2024학년도 수능완성출제분석서(수.완.출)
- 수학 I -

by. 17학번머스크(OrbiID)

"이걸 활용한 넌 잘 될거야"

- 대상

수학 2-3등급 이상

- 배경과 목표

'풀 것도 많은데, EBS를 다 풀어야해?' '선별해준것만 풀어도 되려나? 찝찝한데?'

그래서 왜 선별했는지 그리고 어떻게 출제될 수 있는지까지
선별하였습니다. 또한, 6월부터 수학 또한 심심찮게 ebs에서 출제된 요소들과 표현들이 자주나오다보니
수능특강에 비해서 난이도가 비교적 높은 수능완성에서 더더욱 좋은 POINT들을 연구하여 문제 몇 놈이
출제될 수 있다고 판단하였습니다.

- 활용방안

좌측에는 문제들이 오른쪽에는 출제분석이 적혀있습니다.
문제푸는 속도가 정말 빠르신 분들은 그냥 수능완성 사서 다 풀고 이 칼럼을 읽어주면 좋고,
할 것이 산더미이신 분들은 해당 1) 문제를 풀어버리고, 2) 한번 더 출제 분석을 정독
하시면 도움이 될 것 같습니다. !

- 이상 예상 질문들

Q. 선별의 기준은?

A. 어디서든 볼 수 있는 문제들과 본인이 2등급 이상이고 정상적인 루틴 (개념서,기출서,인강교재 등을 '적당히' 풀어오며살았음) 으로 살아왔다면, 지금 당장 급하게 풀지 않아도 되는 것들은 제외하였습니다.

Q. EBS 선별을 너(17머스크)가 왜 해?

A. 본인은 문제 판매 타율이 좋은 편이고, 유명한 강사분들 밑에서 조교로 일하였기에(비밀조항) 오르비에서 많은 고수들이 계시지만, 현 수험생들에게 도움이 될 만한 자료를 일단 만들어 보고 싶었고, EBS를 단순 선별 이상으로 활용할 수 있겠다고 판단하여 자료를 만들어본것이고 무료로 배포하고자하니, 양해바랍니당

Q. 기하는?

A. 안(못)해요

수능완성

수학Ⅰ. 1. 지수함수와 로그함수

[7page 7번]

1. $x>0$에서 정의된 함수 $f(x)=x\sqrt{x}$에 대하여 $f(f(n))$의 값이 1보다 큰 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. 1)

출제 포인트

$f(f(n))$ 즉 합성이라는 행동으로 지수법칙을 전개하고 있다.
지수문제의 다양한 표현으로
쉬운 3점에서 나올 수 있는 여지가 있다.

[9page 14번]

2. 두 점 $(\log_3 2, \log_9 a)$, $(\log_3 54, \log_9 a^2)$을 지나는 직선이 직선 $y=-2x+1$과 수직일 때, 양수 a의 값은?

① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

2)

출제 포인트

두 점을 로그로 표현한 후 직선을 주고 다른 직선 또는 곡선과의 관계를 물으면서, 사실상 로그연산을 하면 되는 문제인데, 그냥 연산을 바로 묻지않고 이와같이 고1개념과 함께, 식을 직접 찾아야하는 문제는 더 자주 나올 수 있다.
(킬러를 배제하면서 중등수학~고등수학내용 전반적인 기본 개념을 섞어 출제할 수 있다.)

[9page 15번]

3. 1이 아닌 두 양수 a, b에 대하여 두 집합 A, B를

$$A=\left\{\log_a b,\ \frac{1}{\log_9 27},\ \frac{1}{3}\log_b b^5\right\}$$

$$B=\left\{2,\ \log_a a^{\frac{2}{3}},\ \log_2 a+\log_2 b\right\}$$

라 하자. $A=B$일 때, $\log_a 2+\log_b 2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 3)

출제 포인트

집합은 문제에서 다양한 해결능력을 평가하기 좋다.
일단 원소가 3개이고, 3개의 원소가 모두 같으면서 계산을 해나간다. 집합의 특성은 미적에서도 꾸준히 나올 것이다. 문제는 쉬움

[10page 18번]

4. 두 함수 $f(x)=2^{x+2}$, $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}+1$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 함수 $y=f(|x|)$의 치역은 $\{y|y\geq 4\}$이다.
ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $g(|x|)\leq 2$이다.
ㄷ. 두 함수 $y=f(|x|)$, $y=g(|x|)+k$의 그래프가 y축 위의 점에서 만날 때, 함수 $y=g(|x|)+k$의 그래프의 점근선은 직선 $y=3$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

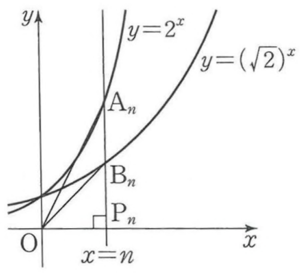
4)

출제 포인트

$y=f(|x|)$의 그래프 개형정도는 알고 있겠지..
지수로그함수에서 점근선이라는 도구도 심플하지만 자주 쓰인다.

[11page 20번]

5. 자연수 n에 대하여 그림과 같이 직선 $x=n$이 두 곡선 $y=2^x$, $y=(\sqrt{2})^x$과 만나는 점을 각각 A_n, B_n이라 하고 x축과 만나는 점을 P_n이라 하자. 원점 O에 대하여 두 직각삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{A}_n$, $\mathrm{OP}_n\mathrm{B}_n$의 넓이를 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, 부등식 $f(n)-4\times g(n)\geq 16n$을 만족시키는 n의 최솟값은?



① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

5)

출제 포인트

올드하고, 그래프에서 단순하게 식을 찾아서 연산하는 문제.

[12page 22번]

6. 점근선이 $x=-3$인 곡선 $y=\log_3(ax+b)$가 두 점 $(0, 2)$, $(2, k)$를 지날 때, k의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $-1+\log_3 5$ ② $\log_3 5$ ③ $1+\log_3 5$
④ $2+\log_3 5$ ⑤ $3+\log_3 5$

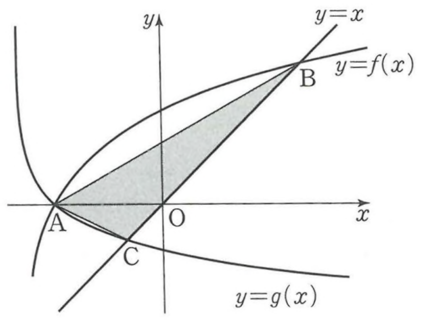
6)

출제 포인트

지로함수에서 점근선의 존재를 잊지 말자.

[12page 24번]

7. $a>1$인 실수 a와 상수 m에 대하여 그림과 같이 함수 $f(x)=\log_a(x-m)$의 그래프와 함수 $g(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x+4)$의 그래프가 x축 위의 점 A에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=x$와 제1사분면에서 만나는 점을 B, 곡선 $y=g(x)$가 직선 $y=x$와 만나는 점을 C라 하자. 점 C의 좌표가 $(-1,\ -1)$이고 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{15}{2}$일 때, $a=2^{\frac{q}{p}}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 7)



출제 포인트

좌표평면에서 삼각형의 넓이는 x축과 y축에 수선의 발을 내려 구하는 것이 일반적이다. (지금 문제에서는 $y=x$라는 예쁜 직선에도 점 A에서 수선의 발을 내릴 수 있다.)

[13page 26번]

8. 부등식 $\log_3\frac{x}{3}\times\log_3\frac{x}{9}<6$을 만족시키는 자연수 x의 최댓값은?

① 80 ② 81 ③ 82
④ 83 ⑤ 84

8)

출제 포인트

빠르게 치환. 그리고 로그 정의. 단순 연산`

[14page 28번]

9. 함수 $f(x)=2^{x-1}+a$의 역함수가 $g(x)=\log_2(x-2)+1$이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 함수의 그래프의 점근선은 직선 $x=5$이다. 두 상수 a, m에 대하여 $a+m$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

9)

출제 포인트

역함수와 점근선 그리고 평행이동까지
최근들어서는 역함수관계가 평행이동 속에서 유지되는 포인트를 찾아 문제를 풀어나간다.

[14page 29번]

10. 곡선 $y=\log_2(x-1)-1$과 기울기가 -1인 직선 l이 점 $(5,\ 1)$에서 만난다. 직선 l과 곡선 $y=2^x$이 점 $(a,\ b)$에서 만날 때, $\frac{b}{a}$의 값은?

① 2 ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ 4 ⑤ $\frac{14}{3}$

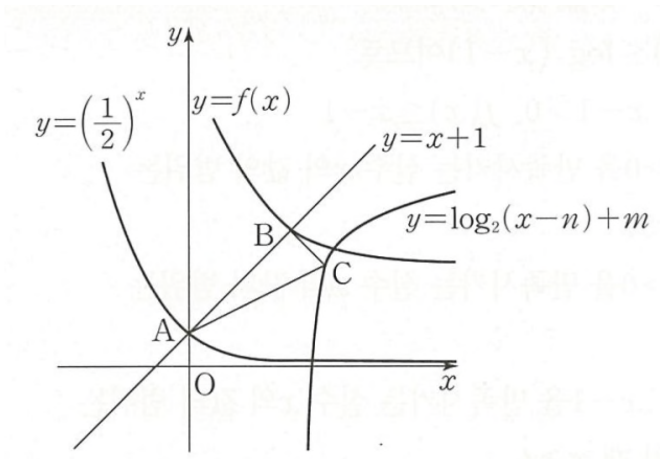
10)

출제 포인트

기울기가 -1인 직선과 로그함수는 무조건적으로 역함수 관계와 연결된다.

[14page 30번]

11. 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 일치한다. 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프가 y축과 만나는 점 A는 이 평행이동에 의하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x+1$의 교점 B로 이동된다. 또 점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선과 함수 $y=\log_2(x-n)+m$의 그래프의 교점을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 6일 때 $f(2)$의 값을 구하시오. (단, m, n은 양의 실수이다.



11)

출제 포인트

평행이동한 함수와 직선이 나오고 직선과 두 함수그래프의 교점은 결국 직각삼각형을 통해서 기울기 -> 길이 등이 추론이 가능하다. 직선과 두 곡선 (평행이동관계) 문제는 충분히 나올 수 있는 소재이다.

[15page 33번]

12. 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}\log_3(9x-9) & (1<x<4)\\ (\sqrt{3})^{6-x} & (x\geq 4)\end{cases}$$

라 하자. $t\leq x\leq t+2$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 3이 되도록 하는 모든 자연수 t의 개수를 a, $s\leq x\leq s+1$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 1이 되도록 하는 모든 실수 s의 값의 곱을 b라 할 때, $a+3b$의 값을 구하시오. (단, $t>1$, $s>1$) 12)

출제 포인트

구간으로 나뉘어진 함수의 관찰 +
조건부관찰(최댓값과 최솟값의 설정)과 해당 조건에 맞는 실수들의 곱이므로 문제 해결 능력 요구..
+ 자연수의 개수.

6모에서 보았지만, 자연수의 개수 또는 순서쌍 등의 문제는 출제에 투자되는 시간대비 변별을 하기 좋은 소재이므로 이번에 출제될 확률이 높다.

[120page 18번]

13. 두 양수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오.

(가) $\log_8 a+\log_8 b=\log_2 12-\log_2 3$
(나) $\log_2 a\times log_2 b=\log_3 16\times log_2 9$

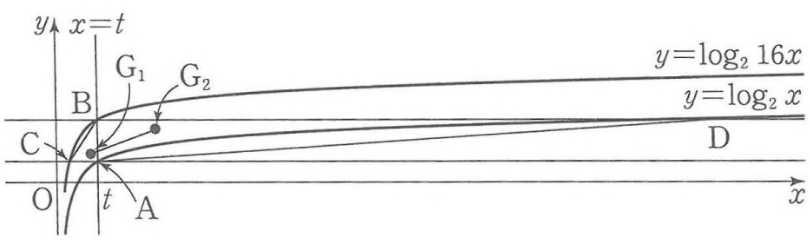
13)

출제 포인트

치환과 연립하는 것이 로그를 활용하는 연습하기 좋은 연산문제라고 생각한다.

[130page 13번]

14. 그림과 같이 직선 $x=t$ $(t>0)$과 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2 16x$가 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2 16x$와 만나는 점을 C, 점 B를 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 D라 할 때, 두 삼각형 ABC, ADB의 무게중심을 각각 $\mathrm{G_1}$, $\mathrm{G_2}$라 하자. 직선 $\mathrm{G_1G_2}$의 기울기가 $\dfrac{16}{255}$일 때, 삼각형 ADB의 넓이는?



① 60 ② 75 ③ 90
④ 105 ⑤ 120

14)

출제 포인트

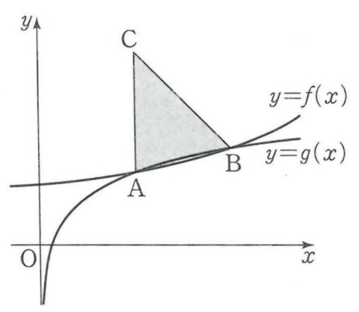
재미도 없고 주어진 점들 문자로 표현하여 연산만 계속하지만,
무게중심이라는 키워드 때문에 넣어둠

[141page 11번]

15. 그림과 같이 두 함수 $f(x)=a^x+4$, $g(x)=\dfrac{1}{4}\log_a x$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만난다. 두 점 중에서 x좌표가 작은 것부터 차례로 A, B라 하자. 점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 C라 할 때, 점 C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 OC의 기울기는 2이다. (나) 직선 AC는 y축과 평행하다.

삼각형 ABC의 넓이는?
(단, a는 1보다 큰 상수이고, O는 원점이다.)



① 28 ② 32 ③ 36
④ 40 ⑤ 44

15)

출제 포인트

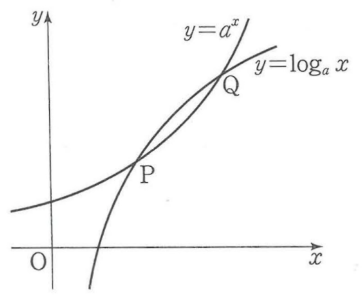
유의미한 연립 연산문제라고 생각한다.
점C와 점B의 기울기로 추측하고 미지수를 잡아가는 것이
기본적인 그래프 문제를 풀어나가는 과정

[152page 9번]

16. 그림과 같이 $a>1$인 상수 a에 대하여 두 곡선

$y=a^x$, $y=\log_a x$

가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. $\overline{OP}=\overline{PQ}$일 때, a의 값은? (단, 점 P의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 작고, O는 원점이다.)



① $\sqrt[8]{2}$ ② $\sqrt[8]{3}$ ③ $\sqrt[4]{2}$
④ $\sqrt[4]{3}$ ⑤ $\sqrt{2}$

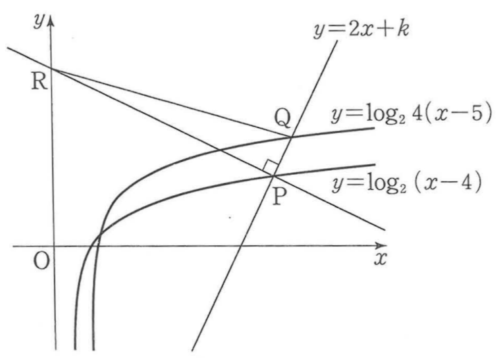
16)

출제 포인트

역함수와 교점 성질.
그리고 좌표를 미지수로 표현하기.
쉽지만 빠르게.

[166page 13번]

17. 그림과 같이 직선 $y=2x+k$가 두 함수 $y=\log_2(x-4)$, $y=\log_2 4(x-5)$의 그래프와 제1사분면에서 각각 한 점에서 만나며 그 점을 각각 P, Q라 하자. 점 P를 지나고 직선 $y=2x+k$에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 R라 할 때, 삼각형 PQR의 넓이가 15이다. 상수 k의 값은? $\left(\text{단, } k<-\dfrac{21}{2}\right)$



① -21 ② -22 ③ -23 ④ -24 ⑤ -25

17)

출제 포인트

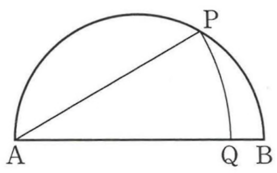
기울기가 존재하는 직선관계는 필수.
이미 기출에서 나왔던 소재로, 단골처럼 사설에 많이 나오고 있는 상황의 문제. 기울기와 평행이동을 통하여 좌표를 빠르게 잡을 수 있음

수능완성

수학Ⅰ. 2. 삼각함수

[18page 2번]

18. 그림과 같이 길이가 6인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위에 점 P가 있다. 선분 AB 위에 점 Q를 $\overline{AP}=\overline{AQ}$가 되도록 잡고 부채꼴 APQ의 호 PQ를 그린다. 호 BP의 길이가 π일 때, 부채꼴 APQ의 호 PQ의 길이는?



① $\frac{3\sqrt{3}}{8}\pi$ ② $\frac{5\sqrt{3}}{12}\pi$ ③ $\frac{11\sqrt{3}}{24}\pi$
④ $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ ⑤ $\frac{13\sqrt{3}}{24}\pi$

18)

출제 포인트

쉽지만 깔끔하고 귀여운 문제.
원 위의 점들과 중심으로 이루어진
APO 이등변 삼각형의 이미지는 필수

[19page 6번]

19. 좌표평면에서 직선 $y=\frac{1}{2}x+5$ 위의 점 P에 대하여 직선 $y=\frac{1}{2}x+5$와 직선 OP가 서로 수직이다. 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 할 때, $\sin\theta\times cos\theta$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $-\frac{2}{5}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{3}{5}$ ④ $-\frac{7}{10}$ ⑤ $-\frac{4}{5}$

19)

출제 포인트

직선 위의 점 P에 대하여 동경찾기.
혼란스러운 시기의 수능에서 동경이라는 단어가 나올 확률은
적지만, 그렇다고 개념을 모르면 안된다고 생각함.

[19page 7번]

출제 포인트

20. 좌표평면에 점 A(6, 0)과 원 $x^2+y^2=36$ 위의 점 P가 있다. 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 할 때, 점 P와 θ가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 선분 AP를 포함하는 부채꼴 AOP의 호 AP의 길이는 4π이다. (나) $\dfrac{\tan\theta}{\cos\theta}<0$

$\cos\theta+\tan^2\theta$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

20)

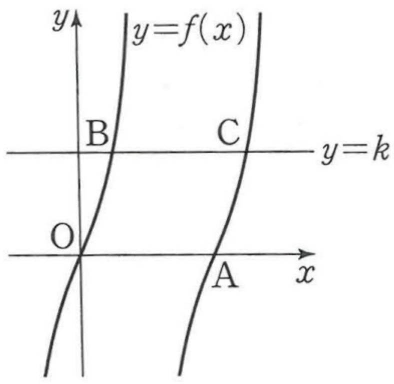
조금은 찐한 올싸안코(ALL/S/T/C, 올스타킹)
동경의 범위를 통한 삼각함수 부호 판단문제치고는
깔끔하게 다듬어져 있는 문제.

[20page 9번]

출제 포인트

21. 두 양수 a, b에 대하여 주기가 2인 함수 $f(x)=a\tan bx$가 있다. $0<x<3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점을 A, $0<x<3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=k$ $(k>0)$과 만나는 두 점을 각각 B, C, 동경 OB가 나타내는 각의 크기를 θ라 하자. $\tan\theta=3$, $\angle BAO=\frac{\pi}{4}$일 때, $f\left(\frac{k}{3}\right)+\overline{OC}^2$의 값은? (단, O는 원점이고, $\overline{OB}<\overline{OC}$이다.)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10



21)

삼각함수 위의 그래프 문제. 마지막에 묻는 형태는 내신틱하지만,
평행사변형과 삼각형 그리고 삼각함수 주기까지
깔끔하게 정보를 찾아서 대입하는 과정이 좋다. 특히 OB의
기울기가 3임을 통해서 점B에서 수선의 발을 내린 삼각형이
선분AC에서도 반복되는 삼각형으로부터 추출되는 값들의 연립이
마지막 묻는 것 빼고는 깔끔한 상황이라 생각한다.
tan함수가 찐하게 문제로 나올 것 같다.

[21page 12번]

22. $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$인 θ에 대하여

$$\sin(2\pi-\theta)+\cos(\pi+\theta)+2\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=3\sin\theta$$

일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은?

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 0

④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

22)

출제 포인트

그냥 하나쯤 필요한 것 같아서 넣었다.

[21page 15번]

23. 자연수 a에 대하여 두 함수

$$f(x)=\frac{1}{3}\log_4(x-3),\ g(x)=\tan\frac{\pi x}{a}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선과 함수 $y=g(x)$의 그래프는 만나지 않는다.
(나) $g\left(\frac{2}{3}\right)>1$

정의역이 $\left\{x \,\middle|\, \frac{13}{4}\le x\le 19\right\}$인 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $12(M-m)^2$의 값을 구하시오.

23)

출제 포인트

점근선과 tan함수의 정의역을 유치하게 엮어둠
유치하지만 둘 다 의미가 있는 듯
합성함수는 모르겠다만, 저 정도 관찰은 용인하겠지.

[23page 16번]

24. $0 \le x < 2\pi$에서 부등식

$$(2\sin x - 1)(\sqrt{2}\cos x - 1) > 0$$

의 해가

$$\alpha < x < \beta \text{ 또는 } \gamma < x < \delta$$

일 때, $\sin(\delta - \beta) + \cos(\gamma - \alpha)$의 값은? (단, $\alpha < \beta < \gamma < \delta$)

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

24)

출제 포인트

부등식의 해를 찾는 것이 귀찮지만 해볼만한 가치가 있다고 생각. 사실상 연립부등식인데, 한 번에 같이 그려놓고 확인하기
+ 뒤에 더 어려운 문제를 위한 연습용

[23page 19번]

25. 정의역이 $\{x \mid x \ge 0\}$인 함수 $f(x)$가 모든 자연수 n에 대하여 다음을 만족시킨다.

$2n-2 \le x < 2n$일 때, $f(x) = \sin(n\pi x)$이다.

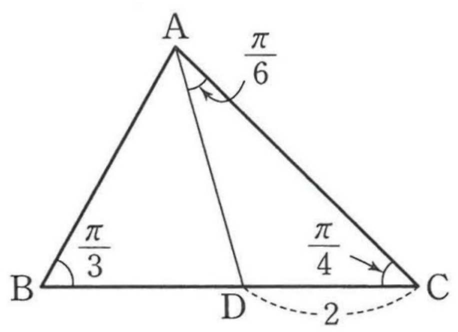
$0 \le x < 8$에서 방정식 $2f(x) - 1 = 0$의 서로 다른 실근 중 가장 작은 값을 α, 가장 큰 값을 β라 할 때, $\frac{4\beta}{\alpha}$의 값을 구하시오. 25)

출제 포인트

구간에 따른 주기가 변하는 함수도 나올만하다.
구간에 따른 최댓값(최솟값)이 변하는 삼각함수는 미적분까지 몇 번 출제가 되었으나, 주기 변하는 내용은
자주 출제되지는 않고 있기에 생소하므로 연습해두자.

[24page 21번]

26. 그림과 같이 $\angle ABC=\frac{\pi}{3}$, $\angle ACB=\frac{\pi}{4}$이고 $\overline{BC}>2$인 삼각형 ABC가 있다. 변 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{CD}=2$이고 $\angle CAD=\frac{\pi}{6}$일 때, 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이는?



① $\frac{\sqrt{22}}{3}$ ② $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{26}}{3}$
④ $\frac{2\sqrt{7}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{30}}{3}$

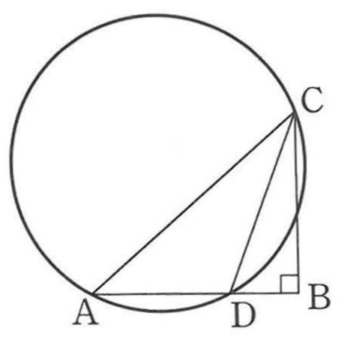
26)

출제 포인트

쉬운 사인법칙 문제. 당연히 AD를 구하고싶지 않은가?

[24page 22번]

27. 그림과 같이 $\angle ABC=90°$이고 $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=4$인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 D라 할 때, 삼각형 ADC의 외접원의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



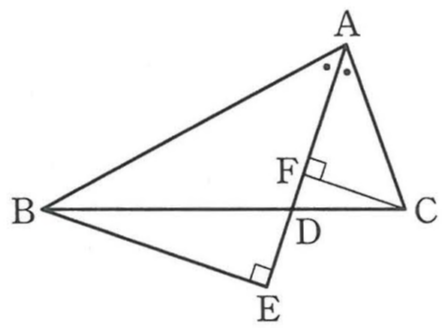
27)

출제 포인트

직각삼각형인데, 원바깥에서 이루고 있다.
AC, AB로 BC의 길이를 구할 수 있고 BD의 길이도 구해지므로
JUST 피타고라스였음.
피타고라스로 길이 찾으면 원 안에서 놀고있으므로
우선적으로는 자연스럽게 사인법칙

[25page 23번]

28. 그림과 같이 $\overline{AB}=4\sqrt{2}$, $\overline{AC}=2\sqrt{2}$인 예각삼각형 ABC가 있다. $\angle A$의 이등분선과 변 BC가 만나는 점을 D, 점 B에서 직선 AD에 내린 수선의 발을 E, 점 C에서 직선 AD에 내린 수선의 발을 F라 하자. $\cos(\angle ABC)=\frac{5\sqrt{2}}{8}$일 때, $\overline{AF}\times\overline{AE}$의 값을 구하시오. (단, $\overline{AB}<\overline{BC}$)



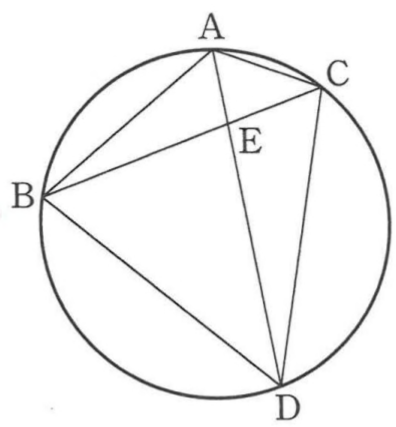
28)

출제 포인트

코사인 법칙으로 BC의 길이를 구하는 것은 쉽다.
각의 이등분으로 BD와 CD의 길이 역시 편하게 접근.
AFC와 ABE의 1:2닮음 그리고 BDE에서 피타고라스
전형적인 도형문제. (해설에서는 cos법칙으로 진행하기는함)

[116page 10번]

29. 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle BAC=\frac{2}{3}\pi$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle BAC$를 이등분하는 직선과 점 A를 포함하지 않는 호 BC가 만나는 점을 D, 선분 AD와 선분 BC가 만나는 점을 E라 하자. $\sin(\angle BDA)=\frac{\sqrt{21}}{7}$일 때, $\overline{BE}^2+\overline{CE}^2$의 값은?



① $\frac{35}{3}$ ② $\frac{38}{3}$ ③ $\frac{41}{3}$ ④ $\frac{44}{3}$ ⑤ $\frac{47}{3}$

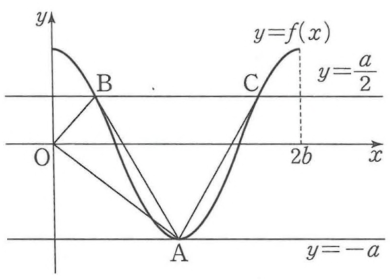
29)

출제 포인트

수능완성에서 풀만한 도형들은 다 넣고자 한다.
사실 이 문제는 특별한 내용은 없음.

[117page 12번]

30. 그림과 같이 두 양수 a, b에 대하여 닫힌구간 $[0, 2b]$에서 정의된 함수 $f(x)=a\cos\dfrac{\pi x}{b}$가 있다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-a$가 만나는 점을 A, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\dfrac{a}{2}$가 만나 는 두 점을 각각 B, C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$일 때, 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱은? (단, O는 원점이고, $\overline{\mathrm{OB}}<\overline{\mathrm{OC}}$이다.)



① $-\dfrac{2}{3}$ ② $-\dfrac{13}{18}$ ③ $-\dfrac{7}{9}$

④ $-\dfrac{5}{6}$ ⑤ $-\dfrac{8}{9}$

30)

출제 포인트

삼함그래프는 대칭성과 주기성이 있기에 기하적인 성질로 도형과 결합하여 접근이 가능하다.
이미 문제가 많이 나왔으며. tan함수가 한번쯤 나올 것 같은 예감

~~[9page 14번]~~ 〈중복〉

31. ~~두 점 $(\log_3 2, \log_9 a)$, $(\log_3 54, \log_9 a^2)$을 지나는 직선이 직선 $y=-2x+1$과 수직일 때, 양수 a의 값은?~~

~~① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30~~

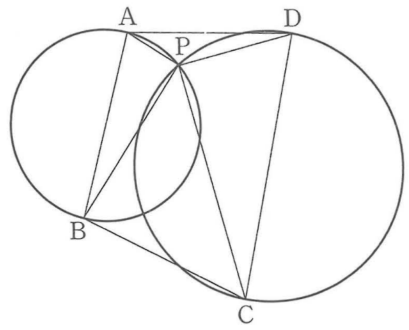
~~31)~~

~~출제 포인트~~

~~두 점을 로그로 표현한 후 직선을 주고 다른 직선 또는 곡선과의 관계를 물으면서, 사실상 로그연산을 하면 되는 문제인데, 그냥 연산을 바로 묻지않고 이와같이 고1개념과 함께, 식을 직접 찾아야하는 문제는 더 자주 나올 수 있다.~~
~~(킬러를 배제하면서 중등수학~고등수학내용 전반적인 기본 개념을 섞어 출제할 수 있다.)~~

[131page 15번]

32. 그림과 같이 길이가 $\sqrt{10}$인 선분 AB를 지름으로 하는 원과 길이가 $2\sqrt{5}$인 선분 CD를 지름으로 하는 원이 서로 다른 두 점에서 만나고 선분 AB와 선분 CD가 서로 만나지 않을 때, 두 원이 만나는 점 중 점 A에 가까운 점을 P라 하자. $\overline{\mathrm{PA}}=1$, $\overline{\mathrm{PC}}=4$이고, 삼각형 APD의 넓이가 $\frac{\sqrt{5}}{3}$일 때, 선분 BC의 길이는? (단, $\angle\mathrm{APD}>\angle\mathrm{BPC}$)



① $2\sqrt{2}$ ② 3 ③ $\sqrt{10}$
④ $\sqrt{11}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

32)

출제 포인트

사실 두 선분 AB, DC가 지름이어서 조금은 편하게 흘러가는 문제이다. 두 원이 겹치게 해서 더 다양한 상황을 연출할 수 있지 않을까 싶다.

[145page 21번]

33. $0<a<\frac{\pi}{2}$인 상수 a에 대하여 $a\le x\le 4a$에서 방정식 $\sin x=k$가 오직 한 개의 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값이 1뿐일 때, 다음 조건을 만족시키는 10 이하의 두 자연수 m, n $(m<n)$의 모든 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수를 구하시오.

닫힌구간 $[ma,\ na]$에서 함수 $y=\sin x$의 최댓값과 최솟값의 합은 0이다.

33)

출제 포인트

개인적으로 굉장히 좋은 문제라고 생각한다. 두 번째 줄 발문의 해석이 잘되어야 문제 접근이 가능할 것이고, 순서쌍 등으로 학생들의 변별을 할 수 있을뿐 아니라
최댓값 최솟값의 합은 0이다로 추론능력과 해결능력을
한 번에 확인할 수 있는 문제. 추가로 연산은 많이 되지 않으니
수능완성에서도 이런 문제가 나오는구나 생각이 듬

[155page 15번]

34. $0<t<2\pi$, $t\neq\frac{\pi}{2}$, $t\neq\pi$, $t\neq\frac{3}{2}\pi$인 실수 t에 대하여

$0<x<2\pi$에서 x에 대한 방정식

$(\sin x-|\sin t|)(|\sin x|-\sin t)=0$

의 실근 중 가장 작은 값을 $f(t)$, 가장 큰 값을 $g(t)$, 서로 다른 모든 실근의 합을 $h(t)$라 하자. t에 대한 방정식 $g(t)-f(t)=kh(t)$의 모든 실근의 합이 4π가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위가 $\alpha<k<\beta$일 때, $\alpha\beta$의 값은?

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{3}{16}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{5}{16}$

34)

출제 포인트

기존 기출에서도 비슷한 소재로 나왔었던 문제이고
f(t), g(t), h(t)까지 다 줘서 조금 촌스럽게 문제가 흘러가지만
$(\sin x-|\sin t|)(|\sin x|-\sin t)=0$
의 형태를 해석하는 것이 중요한 포인트라고 생각한다.
답지처럼 헷갈리지 않게 t를

$0<t<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<t<\pi$ ...

형태로 나뉘면서 관찰하는 것이 좋아보이는데,
한 번에 처리하는 방법이 있는가? 무튼 절댓값이 들어가는
방정식의 해결은 필수적이라 본다.

,

수능완성

수학Ⅰ. 3. 수열

[28page 2번]

35. 첫째항이 45이고 공차가 -7인 등차수열 $\{a_n\}$과 첫째항과 공차가 같고 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{b_n\}$에 대하여 수열 $\{c_n\}$을 $c_n = a_n + b_n$이라 하자. $c_n > 100$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값이 10일 때, b_1의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

35)

출제 포인트

등차수열 + 등차수열 = 등차수열이 된다.
단 공차가 크기가 같고 부호가 반대라면 0이된다.
이미 6월에서도 나왔으나 문제만드는게 까다롭지 않으므로
다시 나올 수 있는 소재라고 생각한다.

[28page 3번]

36. 3으로 나눈 나머지가 1인 모든 자연수를 작은 것부터 크기순으로 나열한 수열을 $\{a_n\}$, 4로 나눈 나머지가 2인 모든 자연수를 작은 것부터 크기순으로 나열한 수열을 $\{b_n\}$이라 하자. $a_k = b_m$을 만족시키는 20 이하의 두 자연수 k, m에 대하여 $k+m$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. 36)

출제 포인트

내신 문제에서는 꽤나 자주 나오는 나머지를 가지는 형태로
등차수열을 표현하는 방식인데, 기존에는 절대 나오지
않을것같았으나.. 공교육기반시험지라..^^
그리고 두 자연수를 찾아가는 형태는 위에서 언급한 듯이
내면 애들은 귀찮고 변별은 되고, 딱히 사교육기반 수업도 아니고.

[29page 4번]

37. 첫째항이 3이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $b_n = a_{2n-1} + a_{2n}$이라 하자. 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, S_5의 값은?

① 118 ② 119 ③ 120
④ 121 ⑤ 122

37)

출제 포인트

같은 등차+등차 형태이지만, 홀수번째항과 짝수번째 항의 합.
특별한 것은 없다. 그냥 표현을 익숙해지려고

[29page 7번]

38. 두 함수 $f(x) = \sin \pi x$, $g(x) = -x-1$이 있다. 자연수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x-2n)$의 그래프가 만나는 점 중 y좌표가 0이 아닌 두 점을 각각 A_n, B_n이라 하고 두 점 A_n, B_n의 x좌표를 각각 a_n, b_n $(a_n < b_n)$이라 하자. 수열 $\{c_n\}$을 $c_n = a_n + b_n$이라 하고 수열 $\{c_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_n > 100$을 만족시키는 n의 최솟값을 구하시오. 38)

출제 포인트

기존에는 이런 문제를 스킵하였는데 스킵한 이유는 굳이
삼각함수와 수열을 섞어서 보기 안좋게 만들까?
였다. 지금은 킬러가 나오지 않게 된다면, 눈에보이는 단원
크로스가 더 자주 나올수도있다. 삼함정도면 충분하지.
(근데 이 문제는 삼함인가? 수열인가?)

[30page 10번]

39. 첫째항이 자연수이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{a_1+a_2}{a_4+a_5}=\frac{1}{2},\ a_{10}\le 40$$

을 만족시키는 모든 a_1의 값의 합은?

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

39)

출제 포인트

등비수열기본 연산 문제 하나 추가!

[31ge 12]

40. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$\frac{a_1a_4}{a_3}=2,\ a_2+a_6=10$$

을 만족시킨다. 모든 자연수 n에 대하여 $b_n=\dfrac{a_{2n}}{2a_{n+1}}$이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제8항까지의 합은?

① $\frac{7}{2}(\sqrt{2}+1)$ ② $\frac{11}{2}(\sqrt{2}+1)$
③ $\frac{15}{2}(\sqrt{2}+1)$ ④ $\frac{19}{2}(\sqrt{2}+1)$
⑤ $\frac{23}{2}(\sqrt{2}+1)$

40)

출제 포인트

등비수열 기본 연산 문제 하나 더 추가!

[32page 15번]

41. 0이 아닌 두 실수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, ab의 값은?

(가) 세 수 a, $a+b$, ab는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
(나) 세 수 a^2, ab, $2b$는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

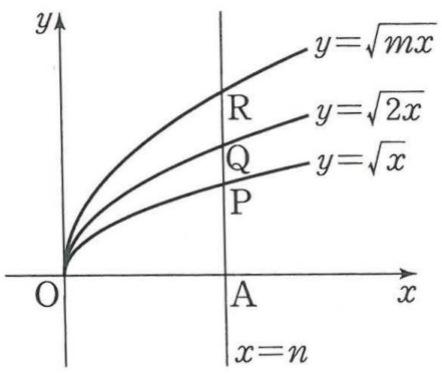
41)

출제 포인트

등차중항, 등비중항은 사실 수능에서 인기 있는 소재는 아니다.
그래서 오히려 넣고싶었다.

[32page 16번]

42. $m>2$, $n>0$인 두 상수 m, n에 대하여 그림과 같이 세 함수 $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{2x}$, $y=\sqrt{mx}$의 그래프와 직선 $x=n$이 만나는 점을 각각 P, Q, R라 하자. 점 A$(n, 0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}$, $\overline{\mathrm{QA}}$, $\overline{\mathrm{RA}}$가 이 순서대로 등비수열을 이루고, $\overline{\mathrm{OP}}^2$, $\overline{\mathrm{OQ}}^2+4$, $\overline{\mathrm{OR}}^2+5$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $m+n$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

42)

출제 포인트

함수의 그래프들은 단순 연산을 위한 배경이고,
세 개의 값이 등비수열과 등차수열을 이룬다고
식을 작성해 나가는 문제. 역시나 어렵지는 않은데..

[33page 19번]

43. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, S_n이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 수열 $\{S_{2n-1}\}$은 공차가 3인 등차수열이다.
> (나) 수열 $\{S_{2n}\}$은 공차가 4인 등차수열이다.

$a_{11} = a_{12}$일 때, a_7의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

43)

출제 포인트

깔끔한 수열의 합관련 연산문제이다.
사실 수열의 합 관련 문제는 수능완성에서 실전편 몇 개를 제외하고는 완성도가 낮다. 기출과 사설을 많이 보는 것이 좋아보인다.

[34page 21번]

44. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}\{ka_{k+1}-(k+1)a_k\}=70$$

이고 $a_{11}=15$일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k(a_k+6)-\sum_{k=1}^{10}(a_k+2)^2$의 값은?

① 40 ② 45 ③ 50 ④ 55 ⑤ 60

44)

출제 포인트

시그마를 활용한 다양한 연산 연립의 문제가 3점 위주로 출제될 가능성은 매우 높다.

[35page 25번]

45. 자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식

$$nx^2-(n^2-12n)x-8=0$$

의 두 근의 합을 a_n, 두 근의 곱을 b_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{15}\frac{a_k}{b_k}$의 값은?

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

45)

출제 포인트

이차방정식의 근과 계수를 이용한 수열 문제는 자주 출제된다.
한 번 풀고 넘어가자.

[36page 28번]

46. 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{a_k}{S_{k+1}S_k}=p$$

일 때, $\log_2(2^{11}-1)+\log_2(1-pa_1)$의 값은? (단, $a_1\neq 0$)

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

46)

출제 포인트

이런 문제 때문에 수능완성을 안 풀기에는 좀 찝집한?
문제가 좋기보다는

$$a_k\times r=S_{k+1}-S_k$$

의 표현은 일부에게 생소할 수 있다고 본다.

[38page 35번]

47. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 6a_n & (a_n\text{이 홀수}) \\ \frac{1}{2}a_n+1 & (a_n\text{이 짝수}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_3=4$이고 $a_2>a_1$일 때, $a_k<a_2$를 만족시키는 20 이하의 자연수 k의 개수는?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

출제 포인트

자신있게 말하는데, 수능완성 수열 유형쪽은
지금 골라준것만 풀면된다. 이 문제는 뒤에
유형10,11,12에서 수능완성에서 무적권 풀만한 것이 없는데
다 안넣어서 찝찝해서 그래도 하나 넣는다. 그냥 대입하면됨

유형편보다는 다음 문제부터 나오는 실전편의 일부 문제가
학습하기 좋다.

[118page 13번]

48. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1=2$, $a_na_{n+1}=(-1)^n$
(나) $a_n+b_n=n$

$\sum_{k=1}^{10}(b_{2k}+b_{2k+2})$의 값은?

① 200 ② 210 ③ 220
④ 230 ⑤ 240

48)

출제 포인트

두 수열의 곱은 주기성을 가지기 좋다.
대입하다가 반복성을 찾는 문제인데, 문제가 좋기보다는
시중교재나 내신 및 교육청에서는 자주 나오기에,
연습해보자.

[119page 15번]

49. 첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$의 각 항을 원소로 갖는 집합을 A라 하고, 첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열 $\{b_n\}$의 각 항을 원소로 갖는 집합을 B라 하자. 집합 $B-A$에 속하는 모든 원소를 작은 것부터 크기순으로 나열한 것을 c_1, c_2, c_3, $\cdots$이라 할 때, $\sum_{k=1}^{n} c_k > 140$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

49)

출제 포인트

등차수열의 차를 이용한 원소나열법이 6월에도 출제하였다.
등차수열과 집합의 표현은 궁합이 좋다.
(사설에서도 자주 보임)

[133page 21번]

50. 0이 아닌 두 정수 p, q에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 = 40$
(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - p & (a_n \geq 0) \\ a_n + pq & (a_n < 0) \end{cases}$$

이다.

$a_{21} = a_1$이 되도록 하는 두 정수 p, q의 순서쌍 (p, q)에 대하여 $p+q$의 최솟값을 구하시오. 50)

출제 포인트

수능완성 수열 문제중에서는 제일 어려운 것 같았다.
해설과 비슷하지만 조금은 더 빠르게 나열할수도있다.
순서쌍 중에 최솟값이어서, 사실 전체적인 범위를 구하기보다는
q값에 따라 최소가 되는 특수값들만 뽑아내며 풀어나간다.

[140page 9번]

51. 수열 $\{a_n\}$은 $a_3 = \frac{1}{6}$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \frac{1}{4-8a_n}$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{25} a_n$의 값은?

① $\frac{31}{4}$ ② 8 ③ $\frac{33}{4}$
④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{35}{4}$

51)

출제 포인트

$a_{n+1}(4-8a_n)=1$

순환구조인가?

[143page 15번]

52. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 두 집합

$A=\{n | a_n a_{n+5} \leq 0,\ n$은 자연수$\}$,
$B=\{n | S_n S_{n+5} \leq 0,\ n$은 자연수$\}$

가

$n(A \cap B)=3,\ A-B \neq \varnothing$

을 만족시킨다. $S_m = a_m$을 만족시키는 짝수인 자연수 m이 존재할 때, $\frac{a_{m+10}}{a_m}$의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

52)

출제 포인트

등차수열과 집합의 조합이다.
"$S_m = a_m$을 만족시키는 짝수인 자연수 m이 존재 "
를 해석하는 방식이 중요한데, $S_{m-1}=0$이 되는 짝수 m의 존재로 식을 뽑아내고 주어진 집합조건을 만족시키는 케이스를 찾아나가는 형태$S_m = a_m$을 만족시키는 짝수인 자연수 m이 존재

[157page 21번]

53. 첫째항이 $\frac{4}{3}$이고, 공차가 $\frac{1}{3}$인 등차수열 $\{a_n\}$과 6 이상의 자연수 m에 대하여 두 집합 A_m, B_m을

$$A_m = \{a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots,\ a_{2m}\},$$

$$B_m = \{a_3,\ a_6,\ a_9,\ \cdots,\ a_{3m}\}$$

이라 하자. 집합 $A_m \cap B_m$의 모든 원소 중 가장 큰 원소를 b_m이라 할 때, $\sum_{m=6}^{20} b_m$의 값을 구하시오. 53)

출제 포인트

또 나온 등차수열과 집합.
위에서 쓸때는 몰랐는데, 지금보니 진짜 많다.

[169page 21번]

54. 집합 $A = \{0, 1\}$과 자연수 n에 대하여 집합 S_n을

$$S_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n} (-2)^{k-1} a_k \,\middle|\, a_k \in A \right\}$$

라 하자. 예를 들어 $S_1 = \{0, 1\}$, $S_2 = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1\}$이다. 집합 S_3의 원소의 개수를 p, 5453이 집합 S_n의 원소가 되는 n의 최솟값을 q라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. 54)

출제 포인트

실전편에서 21번이 유독 괜찮은 문제가 많다.
표현이 투박해서 그렇지 해당문제는 나름 신선했다
n의 최솟값 q를 찾을 때, 최소가 되기위해서 만드는
전제조건이 충분히 출제자들이 참고가 될만한 매력이 있는
문제이다.

이하 해설

1) [정답] 16

[해설]

$f(x)=x\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}$이므로 $f(f(n))=\left(n^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}=n^{\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}}=n^{\frac{9}{4}}$

$n^{\frac{9}{4}}$의 값이 1보다 큰 자연수가 되려면 n은 1보다 큰 자연수 k에 대하여 $n=k^4$의 꼴이어야 한다. 즉, 자연수 n의 최솟값은 1보다 큰 자연수의 네제곱의 꼴로 표현되는 자연수 중 가장 작은 값이므로

$2^4=16$

2) [정답] ④

[해설]

수직인 두 직선의 기울기의 곱이 -1이므로

두 점 $(\log_3 2, \log_9 a)$, $(\log_3 54, \log_9 a^2)$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 $\frac{\log_9 a^2-\log_9 a}{\log_3 54-\log_3 2}=\frac{\log_9 a}{\log_3 27}=\frac{\log_9 a}{3}=\frac{1}{2}$에서

$\log_9 a=\frac{3}{2}$이므로

$a=9^{\frac{3}{2}}=(3^2)^{\frac{3}{2}}=3^{2\times\frac{3}{2}}=3^3=27$

3) [정답] 37

[해설]

$\frac{1}{\log_9 27}=\frac{1}{\log_{3^2}3^3}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$

$\frac{1}{3}\log_b b^5=\frac{5}{3}\log_b b=\frac{5}{3}$

$\log_a a^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}\log_a a=\frac{2}{3}$이므로

$A=\left\{\log_a b,\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\right\}$, $B=\left\{2,\ \frac{2}{3},\ \log_2 a+\log_2 b\right\}$

$A=B$이기 위해서는 $\log_a b=2$, $\log_2 a+\log_2 b=\frac{5}{3}$이어야 한다.

$\log_a b=2$에서 $\frac{\log_2 b}{\log_2 a}=2$이므로

$\log_2 b=2\log_2 a$ …… ㉠

$\log_2 a+\log_2 b=\frac{5}{3}$에 ㉠을 대입하면 $\log_2 a=\frac{5}{9}$

㉠에서 $\log_2 b=\frac{10}{9}$

이때 $\log_a 2+\log_b 2=\frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\log_2 b}=\frac{9}{5}+\frac{9}{10}=\frac{27}{10}$

따라서 $p=10$, $q=27$이므로

$p+q=10+27=37$

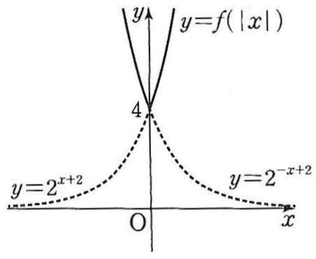
4) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $x\geq 0$일 때, $|x|=x$이므로 $f(|x|)=f(x)=2^{x+2}$이고

$x<0$일 때, $|x|=-x$이므로 $f(|x|)=f(-x)=2^{-x+2}$이다.

따라서 함수 $y=f(|x|)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y|y\geq 4\}$이다. (참)

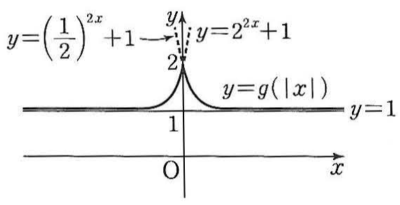
ㄴ. (ⅰ) $x\geq 0$일 때, $|x|=x$이므로

$$g(|x|)=g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}+1$$

(ⅱ) $x<0$일 때, $|x|=-x$이므로

$$g(|x|)=g(-x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x}+1=2^{2x}+1$$

$g(0)=2$이므로 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 함수 $y=g(|x|)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=g(|x|)$의 최댓값은 2이므로 모든 실수 x에 대하여 $g(|x|)\leq 2$이다. (참)

ㄷ. ㄱ에서 함수 $y=f(|x|)$의 그래프가 y축과 만나는 점은 점 $(0,4)$이고, ㄴ에서 함수 $y=g(|x|)$의 그래프가 y축과 만나는 점은 점 $(0,2)$이므로 $g(0)=2$

이때 두 함수 $y=f(|x|)$, $y=g(|x|)+k$의 그래프가 y축 위의 점에서 만나므로 함수 $y=g(|x|)+k$의 그래프가 점 $(0,4)$를 지나야 한다.

따라서 $4=g(0)+k$에서 $k=4-g(0)$이므로 $k=2$이다.

함수 $y=g(|x|)$의 그래프의 점근선은 직선 $y=1$이고 함수 $y=g(|x|)+2$의 그래프는 함수 $y=g(|x|)$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이므로 점근선은 직선 $y=3$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

5) [정답] ④

[해설]

곡선 $y=2^x$과 직선 $x=n$이 만나는 점 A_n의 좌표는 $(n,2^n)$

곡선 $y=(\sqrt{2})^x$과 직선 $x=n$이 만나는 점 B_n의 좌표는 $\left(n,2^{\frac{n}{2}}\right)$

$$f(n)=\frac{1}{2}\times\overline{OP_n}\times\overline{A_nP_n}=\frac{1}{2}\times n\times 2^n=\frac{n}{2}\times 2^n$$

$$g(n)=\frac{1}{2}\times\overline{OP_n}\times\overline{B_nP_n}=\frac{1}{2}\times n\times 2^{\frac{n}{2}}=\frac{n}{2}\times 2^{\frac{n}{2}}$$

부등식 $f(n)-4\times g(n)\geq 16n$에서

$$\frac{n}{2}\times 2^n-4\times\frac{n}{2}\times 2^{\frac{n}{2}}\geq 16n,\ 2^n-4\times 2^{\frac{n}{2}}\geq 32$$

$2^{\frac{n}{2}}=t$라 하면 $t>0$이고 $t^2-4t-32\geq 0$

$(t+4)(t-8)\geq 0$이므로 $t\geq 8$

즉, $2^{\frac{n}{2}}\geq 8=2^3$이므로 $\frac{n}{2}\geq 3$, $n\geq 6$

따라서 자연수 n의 최솟값은 6이다.

6) [정답] ③

[해설]

곡선 $y=\log_3(ax+b)$가 점 $(0, 2)$를 지나므로 $2=\log_3 b$에서 $b=9$

곡선 $y=\log_3(ax+9)$의 점근선이 직선 $x=-\dfrac{9}{a}$이므로

$-\dfrac{9}{a}=-3$에서 $a=3$

따라서 주어진 곡선은 $y=\log_3(3x+9)$이고 이 곡선이 점 $(2, k)$를 지나므로

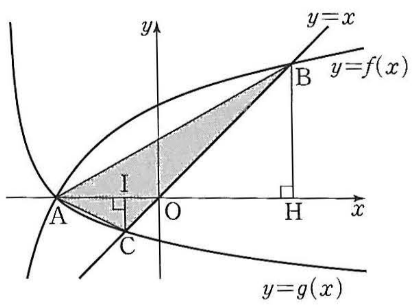
$k=\log_3(3\times2+9)=\log_3 15=\log_3(3\times5)=1+\log_3 5$

7) [정답] 7

[해설]

함수 $g(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x+4)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표는 $(-3, 0)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-3, 0)$을 지난다. 즉,

$0=\log_a(-3-m)$에서 $m=-4$이므로 $f(x)=\log_a(x+4)$



점 B는 직선 $y=x$ 위의 점이므로 점 B의 좌표를 (k, k) $(k>0)$이라 하고 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 점 C$(-1, -1)$에서 x축에 내린 수선의 발을 I라 하면 $\overline{\text{CI}}=1$이고 $\overline{\text{BH}}=k$한편, 삼각형 ABC의 넓이는 원점 O에 대하여 두 삼각형 OAC와 OAB의 넓이의 합이므로

$$(\text{삼각형 ABC의 넓이})=\frac{1}{2}\times\overline{\text{OA}}\times\overline{\text{CI}}+\frac{1}{2}\times\overline{\text{OA}}\times\overline{\text{BH}}$$
$$=\frac{1}{2}\times3\times1+\frac{1}{2}\times3\times k=\frac{3}{2}(1+k)$$

즉, $\dfrac{3}{2}(1+k)=\dfrac{15}{2}$에서 $k=4$

점 B가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $4=\log_a(4+4)$에서 $a^4=8$

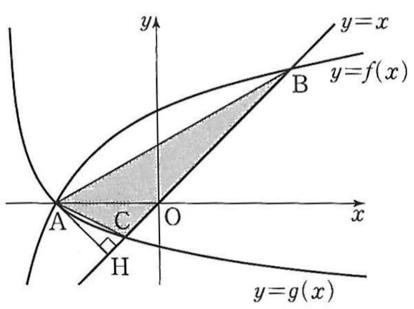
$a>1$이므로 $a=2^{\frac{3}{4}}$

따라서 $p=4$, $q=3$이므로 $p+q=4+3=7$

[다른 풀이]

함수 $g(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x+4)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표는 $(-3, 0)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-3, 0)$을 지난다.

즉, $0=\log_a(-3-m)$에서 $m=-4$이므로 $f(x)=\log_a(x+4)$



한편, 점 A$(-3, 0)$에서 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\text{AH}}=\dfrac{|-3-|}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

또한 점 B의 좌표를 (k, k)라 하면 $k>0$이고 C$(-1, -1)$이므로

$\overline{\text{BC}}=\sqrt{2(k+1)^2}=\sqrt{2}(k+1)$

삼각형 ABC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}(k+1)\times\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{15}{2}$에서 $k=4$

점 B(4, 4)가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $4=\log_a(4+4)$에서 $a^4=8$

$a>1$이므로 $a=2^{\frac{3}{4}}$

따라서 $p=4,\ q=3$이므로 $p+q=4+3=7$
8) [정답] ①

[해설]

$$\log_3\frac{x}{3}\times\log_3\frac{x}{9}=(\log_3 x-\log_3 3)(\log_3 x-\log_3 9)$$
$$=(\log_3 x-1)(\log_3 x-2)$$

$\log_3 x=t$라 하면

$(t-1)(t-2)<6$에서 $t^2-3t-4<0$

$(t+1)(t-4)<0$이므로 $-1<t<4$

즉, $-1<\log_3 x<4,\ \frac{1}{3}<x<81$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x의 최댓값은 80이다.
9) [정답] ⑤

[해설]

함수 $f(x)=2^{x-1}+a$의 역함수는 $y=2^{x-1}+a$에서 x와 y를 바꾸면 $x=2^{-1}+a$이고

$y=\log_2(x-a)+1$이므로 $a=2$

한편, 함수 $g(x)=\log_2(x-2)+1$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동하면 $g(x-m)=\log_2(x-m-2)+1$이고, 이 함수의 그래프의 점근선은 $x=m+2$이므로 $m+2=5$에서 $m=3$

따라서 $a+m=2+3=5$
10) [정답] ①

[해설]

곡선 $y=\log_2(x-1)-1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 곡선 $y=\log_2 x$가 되고, 점 $(5, 1)$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 점 $(4, 2)$가 되며 이 점은 직선 l 위의 점이다.

곡선 $y=\log_2 x$와 곡선 $y=2^x$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 직선 l과 곡선 $y=2^x$이 만나는 점의 좌표는 $(2, 4)$이다.

따라서 $a=2,\ b=4$이므로 $\frac{b}{a}=\frac{4}{2}=2$
11) [정답] 22

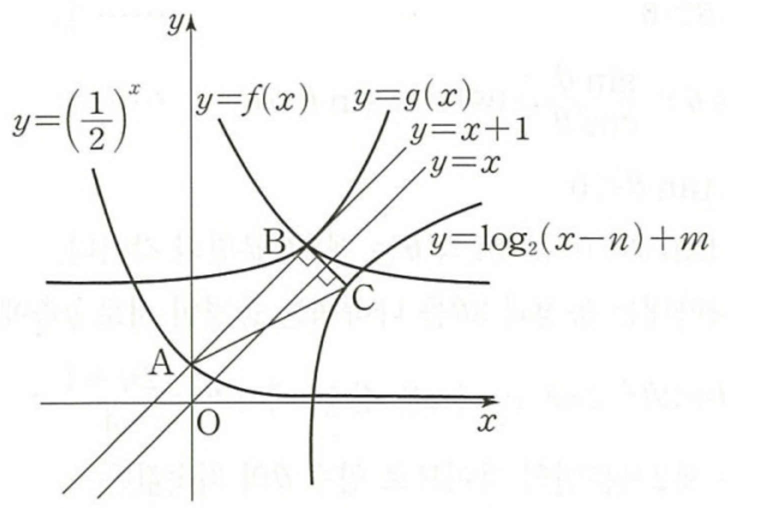
[해설]

점 A의 좌표는 $(0,\ 1)$이므로 점 B의 좌표는 $(m,\ 1+n)$이다.

점 B는 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로 $1+n=m+1$에서 $m=n$이다.

함수 $y=2^x$의 그래프도 y축과 점 A에서 만나므로 $g(x)=2^{x-m}+n$이라 하면 함수 $y=g(x)$의 그래프도 점 B$(m,\ 1+n)$을 지난다.

또한 함수 $y=g(x)$의 역함수가 $y=\log_2(x-n)+m$이고 기울기가 -1인 직선이 두 함수 $y=g(x),\ y=\log_2(x-n)+m$의 그래프와 만나는 점이 각각 B, C이므로 두 점 B, C는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



즉, 두 점 B, C의 좌표는 각각 $(m,\ m+1)$, $(m+1,\ m)$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

두 직선 AB, BC의 기울기의 곱은 -1이므로 삼각형 ABC에서 $\angle \mathrm{B}=90°$이다.

$m>0$이고 삼각형 ABC의 넓이가 6이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}m\times\sqrt{2}=m=6$

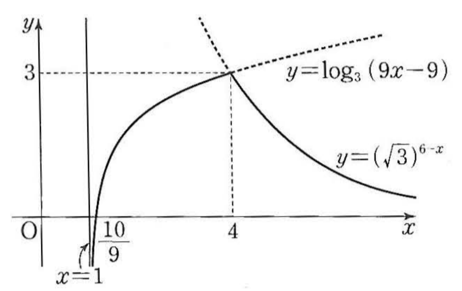
따라서 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6}+6$이므로

$f(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}+6=16+6=22$

12) [정답] 23

[해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 3을 가지므로 $t\le x\le t+2$에 $x=4$가 포함되면 최댓값은 3이다. 즉, $t\le 4\le t+2$에서 $2\le t\le 4$이고 이를 만족시키는 자연수 t의 값은 2, 3, 4로 개수는 3이다. 즉, $a=3$

$s\le x\le s+1$에서 최솟값이 1인 경우는 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) $s>1$, $s+1<4$일 때, $1<s<3$이고 함수 $f(x)$는 $s\le x\le s+1$에서 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하는 함수이므로 $x=s$일 때 최소이다.

$f(s)=\log_3(9s-9)=1$에서 $9s-9=3$, $s=\frac{4}{3}$

이는 $1<s<3$을 만족시킨다.

(ⅱ) $1<s<4$, $s+1\ge 4$일 때, $3\le s<4$이고 $f(3)=\log_3 18>\log_3 3=1$

$f(4)=(\sqrt{3})^2=3>1$이므로 $s\le x\le s+1$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 1보다 크다.

(ⅲ) $s\ge 4$일 때, 함수 $f(x)$는 $s\le x\le s+1$에서 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하는 함수이므로 $x=s+1$일 때 최소이다.

즉, $f(s+1)=(\sqrt{3})^{6-(s+1)}=1$에서 $5-s=0$, $s=5$

이는 $s\ge 4$를 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $b=\frac{4}{3}\times 5=\frac{20}{3}$

따라서 $a+3b=3+3\times\frac{20}{3}=23$

13) [정답] 20

[해설]

조건 (가)에서 $\log_8 a+\log_8 b=\log_2 12-\log_2 3$이므로

$\log_8 ab=\log_2 4$, $\log_8 ab=2$

$ab=64$ …… ㉠

조건 (나)에서 $\log_3 16\times log_2 9=\dfrac{4\log 2}{\log 3}\times\dfrac{2\log 3}{\log 2}=8$이므로

$\log_2 a\times log_2 b=8$ …… ㉡

㉠에서 $b=\dfrac{64}{a}$이므로 이를 ㉡에 대입하면

$\log_2 a\times log_2\dfrac{64}{a}=8$, $\log_2 a\times(6-\log_2 a)=8$

$(\log_2 a)^2-6\log_2 a+8=0$, $(\log_2 a-2)(\log_2 a-4)=0$

$\log_2 a=2$ 또는 $\log_2 a=4$

$a=4$ 또는 $a=16$

$a=4$일 때 $b=16$이고, $a=16$일 때 $b=4$이다.

따라서 $a+b=4+16=20$

14) [정답] ⑤

[해설]

두 점 A, B의 좌표는 각각

$\mathrm{A}(t, \log_2 t)$, $\mathrm{B}(t, \log_2 16t)$

점 C의 y좌표는 점 A의 y좌표와 같으므로 점 C의 x좌표를 a라 하면

$\log_2 16a=\log_2 t$에서 $16a=t$, 즉 $a=\dfrac{t}{16}$

점 D의 y좌표는 점 B의 y좌표와 같으므로 점 D의 x좌표를 b라 하면

$\log_2 b=\log_2 16t$에서 $b=16t$

즉, $\mathrm{C}\left(\dfrac{t}{16}, \log_2 t\right)$, $\mathrm{D}(16t, \log_2 16t)$이므로 삼각형 ABC의 무게중심 G_1의 좌표는

$$\mathrm{G}_1\left(\dfrac{t+t+\dfrac{t}{16}}{3}, \dfrac{\log_2 t+\log_2 16t+\log_2 t}{3}\right)$$

즉, $\mathrm{G}_1\left(\dfrac{11}{16}t, \dfrac{4}{3}+\log_2 t\right)$

이고, 삼각형 ADB의 무게중심 G_2의 좌표는

$$\mathrm{G}_2\left(\dfrac{t+16t+t}{3}, \dfrac{\log_2 t+\log_2 16t+\log_2 16t}{3}\right)$$

즉, $\mathrm{G}_2\left(6t, \dfrac{8}{3}+\log_2 t\right)$

이므로 직선 $\mathrm{G}_1\mathrm{G}_2$의 기울기는

$$\dfrac{\left(\dfrac{8}{3}+\log_2 t\right)-\left(\dfrac{4}{3}+\log_2 t\right)}{6t-\dfrac{11}{16}t}=\dfrac{\dfrac{4}{3}}{\dfrac{85}{16}t}=\dfrac{64}{255t}$$

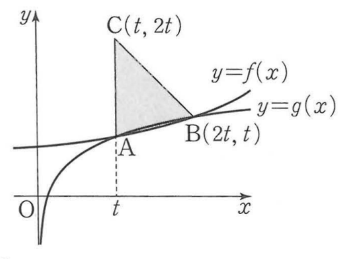
즉, $\dfrac{64}{255t}=\dfrac{16}{255}$이므로 $t=4$

따라서 $\mathrm{A}(4, 2)$, $\mathrm{B}(4, 6)$, $\mathrm{D}(64, 6)$이므로 삼각형 ADB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(64-4)\times(6-2)=\dfrac{1}{2}\times 60\times 4=120$

15) [정답] ④

[해설]



조건 (가)에서 직선 OC의 기울기가 2이므로 점 C의 좌표를 $(t,\ 2t)$라 하면 점 B의 좌표는 $(2t,\ t)$이다.

점 B가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$a^{2t}+4=t$ …… ㉠

점 B가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로

$\frac{1}{4}\log_a 2t=t,\ a^{4t}=2t$ …… ㉡

㉡에서 $t=\frac{1}{2}a^{4t}$이므로 이를 ㉠에 대입하면 $a^{2t}+4=\frac{1}{2}a^{4t}$

$a^{2t}=k\ (k>0)$이라 하면

$k+4=\frac{1}{2}k^2,\ k^2-2k-8=0,\ (k+2)(k-4)=0$

$k>0$이므로 $k=4$

$a^{2t}=4$이므로 ㉠에서 $t=8$이고, $a^{16}=4$에서 $a=4^{\frac{1}{16}}=2^{\frac{1}{8}}$이다.

즉, 점 B의 좌표는 (16, 8), 점 C의 좌표는 (8, 16)이다.

$f(x)=2^{\frac{1}{8}x}+4$이고, 조건 (나)에서 두 점 A, C의 x좌표가 같으므로

$f(8)=2^1+4=6$

에서 점 A의 좌표는 (8, 6)이다.

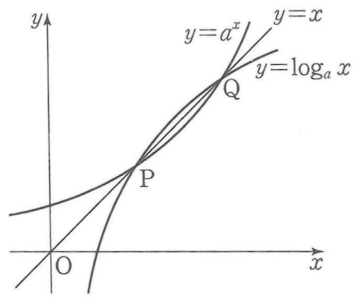
$\overline{\mathrm{AC}}=16-6=10$이고, 점 B와 직선 AC 사이의 거리는 $16-8=8$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 10\times 8=40$

16) [정답] ⑤

[해설]

$f(x)=a^x,\ g(x)=\log_a x$라 하면 두 함수 $f(x),\ g(x)$는 서로 역함수 관계이고, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$의 교점은 곡선 $y=a^x$과 직선 $y=x$의 교점과 같다. 즉, 두 점 P, Q는 직선 $y=x$ 위의 점이다.



$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{PQ}}$이므로 양수 k에 대하여 점 P의 좌표를 $(k,\ k)$라 하면 점 Q의 좌표는 $(2k,\ 2k)$이다.

두 점 P, Q는 곡선 $y=a^x$ 위의 점이므로

$a^k=k$ …… ㉠

$a^{2k}=2k$ …… ㉡

㉡에서 $a^{2k}=(a^k)^2$이므로 ㉠을 대입하면 $k^2=2k,\ k(k-2)=0$

$k>0$이므로 $k=2$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $a^2=2$

$a>1$이므로 $a=\sqrt{2}$

17) [정답] ①

[해설]

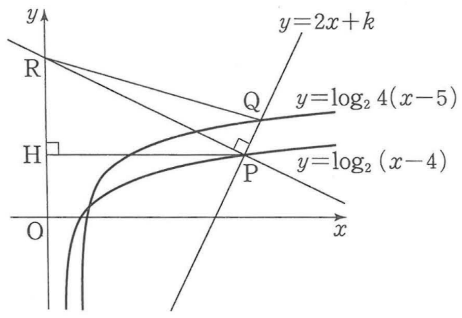
$y=\log_2 4(x-5)=\log_2(x-5)+\log_2 4=\log_2(x-5)+2$

이므로 함수 $y=\log_2 4(x-5)$의 그래프는 함수 $y=\log_2(x-4)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한

것이다. 직선 $y=2x+k$의 기울기가 2이므로 점 P를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이 점 Q이다.
$\overline{PQ}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이고 삼각형 PQR의 넓이가 15이므로

$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\overline{PR}=15$, $\overline{PR}=\frac{30}{\sqrt{5}}=6\sqrt{5}$

점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 PR의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 $\overline{RH}:\overline{PH}:\overline{PR}=1:2:\sqrt{5}$이다.



$\overline{PR}=6\sqrt{5}$이므로 $\overline{PH}=12$
점 P의 x좌표를 p라 하면 $p=12$
점 $P(p,\ 2p+k)$, 즉 $P(12,\ 24+k)$는 곡선 $y=\log_2(x-4)$ 위의 점이므로
$24+k=\log_2 8=3$
따라서 $k=3-24=-21$

[다른 풀이]
$y=\log_2 4(x-5)=\log_2(x-5)+\log_2 4=\log_2(x-5)+2$
이므로 함수 $y=\log_2 4(x-5)$의 그래프는 함수 $y=\log_2(x-4)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
직선 $y=2x+k$의 기울기가 2이므로 점 P를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이 점 Q이다.
$\overline{PQ}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이고 삼각형 PQR의 넓이가 15이므로

$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\overline{PR}=15$, $\overline{PR}=\frac{30}{\sqrt{5}}=6\sqrt{5}$ …… ㉠

점 P의 x좌표를 p $(p>0)$이라 하면 점 P는 직선 $y=2x+k$ 위의 점이므로
$P(p,\ 2p+k)$

점 P를 지나고 직선 $y=2x+k$에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 직선 PR의 방정식은

$y-(2p+k)=-\frac{1}{2}(x-p)$, $x+2y-5p-2k=0$

$x=0$이면 $y=\frac{5p+2k}{2}$이므로 $R\left(0,\ \frac{5p+2k}{2}\right)$

$\overline{PR}$는 점 R와 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리이므로

$$\overline{PR}=\frac{\left|0-\frac{5p+2k}{2}+k\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{\frac{5}{2}p}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{2}p \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\frac{\sqrt{5}}{2}p=6\sqrt{5}$, $p=12$

점 $P(12,\ 24+k)$는 곡선 $y=\log_2(x-4)$ 위의 점이므로
$24+k=\log_2 8=3$
따라서 $k=3-24=-21$
18) [정답] ④

[해설]
선분 AB의 중점을 O라 하면
$\overline{OA}=\overline{OB}=3$

$\angle POB=\theta\ (0<\theta<\pi)$라 하면 호 BP의 길이가 π이므로

$\pi=3\times\theta,\ \theta=\frac{\pi}{3}$

삼각형 ABP에서 $\angle APB=\frac{\pi}{2},\ \angle PAB=\frac{1}{2}\angle POB=\frac{\pi}{6}$이므로

$\overline{AP}=\overline{AB}\times\cos\frac{\pi}{6}=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

따라서 부채꼴 APQ의 호 PQ의 길이는

$3\sqrt{3}\times\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

19) [정답] ①

[해설]

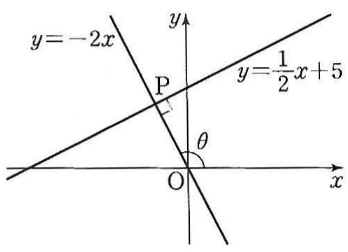
직선 OP의 기울기를 m이라 하면 직선 $y=\frac{1}{2}x+5$와 직선 OP가 서로 수직이므로

$m\times\frac{1}{2}=-1,\ m=-2$

직선 $y=\frac{1}{2}x+5$와 직선 $y=-2x$가 만나는 점의 x좌표는

$\frac{1}{2}x+5=-2x$에서 $x=-2$

이때 $y=-2\times(-2)=4$이므로 점 P의 좌표는 $(-2, 4)$이다.



$\overline{OP}=\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5}$

$\sin\theta=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5},\ \cos\theta=\frac{-2}{2\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

따라서 $\sin\theta\times cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{2}{5}$

20) 정답

[정답] ⑤

[해설]

선분 AP를 포함하는 부채꼴 OAP에서 $\angle AOP=\alpha$라 하자. 조건 (가)에서 부채꼴 AOP의 호 AP의 길이가 4π이므로

$6\alpha=4\pi,\ \alpha=\frac{2}{3}\pi$

이때 $\theta=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\theta=\frac{4}{3}\pi$이다.

(i) $\theta=\frac{2}{3}\pi$일 때, θ는 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta<0,\ \tan\theta<0$이때 $\frac{\tan\theta}{\cos\theta}>0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

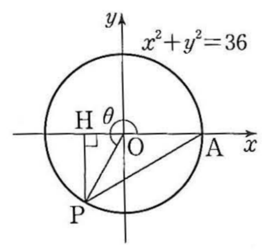
(ii) $\theta=\frac{4}{3}\pi$일 때, θ는 제3사분면의 각이므로 $\cos\theta<0,\ \tan\theta>0$

이때 $\frac{\tan\theta}{\cos\theta}<0$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $\theta=\frac{4}{3}\pi$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH}=3,\ \overline{PH}=3\sqrt{3}$



이므로 점 P의 좌표는 $(-3,\ -3\sqrt{3})$이다.

따라서 $\cos\theta=\dfrac{-3}{6}=-\dfrac{1}{2}$,

$\tan\theta=\dfrac{-3\sqrt{3}}{-3}=\sqrt{3}$이므로

$\cos\theta+\tan^2\theta=-\dfrac{1}{2}+(\sqrt{3})^2=\dfrac{5}{2}$

[다른 풀이]

선분 AP를 포함하는 부채꼴 OAP에서 $\angle AOP=\alpha$라 하자.

조건 (가)에서 부채꼴 AOP의 호 AP의 길이가 4π이므로

$6\alpha=4\pi,\ \alpha=\dfrac{2}{3}\pi$

이때 $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $\theta=\dfrac{4}{3}\pi$이다.

(i) $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$일 때, θ는 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta<0,\ \tan\theta<0$

이때 $\dfrac{\tan\theta}{\cos\theta}>0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $\theta=\dfrac{4}{3}\pi$일 때, θ는 제3사분면의 각이므로 $\cos\theta<0,\ \tan\theta>0$

이때 $\dfrac{\tan\theta}{\cos\theta}<0$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $\theta=\dfrac{4}{3}\pi$

$\cos\theta=\cos\dfrac{4}{3}\pi=\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$

$\tan\theta=\tan\dfrac{4}{3}\pi=\tan\left(\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

따라서 $\cos\theta+\tan^2\theta=-\dfrac{1}{2}+(\sqrt{3})^2=\dfrac{5}{2}$

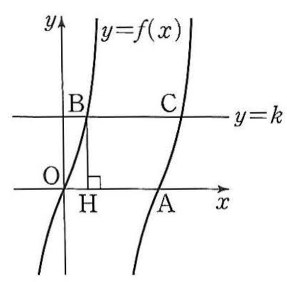
21) [정답] ⑤

[해설]

함수 $y=f(x)$의 주기가 2이므로 $\dfrac{\pi}{b}=2$, 즉 $b=\dfrac{\pi}{2}$

$\overline{OA}=2$이므로 점 A의 좌표는 $(2,\ 0)$이다.

점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle BAO=\dfrac{\pi}{4}$이므로



$\overline{AH}=\overline{BH}=k,\ \overline{OH}=2-k$

직각삼각형 BOH에서

$\tan\theta=\tan(\angle BOH)=3$이므로

$\dfrac{\overline{BH}}{\overline{OH}}=\dfrac{k}{2-k}=3,\ k=\dfrac{3}{2}$

점 B의 좌표가 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 B를 지나므로

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=a\tan\left(\dfrac{\pi}{2}\times\dfrac{1}{2}\right)=a\tan\dfrac{\pi}{4}=a=\dfrac{3}{2}$

이때 점 C의 좌표는 $\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$이고 $f(x)=\dfrac{3}{2}\tan\dfrac{\pi x}{2}$이다.

$f\left(\frac{k}{3}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\tan\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}$

$\overline{\mathrm{OC}}^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{17}{2}$

따라서 $f\left(\frac{k}{3}\right)+\overline{\mathrm{OC}}^2=\frac{3}{2}+\frac{17}{2}=10$

22) [정답] ④

[해설]

$\sin(2\pi-\theta)=\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\cos\left\{\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right\}=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin\theta$

이므로 $\sin(2\pi-\theta)+\cos(\pi+\theta)+2\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=3\sin\theta$에서

$-\sin\theta-\cos\theta+2\sin\theta=3\sin\theta$

$\cos\theta=-2\sin\theta$ …… ㉠

한편, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $\sin^2\theta+(-2\sin\theta)^2=1$, $\sin^2\theta=\frac{1}{5}$

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 $\sin\theta<0$이므로

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

23) [정답] 64

[해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 직선 $x=3$이다.

함수 $g(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{a}}=a$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선은 직선 $x=na+\frac{a}{2}$ (n은 정수)이다.

조건 (가)에서 $na+\frac{a}{2}=3$이므로 $a=\frac{6}{2n+1}$

a는 자연수이므로 $2n+1$은 6의 양의 약수이어야 한다.

$2n+1=1$ 또는 $2n+1=2$ 또는 $2n+1=3$ 또는 $2n+1=6$

즉, $n=0$ 또는 $n=\frac{1}{2}$ 또는 $n=1$ 또는 $n=\frac{5}{2}$

이때 n은 정수이므로 $n=0$ 또는 $n=1$

(ⅰ) $n=0$일 때, $a=6$이므로 $g(x)=\tan\frac{\pi x}{6}$

$g\left(\frac{2}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{9}<\tan\frac{\pi}{4}=1$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $n=1$일 때, $a=2$이므로 $g(x)=\tan\frac{\pi x}{2}$

$g\left(\frac{2}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}>1$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $g(x)=\tan\frac{\pi x}{2}$

함수 $y=f(x)$의 정의역은 $\{x|x>3$인 실수$\}$이고 밑 4가 1보다 크므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

$\frac{13}{4} \le x \le 19$에서 $f\left(\frac{13}{4}\right)=\frac{1}{3}\log_4 \frac{1}{4}=-\frac{1}{3}$, $f(19)=\frac{1}{3}\log_4 16=\frac{2}{3}$

이므로 $-\frac{1}{3} \le f(x) \le \frac{2}{3}$

또 $-1<x<1$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

$g\left(-\frac{1}{3}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$g\left(\frac{2}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$이므로 $-\frac{\sqrt{3}}{3} \le (g \circ f)(x) \le \sqrt{3}$

따라서 $M=\sqrt{3}$, $m=-\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$12(M-m)^2=12\times\left\{\sqrt{3}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}^2=12\times\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2=64$

24) [정답] ①

[해설]

부등식 $(2\sin x-1)(\sqrt{2}\cos x-1)>0$에서

$2\sin x-1>0$, $\sqrt{2}\cos x-1>0$ 또는

$2\sin x-1<0$, $\sqrt{2}\cos x-1<0$

(i) $2\sin x-1>0$, $\sqrt{2}\cos x-1>0$일 때 부등식 $2\sin x-1>0$에서 $\sin x>\frac{1}{2}$이므로

$\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$ …… ㉠

부등식 $\sqrt{2}\cos x-1>0$에서 $\cos x>\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $0 \le x<\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{7}{4}\pi<x<2\pi$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{4}$

(ii) $2\sin x-1<0$, $\sqrt{2}\cos x-1<0$일 때

부등식 $2\sin x-1<0$에서 $\sin x<\frac{1}{2}$이므로

$0 \le x<\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi<x<2\pi$ …… ㉢

부등식 $\sqrt{2}\cos x-1<0$에서 $\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\pi}{4}<x<\frac{7}{4}\pi$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $\frac{5}{6}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$

(i), (ii)에서 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{\pi}{4}$, $\gamma=\frac{5}{6}\pi$, $\delta=\frac{7}{4}\pi$이므로

$$\begin{aligned}\sin(\delta-\beta)+\cos(\gamma-\alpha)&=\sin\left(\frac{7}{4}\pi-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}\right)\\&=\sin\frac{3}{2}\pi+\cos\frac{2}{3}\pi\\&=-1+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

25) [정답] 185

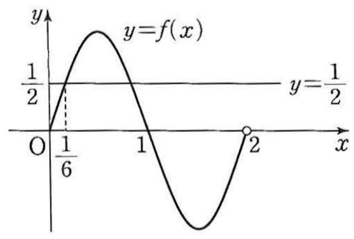
[해설]

함수 $y=\sin(n\pi x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{n\pi}=\frac{2}{n}$

(i) $0 \le x < 2$, 즉 $n=1$일 때, $f(x)=\sin(\pi x)$이다.

방정식 $2f(x)-1=0$에서 $\sin(\pi x)=\dfrac{1}{2}$

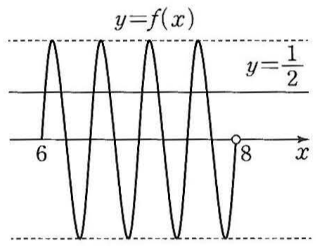
$0 \le x < 2$에서 방정식 $\sin(\pi x)=\dfrac{1}{2}$의 실근 중 가장 작은 것이 α이므로 $\alpha=\dfrac{1}{6}$



(ii) $6 \le x < 8$, 즉 $n=4$일 때, $f(x)=\sin(4\pi x)$이다.

방정식 $2f(x)-1=0$에서 $\sin(4\pi x)=\dfrac{1}{2}$

$6 \le x < 8$에서 방정식 $\sin(4\pi x)=\dfrac{1}{2}$의 실근 중 가장 큰 것이 β이므로 $\beta=6+\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{24}=\dfrac{185}{24}$



(i), (ii)에서 $\dfrac{4\beta}{\alpha}=\dfrac{4\times\dfrac{185}{24}}{\dfrac{1}{6}}=185$

26) [정답] ②

[해설]

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)}=\dfrac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}$이므로

$\overline{AD}=\dfrac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}\times\sin(\angle ACD)=\dfrac{2}{\sin\dfrac{\pi}{6}}\times\sin\dfrac{\pi}{4}$

$=\dfrac{2}{\dfrac{1}{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AD}}{\sin(\angle ABD)}=2R$이므로

$R=\dfrac{\overline{AD}}{2\sin(\angle ABD)}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sin\dfrac{\pi}{3}}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

27) [정답] 39

[해설]

직각삼각형 ABC에서

$\overline{BC}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$이므로 $\sin(\angle CAB)=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

점 D는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$\overline{BD}=\frac{1}{3}\times\overline{AB}=\frac{1}{3}\times 3=1$

직각삼각형 DBC에서 $\overline{CD}=\sqrt{\overline{BD}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{7})^2}=2\sqrt{2}$

삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}=2R$에서 $\frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=2R$, $R=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

삼각형 ADC의 외접원의 넓이는 $\pi\times\left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)^2=\frac{32}{7}\pi$

따라서 $p=7$, $q=32$이므로

$p+q=7+32=39$

28) [정답] 9

[해설]

$\overline{BC}=a$ $(a>4\sqrt{2})$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos(\angle ABC)$

이므로

$(2\sqrt{2})^2=(4\sqrt{2})^2+a^2-2\times 4\sqrt{2}\times a\times\frac{5\sqrt{2}}{8}$

$a^2-10a+24=0$, $(a-6)(a-4)=0$

$a>4\sqrt{2}$이므로 $a=6$

한편, $\angle BAD=\angle CAD$이므로 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

즉, $2:1=\overline{BD}:\overline{CD}$이므로 $\overline{BD}=2\overline{CD}$

$\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{CD}=3\overline{CD}=6$에서 $\overline{CD}=2$

이때 $\overline{BD}=4$

직각삼각형 ABE에서 $\angle BAE=\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$라 하면

$\overline{AE}=4\sqrt{2}\cos\theta$

직각삼각형 CAF에서

$\angle CAF=\theta$이므로 $\overline{AF}=2\sqrt{2}\cos\theta$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AD}^2&=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BD}\times\cos(\angle ABD)\\&=(4\sqrt{2})^2+4^2-2\times 4\sqrt{2}\times 4\times\frac{5\sqrt{2}}{8}=8\end{aligned}$$

$\overline{AD}=2\sqrt{2}$

삼각형 ABD에서

$\cos\theta=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-\overline{BD}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AD}}=\frac{(4\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2-4^2}{2\times 4\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}}=\frac{3}{4}$

따라서

$$\begin{aligned}\overline{AF}\times\overline{AE}&=2\sqrt{2}\cos\theta\times 4\sqrt{2}\cos\theta=16\cos^2\theta\\&=16\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=9\end{aligned}$$

29) [정답] ①

[해설]

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{7}$이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\dfrac{2}{3}\pi}=2\sqrt{7}$

$\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{7}\times\sin\dfrac{2}{3}\pi=2\sqrt{7}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{21}$

삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{7}$이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin(\angle\mathrm{BDA})}=2\sqrt{7}$

$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{7}\sin(\angle\mathrm{BDA})=2\sqrt{7}\times\dfrac{\sqrt{21}}{7}=2\sqrt{3}$

삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AC}}=x$ $(x>0)$이라 하면 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\cos\dfrac{2}{3}\pi$

$(\sqrt{21})^2=(2\sqrt{3})^2+x^2-2\times2\sqrt{3}\times x\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$x^2+2\sqrt{3}x-9=0$, $(x+3\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$

$x>0$이므로 $x=\sqrt{3}$

직선 AD가 $\angle\mathrm{BAC}$를 이등분하므로 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{CE}}$

즉, $2\sqrt{3}:\sqrt{3}=\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{CE}}$에서 $\overline{\mathrm{BE}}=2\overline{\mathrm{CE}}$

따라서 $\overline{\mathrm{BE}}=\dfrac{2}{3}\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$, $\overline{\mathrm{CE}}=\dfrac{1}{3}\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$이므로

$\overline{\mathrm{BE}}^2+\overline{\mathrm{CE}}^2=\left(\dfrac{2\sqrt{21}}{3}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{21}}{3}\right)^2=\dfrac{35}{3}$

30) [정답] ⑤

[해설]

함수 $f(x)=a\cos\dfrac{\pi x}{b}$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\dfrac{\pi}{b}}=2b$이고,

최댓값은 a, 최솟값은 $-a$이다.

$f(x)=-a$에서

$a\cos\dfrac{\pi x}{b}=-a$, $\cos\dfrac{\pi x}{b}=-1$

$\dfrac{\pi x}{b}=\pi$, $x=b$

즉, 점 A의 좌표는 $(b,\ -a)$이다.

$f(x)=\dfrac{a}{2}$에서

$a\cos\dfrac{\pi x}{b}=\dfrac{a}{2}$, $\cos\dfrac{\pi x}{b}=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\pi x}{b}=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $\dfrac{\pi x}{b}=\dfrac{5\pi}{3}$

$x=\dfrac{b}{3}$ 또는 $x=\dfrac{5b}{3}$

$\overline{\mathrm{OB}}<\overline{\mathrm{OC}}$이므로 두 점 B, C의 좌표는 $\mathrm{B}\left(\dfrac{b}{3},\ \dfrac{a}{2}\right)$, $\mathrm{C}\left(\dfrac{5b}{3},\ \dfrac{a}{2}\right)$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=b$에 대하여 대칭이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$이므로 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 ABH에서

$\overline{\mathrm{BH}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5b}{3}-\dfrac{b}{3}\right)=\dfrac{2}{3}b$, $\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{a}{2}-(-a)=\dfrac{3}{2}a$이므로

$\tan\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{BH}}}=\dfrac{\dfrac{3}{2}a}{\dfrac{2}{3}b}=\sqrt{3}$, $a=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}b$

따라서 직선 OA의 기울기는 $-\dfrac{a}{b}$이고, 직선 OB의 기울기는 $\dfrac{3a}{2b}$이므로 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱은

$-\dfrac{a}{b}\times\dfrac{3a}{2b}=-\dfrac{3a^2}{2b^2}=-\dfrac{3}{2b^2}\times\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{9}b\right)^2=-\dfrac{8}{9}$

31) [정답] ④

[해설]

수직인 두 직선의 기울기의 곱이 -1이므로

두 점 $(\log_3 2, \log_9 a)$, $(\log_3 54, \log_9 a^2)$을 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$이다.

따라서 $\dfrac{\log_9 a^2-\log_9 a}{\log_3 54-\log_3 2}=\dfrac{\log_9 a}{\log_3 27}=\dfrac{\log_9 a}{3}=\dfrac{1}{2}$에서

$\log_9 a=\dfrac{3}{2}$이므로

$a=9^{\frac{3}{2}}=(3^2)^{\frac{3}{2}}=3^{2\times\frac{3}{2}}=3^3=27$

32) [정답] ②

[해설]

선분 CD가 원의 지름이므로 $\angle\mathrm{CPD}=\dfrac{\pi}{2}$

직각삼각형 PCD에서 $\overline{\mathrm{CD}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2+\overline{\mathrm{PD}}^2$이므로

$\overline{\mathrm{PD}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CD}}^2-\overline{\mathrm{PC}}^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-4^2}=2$

삼각형 APD의 넓이가 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$이므로 $\angle\mathrm{APD}=\theta$라 하면

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PA}}\times\overline{\mathrm{PD}}\times\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\dfrac{1}{2}\times1\times2\times sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

선분 AB가 원의 지름이므로 $\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{2}$

직각삼각형 PAB에서 $\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2$이므로

$\overline{\mathrm{PB}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{PA}}^2}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-1^2}=3$

삼각형 BPC에서 $\angle\mathrm{BPC}=\pi-\theta$이고 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\dfrac{2}{3}$

코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2-2\times\overline{\mathrm{PB}}\times\overline{\mathrm{PC}}\times\cos(\pi-\theta)$

$\quad=3^2+4^2-2\times3\times4\times\dfrac{2}{3}=9+16-16=9$

$\overline{\mathrm{BC}}>0$이므로 $\overline{\mathrm{BC}}=3$

33) [정답] 8

[해설]

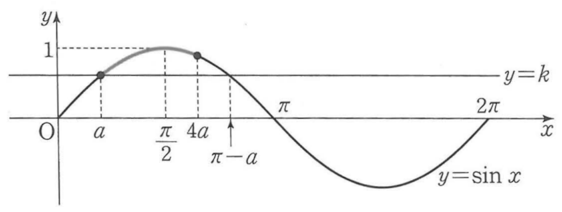
$0 < a < \frac{\pi}{2}$에서 $0 < 4a < 2\pi$이고,

$a \le x \le 4a$에서 방정식 $\sin x = 1$의 해가 존재하므로 $4a \ge \frac{\pi}{2}$이다.

즉, $\frac{\pi}{2} \le 4a < 2\pi$

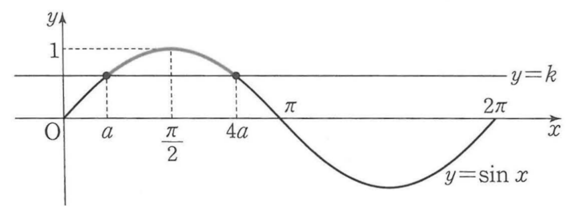
$\sin a = \sin(\pi - a)$이므로 $4a$의 값과 $\pi - a$의 값의 대소관계에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $\frac{\pi}{2} \le 4a < \pi - a$인 경우



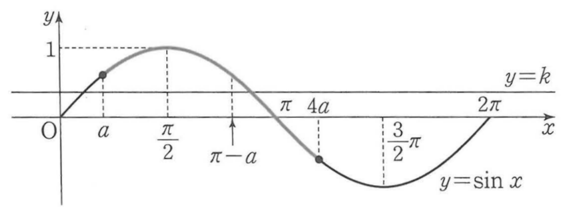
$\sin a \le k < \sin 4a$ 또는 $k = 1$이면 $a \le x \le 4a$에서 방정식 $\sin x = k$는 오직 한 개의 실근을 갖는다.

(ii) $4a = \pi - a$인 경우



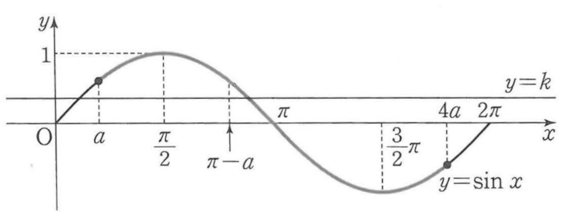
$k = 1$이면 $a \le x \le 4a$에서 방정식 $\sin x = k$는 오직 한 개의 실근을 갖는다. $k \ne 1$이면 $a \le x \le 4a$에서 방정식 $\sin x = k$의 서로 다른 실근의 개수는 0 또는 2이다.

(iii) $\pi - a < 4a \le \frac{3}{2}\pi$인 경우



$\sin 4a \le k < \sin a$ 또는 $k = 1$이면 $a \le x \le 4a$에서 방정식 $\sin x = k$는 오직 한 개의 실근을 갖는다.

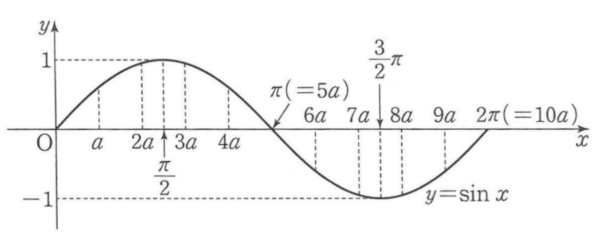
(iv) $\frac{3}{2}\pi < 4a < 2\pi$인 경우



$\sin 4a < k < \sin a$ 또는 $k = 1$ 또는 $k = -1$이면 $a \le x \le 4a$에서 방정식 $\sin x = k$는 오직 한 개의 실근을 갖는다.

(i)~(iv)에서 방정식 $\sin x = k$가 오직 한 개의 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값이 1뿐인 경우는 (ii)이다.

즉, $4a = \pi - a$이므로 $a = \frac{\pi}{5}$



한편, m, n $(m < n)$이 10 이하의 두 자연수일 때, 닫힌구간 $[ma, na]$에서 함수 $y = \sin x$의 최댓값과 최솟값의 합이 0인 경우는

㉠ $0 < ma \le \frac{\pi}{2}$이고 $\frac{3}{2}\pi \le na \le 2\pi$인 경우

(최댓값 1, 최솟값 -1)

㉡ $\frac{\pi}{2}<ma<\pi<na<\frac{3}{2}\pi$이고 $ma+na=2\pi$인 경우

(최댓값 $\sin ma$, 최솟값 $\sin na=\sin(2\pi-ma)=-\sin ma$)

이다.

㉠에서 m의 값은 1 또는 2이고 n의 값은 8 또는 9 또는 10이므로 순서쌍 (m, n)의 개수는 $2\times3=6$

㉡에서 가능한 순서쌍 (m, n)은 $(3, 7)$, $(4, 6)$으로 그 개수는 2따라서 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는

$6+2=8$

34) [정답] ②

[해설]

x에 대한 방정식 $\sin x-|\sin t|=0$에서

$0<t<\frac{\pi}{2}$일 때, $x=t$ 또는 $x=\pi-t$

$\frac{\pi}{2}<t<\pi$일 때, $x=\pi-t$ 또는 $x=t$

$\pi<t<\frac{3}{2}\pi$일 때, $x=t-\pi$ 또는 $x=2\pi-t$

$\frac{3}{2}\pi<t<2\pi$일 때, $x=2\pi-t$ 또는 $x=t-\pi$

x에 대한 방정식 $|\sin x|-\sin t=0$에서

$0<t<\frac{\pi}{2}$일 때, $x=t$ 또는 $x=\pi-t$ 또는 $x=\pi+t$ 또는 $x=2\pi-t$

$\frac{\pi}{2}<t<\pi$일 때, $x=\pi-t$ 또는 $x=t$ 또는 $x=2\pi-t$ 또는 $x=\pi+t$

$\pi<t<\frac{3}{2}\pi$일 때, 실근은 존재하지 않는다.

$\frac{3}{2}\pi<t<2\pi$일 때, 실근은 존재하지 않는다.

그러므로 각 경우의 $0<x<2\pi$에서 x에 대한 방정식

$(\sin x-|\sin t|)(|\sin x|-\sin t)=0$의 실근을 크기순으로 나열하고 서로 다른 모든 실근의 합을 구하면

(ⅰ) $0<t<\frac{\pi}{2}$일 때

$x=t$ 또는 $x=\pi-t$ 또는 $x=\pi+t$ 또는 $x=2\pi-t$이므로 서로 다른 모든 실근의 합은

$t+(\pi-t)+(\pi+t)+(2\pi-t)=4\pi$

(ⅱ) $\frac{\pi}{2}<t<\pi$일 때

$x=\pi-t$ 또는 $x=t$ 또는 $x=2\pi-t$ 또는 $x=\pi+t$이므로 서로 다른 모든 실근의 합은

$(\pi-t)+t+(2\pi-t)+(\pi+t)=4\pi$

(ⅲ) $\pi<t<\frac{3}{2}\pi$일 때

$x=t-\pi$ 또는 $x=2\pi-t$이므로 서로 다른 모든 실근의 합은

$(t-\pi)+(2\pi-t)=\pi$

(ⅳ) $\frac{3}{2}\pi<t<2\pi$일 때

$x=2\pi-t$ 또는 $x=t-\pi$이므로 서로 다른 모든 실근의 합은

$(2\pi-t)+(t-\pi)=\pi$

즉,

$$f(t)=\begin{cases} t & \left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \pi-t & \left(\dfrac{\pi}{2}<t<\pi\right) \\ t-\pi & \left(\pi<t<\dfrac{3}{2}\pi\right) \\ 2\pi-t & \left(\dfrac{3}{2}\pi<t<2\pi\right) \end{cases},\ g(t)=\begin{cases} 2\pi-t & \left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \pi+t & \left(\dfrac{\pi}{2}<t<\pi\right) \\ 2\pi-t & \left(\pi<t<\dfrac{3}{2}\pi\right) \\ t-\pi & \left(\dfrac{3}{2}\pi<t<2\pi\right) \end{cases}$$

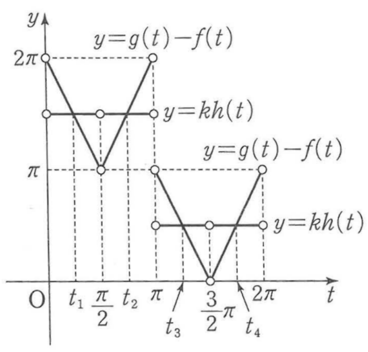
$$g(t)-f(t)=\begin{cases} 2\pi-2t & \left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right) \\ 2t & \left(\dfrac{\pi}{2}<t<\pi\right) \\ 3\pi-2t & \left(\pi<t<\dfrac{3}{2}\pi\right) \\ 2t-3\pi & \left(\dfrac{3}{2}\pi<t<2\pi\right) \end{cases},\ h(t)=\begin{cases} 4\pi & \left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right) \\ 4\pi & \left(\dfrac{\pi}{2}<t<\pi\right) \\ \pi & \left(\pi<t<\dfrac{3}{2}\pi\right) \\ \pi & \left(\dfrac{3}{2}\pi<t<2\pi\right) \end{cases}$$

$0<t<\pi\left(t\neq\dfrac{\pi}{2}\right)$에서 $\pi<kh(t)<2\pi$일 때

방정식 $g(t)-f(t)=kh(t)$의 두 실근을 t_1, t_2라 하면 $\dfrac{t_1+t_2}{2}=\dfrac{\pi}{2}$에서 $t_1+t_2=\pi$

$\pi<t<2\pi$ $\left(t\neq\dfrac{3}{2}\pi\right)$에서 $0<kh(t)<\pi$일 때

방정식 $g(t)-f(t)=kh(t)$의 두 실근을 t_3, t_4라 하면 $\dfrac{t_3+t_4}{2}=\dfrac{3}{2}\pi$에서 $t_3+t_4=3\pi$



$t_1+t_2+t_3+t_4=(t_1+t_2)+(t_3+t_4)=\pi+3\pi=4\pi$이므로

$0<t<\pi$ $\left(t\neq\dfrac{\pi}{2}\right)$에서 $\pi<kh(t)<2\pi$이고

$\pi<t<2\pi$ $\left(t\neq\dfrac{3}{2}\pi\right)$에서 $0<kh(t)<\pi$인 경우에만

방정식 $g(t)-f(t)=kh(t)$의 모든 실근의 합이 4π이다.

$0<t<\pi$ $\left(t\neq\dfrac{\pi}{2}\right)$에서 $h(t)=4\pi$이므로 $\pi<4\pi k<2\pi$

$\dfrac{1}{4}<k<\dfrac{1}{2}$ …… ㉠

$\pi<t<2\pi$ $\left(t\neq\dfrac{3}{2}\pi\right)$에서 $h(t)=\pi$이므로 $0<\pi k<\pi$

$0<k<1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 모든 실수 k의 값의 범위는 $\dfrac{1}{4}<k<\dfrac{1}{2}$

따라서 $\alpha=\dfrac{1}{4}$, $\beta=\dfrac{1}{2}$이므로 $\alpha\beta=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$

35) [정답] ②

[해설]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 45이고 공차가 -7이므로 일반항 a_n은 $a_n=-7n+52$이다. 또한 수열 $\{b_n\}$은 첫째항과 공차가 같고 모든 항 이 자연수이므로 수열 $\{b_n\}$의 공차를 d라 하면 d는 자연수이다. $b_n=b_1+(n-1)d$에서 $b_1=d$이므로 $b_n=dn$이다.

따라서 $c_n=(d-7)n+52$

$c_n > 100$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값이 10이므로

$c_9 \le 100$, $c_{10} > 100$이다.

$c_9 = 9(d-7)+52 = 9d-11$에서 $9d-11 \le 100$, $d \le \dfrac{37}{3}$

$c_{10} = 10(d-7)+52 = 10d-18$에서 $10d-18 > 100$, $d > \dfrac{59}{5}$

즉, $\dfrac{59}{5} < d \le \dfrac{37}{3}$이고 d는 자연수이므로 $d=12$

따라서 $b_1 = 12$

36) [정답] 42

[해설]

3으로 나눈 나머지가 1인 자연수를 나열하면 1, 4, 7, 10, 13, …이므로 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열이다.

즉, $a_n = 3n-2$

4로 나눈 나머지가 2인 자연수를 나열하면

2, 6, 10, 14, 18, …이므로 첫째항이 2이고 공차가 4인 등차수열이다.

즉, $b_n = 4n-2$

$a_k = b_m$에서 $3k-2 = 4m-2$, $3k = 4m$

즉, k는 4의 배수이고 m은 3의 배수이므로

$k = 4k'$, $m = 3m'$ (단, $k' \le 5$, $m' \le 6$인 자연수)

이를 대입하면 $3 \times 4k' = 4 \times 3m'$에서 $k' = m'$이다.

k와 m은 20 이하의 자연수이므로 $k+m$의 최솟값은 $k' = m' = 1$, 즉 $k=4$, $m=3$일 때 7이고, $k+m$의 최댓값은 $k' = m' = 5$, 즉 $k=20$, $m=15$일 때 35이다.

따라서 $k+m$의 최댓값과 최솟값의 합은 $35+7=42$

37) [정답] ③

[해설]

첫째항이 3이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_k\}$의 일반항은

$a_n = 3+2(n-1) = 2n+1$이므로

$a_{2n-1} = 2(2n-1)+1 = 4n-1$, $a_{2n} = 2 \times 2n+1 = 4n+1$이고

$b_n = a_{2n-1} + a_{2n} = (4n-1)+(4n+1) = 8n$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1 = 8$이고 공차가 8인 등차수열이다.

따라서 $S_5 = \dfrac{5 \times (2 \times 8 + 4 \times 8)}{2} = 120$

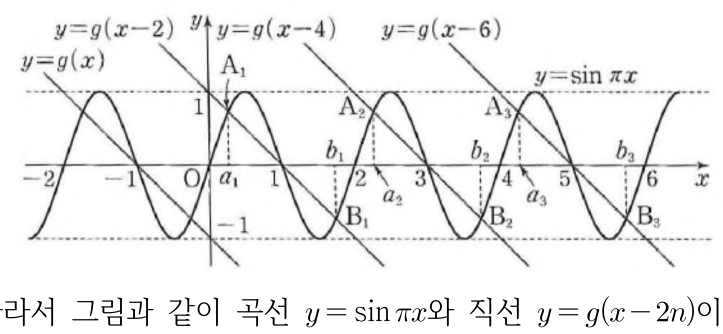
38) [정답] 8

[해설]

직선 $y = -x$가 원점에 대하여 대칭인 직선이므로 직선 $y = g(x)$는 점 $(-1, 0)$에 대하여 대칭인 직선이다.

따라서 직선 $y = g(x-2n)$은 점 $(2n-1, 0)$에 대하여 대칭이고 기울기가 -1인 직선이다.

함수 $y = \sin \pi x$의 그래프는 함수 $y = \sin \pi x$의 그래프가 x축과 만나는 모든 점에 대하여 대칭이고 점 $(2n-1, 0)$은 함수 $y = \sin \pi x$의 그래프 위의 점이므로 함수 $y = \sin \pi x$의 그래프는 점 $(2n-1, 0)$에 대하여 대칭이다.



따라서 그림과 같이 곡선 $y = \sin \pi x$와 직선 $y = g(x-2n)$이 모두 점 $(2n-1, 0)$에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점 A_n, B_n도 점 $(2n-1, 0)$에 대하여 대칭이다.

즉, $\frac{a_n+b_n}{2}=2n-1$에서 $a_n+b_n=4n-2$

따라서 $c_n=4n-2$

그러므로 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 2이고 공차가 4인 등차수열이다.

$S_n=\frac{n\{4+4(n-1)\}}{2}=2n^2$이므로 $2n^2>100$에서 $n^2>50$

한편, $7<\sqrt{50}<8$이므로 $n^2>50$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 8이다.
39) [정답] ④

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0)$이라 하면

$a_1+a_2=a_1(1+r)$, $a_4+a_5=a_4(1+r)$이므로

$\frac{a_1+a_2}{a_4+a_5}=\frac{1}{2}$에서 $\frac{a_1}{a_4}=\frac{1}{2}$

즉, $a_4=2a_1$이므로 $r^3=2$

$a_{10}=a_1\times r^9=a_1\times(r^3)^3=8a_1$이므로

$8a_1\le 40$, $a_1\le 5$

따라서 자연수 a_1의 값은 1, 2, 3, 4, 5이고 그 합은 15이다.
40) [정답] ③

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$, 공비를 r $(r>0)$이라 하면

$\frac{a_1a_4}{a_3}=\frac{a\times ar^3}{ar^2}=ar=2$ …… ㉠

$a_2+a_6=ar+ar^5=ar(1+r^4)=10$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$1+r^4=5$, $r^4=4$

$r>0$이므로 $r=\sqrt{2}$

㉠에 의하여 $a=\sqrt{2}$

즉, $a_n=(\sqrt{2})^n$이므로

$b_n=\frac{a_{2n}}{2a_{n+1}}=\frac{(\sqrt{2})^{2n}}{2\times(\sqrt{2})^{n+1}}=\frac{(\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^{n-3}$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}$이고 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열이므로 첫째항부터 제8항까지의 합은

$\frac{\frac{1}{2}\{(\sqrt{2})^8-1\}}{\sqrt{2}-1}=\frac{15}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{15}{2}(\sqrt{2}+1)$
41) [정답] ②

[해설]

세 수 a, $a+b$, ab가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(a+b)=a+ab$

$a+2b-ab=0$ …… ㉠

세 수 a^2, ab, $2b$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(ab)^2=a^2\times 2b$

$a^2b(b-2)=0$

$a\ne 0$, $b\ne 0$이므로 $b=2$

$b=2$를 ㉠에 대입하면

$a+2\times2-a\times2=0$

$a=4$

따라서 $ab=4\times2=8$
42) [정답] ③

[해설]

$\mathrm{P}(n,\ \sqrt{n}),\ \mathrm{Q}(n,\ \sqrt{2n}),\ \mathrm{R}(n,\ \sqrt{mn})$이므로

$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{n},\ \overline{\mathrm{QA}}=\sqrt{2n},\ \overline{\mathrm{RA}}=\sqrt{mn}$

$\overline{\mathrm{PA}},\ \overline{\mathrm{QA}},\ \overline{\mathrm{RA}}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\overline{\mathrm{QA}}^2=\overline{\mathrm{PA}}\times\overline{\mathrm{RA}}$

즉, $(\sqrt{2n})^2=\sqrt{n}\times\sqrt{mn}$에서 $n>0$이므로 $2n=n\sqrt{m}$이고,

$\sqrt{m}=2,\ m=4$

또 $\overline{\mathrm{OP}}^2=n^2+n,\ \overline{\mathrm{OQ}}^2+4=n^2+2n+4,\ \overline{\mathrm{OR}}^2+5=n^2+4n+5$

$\overline{\mathrm{OP}}^2,\ \overline{\mathrm{OQ}}^2+4,\ \overline{\mathrm{OR}}^2+5$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(\overline{\mathrm{OQ}}^2+4)=\overline{\mathrm{OP}}^2+(\overline{\mathrm{OR}}^2+5)$

즉, $2(n^2+2n+4)=(n^2+n)+(n^2+4n+5)$에서 $n=3$

따라서 $m+n=4+3=7$
43) [정답] ②

[해설]

조건 (가)에 의하여

$S_{2n-1}=S_1+(n-1)\times3$

조건 (나)에 의하여

$S_{2n}=S_2+(n-1)\times4$

$a_{11}=S_{11}-S_{10}=(S_1+15)-(S_2+16)=S_1-S_2-1$

$a_{12}=S_{12}-S_{11}=(S_2+20)-(S_1+15)=S_2-S_1+5$

이때 $a_{11}=a_{12}$이므로

$S_1-S_2-1=S_2-S_1+5$

$S_2-S_1=-3$

따라서

$a_7=S_7-S_6=(S_1+9)-(S_2+8)$

$\quad=1-(S_2-S_1)$

$\quad=1-(-3)=4$
44) [정답] ①

[해설]

$\sum_{k=1}^{10}\{ka_{k+1}-(k+1)a_k\}=70$에서

$\sum_{k=1}^{10}\{ka_{k+1}-(k+1)a_k\}$

$=(a_2-2a_1)+(2a_3-3a_2)+(3a_4-4a_3)+\cdots+(10a_{11}-11a_{10})$

$=10a_{11}-2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})$

$=10a_{11}-2\sum_{k=1}^{10}a_k$

이고, $a_{11}=15$이므로

$10\times15-2\sum_{k=1}^{10}a_k=70,\ \sum_{k=1}^{10}a_k=40$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10}a_k(a_k+6)-\sum_{k=1}^{10}(a_k+2)^2=\sum_{k=1}^{10}\left\{a_k(a_k+6)-(a_k+2)^2\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(2a_k-4)=2\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}4$$
$$=2\times40-4\times10=40$$

45) [정답] ⑤

[해설]

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_n=\frac{n^2-12n}{n}=n-12,\ b_n=-\frac{8}{n}$

따라서

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{a_k}{b_k}=\sum_{k=1}^{15}\frac{k-12}{-\frac{8}{k}}=\sum_{k=1}^{15}\left(-\frac{k^2}{8}+\frac{3k}{2}\right)=-\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{15}k^2+\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{15}k$$
$$=-\frac{1}{8}\times\frac{15\times16\times31}{6}+\frac{3}{2}\times\frac{15\times16}{2}$$
$$=-155+180=25$$

46) [정답] ④

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 2이므로

$a_{n+1}=2a_n,\ S_n=\frac{a_1(2^n-1)}{2-1}=a_1(2^n-1)$

이때 $a_n=\frac{1}{2}a_{n+1}=\frac{1}{2}(S_{n+1}-S_n)$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{a_k}{S_{k+1}S_k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_{k+1}S_k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\left(\frac{1}{S_3}-\frac{1}{S_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_{10}}-\frac{1}{S_{11}}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{11}}\right)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1(2^{11}-1)}\right\}$$
$$=\frac{2^{10}-1}{a_1(2^{11}-1)}$$

즉, $p=\frac{2^{10}-1}{a_1(2^{11}-1)}$에서 $pa_1=\frac{2^{10}-1}{2^{11}-1}$이므로

$1-pa_1=\frac{2^{10}}{2^{11}-1},\ (2^{11}-1)(1-pa_1)=2^{10}$

따라서

$$\log_2(2^{11}-1)+\log_2(1-pa_1)=\log_2(2^{11}-1)(1-pa_1)$$
$$=\log_2 2^{10}=10$$

47) [정답] ⑤

[해설]

(ⅰ) a_2가 홀수일 때, $a_3 = 6a_2 = 4$, $a_2 = \frac{2}{3}a_2$가

자연수가 아니므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) a_2가 짝수일 때, $a_3 = \frac{a_2}{2} + 1 = 4$, $a_2 = 6$

① a_1이 홀수일 때, $a_2 = 6a_1 = 6$, $a_1 = 1$

이때 $a_2 > a_1$을 만족시킨다.

② a_1이 짝수일 때, $a_2 = \frac{a_1}{2} + 1 = 6$, $a_1 = 10$

이때 $a_2 > a_1$을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a_1 = 1$, $a_2 = 6$

한편, a_3이 짝수이므로 $a_4 = \frac{a_3}{2} + 1 = \frac{4}{2} + 1 = 3$

a_4가 홀수이므로 $a_5 = 6a_4 = 6 \times 3 = 18$

a_5가 짝수이므로 $a_6 = \frac{a_5}{2} + 1 = \frac{18}{2} + 1 = 10$

a_6이 짝수이므로 $a_7 = \frac{a_6}{2} + 1 = \frac{10}{2} + 1 = 6$

이때

$a_1 = 1$

$a_2 = a_7 = a_{12} = a_{17} = \cdots = 6$

$a_3 = a_8 = a_{13} = a_{18} = \cdots = 4$

$a_4 = a_9 = a_{14} = a_{19} = \cdots = 3$

$a_5 = a_{10} = a_{15} = a_{20} = \cdots = 18$

$a_6 = a_{11} = a_{16} = a_{21} = \cdots = 10$

따라서 $a_k < a_2$를 만족시키는 20 이하의 자연수 k의 값은

1, 3, 4, 8, 9, 13, 14, 18, 19이므로 그 개수는 9이다.

48) [정답] ⑤

[해설]

수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2$, $a_n a_{n+1} = (-1)^n$을 만족시키므로

각 항을 차례로 구하면

$a_1 a_2 = -1$에서 $a_2 = -\frac{1}{2}$

$a_2 a_3 = 1$에서 $a_3 = -2$

$a_3 a_4 = -1$에서 $a_4 = \frac{1}{2}$

$a_4 a_5 = 1$에서 $a_5 = 2$

$\vdots$

$a_1 = 2$이므로 $b_1 = 1 - 2$

$a_2 = -\frac{1}{2}$이므로 $b_2 = 2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{1}{2}$

$a_3 = -2$이므로 $b_3 = 3 - (-2) = 3 + 2$

$a_4 = \frac{1}{2}$이므로 $b_4 = 4 - \frac{1}{2}$

$a_5 = 2$이므로 $b_5 = 5 - 2$

$\vdots$

따라서

$$b_n=\begin{cases} n-2 & (n=4m-3) \\ n+\frac{1}{2} & (n=4m-2) \\ n+2 & (n=4m-1) \\ n-\frac{1}{2} & (n=4m) \end{cases}$$

자연수 k에 대하여 b_{2k}는 수열 $\{b_n\}$의 짝수번째 항을 의미하므로

$$b_{2k}=\begin{cases} 2k+\frac{1}{2} & (2k=4m-2) \\ 2k-\frac{1}{2} & (2k=4m) \end{cases} \text{ (단, } m\text{은 자연수)}$$

$$b_{2k}+b_{2k+2}=\left(2k+\frac{1}{2}\right)+\left(2k+2-\frac{1}{2}\right)=4k+2$$

또는 $b_{2k}+b_{2k+2}=\left(2k-\frac{1}{2}\right)+\left(2k+2+\frac{1}{2}\right)=4k+2$

따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(b_{2k}+b_{2k+2})=\sum_{k=1}^{10}(4k+2)=4\times\frac{10\times11}{2}+2\times10=240$

[다른 풀이]

조건 (가)에 의하여 $a_2=-\frac{1}{2}$이고

자연수 n에 대하여

$a_{2n}a_{2n+1}=(-1)^{2n}=1,\ a_{2n+1}a_{2n+2}=(-1)^{2n+1}=-1$이므로 $a_{2n+2}=\dfrac{-1}{a_{2n+1}}=-a_{2n}$을 만족시킨다.

따라서 $a_{2n}=\dfrac{(-1)^n}{2}$

조건 (나)에 의하여 $a_{2n}+b_{2n}=2n$에서

$b_{2n}=2n-a_{2n}=2n-\dfrac{(-1)^n}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(b_{2k}+b_{2k+2})&=\sum_{k=1}^{10}\left\{2k-\frac{(-1)^k}{2}+2k+2-\frac{(-1)^{k+1}}{2}\right\}\\&=\sum_{k=1}^{10}(4k+2)\\&=240\end{aligned}$$

49) [정답] ①

[해설]

첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=3n-1$이므로 집합 A의 원소는 3으로 나눈 나머지가 2인 자연수로만 이루어져 있다.

한편, 수열 $\{b_n\}$의 일반항은 $b_n=2n-1$이므로 수열 $\{b_n\}$의 각 항 중에서 3으로 나눈 나머지가 2가 아닌 수가 집합 $B-A$의 원소가 된다.

(ⅰ) $n=3k-2$ (k는 자연수)일 때

$b_{3k-2}=2(3k-2)-1$에서

$2(3k-2)-1=6k-5=3(2k-1)-2$이므로

$n=3k-2$일 때 b_n은 3으로 나눈 나머지가 1인 자연수이다.

따라서 b_{3k-2}는 집합 $B-A$의 원소이다.

(ⅱ) $n=3k-1$(k는 자연수)일 때

$b_{3k-1}=2(3k-1)-1$에서

$2(3k-1)-1=6k-3=3(2k-1)$이므로

$n=3k-1$일 때 b_n은 3의 배수이다.

따라서 b_{3k-1}은 집합 $B-A$의 원소이다.

(ⅲ) $n=3k$(k는 자연수)일 때

$b_{3k}=2\times 3k-1$에서

$2\times 3k-1=3\times 2k-1$이므로

$n=3k$일 때 b_n은 3으로 나눈 나머지가 2인 자연수이다.

따라서 b_{3k}는 집합 $B-A$의 원소가 아니다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $B-A=\{b_1,\ b_2,\ b_4,\ b_5,\ b_7,\ b_8,\ \cdots\}$

이때 $d_n=b_{3n-2}+b_{3n-1}$이라 하면 $d_1=b_1+b_2=4$이고

$$\begin{aligned} d_{n+1}-d_n &= (b_{3n+1}+b_{3n+2})-(b_{3n-2}+b_{3n-1}) \\ &= \{2(3n+1)-1+2(3n+2)-1\} \\ &\qquad -\{2(3n-2)-1+2(3n-1)-1\} \\ &= (12n+4)-(12n-8)=12 \end{aligned}$$

이므로 수열 $\{d_n\}$은 첫째항이 4이고 공차가 12인 등차수열이다.

이때 수열 $\{d_n\}$의 첫째항부터 제k항까지의 합을 S_k라 하면

$S_k=\dfrac{k\{2\times 4+12(k-1)\}}{2}>140$에서

$k(12k-4)>280,\ 3k^2-k-70>0,\ (3k+14)(k-5)>0$

$k>0$에서 $k>5$이므로 부등식을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 6이다.

이때 $S_6=(b_1+b_2)+(b_4+b_5)+\cdots+(b_{16}+b_{17})=\sum_{k=1}^{12}c_k=204$

한편, $b_{17}=2\times 17-1=33$에서 $S_6-b_{17}=171$이다.

집합 $B-A$에 속하는 모든 원소를 작은 것부터 크기순으로 나열할 때, 첫번째 원소부터 n번째 원소까지의 합이 처음으로 140보다 큰 경우는

$b_1+b_2+b_4+b_5+\cdots+b_{16}=\sum_{k=1}^{11}c_k$인 경우이므로

자연수 n의 최솟값은 11이다.

[다른 풀이]

조건을 만족시키는 집합 $B-A$의 원소는 $b_1,\ b_2,\ b_4,\ b_5,\ b_7,\ b_8,\ \cdots$이다. 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제$3n$항까지의 합에서

수열 $\{b_{3n}\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 뺀 것을 S_n이라 하자.

수열 $\{b_{3n}\}$은 첫째항이 $b_3=5$이고 공차가 6인 등차수열이므로

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{3n}b_k-\sum_{k=1}^{n}b_{3k} \\ &= \frac{3n\{2+2(3n-1)\}}{2}-\frac{n\{10+6(n-1)\}}{2}=\frac{18n^2}{2}-\frac{6n^2+4n}{2} \\ &= 6n^2-2n=2n(3n-1) \end{aligned}$$

$2n(3n-1)>140$에서 $3n^2-n-70>0$이고

$(3n+14)(n-5)>0$에서 n은 자연수이므로 $n>5$이고,

자연수 n의 최솟값은 6이다.

이때 $S_6=b_1+b_2+b_4+b_5+\cdots+b_{16}+b_{17}=\sum_{k=1}^{12}c_k=204$이고

$b_{17}=2\times 17-1=33$이므로

$b_1+b_2+b_4+b_5+\cdots+b_{16}=\sum_{k=1}^{11}c_k=171>140$이 성립한다.

따라서 집합 $B-A$에 속하는 모든 원소를 작은 것부터 크기순으로 나열할 때, 첫번째 원소부터 n번째 원소까지의 합이 처음으로 140보다 큰 경우는 $b_1+b_2+b_4+b_5+\cdots+b_{16}=\sum_{k=1}^{11}c_k$인 경우이므로

자연수 n의 최솟값은 11이다.

50) [정답] 14

[해설]

$p<0$이라 하면 자연수 n에 대하여 $a_n \geq 0$이면 $a_{n+1}=a_n-p>a_n$, 즉 $a_{21}\neq a_1$이므로 조건을 만족시키지 않는다. 즉, p는 자연수이다.

a_1, a_2, $\cdots$, a_{20} 중 음수인 것의 개수를 k라 하면 0 이상인 것의 개수는 $20-k$이므로

$a_{21}=a_1-(20-k)p+kpq$

$k=20$이면 $a_1>0$에 모순이므로 k는 19 이하인 자연수이다.

$a_{21}=a_1$에서

$(20-k)p=kpq$, $kp(q+1)=20p$

$p\neq 0$이므로 $k(q+1)=20$

q는 정수이고 k는 19 이하의 자연수이므로 k는 19 이하인 20의 양의 약수이다. 즉, k는 1, 2, 4, 5, 10

(i) $k=1$인 경우, $q=19$

18 이하의 자연수 n_1에 대하여

$a_{n_1+1}=a_1-n_1p\geq 0$, $a_{n_1+2}=a_1-(n_1+1)p<0$

즉, $\dfrac{40}{n_1+1}<p\leq\dfrac{40}{n_1}$일 때

$a_{n_1+3}=a_1-(n_1+1)p+19p=a_1+(18-n_1)p$

$n_1\geq 14$일 때, $2<\dfrac{40}{n_1+1}<\dfrac{40}{n_1}<3$이므로 이를 만족시키는 자연수 p가 존재하지 않는다.

$n_1=13$일 때, $\dfrac{20}{7}<p\leq\dfrac{40}{13}$이므로 $p=3$

$n_1\leq 12$일 때, $3<\dfrac{40}{n_1+1}<p$이므로 자연수 p가 존재하면 $p>3$

따라서 $p\geq 3$이므로 이 경우에 $p+q$의 최솟값은 $3+19=22$

(ii) $k=2$인 경우, $q=9$

8 이하의 자연수 n_1에 대하여

$a_{n_1+1}=a_1-n_1p\geq 0$, $a_{n_1+2}=a_1-(n_1+1)p<0$

즉, $\dfrac{40}{n_1+1}<p\leq\dfrac{40}{n_1}$일 때

$a_{n_1+3}=a_1-(n_1+1)p+9p=a_1+(8-n_1)p\geq 0$

$a_{n_1+4}=a_1+(7-n_1)p$

$a_{n_1+3+(8-n_1)}=a_1$, 즉 $a_{11}=a_1$이고 $a_{n+10}=a_n$

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+10}=a_n$을 만족시키므로 $a_{21}=a_1$을 만족시킨다.

$n_1=8$일 때, $\dfrac{40}{9}<p\leq 5$이므로 $p=5$

$n_1\leq 7$일 때, $5\leq\dfrac{40}{n_1+1}$이므로 자연수 p가 존재하면 $p>5$

따라서 $p\geq 5$이므로 이 경우에 $p+q$의 최솟값은 $5+9=14$

(iii) $k=4$인 경우, $q=4$

3 이하의 자연수 n_1에 대하여

$a_{n_1+1}=a_1-n_1p\geq 0$, $a_{n_1+2}=a_1-(n_1+1)p<0$

즉, $\dfrac{40}{n_1+1}<p\leq\dfrac{40}{n_1}$일 때

$a_{n_1+3}=a_1-(n_1+1)p+4p=a_1+(3-n_1)p\geq 0$

$a_{n_1+4}=a_1+(2-n_1)p$

$\vdots$

$a_{n_1+3+(3-n_1)}=a_1$, 즉 $a_6=a_1$이고 $a_{n+5}=a_n$

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+5}=a_n$을 만족시키므로 $a_{21}=a_1$을 만족시킨다.

$n_1=3$일 때, $10<p\le\frac{40}{3}$이므로 $p=11,\ 12,\ 13$

$n_1\le 2$일 때, $13<\frac{40}{n_1+1}$이므로 자연수 p가 존재하면 $p>13$

따라서 $p\ge 11$이므로 이 경우에 $p+q$의 최솟값은 $11+4=15$

(iv) $k=5$인 경우, $q=3$

$a_3=a_1-2p\ge 0,\ a_4=a_1-3p<0$인 경우

즉, $\frac{40}{3}<p\le 20$에서 $p=14,\ 15,\ \cdots,\ 20$인 경우

$a_5=a_1-3p+3p=a_1$

$a_2=a_1-p\ge 0,\ a_3=a_1-2p<0$인 경우

즉, $\frac{40}{2}<p\le 40$에서 $p=21,\ 22,\ \cdots,\ 40$

$a_4=a_1-2p+3p=a_1+p>0$, 즉 $a_5=a_1$이고 $a_{n+4}=a_n$

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+4}=a_n$을 만족시키므로 $a_{21}=a_1$을 만족시킨다.

따라서 $p\ge 14$이므로 이 경우에 $p+q$의 최솟값은 $14+3=17$

(v) $k=10$인 경우, $q=1$

$a_2=a_1-p<0$, 즉 $p>40$을 만족시키고 $a_3=a_1-p+p=a_1$이므로 주기가 2이다. 즉, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+2}=a_n$을 만족시키므로 $a_{21}=a_1$을 만족시킨다.

따라서 이 경우에 $p+q$의 최솟값은

$41+1=42$

(i)~(v)에서 $p+q$의 최솟값은 14이다.

51) [정답] ⑤

[해설]

$a_3=\frac{1}{6}$에서

$a_3=\frac{1}{4-8a_2}$이므로 $\frac{1}{6}=\frac{1}{4-8a_2},\ a_2=-\frac{1}{4}$

$a_2=\frac{1}{4-8a_1}$이므로 $-\frac{1}{4}=\frac{1}{4-8a_1},\ a_1=1$

또한 $a_3=\frac{1}{6}$에서

$$a_4=\frac{1}{4-8a_3}=\frac{1}{4-8\times\frac{1}{6}}=\frac{3}{8}$$

$$a_5=\frac{1}{4-8a_4}=\frac{1}{4-8\times\frac{3}{8}}=1$$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 $1,\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \frac{3}{8},\ 1,\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \frac{3}{8},\ \cdots$으로 첫째항부터 네 개의 수 $1,\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \frac{3}{8}$이 이 순서대로 반복하여 나타난다.

따라서

$$\sum_{n=1}^{25}a_n=\sum_{n=1}^{24}a_n+a_{25}=6(a_1+a_2+a_3+a_4)+a_1$$

$$=6\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{3}{8}\right)+1=6\times\frac{31}{24}+1=\frac{35}{4}$$

52) [정답] ③

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 $d\ (d>0)$이라 하자.

$a_n a_{n+5} \le 0$에서 $a_n(a_n+5d) \le 0$

$-5d \le a_n \le 0$ …… ㉠

$S_n = \dfrac{n(a+a_n)}{2}$

$S_{n+5} = \dfrac{(n+5)(a+a_{n+5})}{2} = \dfrac{(n+5)(a+a_n+5d)}{2}$

n은 자연수이므로 $S_n S_{n+5} \le 0$에서

$(a+a_n)(a+5d+a_n) \le 0$

$d>0$이므로 $-a-5d \le a_n \le -a$ …… ㉡

한편, $a \ge 0$이면 $a_n \ge 0$에서 $n(A) \le 1$이므로 $n(A\cap B)=3$을 만족시킬 수 없다. 즉, $a<0$

$n(A\cap B)=3$이므로 ㉡에서 $-a-5d<0$ …… ㉢

따라서 $A\cap B=\{n \mid -a-5d \le a_n \le 0,\ n$은 자연수$\}$이다.

한편, $S_m = a_m$인 짝수인 자연수 m이 존재하므로

$a_m = S_m - S_{m-1}$에서 $S_m = S_m - S_{m-1}$, $S_{m-1}=0$

$\dfrac{(m-1)(a+a_{m-1})}{2}=0$, $a+a_{m-1}=0$

$a+\{a+(m-2)d\}=0$

$m=2k$ (k는 자연수)라 하면 $2a+(2k-2)d=0$

즉, $-a=(k-1)d$인 자연수 k가 존재한다.

㉢에서 $-a-5d=(k-1)d-5d=(k-6)d<0$이므로 k는 5 이하의 자연수이다.

$-a=(k-1)d$에서

$a_n = a+(n-1)d = -(k-1)d+(n-1)d=(n-k)d$

이므로

$A\cap B = \{n \mid (k-6)d \le (n-k)d \le 0,\ n$은 자연수$\}$

$\quad = \{n \mid k-6 \le n-k \le 0,\ n$은 자연수$\}$

$\quad = \{n \mid 2k-6 \le n \le k,\ n$은 자연수$\}$

k의 값에 따라 집합 $A\cap B$를 구하면 다음과 같다.

$k=1$이면 $A\cap B=\{1\}$

$k=2$이면 $A\cap B=\{1, 2\}$

$k=3$이면 $A\cap B=\{1, 2, 3\}$

$k=4$이면 $A\cap B=\{2, 3, 4\}$

$k=5$이면 $A\cap B=\{4, 5\}$

이때 $n(A\cap B)=3$이므로 $k=3$ 또는 $k=4$

(ⅰ) $k=3$일 때, $a=-2d$이고

$a_n=(n-k)d=(n-3)d$

㉠에서 $-5d \le (n-3)d \le 0$, $-5 \le n-3 \le 0$, $-2 \le n \le 3$이므로

$A=\{1, 2, 3\}$

㉡에서 $2d-5d \le (n-3)d \le 2d$, $-3 \le n-3 \le 2$, $0 \le n \le 5$이므로

$B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

이때 $A-B=\varnothing$이다.

(ⅱ) $k=4$일 때, $a=-3d$이고

$a_n=(n-k)d=(n-4)d$

㉠에서 $-5d \le (n-4)d \le 0$, $-5 \le n-4 \le 0$, $-1 \le n \le 4$이므로

$A=\{1, 2, 3, 4\}$

㉡에서 $3d-5d \le (n-4)d \le 3d$, $-2 \le n-4 \le 3$, $2 \le n \le 7$이므로

$B=\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

이때 $A-B=\{1\} \ne \varnothing$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $k=4$이고 $m=2k=8$이다.
$a=-3d$이므로
$a_m=a_8=a+7d=-3d+7d=4d$,
$a_{m+10}=a_{18}=a+17d=-3d+17d=14d$
따라서 $\frac{a_{m+10}}{a_m}=\frac{14d}{4d}=\frac{7}{2}$
53) [정답] 135

[해설]
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 $\frac{4}{3}$이고, 공차가 $\frac{1}{3}$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<a_{n+1}$이고, 2와 3의 최소공배수는 6이다.
$m=6$일 때, $A_6=\{a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots,\ a_{12}\}$, $B_6=\{a_3,\ a_6,\ a_9,\ \cdots,\ a_{18}\}$
$A_6\cap B_6=\{a_6,\ a_{12}\}$, $b_6=a_{12}$
$m=7$일 때, $A_7=\{a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots,\ a_{14}\}$, $B_7=\{a_3,\ a_6,\ a_9,\ \cdots,\ a_{21}\}$
$A_7\cap B_7=\{a_6,\ a_{12}\}$, $b_7=a_{12}$
$m=8$일 때, $A_8=\{a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots,\ a_{16}\}$, $B_8=\{a_3,\ a_6,\ a_9,\ \cdots,\ a_{24}\}$
$A_8\cap B_8=\{a_6,\ a_{12}\}$, $b_8=a_{12}$
$m=9$일 때, $A_9=\{a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots,\ a_{18}\}$, $B_9=\{a_3,\ a_6,\ a_9,\ \cdots,\ a_{27}\}$
$A_9\cap B_9=\{a_6,\ a_{12},\ a_{18}\}$, $b_9=a_{18}$
$m=10$일 때, $A_{10}=\{a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots,\ a_{20}\}$, $B_{10}=\{a_3,\ a_6,\ a_9,\ \cdots,\ a_{30}\}$
$A_{10}\cap B_{10}=\{a_6,\ a_{12},\ a_{18}\}$, $b_{10}=a_{18}$
$m=11$일 때, $A_{11}=\{a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots,\ a_{22}\}$, $B_{11}=\{a_3,\ a_6,\ a_9,\ \cdots,\ a_{33}\}$
$A_{11}\cap B_{11}=\{a_6,\ a_{12},\ a_{18}\}$, $b_{11}=a_{18}$
$\vdots$
이와 같은 과정을 반복하면
$b_{3k+3}=b_{3k+4}=b_{3k+5}=a_{6k+6}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
$a_n=\frac{4}{3}+(n-1)\times\frac{1}{3}$이므로
$a_{6k+6}=\frac{4}{3}+\{(6k+6)-1\}\times\frac{1}{3}=2k+3$
따라서
$$\sum_{m=6}^{20}b_m=\sum_{k=1}^{5}(b_{3k+3}+b_{3k+4}+b_{3k+5})=\sum_{k=1}^{5}3a_{6k+6}$$
$$=3\sum_{k=1}^{5}a_{6k+6}=3\sum_{k=1}^{5}(2k+3)=3\times\left(2\times\frac{5\times6}{2}+3\times5\right)=135$$
54) [정답] 21

[해설]
집합 S_n의 원소는
$(-2)^0a_1+(-2)^1a_2+(-2)^2a_3+\ \cdots\ +(-2)^{n-1}a_n$
$=a_1-2a_2+2^2a_3-\ \cdots\ +(-2)^{n-1}a_n$
과 같이 나타낼 수 있다.
집합 S_3의 원소는 $a_1-2a_2+4a_3$의 꼴로 나타나고 $a_k(k=1,\ 2,\ 3)$의 값은 0 또는 1이다.
따라서 a_1+4a_3의 값은 0, 1, 4, 5로 4가지
$-2a_2$의 값은 -2, 0으로 2가지
경우가 될 수 있으므로
$S_3=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

즉, $p=8$

집합 S_n에 속하는 원소 $a_1-2a_2+2^2a_3- \cdots +(-2)^{n-1}a_n$의 값은

$a_{2i-1}=1$, $a_{2i}=0$ $(i=1, 2, 3, \cdots)$

일 때 최대이다.

자연수 j에 대하여 $n=2j$라 하면 집합 S_n에 속하는 원소의 최댓값은

$a_1-2a_2+2^2a_3- \cdots +(-2)^{2j-1}a_{2j}$

$=1-0+2^2-0+ \cdots +(-2)^{2j-2}-0$

$=1+2^2+ \cdots +2^{2j-2}=\dfrac{2^{2j}-1}{4-1}=\dfrac{2^{2j}-1}{3}$

$n=2j+1$이라 하면

$a_1-2a_2+2^2a_3- \cdots +(-2)^{(2j+1)-1}a_{2j+1}$

$=1-0+2^2-0+ \cdots +(-2)^{2j-2}-0+(-2)^{2j}$

$=1+2^2+ \cdots +2^{2j-2}+2^{2j}=\dfrac{2^{2j+2}-1}{3}$

$\dfrac{2^{2j}-1}{3} \leq 5453 \leq \dfrac{2^{2j+2}-1}{3}$에서

$\dfrac{2^{12}-1}{3}=\dfrac{4095}{3}=1365$, $\dfrac{2^{14}-1}{3}=\dfrac{16383}{3}=5461$이고

$5453=5461-8$이므로

$5453=1+2^2+2^4+ \cdots +2^{12}-2^3$

따라서 5453을 원소로 갖는 S_n 중 n의 값이 최소인 경우는 $n=2\times6+1=13$일 때이다.

그러므로 $q=13$

따라서 $p+q=8+13=21$