = B^3,\ \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+2}}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}}\frac{b_{n+1}}{b_n} = B^2$$

이다. 따라서 위의 관계식에서 $n$을 무한대로 보내어 $B^3 = B^2 + B + 1$을 얻는다. 이제 $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$라 놓으면 $B$는 방정식 $f(x) = 0$의 근이다. $f(x)$의 증감을 조사하면 $y = f(x)$의 그래프는 $x$축과 한 번 만난다는 사실을 알 수 있다.

| $x$ | | $-1/3$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | 증가 | $-22/27$ | 감소 | $-2$ | 증가 |




그런데 $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{11}{8} < 0$이고 $f(2) = 1 > 0$이므로 사잇값 정리에 의하여 $\frac{3}{2} < B < 2$이 증명된다.

[아주대학교 문항정보 6]

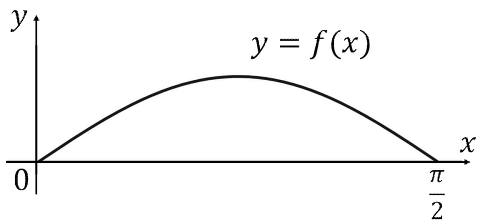
## 1. 일반 정보

| | | |
|---|---|---|
| 유형 | ■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형 고사 | |
| 전형명 | 논술우수자전형 | |
| 해당 대학의 계열(과목) / 문항번호 | 자연(오후) 대문항 2번 | |
| 출제 범위 | 수학과 교육과정 과목명 | 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분 |
| | 핵심개념 및 용어 | 삼각함수, 함수의 극한, 그래프의 개형, 롤의 정리, 정적분, 급수, 삼각함수의 극한, 이계도함수, 치환적분법 |
| 예상 소요 시간 | 120분 중 60분 | |

## 2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 자연수 $n$에 대하여 함수 $f(x)=\dfrac{1}{n+1}\sin(nx)$의 정의역을 $0\le x\le \dfrac{\pi}{n}$이라 하자. 예를 들어 $n=2$일 때 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.




함수 $f(x)$의 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이 $S_n$을 정적분을 이용하여 구할 수 있다.

(나) 함수 $f(x)$의 그래프가 위로 볼록하므로 위로 볼록한 그래프를 가지는 이차함수를 이용하여 $S_n$에 대한 어림값을 구할 수 있다. 자연수 $n$에 대하여 $f(x)$의 그래프 위의 한 점 $\mathrm{P}(\alpha, f(\alpha))$ (단, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{n}$)를 잡고, 세 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{P}(\alpha, f(\alpha))$, $\mathrm{Q}\left(\dfrac{\pi}{n}, 0\right)$을 지나는 이차함수의 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $T_n$이라

하면 $T_n$은 $S_n$에 대한 어림값이다. 점 $\mathrm{P}$의 위치가 변하면 $T_n$도 변한다.

(다) 두 함수 $g(x)$, $h(x)$가 공통의 정의역에서 함숫값이 $0$보다 크고 $K$는 상수라 하자. 다음 부등식 ㉠이 참이면 부등식 ㉡도 참이다.

$$Kh(x)-g(x) \geq 0 \text{ ---㉠} \qquad\qquad \frac{g(x)}{h(x)} \leq K \text{ ---㉡}$$

[문항]

[문제 2-1] (15점) 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하라.

(1) 각 자연수 $n$에 대하여 제시문 (가)에서 서술한 $S_n$을 구하라.

(2) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구하라.

[문제 2-2] (35점) 제시문을 이용하여 다음 물음에 답하라.

(1) 각 자연수 $n$에 대하여 제시문 (나)에서 서술한 $T_n$을 $n$과 $\alpha$에 대한 식으로 나타내라.

(2) $\lim_{\alpha \to 0+} T_n$을 구하라.

(3) $n=1$이라 하자. (1)과 제시문 (다)를 이용하여 $\alpha=\frac{\pi}{2}$일 때 $T_1$이 최댓값을 가짐을 증명하라.

(4) (3)을 이용하여 각 자연수 $n$에 대하여 $T_n$의 최댓값을 구하라.

## 3. 출제 의도

[문제 2-1] 제시문의 함수의 성질을 이해하고 정적분과 급수 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

[문제 2-2] 제시문의 함수의 성질을 이해하고 정적분, 극한, 최댓값 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

## 4. 출제 근거

### 가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

| 적용 교육과정 | 교육부 고시 제 2015-74호 [별책8] 수학과 교육과정 |
|---|---|
| 문항 및 제시문 | 학습내용 성취 기준 |
| | 수학Ⅰ<br>[12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.<br><br>수학Ⅱ<br>[12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.<br>[12수학Ⅱ02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.<br>[12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.<br>[12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.<br><br>미적분<br>[12미적01-04] 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.<br>[12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.<br>[12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다.<br>[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.<br>[12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. |

### 나) 자료 출처

| 참고자료 | 도서명 | 저자 | 발행처 | 발행년도 | 쪽수 |
|---|---|---|---|---|---|
| 고등학교 교과서 | 수학Ⅰ | 배종숙 외 6 | 금성 | 2021 | 83, 84 |
| | 수학Ⅰ | 고성은 외 6 | 신사고 | 2021 | 76, 77 |
| | 수학Ⅱ | 김원경 외 14 | 비상 | 2021 | 74, 75, 86, 127 |
| | 수학Ⅱ | 홍성복 외 10 | 지학사 | 2021 | 79, 90, 91, 142 |
| | 수학Ⅱ | 이준열 외 9 | 천재교육 | 2021 | 20, 83, 91, 133,134 |
| | 미적분 | 황선욱 외 8 | 미래엔 | 2021 | 31, 73, 98, 141, 148, 166 |
| | 미적분 | 김원경 외 14 | 비상 | 2021 | 29, 65, 99, 124, 135, 147 |
| | 미적분 | 홍성복 외 10 | 지학사 | 2021 | 31, 69, 75, 142, 153, 164 |
| | 미적분 | 류희찬 외 9 | 천재교과서 | 2021 | 31, 77, 120, 168, 159, 162 |

## 5. 문항 해설

본 문항은 수학Ⅰ의 삼각함수, 수학Ⅱ의 함수의 극한, 그래프의 개형, 롤의 정리, 정적분, 미적분의 급수, 삼각함수의 극한, 이계도함수 등의 교육과정 수학 내용을 다루고 있다. 따라서 본 문항을 통해 삼각함수의 정적분과 치환적분법을 이용하여 정적분을 구하고, 간단한 수열에 대한 급수를 계산할 수 있는지 평가하며 삼각함수의 그래프의 성질을 이용하여 최댓값 문제를 해결할 수 있는지 평가한다. 이를 통해 다양한 함수적 사고를 할 수 있는지 측정하고 문제를 해결하기 위한 수학적 절차를 논리적으로 수행할 수 있는지에 대한 수학 문제해결 역량 및 추론 능력을 평가하는 문항이다.

## 6. 채점 기준

| 하위문항 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| [2-1] (1) | $S_n = \int_0^{\pi/n} f(x)dx$ 의 정적분식 구성 | 3점 |
| | $S_n = \dfrac{2}{n(n+1)}$ 의 유도 | 7점 |
| [2-1] (2) | $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n(n+1)} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = 2$ | 5점 |
| [2-2] (1) | $g(x) = \dfrac{1}{n+1} \dfrac{\sin(n\alpha)}{\alpha\left(\alpha - \dfrac{\pi}{n}\right)} x\left(x - \dfrac{\pi}{n}\right)$ | 5점 |
| | $T_n = \dfrac{\pi^3}{6n^2(n+1)} \dfrac{\sin(n\alpha)}{\alpha(\pi - n\alpha)}$ | 5점 |
| [2-2] (2) | $\lim_{\alpha \to 0+} T_n = \dfrac{\pi^2}{6n(n+1)}$ | 5점 |
| [2-2] (3) | $k(x) = \dfrac{4}{\pi^2}x(\pi - x) - \sin x$ 라 놓고, $0 < x \le \dfrac{\pi}{2}$ 일 때 $k(x) \ge 0$을 보인다. | 5점 |
| | $\lim_{x \to 0+} k(x) = 0,\ k\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0,\ \lim_{x \to 0+} k'(x) = \dfrac{4}{\pi} - 1 > 0,\ k'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ | 5점 |
| | 롤의 정리에 의해 $k''(x) = 0$을 만족하는 $x$가 구간 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$에 2개 이상 존재하여 모순이다. | 5점 |
| [2-2] (4) | $T_n$의 최댓값은 $\dfrac{2\pi}{3n(n+1)}$ | 5점 |

## 7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 2-1]

(1) 각 자연수 $n$에 대하여

$$S_n = \int_0^{\pi/n} f(x)dx = \int_0^{\pi/n} \frac{1}{n+1}\sin(nx)dx = \left[-\frac{1}{n(n+1)}\cos(nx)\right]_0^{\pi/n}$$
$$= -\frac{1}{n(n+1)}(-1-1) = \frac{2}{n(n+1)}$$

이 된다.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2.$

[문제 2-2]

(1) 세 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{P}(\alpha, f(\alpha))$, $\mathrm{Q}(\pi/n, 0)$을 지나는 이차함수는 $g(x) = cx\left(x - \dfrac{\pi}{n}\right)$의 형태로 표현할 수 있고, 점 $\mathrm{P}(\alpha, f(\alpha))$를 지나야 하므로 $c = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{\sin(n\alpha)}{\alpha\left(\alpha - \frac{\pi}{n}\right)}$가 된다. 즉,

$$g(x) = \frac{1}{n+1}\frac{\sin(n\alpha)}{\alpha\left(\alpha - \frac{\pi}{n}\right)}x\left(x - \frac{\pi}{n}\right).$$

따라서, $T_n$은

$$T_n = \frac{1}{n+1}\frac{\sin(n\alpha)}{\alpha\left(\alpha - \frac{\pi}{n}\right)}\int_0^{\pi/n}\left(x^2 - \frac{\pi}{n}x\right)dx = \frac{1}{n+1}\frac{\sin(n\alpha)}{\alpha\left(\alpha - \frac{\pi}{n}\right)}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{\pi}{n}\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{n}}$$
$$= \frac{1}{n+1}\frac{\sin(n\alpha)}{\alpha\left(\alpha - \frac{\pi}{n}\right)}\left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{\pi}{n}\right)^3$$

이다. 이것을 정리하면

$$T_n = \frac{\pi^3}{6n^2(n+1)}\frac{\sin(n\alpha)}{\alpha(\pi - n\alpha)}$$

(2) $T_n = \dfrac{\pi^3}{6n(n+1)}\dfrac{1}{(\pi - n\alpha)}\dfrac{\sin(n\alpha)}{n\alpha}$이므로, $\lim\limits_{\alpha\to 0+}\dfrac{\sin(n\alpha)}{n\alpha} = 1$을 이용하여 다음을 얻는다.

$$\lim_{\alpha\to 0+} T_n = \frac{\pi^2}{6n(n+1)}$$

(3) (1)에서 구한 $T_1 = \dfrac{\pi^3}{12}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha(\pi-\alpha)}$가 $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$에서 최댓값 $\dfrac{\pi}{3}$를 갖는 것을 증명하기 위해서 구간 $0 < x < \pi$에서 정의된 함수 $h(x) = \dfrac{\sin x}{x(\pi - x)}$가 $x = \dfrac{\pi}{2}$에서 최댓값 $h\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{4}{\pi^2}$을 갖는 것을 증명하면 된다. 그런데 함수 $h(x)$의 그래프는 $x = \dfrac{\pi}{2}$를 중심으로 대칭이므로 $0 < x \le \dfrac{\pi}{2}$일 때 $h(x) = \dfrac{\sin x}{x(\pi - x)} \le \dfrac{4}{\pi^2}$이 성립함을 보이면 된다. $k(x) = \dfrac{4}{\pi^2}x(\pi - x) - \sin x$라 놓으면, 제시문 (다)에 의하여 $0 < x \le \dfrac{\pi}{2}$일 때 $k(x) \ge 0$을 보이면 된다.

$k(x)$와 $k'(x) = \dfrac{4}{\pi^2}(\pi - 2x) - \cos x$ 그리고 $k''(x) = -\dfrac{8}{\pi^2} + \sin x$에 대한 다음과 같은 사실을 확인할 수 있다.

① $\lim\limits_{x\to 0+} k(x) = 0,\ k\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

② $\lim\limits_{x\to 0+} k'(x) = \dfrac{4}{\pi} - 1 > 0,\ k'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0.$

③ $k''(x) = 0$을 만족하는 $x$는 구간 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$에 오직 한 개 존재한다.

이제 $k(x) < 0$이 되는 $x$가 구간 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$에 존재한다고 가정하자. 그러면 함수 $k(x)$는 0부터 $\dfrac{\pi}{2}$ 사이에서 차례로 증가, 감소, 증가하는 구간을 가지므로 $k'(x) = 0$을 만족하는 $x$가 구간 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$에 2개 이상 존재한다. $k'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$이므로 롤의 정리에 의해 $k''(x) = 0$을 만족하는 $x$가 구간 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$에 2개 이상 존재하고, 이것은 ③에 모순이다. 그러므로 $k(x) \ge 0$이 성립한다.

(4) $T_n = \dfrac{\pi^3}{6n^2(n+1)} \dfrac{\sin(n\alpha)}{\alpha(\pi - n\alpha)}$의 최댓값을 구하기 위해 $\dfrac{\sin(n\alpha)}{\alpha(\pi - n\alpha)}$의 최대값을 구간 $\left(0, \dfrac{\pi}{n}\right)$에서 구하면 된다. $n\alpha = y$로 놓으면 $0 < y < \pi$이고,

$$\frac{\sin(n\alpha)}{\alpha(\pi - n\alpha)} = \frac{n\sin y}{y(\pi - y)}$$

이다. (3)의 결과에 의하여 이것은 $y = \dfrac{\pi}{2}$, 즉 $\alpha = \dfrac{\pi}{2n}$일 때 최대가 된다. 그러므로 $T_n$의 최댓값은 $\dfrac{2\pi}{3n(n+1)}$이다.

[아주대학교 문항정보 7]

## 1. 일반 정보

| 유형 | ■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형 고사 | |
|---|---|---|
| 전형명 | 논술우수자전형 | |
| 해당 대학의 계열(과목) / 문항번호 | 자연(의학) 대문항 1번 | |
| 출제 범위 | 수학과 교육과정 과목명 | 수학, 수학 I, 미적분 |
| | 핵심개념 및 용어 | 합의 법칙, 삼각함수, 주기, 사인함수, 덧셈정리, 자연상수 $e$, $e^x$, 치환적분법 |
| 예상 소요 시간 | 120분 중 60분 | |

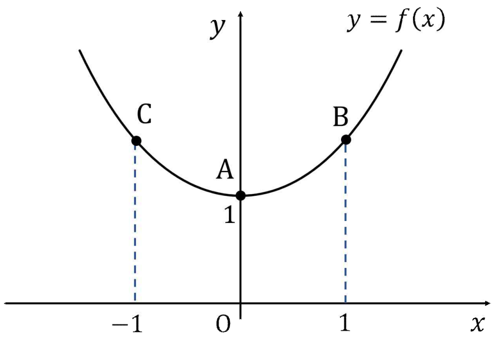
## 2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 정육면체의 주사위를 차례로 2번 던져 나오는 눈의 수를 순서대로 $n, l$이라고 하자. 함수 $x = g(t)$를 다음과 같이 정의한다.

$$g(t) = \sin\left(\frac{n}{l}t\right), \quad 0 \le t \le 2\pi$$

(나) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$이다. 제시문 (가)에서 정의된 $x$에 대하여 점 $\mathrm{Q}(x, f(x))$는 함수 $f(x)$의 그래프 위를 움직인다. 예를 들어 $\dfrac{n}{l} = 1$인 경우, 점 Q는 함수 $f(x)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{A}(0,1)$에서 출발하여 점 $\mathrm{B}(1, f(1))$, 점 $\mathrm{A}(0,1)$, 점 $\mathrm{C}(-1, f(-1))$를 차례대로 거쳐 점 $\mathrm{A}(0,1)$로 돌아온다.



[문항]

[문제 1-1] (25점) 제시문을 읽고 다음 물음에 답하라.

(1) $E=\int_0^{2\pi}|g'(t)|^2\,dt$이라 하자. 주어진 $n, l$에 대하여 $E$의 값을 $n, l$을 이용하여 표현하라.

(2) $E \geq \pi$를 만족하는 순서쌍 $(n,l)$을 모두 구하라.

[문제 1-2] (25점) 제시문을 읽고 다음 물음에 답하라.

(1) 주어진 $n, l$에 대하여 점 Q의 총 이동거리를 $L$이라 하자. $L$을 $n, l$을 이용하여 표현하라.

(2) $L \geq e-e^{-1}$을 만족하는 순서쌍 $(n,l)$을 모두 구하라.

## 3. 출제 의도

[문제 1-1] 사인함수와 관련된 정적분을 잘 할 수 있는지를 평가하고, 문제에 주어진 조건을 만족하는 경우를 관찰을 통해 정확하게 찾을 수 있는지를 평가한다.

[문제 1-2] 지수함수와 관련된 정적분의 계산능력을 평가하고, 복잡한 수학을 사용하지 않더라도 곡선 위를 움직이는 점의 이동거리를 상황에 따라 잘 서술할 수 있는지와 제시문을 만족하면서 실제로 일어날 수 있는 상황에 대한 정확한 관찰과 논리적인 설명이 가능한지를 평가한다.

## 4. 출제 근거

### 가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

| 적용 교육과정 | 교육부 고시 제 2015-74호 [별책8] 수학과 교육과정 |
|---|---|
| 문항 및 제시문 | 학습내용 성취 기준 |
| | 수학<br>[10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.<br>미적분<br>[12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.<br>[12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.<br>[12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다.<br>[12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.<br>[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.<br>[12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다. |

### 나) 자료 출처

| 참고자료 | 도서명 | 저자 | 발행처 | 발행년도 | 쪽수 |
|---|---|---|---|---|---|
| 고등학교 교과서 | 수학 | 황선욱 외 8 | 미래앤 | 2021 | 261 |
| | 수학 | 박교식 외 19 | 동아 | 2021 | 256 |
| | 수학 | 이준열 외 9 | 천재교육 | 2021 | 263 |
| | 미적분 | 김원경 외 14 | 비상 | 2021 | 52,55,61,68,80,127,156 |
| | 미적분 | 황선욱 외 8 | 미래엔 | 2021 | 56,57,60,68,76,87,144,175 |
| | 미적분 | 고성은 외 5 | 신사고 | 2021 | 51,52,55,62,71,81,134,163,164 |
| | 미적분 | 이준열 외 7 | 천재교육 | 2021 | 57,61,66,89,148,179 |
| | 미적분 | 류희찬 외 9 | 천재교과서 | 2021 | 57,63,69,81,105,166,191 |

## 5. 문항 해설

본 문항은 수학의 경우의 수에서 합의 법칙, 수학Ⅰ에서 삼각함수의 주기, 그래프, 미적분에서 지수함수, 삼각함수의 덧셈정리, 삼각함수의 미분과 적분, 지수함수의 미분, 적분을 이용하여 곡선의 길이를 구하는 기초적인 내용을 활용하여 문제해결력을 평가하는 수학 내적 연결 융합형 문항이다. 본 문항에서 삼각함수의 미분이나 적분하는 과정과 경우의 수를 융합한 문제를 해결해야 한다. 또한 제시문에서 주어진 조건을 정확하게 이해하고, 경우의 수와 적분을 이용하여 여러 가지 조건에 따라 규칙적으로 변하는 문제 상황을 파악하여 수학적 표현을 만들거나 변환할 수 있어야 하며, 경우를 나누어 조건을 만족하는 상황을 누락, 중복 없이 확인하는 조합적인 사고과정을 요구한다. 이러한 과정을 통해 수학 문제해결력 및 추론 역량을 평가하는 문항이다.

## 6. 채점 기준

| 하위문항 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| [1-1] (1) | 함수 $g(t)$의 미분 | 2점 |
| | $\lvert g'(t)\rvert^2$ 을 적분가능한 형태로 변형 | 3점 |
| | $E$를 정적분으로 구함 | 5점 |
| [1-1] (2) | $\frac{n}{l}$을 세가지 경우로 나누고, $\frac{n}{l}<1$인 경우 $E<\pi$임을 보임 | 5점 |
| | $\frac{n}{l} \geq 1$이고, $\frac{n}{l}$이 자연수이거나 기약분수로 표현했을 때 $\frac{a}{2}$ 또는 $\frac{a}{4}$ 꼴인 경우, $E \geq \pi$임을 보임 | 5점 |
| | $\frac{n}{l} \geq 1$이고, $\frac{n}{l}$을 기약분수로 표현했을 때 $\frac{a}{3}$ 또는 $\frac{a}{5}$꼴인 경우, $E > \pi$을 보이고 답을 확정함 | 5점 |
| [1-2] (1) | 점 Q가 방향 전환하기 전까지의 거리를 기본 이동 거리의 단위로 생각하고 이를 정적분으로 계산함 | 5점 |
| | 점 Q가 기본 이동 거리를 온전히 반복하는 횟수의 경우에 따라 $L$을 $n$과 $l$로 표현함. | 5점 |
| | 순서쌍 $(n, l)$에 대하여 점 Q의 실제 가능한 기본 이동 거리 반복하는 횟수를 찾음 | 2점 |
| | 위의 두 정보를 종합하여 답을 씀 | 3점 |
| [1-2] (2) | $\frac{n}{l}$이 클수록 점 $Q$의 이동량과 $L$이 증가함을 관찰 | 5점 |
| | $\frac{n}{l}=\frac{1}{2}$일 때 $L=e-e^{-1}$을 관찰 | 3점 |
| | 문제의 조건을 만족하는 모든 $(n,l)$을 기술함 | 2점 |

## 7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 1-1]

(1) $g(t)=\sin\left(\frac{n}{l}t\right)$를 미분하면 $g'(t)=\frac{n}{l}\cos\left(\frac{n}{l}t\right)$를 얻는다. 이것을 제곱하고 $\cos^2\theta=\frac{1+\cos(2\theta)}{2}$를 이용하면

$$|g'(t)|^2=\frac{1}{2}\left(\frac{n}{l}\right)^2\left(1+\cos\left(\frac{2n}{l}t\right)\right)$$

이다. 따라서

$$E=\int_0^{2\pi}|g'(t)|^2\,dt=\frac{1}{2}\left(\frac{n}{l}\right)^2\left\{2\pi+\frac{l}{2n}\sin\left(\frac{2n}{l}2\pi\right)\right\}=\left(\frac{n}{l}\right)^2\pi+\frac{n}{4l}\sin\left(\frac{4n\pi}{l}\right)$$

이다.

(2) 다음과 같은 세 가지 경우를 고려하면 된다.

1) $\frac{n}{l}<1$인 경우

$\sin\theta\le 1$을 이용하면

$$E=\left(\frac{n}{l}\right)^2\pi+\frac{n}{4l}\sin\left(\frac{4n\pi}{l}\right)\le\left(\frac{n}{l}\right)^2\pi+\frac{n}{4l}<\left\{\left(\frac{n}{l}\right)^2+\frac{1}{4}\frac{n}{l}\right\}\pi$$

를 관찰할 수 있다. 이와 관련하여 함수 $h(t)=t^2+\frac{1}{4}t$를 정의하자. $h(t)$는 모든 $t>0$에 대하여 증가함수이다. $\frac{n}{l}<1$을 만족하는 순서쌍 중에서 $\frac{n}{l}$값이 최대가 되는 경우는 $(n,l)=(5,6)$인 경우이다. $h\left(\frac{5}{6}\right)<1$이므로, $\frac{n}{l}<1$인 모든 순서쌍 $(n,l)$에 대하여 $E<\pi$이다.

2) $\frac{n}{l}\ge 1$이고, $\frac{n}{l}$이 자연수이거나 기약분수로 표현했을 때 $\frac{a}{2}$ 또는 $\frac{a}{4}$꼴인 경우

$\sin\left(\frac{4n\pi}{l}\right)=0$이기 때문에 부등식

$$E=\left(\frac{n}{l}\right)^2\pi+\frac{n}{4l}\sin\frac{4n\pi}{l}=\left(\frac{n}{l}\right)^2\pi\ge\pi$$

이 성립한다.

3) $\frac{n}{l} \geq 1$이고, $\frac{n}{l}$을 기약분수로 표현했을 때 $\frac{a}{3}$ 또는 $\frac{a}{5}$꼴인 경우
이 경우에는 가능한 순서쌍이 다음 세 가지뿐이다.

$$(n,l)=(4,3),(5,3),(6,5)$$

$-1 \leq \sin\theta$를 이용하면, 위의 각 경우에 대해 해당하는 $E$에 대한 다음 부등식을 관찰할 수 있다.

$(n,l)=(4,3)$: $E=\left(\frac{4}{3}\right)^2\pi+\frac{1}{3}\sin\frac{16\pi}{3} > \frac{16}{9}\pi-\frac{1}{3}=\pi+\frac{7}{9}\pi-\frac{1}{3}>\pi$

$(n,l)=(5,3)$: $E=\left(\frac{5}{3}\right)^2\pi+\frac{5}{12}\sin\frac{20\pi}{3} > \frac{25}{9}\pi-\frac{5}{12}=\pi+\frac{16}{9}\pi-\frac{5}{12}>\pi$

$(n,l)=(6,5)$: $E=\left(\frac{6}{5}\right)^2\pi+\frac{3}{10}\sin\frac{24\pi}{5}> \frac{36}{25}\pi-\frac{3}{10}=\pi+\frac{11}{25}\pi-\frac{3}{10}>\pi$

그러므로 답은 $\frac{n}{l} \geq 1$을 만족하는 모든 순서쌍 $(n,l)$이다.

[문제 1-2]

(1) $\mathrm{A}(0,\mathrm{f}(0))$부터 점 $(s,f(s))$ 사이의 곡선의 길이를 $G(s)$라 하면, $s \geq 0$ 일때

$$G(s)=\int_0^s\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=\int_0^s\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_0^s\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx=\frac{e^s-e^{-s}}{2}$$

이고, $s \leq 0$이면

$$G(s)=\frac{e^{-s}-e^s}{2}$$

이다. 특히 $\mathrm{A}(0,\mathrm{f}(0))$부터 $\mathrm{B}(1,\mathrm{f}(1))$까지 곡선의 길이와 $\mathrm{A}(0,\mathrm{f}(0))$부터 $\mathrm{C}(-1,\mathrm{f}(-1))$까지 곡선의 길이는 모두 $\frac{e-e^{-1}}{2}$이다.

$0 \leq t \leq 2\pi$일 때, $0 \leq \frac{n}{l}t \leq \frac{2n\pi}{l}$이며 $\frac{n}{l}t$가 $0$부터 시작하여 $\frac{\pi}{2}$만큼 변할 때마다 점 $\mathrm{Q}$는 $\mathrm{A}$와 $\mathrm{B}$사이 또는 $\mathrm{A}$와 $\mathrm{C}$사이의 곡선을 지난다. $\frac{\frac{n}{l}2\pi}{\frac{\pi}{2}}=\frac{4n}{l}$이기 때

문에, $k \le \frac{4n}{l} < k+1$인 정수 $k$에 대하여, $k$는 점 Q가 A와 B사이 또는 A와 C사이의 곡선을 온전하게 이동하는 총 회수를 의미한다. $k$를 4로 나눈 나머지를 $a$라 하자.

- $a=0$인 경우: Q는 점 A에 있거나 점 A에서 점 B로 가던 중 멈춘다. 따라서

$$L = \frac{e-e^{-1}}{2}k + \frac{e^{\sin\frac{2n\pi}{l}} - e^{-\sin\frac{2n\pi}{l}}}{2}.$$

- $a=1$인 경우: Q는 점 B에 있거나 점 B에서 점 A로 가던 중 멈춘다.

$$L = \frac{e-e^{-1}}{2}k + \frac{e-e^{-1}}{2} - \frac{e^{\sin\frac{2n\pi}{l}} - e^{-\sin\frac{2n\pi}{l}}}{2} = \frac{e-e^{-1}}{2}(k+1) - \frac{e^{\sin\frac{2n\pi}{l}} - e^{-\sin\frac{2n\pi}{l}}}{2}$$

.

- $a=2$인 경우: Q는 점 A에 있거나 점 A에서 점 C로 가던 중 멈춘다.

$$L = \frac{e-e^{-1}}{2}k + \frac{e^{-\sin\frac{2n\pi}{l}} - e^{\sin\frac{2n\pi}{l}}}{2} = \frac{e-e^{-1}}{2}k - \frac{e^{\sin\frac{2n\pi}{l}} - e^{-\sin\frac{2n\pi}{l}}}{2}.$$

- $a=3$인 경우: Q는 점 C에 있거나 점 C에서 A로 가던 중 멈춘다.

$$L = \frac{e-e^{-1}}{2}k + \frac{e-e^{-1}}{2} - \frac{e^{-\sin\frac{2n\pi}{l}} - e^{\sin\frac{2n\pi}{l}}}{2} = \frac{e-e^{-1}}{2}(k+1) + \frac{e^{\sin\frac{2n\pi}{l}} - e^{-\sin\frac{2n\pi}{l}}}{2}$$

.

한편 $n, l$은 주사위의 눈의 수이므로 나올 수 있는 $k$값은 관찰을 통해

$$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 20, 24$$

임을 알 수 있다. 따라서 답은 다음과 같다.

$$L = \begin{cases} \frac{e-e^{-1}}{2}k + (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{e^{\sin\frac{2n\pi}{l}} - e^{-\sin\frac{2n\pi}{l}}}{2} & (k=0,2,4,6,8,10,12,16,20,24) \\ \frac{e-e^{-1}}{2}(k+1) + (-1)^{\frac{k+1}{2}} \frac{e^{\sin\frac{2n\pi}{l}} - e^{-\sin\frac{2n\pi}{l}}}{2} & (k=1,3,5) \end{cases}$$

(2) $\frac{n}{l}$이 클수록 점 Q의 이동량과 $L$이 증가한다. $\frac{n}{l} = \frac{1}{2}$일 때 점 Q는 점 $\mathrm{A}(0,1)$에서 출발하여 점 $\mathrm{B}(1, f(1))$를 거쳐 점 $\mathrm{A}(0,1)$로 되돌아 오면서 이동을 끝낸다.

이때 $L = e - e^{-1}$이다. 따라서,$L \geq e - e^{-1}$을 만족하는 순서쌍 $(n,l)$은 $2n \geq l$을 만족하는 모든 순서쌍 $(n, l)$이다.