2022학년도 신입생 수시모집

논술고사 문제지(자연계)

경희대학교

[11월 21일(일) **오전**]

지원학부(과) (　　　　　　　　) 수험번호 | | | | | | | | | | 성 명 (　　　　　)

<유의사항 : 아래 내용 위반시 감점 또는 0점 처리함>

1. 답안의 작성과 정정은 반드시 본교에서 지급한 펜을 사용하시고, 다른 펜으로 답안을 작성한 경우 공란으로 처리하므로 유의하시오.
2. 답안지에 제목을 쓰지 말고, 특별한 표시를 하지 마시오.
3. 답안지에 답안과 관련된 내용 이외에 어떤 것도 쓰지 마시오(예: 감사합니다 등).
4. 답안 작성 시 논제번호(예: Ⅰ, Ⅱ…)에 맞춰 답안을 작성하며, 논제별 소문항번호[예: (1), (2)…]를 쓰고 이어서 논술하시오.
5. 답안 정정 시에는 두 줄을 긋고 작성하며, 수정도구(수정액 또는 수정테이프) 사용은 절대 불가하므로 유의하시오.
6. 논제별 분량 제한을 준수하고 답안지는 반드시 1장만 사용하시오.
7. 지정된 답안의 작성 영역을 벗어나지 않도록 각별히 유의하시오.
8. **자연계 문제지는 총 2장 4쪽입니다.**

다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오. (100점)

[가] 좌표평면의 원점 O와 점 $\mathrm{P}(x, y)$에 대하여, 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ, $\overline{\mathrm{OP}}$를 r이라 하면

$$\sin\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \tan\theta = \frac{y}{x}\ (x \neq 0),\ \csc\theta = \frac{r}{y}\ (y \neq 0),\ \sec\theta = \frac{r}{x}\ (x \neq 0),\ \cot\theta = \frac{x}{y}\ (y \neq 0)$$

[나] 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x = f(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속도 v는 다음과 같다.

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

[다] 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a) = 0$이고 $x = a$의 좌우에서

① $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x = a$에서 극대이다.

② $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x = a$에서 극소이다.

[라] 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고, $f'(x)$와 $g'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

[마] 표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여

① 사건 A 또는 B가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A \cup B)$는 $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

② 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$

[바] n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개 있을 때, n개를 일렬로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p! \times q! \times \cdots \times r!}\ (\text{단, } p + q + \cdots + r = n)$$

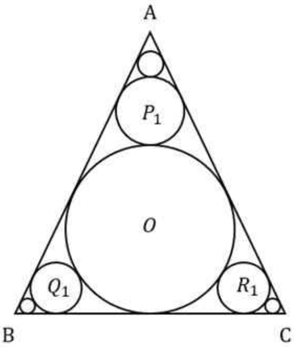
[사] 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

< 뒷면에 계속 >

[논제 Ⅰ]

$\overline{AB} = \overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC의 내접원 O의 반지름을 1이라 하고 <그림 1>과 같이 두 변과 내접원 O에 모두 접하는 원을 각각 P_1, Q_1, R_1이라 하자. 자연수 n에 대하여 원 P_{n+1}은 원 P_n과 두 변 AB, AC에 접하고, 원 P_{n+1}의 반지름은 원 P_n의 반지름보다 작다. 원 Q_{n+1}은 원 Q_n과 두 변 AB, BC에 접하고, 원 Q_{n+1}의 반지름은 원 Q_n의 반지름보다 작다. 원 R_{n+1}은 원 R_n과 두 변 BC, AC에 접하고, 원 R_{n+1}의 반지름은 원 R_n의 반지름보다 작다. 각 B의 크기를 θ라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.



<그림 1>

(1) 모든 원의 둘레의 합을 $f(\theta) = c_1 \sec d_1\theta + c_2 \csc d_2\theta + c_3$의 꼴로 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (단, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2는 실수이다.) (15점)

(2) 삼각형 ABC의 세 변의 길이의 합 $g(\theta)$와 극한값 $\lim_{\theta \to 0} \frac{f(\theta)}{g(\theta)}$, $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{f(\theta)}{g(\theta)}$를 구하시오. 그리고 그 근거를 논술하시오. (10점)

[논제 Ⅱ]

수직선 위의 두 점 P, Q가 시각 $t=0$일 때 각각 원점 O와 q_0에서 출발하여 속도 $v_1(t)$, $v_2(t)$로 움직인다. 다음 조건

'$q_0 > a$인 모든 실수 q_0에 대하여 $0 < t < 1$에서 두 점 P와 Q는 만나지 않는다.'

에 대하여 물음에 답하시오.

(1) $v_1(t) = v_2(t) + \cos\frac{\pi}{2}t$일 때, 위 조건을 만족하는 실수 a의 최솟값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (10점)

(2) $v_1(t) = v_2(t) + t\cos 4\pi t$일 때, 위 조건을 만족하는 실수 a의 최솟값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

< 다음 장에 계속 >

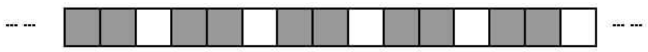
[논제 Ⅲ]

(1) 다음과 같이 두 학생 A, B 중에서 상품을 받을 한 명을 결정한다.

(ⅰ) 비긴 경우도 포함해서 가위바위보를 최대 4회 실시한다.
(ⅱ) A는 B보다 이긴 횟수가 많거나 같을 때 상품을 받는다.
(ⅲ) B는 A보다 이긴 횟수가 많을 때만 상품을 받는다.
(ⅳ) 가위바위보는 상품을 받을 학생이 결정될 때까지만 한다.

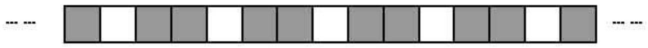
예를 들어, A가 먼저 1회 이기고 2회 비긴 경우에는 남은 1회를 실시하지 않고 A가 상품을 받는다. 또한, 4회 모두 비긴 경우에도 A가 상품을 받는다. 이때 A가 상품을 받을 확률을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (단, A, B가 가위, 바위, 보를 낼 확률은 각각 $\frac{1}{3}$이다.) (10점)

(2) 앞면이 검은색이고 뒷면이 흰색인 종이를 가로로 n장 붙여서 띠를 만든다. 이 띠와 같은 띠를 왼쪽과 오른쪽으로 계속 이어 붙여서 만들어지는 모양을 생각하자. 예를 들어 세 장의 종이를 검은색, 검은색, 흰색이 보이도록 순서대로 붙여서 띠를 만든 뒤, 이를 계속 이어 붙이면 <그림 2>와 같은 모양이 된다.



<그림 2>

이때, 옆으로 몇 칸 움직이거나, 위아래로 뒤집은 것들을 같은 모양으로 본다. 예를 들어 <그림 3>과 <그림 4>는 <그림 2>와 같은 모양으로 본다.



<그림 3>

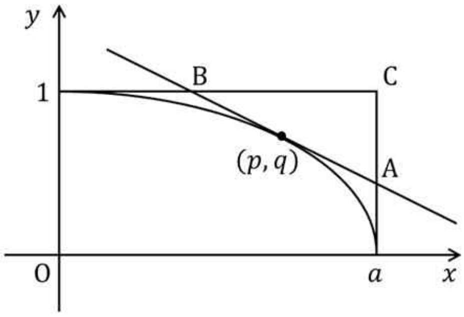
<그림 4>

위의 규칙대로 n장의 종이로 만든 띠를 이어 붙여서 얻어지는 서로 다른 모양의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $n=2$일 때 검은색 면이 보이도록 놓인 종이를 B, 흰색 면이 보이도록 놓인 종이를 W로 표시하면, 서로 다른 모양은 BW로 만든 것과 BB로 만든 것뿐이므로 a_2는 2이다. 이와 같이 a_4, a_5, a_6을 각각 구하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

< 뒷면에 계속 >

[논제 Ⅳ]

<그림 5>와 같이 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$과 제1사분면에서 접하는 직선이 직선 $x=a$와 점 A에서 만나고, 직선 $y=1$과 점 B에서 만난다. 점 C는 $(a, 1)$이다. (단, $a>0$)



<그림 5>

(1) 접점의 좌표가 (p, q)일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 p와 q의 식으로 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (10점)

(2) 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

< 끝 >

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 필답고사
전형명	논술우수자전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / (I)문항

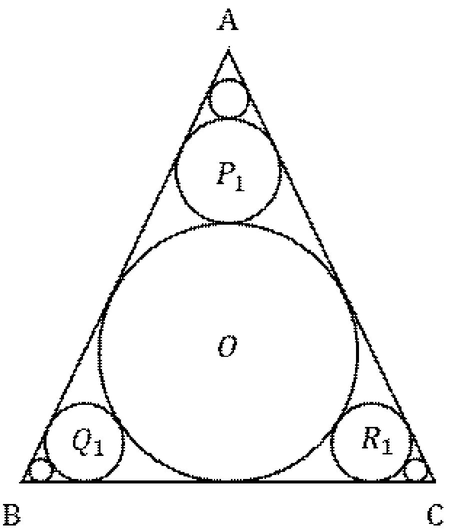
2. 2022학년도 수시모집 논술고사 문항 및 제시문

[가] 좌표평면의 원점 O와 점 $\mathrm{P}(x,y)$에 대하여, 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ, $\overline{\mathrm{OP}}$를 r이라 하면

$$\sin\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \tan\theta = \frac{y}{x}\ (x \neq 0),\ \csc\theta = \frac{r}{y}\ (y \neq 0),\ \sec\theta = \frac{r}{x}\ (x \neq 0),\ \cot\theta = \frac{x}{y}\ (y \neq 0)$$

[논제 I]

$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}}$인 이등변삼각형 ABC의 내접원 O의 반지름을 1이라 하고 <그림 1>과 같이 두 변과 내접원 O에 모두 접하는 원을 각각 P_1, Q_1, R_1이라 하자. 자연수 n에 대하여 원 P_{n+1}은 원 P_n과 두 변 AB, AC에 접하고, 원 P_{n+1}의 반지름은 원 P_n의 반지름보다 작다. 원 Q_{n+1}은 원 Q_n과 두 변 AB, BC에 접하고, 원 Q_{n+1}의 반지름은 원 Q_n의 반지름보다 작다. 원 R_{n+1}은 원 R_n과 두 변 BC, AC에 접하고, 원 R_{n+1}의 반지름은 원 R_n의 반지름보다 작다. 각 B의 크기를 θ라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.



<그림 1>

(1) 모든 원의 둘레의 합을 $f(\theta) = c_1 \sec d_1\theta + c_2 \csc d_2\theta + c_3$의 꼴로 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (단, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2는 실수이다.) (15점)

(2) 삼각형 ABC의 세 변의 길이의 합 $g(\theta)$와 극한값 $\lim_{\theta \to 0} \frac{f(\theta)}{g(\theta)}$, $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{f(\theta)}{g(\theta)}$를 구하시오. 그리고 그 근거를 논술하시오. (10점)

3. 2022학년도 수시모집 논술고사출제 의도

고등학교 수학 교육과정의 삼각함수의 정의와 등비급수의 합 공식 및 함수의 극한을 활용하여 조건을 만족시키는 원의 둘레의 합과 삼각형의 둘레의 길이의 비의 극한을 구하는 문제를 출제하여 논리적으로 사고하고 수학적으로 추론할 수 있는 능력을 평가하고자 하였다. 단편적인 수학의 공식의 활용 능력보다는 주어진 조건을 종합적으로 이해하여 주어진 상황을 수학적 문제로 해석하고, 그 문제를 체계적이고 합리적으로 해결할 수 있는 능력을 갖고 있는지를 평가하고자 하였다.

4. 2022학년도 수시모집 논술고사문항 해설

이등변삼각형의 내접원부터 시작하여 주어진 원과 삼각형의 두 변에 접하는 원을 계속 채워 나갈 수 있는데, 이러한 원의 둘레의 길이와 삼각형의 둘레의 길이와의 비를 구하는 문제이다. 특히 삼각형이 한없이 높아지거나 옆으로 길어지는 극한을 직관적으로 추론할 수 있는데, 이를 실제 계산으로 확인할 수 있다.

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련자료	재구성여부
수학 I	김원경 외 14인	(주)비상교육	2021	71	제시문[가]	X
미적분	박교식 외 19인	(주)동아출판	2021	61	제시문[가]	X

5. 2022학년도 수시모집 논술고사채점 기준

(1) (15점)

<5점> 원 P_n의 둘레의 길이에 관한 등비급수를 구한다.

<5점> 원 Q_n 또는 원 R_n의 둘레의 길이에 관한 등비급수를 구한다.

<5점> 모든 원의 둘레의 길이를 요구하는 형태로 표현할 수 있다.

(2) (10점)

<5점> 삼각형의 세 변의 길이의 합을 각 θ로 표현할 수 있다.

<5점> 길이의 비의 극한값을 계산할 수 있다.

6. 2022학년도 수시모집 논술고사 예시답안

(1) 각 B와 각 C의 크기를 θ라 하면, 각 A의 크기는 $\pi-2\theta$이다. 원 P_1의 반지름 p_1은

$\frac{1-p_1}{1+p_1}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$에서 $p_1=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$이므로, 일반적으로 원 P_n의 반지름 p_n은 공비가 $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$인

등비수열이다. 마찬가지로 원 Q_1의 반지름 q_1은 $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1-q_1}{1+q_1}$에서 $q_1=\frac{1-\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}$이므로, 일반적으로 원 Q_n의

반지름 q_n은 공비가 $\frac{1-\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}$인 등비수열이다. 원 R_n의 반지름 r_n은 q_n과 같다. 따라서, 모든 원의 둘레의 합은

내접원 O의 둘레를 첫째항으로 하는 등비급수의 합을 이용하여 계산하면

$$f(\theta)=\frac{2\pi}{1-\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}+2\frac{2\pi}{1-\frac{1-\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}}-4\pi=\frac{\pi(1+\cos\theta)}{\cos\theta}+\frac{2\pi\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}-4\pi$$

$=\pi\sec\theta+2\pi\csc\frac{\theta}{2}-\pi$이다.

(2) 삼각형의 세 변의 길이의 합은 내접원의 중심에서 각 변에 수선의 발을 내려, 꼭짓점에서 그 수선의 발까지의 거리의 합을 이용하여 계산할 수 있다. $g(\theta)=2\tan\theta+4\cot\frac{\theta}{2}$이다.

$\frac{f(\theta)}{g(\theta)}=\frac{\pi\sec\theta+2\pi\csc\frac{\theta}{2}-\pi}{2\tan\theta+4\cot\frac{\theta}{2}}=\frac{\pi\sin\frac{\theta}{2}\sec\theta+2\pi-\pi\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\tan\theta+4\cos\frac{\theta}{2}}$ 이고, $\theta\to 0$이면

$\frac{\pi\sin\frac{\theta}{2}\sec\theta+2\pi-\pi\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\tan\theta+4\cos\frac{\theta}{2}}\to\frac{0+2\pi-0}{0+4}=\frac{\pi}{2}$ 이므로, $\lim_{\theta\to 0}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}=\frac{\pi}{2}$ 이다.

또한,

$\frac{f(\theta)}{g(\theta)}=\frac{\pi\sec\theta+2\pi\csc\frac{\theta}{2}-\pi}{2\tan\theta+4\cot\frac{\theta}{2}}=\frac{\pi+2\pi\cos\theta\csc\frac{\theta}{2}-\pi\cos\theta}{2\sin\theta+4\cos\theta\cot\frac{\theta}{2}}$ 이고,

$\theta\to\frac{\pi}{2}$ 이면 $\frac{\pi+2\pi\cos\theta\csc\frac{\theta}{2}-\pi\cos\theta}{2\sin\theta+4\cos\theta\cot\frac{\theta}{2}}\to\frac{\pi+0-0}{2+0}=\frac{\pi}{2}$ 이므로, $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}=\frac{\pi}{2}$ 이다.

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 필답고사
전형명	논술우수자전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / (Ⅱ)문항

2. 2022학년도 수시모집 논술고사 문항 및 제시문

[나] 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속도 v는 다음과 같다.

$$v=\frac{dx}{dt}=f'(t)$$

[다] 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서

① $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

② $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

[라] 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고, $f'(x)$와 $g'(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

[논제 Ⅱ]

수직선 위의 두 점 P, Q가 시각 $t=0$일 때 각각 원점 O와 q_0에서 출발하여 속도 $v_1(t)$, $v_2(t)$로 움직인다. 다음 조건

'$q_0>a$인 모든 실수 q_0에 대하여 $0<t<1$에서 두 점 P와 Q는 만나지 않는다.'

에 대하여 물음에 답하시오.

(1) $v_1(t)=v_2(t)+\cos\frac{\pi}{2}t$일 때, 위 조건을 만족하는 실수 a의 최솟값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (10점)

(2) $v_1(t)=v_2(t)+t\cos 4\pi t$일 때, 위 조건을 만족하는 실수 a의 최솟값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

3. 2022학년도 수시모집 논술고사출제 의도

[논제II]에서는 고등학교 교육과정의 수직선 위에서 움직이는 점의 속도, 위치에 관한 기본 개념과 함수의 극값, 부분적분법 등을 종합적으로 잘 이해하고 응용할 수 있는지를 파악할 수 있는 논제를 출제하였다. 주어진 조건으로부터 수학적으로 추론하고 단순한 공식의 적용보다는 주어진 상황을 수학적으로 표현하여 문제해결을 위한 논리적인 방향을 제시하고 합리적으로 해결할 수 있는 능력을 갖추고 있는지를 평가하고자 하였다.

4. 2022학년도 수시모집 논술고사문항 해설

[논제 II]에서는 수직선 위에서 움직이는 점의 위치, 속도, 부분적분, 함수의 극값 등을 이용하여 제시된 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가하고자 하였다.

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련자료	재구성여부
고등학교 미적분	고성은 외 6인	(주)좋은책신사고	2020	112	제시문[나]	X
고등학교 미적분	고성은 외 6인	(주)좋은책신사고	2020	102	제시문[다]	X
고등학교 미적분	황선욱 외 8명	미래엔	2021	153	제시문[라]	X

5. 2022학년도 수시모집 논술고사채점 기준

[논제 II]

(1)

<3점> 속도 함수를 적분한다.

<4점> 적분한 함수를 이용하여 P,Q가 만나지 않을 q_0의 조건을 찾는다.

<3점> 모든 $q_0 > a$에 대하여, P,Q가 만나지 않을 a의 조건에 관해 찾는다.

(2)

<5점> 속도 함수를 적분한다.

<6점> 적분한 함수의 그래프의 개형을 이용하여, 점 P,Q가 만나지 않을 q_0의 조건을 찾는다.

<4점> 모든 $q_0 > a$에 대하여, P,Q가 만나지 않을 a의 조건에 관해 찾는다.

6. 2022학년도 수시모집 논술고사 예시답안

(1) 시각 t에서 두 점 P, Q의 위치를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 두면, $f(0)=0$, $g(0)=q_0$이고 $f'(t)=g'(t)+\cos\frac{\pi}{2}t$이다.

$h(t)=f(t)-g(t)$로 두고, 위의 등식을 적분하면 $h(t)=\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}t+h(0)=\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}t-q_0$ 이다.

'$q_0>a$인 모든 q_0에 대하여, 두 점 P, Q가 만나지 않는다'는

'$q_0>a$인 모든 q_0에 대하여, 시각 $0<t<1$에서 $h(t)=0$인 t가 존재하지 않는다'와 같다.

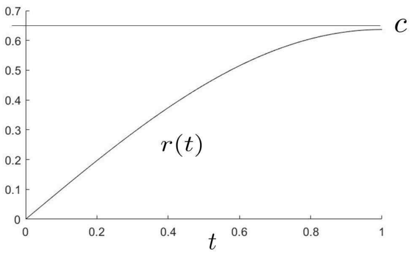
따라서, $q_0>a$인 모든 q_0에 대하여, 시각 $0<t<1$에서 $h(t)=0$인 t가 존재하지 않을 a의 최솟값을 찾으면 된다.

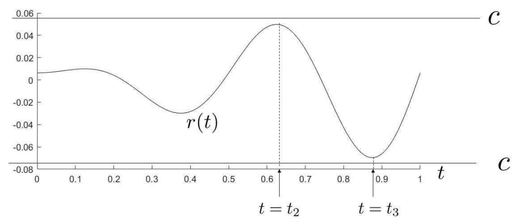
$r(t)=\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}t$, $c=q_0$라 두면, $h(t)=0$의 해는 $r(t)=c$의 해가 된다.

아래 왼쪽 그림과 같이 $y=r(t)$와 $y=c$의 교점이 $0<t<1$에서 존재하지 않기 위해서는

$c=q_0>h(1)=\frac{2}{\pi}$ **혹은** $c=q_0\le 0$를 만족하여야 한다.

즉, $a \geq \dfrac{2}{\pi}$일 때 $q_0 > a$를 만족하는 모든 q_0에 대하여, 두 점 P,Q가 만나지 않는다. 따라서, a의 최솟값은 $\dfrac{2}{\pi}$이다.





(2) (1)에서와 같이 $h(t)$를 정의하면, $h(0) = -q_0$이고 $h'(t) = t\cos 4\pi t$이므로, $h(t) = \dfrac{1}{4\pi} t \sin 4\pi t + \dfrac{1}{(4\pi)^2}\cos 4\pi t - \dfrac{1}{(4\pi)^2} - q_0$ 이다.

이때, $r(t)$와 c를 다음과 같이 두면, $r(t) = \dfrac{1}{4\pi} t \sin 4\pi t + \dfrac{1}{(4\pi)^2}\cos 4\pi t$, $c = \dfrac{1}{(4\pi)^2} + q_0$, $h(t) = 0$의 해는 $r(t) = c$의 해가 된다.

$y = r(t)$의 그래프를 그리기 위해 $r(t)$의 극점을 구하면, $r'(t) = t\cos 4\pi t = 0$ 에서 $t_k = \dfrac{2k+1}{8}$, $k = 0, 1, 2, 3$이 된다.

각 t_k에서 $r(t_k) = \dfrac{1}{4\pi} t_k \sin\left(k + \dfrac{1}{2}\right)\pi = \dfrac{t_k}{4\pi}(-1)^k = (-1)^k \dfrac{2k+1}{32\pi}$이다. $r(0) = r(1) = \dfrac{1}{(4\pi)^2}$ 이므로, 함수의 증감표는 다음과 같다.

t	0		t_0		t_1		t_2		t_3		1
$r'(t)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	
$r(t)$	$\dfrac{1}{(4\pi)^2}$	↗	$\dfrac{1}{32\pi}$	↘	$\dfrac{-3}{32\pi}$	↗	$\dfrac{5}{32\pi}$	↘	$\dfrac{-7}{32\pi}$	↗	$\dfrac{1}{(4\pi)^2}$

함수의 그래프의 개형은 위의 오른쪽 그림과 같으며, $c > r(t_2)$ 혹은 $c < r(t_3)$일 때, $r(t) = c$의 해가 없다.

$c = \dfrac{1}{(4\pi)^2} + q_0$이므로, $q_0 > r(t_2) - \dfrac{1}{(4\pi)^2}\left(= \dfrac{5\pi - 2}{32\pi^2}\right)$ 혹은 $q_0 < r(t_3) - \dfrac{1}{(4\pi)^2}\left(= \dfrac{-7\pi - 2}{32\pi^2}\right)$이면, $r(t) = c$의 해가 없다.

즉, $a \geq \dfrac{5\pi - 2}{32\pi^2}$일 때, $q_0 > a$인 모든 q_0에 대하여 $r(t) = c$의 해가 존재하지 않는다.

따라서, 두 점 P, Q가 $0 < t < 1$에서 만나지 않을 a의 최솟값은 $\dfrac{5\pi - 2}{32\pi^2}$이다.

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 필답고사
전형명	논술우수자전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / (Ⅲ)문항

2. 2022학년도 수시모집 논술고사 문항 및 제시문

제시문

[마] 표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여

① 사건 A 또는 B가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A \cup B)$는 $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

② 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$

[바] n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개 있을 때, n개를 일렬로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p! \times q! \times \cdots \times r!} \quad (\text{단, } p+q+\cdots+r=n)$$

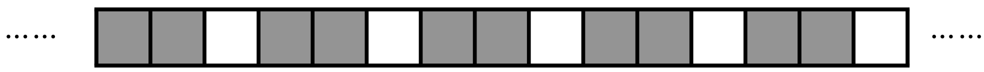
[논제 Ⅲ]

(1) 다음과 같이 두 학생 A, B 중에서 상품을 받을 한 명을 결정한다.

(ⅰ) 비긴 경우도 포함해서 가위바위보를 최대 4회 실시한다.
(ⅱ) A는 B보다 이긴 횟수가 많거나 같을 때 상품을 받는다.
(ⅲ) B는 A보다 이긴 횟수가 많을 때만 상품을 받는다.
(ⅳ) 가위바위보는 상품을 받을 학생이 결정될 때까지만 한다.

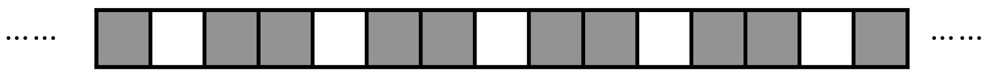
예를 들어, A가 먼저 1회 이기고 2회 비긴 경우에는 남은 1회를 실시하지 않고 A가 상품을 받는다. 또한, 4회 모두 비긴 경우에도 A가 상품을 받는다. 이때 A가 상품을 받을 확률을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (단, A, B가 가위, 바위, 보를 낼 확률은 각각 $\frac{1}{3}$이다.) (10점)

(2) 앞면이 검은색이고 뒷면이 흰색인 종이를 가로로 n장 붙여서 띠를 만든다. 이 띠와 같은 띠를 왼쪽과 오른쪽으로 계속 이어 붙여서 만들어지는 모양을 생각하자. 예를 들어 세 장의 종이를 검은색, 검은색, 흰색이 보이도록 순서대로 붙여서 띠를 만든 뒤, 이를 계속 이어 붙이면 <그림 2>와 같은 모양이 된다.

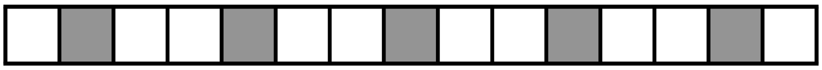


<그림 2>

이때, 옆으로 몇 칸 움직이거나, 위아래로 뒤집은 것들을 같은 모양으로 본다. 예를 들어 <그림 3>과 <그림 4>는 <그림 2>와 같은 모양으로 본다.



<그림 3>

……  ……

<그림 4>

위의 규칙대로 n장의 종이로 만든 띠를 이어 붙여서 얻어지는 서로 다른 모양의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $n=2$일 때 검은색 면이 보이도록 놓인 종이를 B, 흰색 면이 보이도록 놓인 종이를 W로 표시하면, 서로 다른 모양은 BW로 만든 것과 BB로 만든 것뿐이므로 a_2는 2이다. 이와 같이 a_4, a_5, a_6을 각각 구하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

3. 2022학년도 수시모집 논술고사출제 의도

자연계 [논제 III] (1)에서는 고등학교 수학 교육과정 확률과 통계 영역 경우의 수의 합의 법칙과 곱의 법칙, 확률의 기본 성질, 확률의 덧셈정리와 곱셈정리, 사건의 독립과 종속 등의 기본 개념을 종합적으로 잘 이해하고 응용할 수 있는지를 파악할 수 있는 논제를 출제하였다. 주어진 실생활과 관련된 상황에서 수학의 지식과 기능을 활용하여 해결 전략을 탐색하고 최적의 해결 방안을 선택하여 주어진 문제를 해결하는 문제 해결 능력과 수학적 사실을 추측하고 논리적으로 분석하고 정당화하는 추론 능력 등 단순한 공식의 적용보다는 논제를 수학적으로 표현하여 문제 해결을 위한 논리적인 방향을 제시하고 합리적으로 해결하는데 필요한 능력을 갖추고 있는지를 평가하고자 하였다.
자연계 [논제 III] (2)에서는 고등학교 교육과정의 경우의 수, 여러 가지 순열 등의 기본 개념을 종합적으로 잘 이해하고 응용할 수 있는지를 파악할 수 있는 논제를 출제하였다. 주어진 상황을 수학적으로 표현하여 문제해결을 위한 논리적인 방향을 제시하고 합리적으로 해결할 수 있는 능력을 갖추고 있는지를 평가하고자 하였다.

4. 2022학년도 수시모집 논술고사문항 해설

[논제 III]의 (1)에서는 경우의 수의 합의 법칙과 곱의 법칙, 확률의 기본 성질, 확률의 덧셈정리와 곱셈정리, 조건부확률, 사건의 독립과 종속 등의 개념을 이해하고 주어진 실생활과 관련된 상황에서의 확률을 계산할 수 있는지를 평가하고자 하였다. [논제 III]의 (2)에서는 주어진 상황에서 나타나는 경우의 수를 빠짐없이 구할 수 있는 능력을 평가하고자 하였다.

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련자료	재구성여부
확률과통계	권오남 외 14명	교학사	2021	51	제시문[마]	X
확률과통계	황선욱 외 9명	미래엔	2021	15	제시문[바]	X

5. 2022학년도 수시모집 논술고사채점 기준

[논제 III] (1)
<5점> A가 상품을 받는 경우의 수를 적절하게 분류한다.
<5점> A가 상품을 받을 확률을 정확하게 구한다.

[논제 III] (2)
<4점> 적절한 방법으로 a_4를 구한다.
<5점> 적절한 방법으로 a_5를 구한다.
<6점> 적절한 방법으로 a_6를 구한다.

6. 2022학년도 수시모집 논술고사 예시답안

(1) 가위바위보에서 A가 B를 이길 확률, 비길 확률, 질 확률은 모두 $\frac{1}{3}$이다.

(i) 1회만 실시한 뒤, A가 상품을 받는 경우
- 없음 (1회에 A가 이긴 경우라도 2회, 3회, 4회에 B가 이기면 B가 상품을 받게 된다. 이처럼 1회만 실시한 뒤에는 상품을 받을 사람이 결정되지 않는다. 따라서 1회만 실시한 뒤 A가 상품을 받는 경우는 없다.)

(ii) 2회만 실시한 뒤, A가 상품을 받는 경우
- 2승: 승-승

(iii) 3회만 실시한 뒤, A가 상품을 받는 경우
- 2승 1패: 승-패-승 / 패-승-승
- 2승 1무: 승-무-승 / 무-승-승
- 1승 2무: 승-무-무 / 무-승-무 / 무-무-승

(iv) 4회 실시한 뒤, A가 상품을 받는 경우
- 2승 2패: 승-패-패-승 / 패-승-패-승 / 패-패-승-승
- 2승 1무 1패: 승-무-패-승 / 승-패-무-승 / 무-승-패-승 / 무-패-승-승 / 패-승-무-승 / 패-무-승-승
- 1승 2무 1패: 승-패-무-무 / 승-무-패-무 / 패-승-무-무 / 패-무-승-무 / 패-무-무-승 / 무-승-패-무 / 무-무-패-승 / 무-패-승-무 / 무-패-무-승
- 1승 3무: 무-무-무-승
- 4무: 무-무-무-무

따라서 구하는 확률은 $1\times\frac{1}{9}+7\times\frac{1}{27}+20\times\frac{1}{81}=\frac{50}{81}$이다.

(2) 검은색 면이 위로 놓인 경우를 B, 흰색 면이 위로 놓인 경우를 W로 표시하자. r개의 B와 s개의 W로 이루어진 띠의 위아래를 뒤집으면, s개의 B와 r개의 W로 이루어진 띠가 되므로, r이 s보다 크거나 같은 경우만 고려하면 된다.

1) n=4일 때
1-1) B의 개수가 4일 때, BBBB 한 가지 경우 밖에 없다.
1-2) B의 개수가 3일 때, BBBW, BBWB, BWBB, WBBB가 같은 모양이므로 한 가지 밖에 없다.
1-3) B의 개수가 2일 때, BBWW, BWWB, WWBB, WBBW가 같은 모양이고, BWBW, WBWB가 같은 모양이다. 2개의 B와 2개의 W를 일렬로 나열하는 순열의 수는 $\frac{4!}{2!2!}=6$이므로, 이 두 가지 말고 다른 모양은 없다.
따라서 $a_4=1+1+2=4$이다.

2) n=5일 때
 2-1) B의 개수가 5일 때, BBBBB 한 가지 경우 밖에 없다.
 2-2) B의 개수가 4일 때, BBBBW 한 가지 경우 밖에 없다.
 2-3) B의 개수가 3일 때, BBBWW와 같은 모양이 되는 순열이 4개가 더 있고, BBWBW와 같은 모양인 순열도 4개가 더 있다. 3개의 B와 2개의 W를 일렬로 나열하는 순열의 수는 $\frac{5!}{3!2!}=10$이므로, 이 두 가지 말고 다른 모양은 없다.
따라서 $a_5=1+1+2=4$이다.

3) n=6일 때
 3-1) B의 개수가 6일 때, BBBBBB 한 가지 경우 밖에 없다.
 3-2) B의 개수가 5일 때, BBBBBW 한 가지 경우 밖에 없다.
 3-3) B의 개수가 4일 때, BBBBWW, BBBWBW와 같은 모양이 되는 순열이 각각 5개씩 더 있으며, BBWBBW와 같은 모양이 되는 순열은 2개가 더 있다. 4개의 B와 2개의 W를 일렬로 늘어놓은 경우의 수는 $\frac{6!}{4!2!}=15$이므로, 이 세 가지 말고 다른 모양은 없다.
 3-4) B의 개수가 3일 때, BBBWWW와 같은 모양이 되는 순열이 5개, BBWBWW와 같은 모양이 되는 순열이 11개 더 있으며, BWBWBW와 WBWBWB는 서로 같은 모양이다. 3개의 B와 3개의 W를 일렬로 나열하는 순열의 수는 $\frac{6!}{3!3!}=20$이므로, 이 세 가지 말고 다른 모양은 없다.
따라서 $a_6=1+1+3+3=8$이다.

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 필답고사
전형명	논술우수자전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / (Ⅳ)문항

2. 2022학년도 수시모집 논술고사 문항 및 제시문

[다] 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서

① $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

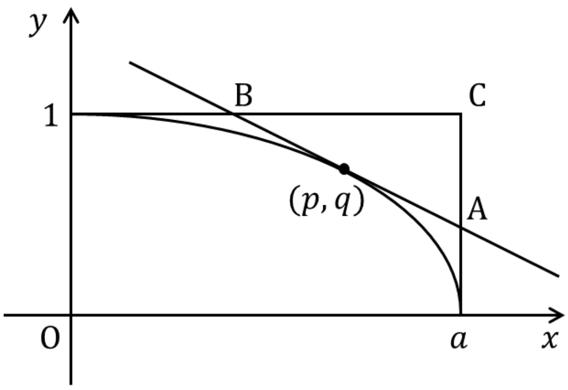
② $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

[사] 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1 x}{a^2}+\frac{y_1 y}{b^2}=1$$

[논제 Ⅳ]

<그림 5>와 같이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$과 제1사분면에서 접하는 직선이 직선 $x=a$와 점 A에서 만나고, 직선 $y=1$과 점 B에서 만난다. 점 C는 $(a, 1)$이다. (단, $a>0$)



<그림 5>

(1) 접점의 좌표가 (p, q)일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 p와 q의 식으로 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (10점)

(2) 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)

3. 2022학년도 수시모집 논술고사출제 의도

논제 Ⅳ <수학>

논제 Ⅳ 수학에서는 고등학교 교육과정의 이차곡선, 여러 가지 미분법, 도함수의 활용 등의 기본 개념을 종합적으로 잘 이해하고 응용할 수 있는지를 파악할 수 있는 논제를 출제하였다. 주어진 조건으로부터 수학적으로 추론하고 단순한 공식의 적용보다는 주어진 상황을 수학적으로 표현하여 문제해결을 위한 논리적인 방향을 제시하고 합리적으로 해결할 수 있는 능력을 갖추고 있는지를 평가하고자 하였다.

4. 2022학년도 수시모집 논술고사문항 해설

논제 Ⅳ <수학>

논제 Ⅳ에서는 타원의 접선의 방정식을 구하고, 이 접선의 일부분을 선분으로 하는 직각삼각형의 넓이의 최댓값을 여러 가지 미분법과 도함수의 활용을 이용하여 계산할 수 있는 능력을 평가하고자 하였다.

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련자료	재구성여부
고등학교 미적분	고성은 외 5인	좋은책 신사고	2020	102	제시문[다]	×
고등학교 기하	김원경 외 14인	비상교육	2020	41	제시문[사]	×

5. 2022학년도 수시모집 논술고사채점 기준

논제 Ⅳ <수학>

(1) <7점> 점 A와 점 B의 좌표를 찾는다.

<3점> 삼각형 ABC의 넓이를 찾는다.

(2) <5점> 넓이의 도함수를 찾는다.

<10점> 도함수를 이용하여 최댓값을 찾는다.

6. 2022학년도 수시모집 논술고사 예시답안

[논제 IV]

(1) 접점이 제1사분면에 있으므로 $0<p<a$, $0<q<1$이다.

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$ 위의 점 (p,q)에서 접선의 방정식은 $\dfrac{px}{a^2}+qy=1$이다.

접선의 기울기는 $\dfrac{dq}{dp}=-\dfrac{p}{a^2q}$이다.

$x=a$일 때, $\dfrac{p}{a}+qy=1$이므로, $\mathrm{A}\left(a,\dfrac{-p+a}{aq}\right)$이고, $y=1$일 때, $\dfrac{px}{a^2}+q=1$이므로, $\mathrm{B}\left(\dfrac{a^2(-q+1)}{p},1\right)$이다.

삼각형 ABC의 넓이는

$$S=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AC}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{-p+a}{aq}\right)\left\{a-\frac{a^2(-q+1)}{p}\right\}=\frac{(p+aq-a)^2}{2pq}\text{ 이다.}$$

(2) 삼각형 ABC의 넓이 S를 p에 대하여 미분하면 (여기서, $\dfrac{p^2}{a^2}+q^2=1$를 이용)

$$\frac{dS}{dp}=\frac{2(p+aq-a)\left(1+a\dfrac{dq}{dp}\right)pq-(p+aq-a)^2\left(q+p\dfrac{dq}{dp}\right)}{2p^2q^2}\text{ 이고,}$$

$\frac{dq}{dp} = -\frac{p}{a^2 q}$ 와 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ 를 이용하여 이를 정리하면

$\frac{dS}{dp} = \frac{(p + aq - a)\left(-2p^2 + ap - a^2 q + a^2\right)}{2ap^2 q^3} = \frac{(p-a)(q-1)(aq-p)}{p^2 q^3}$ 이다.

$0 < p < a$ 이고 $0 < q < 1$ 이므로 $p = \frac{a}{\sqrt{2}}$ 에서만 $\frac{dS}{dp} = 0$ 이고, $p = \frac{a}{\sqrt{2}}$ 에서 $\frac{dS}{dp}$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀐다. 따라서, 삼각형 ABC의 넓이는 $p = \frac{a}{\sqrt{2}}$ 에서 최댓값 $S = (3 - 2\sqrt{2})a$ 을 가진다.