# 2024학년도 대학수학능력시험 모의평가 1회

# 수학 영역 해설지

Epsilon

## 정답 및 해설

1) [정답] ⑤ (출제자 : 23 한승수)

**[출제의도] 지수법칙을 활용하여 계산할 수 있는가?**

[해설]

$$\left(4^{\sqrt{2}}\times 4\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-2+2\sqrt{2}}$$
$$=4^{\sqrt{2}+1}\times 2^{2-2\sqrt{2}}$$
$$=2^{2\sqrt{2}+2}\times 2^{2-2\sqrt{2}}$$
$$=2^{2\sqrt{2}+2+2-2\sqrt{2}}$$
$=2^4=16$ 이다.

2) [정답] ⑤ (출제자 : 23 한승수)

**[출제의도] 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?**

[해설]

$f(x)=x^3-5x^2+x+9$ 에서

$f'(x)=3x^2-10x+1$ 이므로

$f'(-1)=3+10+1=14$ 이다.

3) [정답] ④ (출제자 : 23 강주연)

**[출제의도] 등비수열의 성질을 알고 계산할 수 있는가?**

[해설]

등비중항의 성질에 의해

$a_2a_4=(a_3)^2=81$ 이므로, $a_3=9$ 이고

$a_2+a_3=12$ 에서 $a_2=12-a_3=12-9=3$ 이다.

공비 $r=\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{9}{3}=3$ 이므로

$a_4=a_3\times r=9\times 3=27$ 이다.

그러므로 $a_3+a_4=9+27=36$ 이다.

[별해]

$a_3+a_4=r(a_2+a_3)=3\times 12=36$

4) [정답] ③ (출제자 : 23 강주연)

**[출제의도] 함수의 그래프의 극한값을 구할 수 있는가?**

[해설]

$\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=0$ 이고 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=3$ 이므로

$\lim\limits_{x\to 0-}f(x)+\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0+3=3$ 이다.

5) [정답] ④ (출제자 : 23 박정인)

**[출제의도] 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?**

[해설]

$\tan\theta<0$ 이므로 $\theta$ 는 제2사분면의 각 또는 제4사분면의 각이고

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\dfrac{1}{\tan\theta}$ 이다.

$$\sin\theta\times\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin\theta\times\left(-\frac{1}{\tan\theta}\right)$$
$$=-\sin\theta\times\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$=-\cos\theta$$
$$=\frac{5}{13}$$

$\cos\theta=-\dfrac{5}{13}<0$ 이므로 $\theta$ 는 제2사분면의 각이다.

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 이고 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 이므로

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$=\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2}$$
$=\dfrac{12}{13}$ 이다.

따라서 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{12}{13}+\left(-\dfrac{5}{13}\right)=\dfrac{7}{13}$ 이다.

6) [정답] ① (출제자 : 23 하종수)

**[출제의도] 함수의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있는가?**

[해설]

함수 $f(x)$ 에서

$$f'(x)=\begin{cases}-3x^2-6x+9 & (x<0)\\ -2x-2 & (x>0)\end{cases}$$

이므로 방정식 $f'(x)=0$ 의 근은

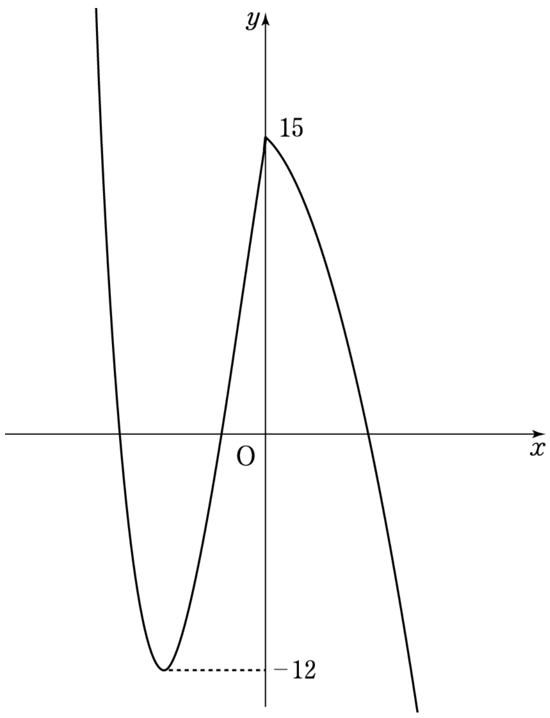
$x=-3$ 이다.

$\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}\left(-x^3-3x^2+9x+15\right)=15$ ,

$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\left(-x^2-2x+15\right)=15$ 이고

$f(0)=15$ 이다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.




함수 $f(x)$의 극댓값 $M$은
$f(0)=15$ 이다.

함수 $f(x)$의 극솟값 $m$은
$f(-3)=-12$ 이다.

따라서 $M+m=3$ 이다.

7) [정답] ⑤ (출제자 : 22 고명준)
**[출제의도] 로그의 진수 조건과 성질을 알고 활용할 수 있는가?**

[해설]
진수 조건에 의해 $0<x<n$, 또는 $x>2n$이다.

i) $0<x<n$일 때

$\log_2 \frac{x^2-2nx}{x-n} < \log_2(x+n)$

$\frac{x^2-2nx}{x-n} < x+n$

$x^2-2nx > (x+n)(x-n)$

$x^2-2nx > x^2-n^2$

$2nx < n^2$

$x<\frac{n}{2}$ 이므로 $0<x<\frac{n}{2}$ 이다.

ii) $x>2n$일 때

$\log_2 \frac{x^2-2nx}{x-n} < \log_2(x+n)$

$\frac{x^2-2nx}{x-n} < x+n$

$x^2-2nx < (x+n)(x-n)$

$x^2-2nx < x^2-n^2$

$2nx > n^2$

$x>\frac{n}{2}$ 이므로 $x>2n$ 이다.

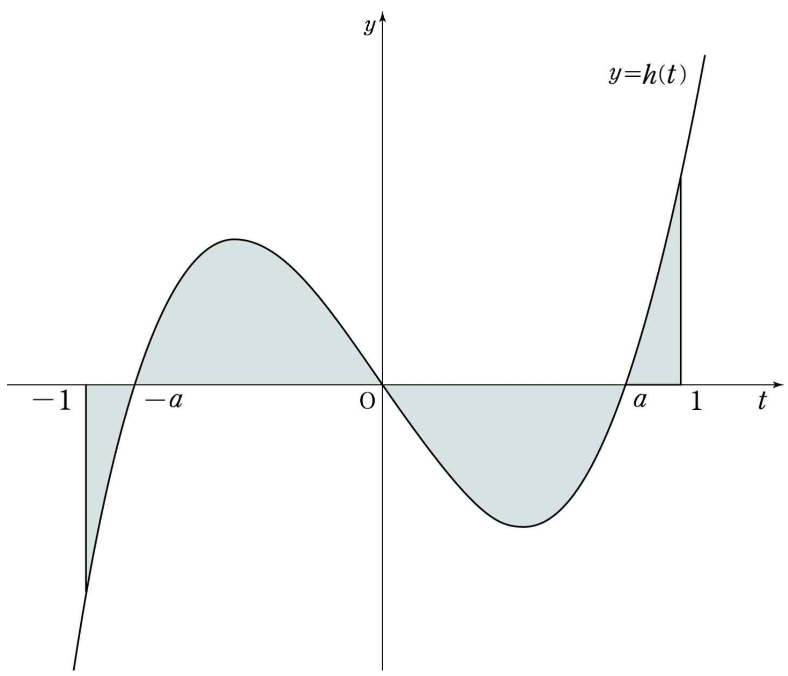
따라서 $0<x<\frac{n}{2}$ 또는 $x>2n$ 이다.

$n=7$일 때, $0<x<\frac{7}{2}$ 또는 $14<x\le 20$에서 $f(7)=9$ 이다.
$n=8$일 때, $0<x<4$ 또는 $16<x\le 20$에서 $f(8)=7$ 이다.
그러므로 $f(7)+f(8)=16$ 이다.

8) [정답] ② (출제자 : 22 신요섭)
**[출제의도] 정적분을 이용하여 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는가?**

[해설]
함수 $h(t)=t(t+a)(t-a)$의 부정적분을 $H(t)$라 하자.
$H(t)=\int t(t+a)(t-a)dt=\frac{1}{4}t^4-\frac{a^2}{2}t^2+C$ (단, $C$는 적분상수)

i) $0<a\le 1$인 경우




$$
\begin{aligned}
f(a) &= \int_{-1}^{1}|t(t+a)(t-a)|dt \\
&= 2\int_0^1 |t(t+a)(t-a)|dt \\
&= 2[-\{H(a)-H(0)\}+\{H(1)-H(a)\}] \\
&= 2\left\{-\left(\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{2}a^4\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{a^2}{2}-\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{2}a^4\right)\right\} \\
&= 2\left(\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}\right) \\
&= a^4-a^2+\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$f(a)=\frac{1}{4}$ 이므로

$a^4-a^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$a^4-a^2+\frac{1}{4}=0$

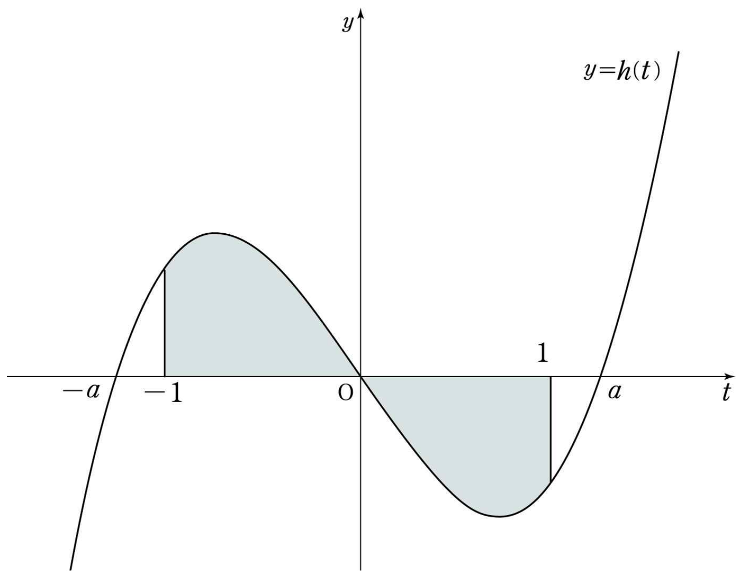
$4a^4-4a^2+1=0$

$(2a^2-1)^2=0$

$a^2=\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

ii) $a > 1$ 인 경우




$$f(a) = \int_{-1}^{1} |t(t+a)(t-a)|\,dt$$
$$= 2\int_{0}^{1} |t(t+a)(t-a)|\,dt$$
$$= -2\{H(1) - H(0)\}$$
$$= -2\left(\frac{1}{4} - \frac{a^2}{2}\right)$$
$$= a^2 - \frac{1}{2}$$

$f(a) = \frac{1}{4}$ 이므로

$a^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$a^2 = \frac{3}{4}$ 이다.

범위를 만족하는 $a$ 값이 존재하지 않는다.

따라서 i), ii)에 의해 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

9) [정답] ① (출제자 : 23 한동화)

[출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하고 조건을 만족시키는 삼각함수를 구할 수 있는가?

[해설]

함수 $f(x) = a\tan\frac{x}{b}\left(0 \le x < \frac{3b\pi}{2},\ x \ne \frac{b\pi}{2}\right)$ 의 주기는 $b\pi$ 이므로

점 A 의 좌표를 $(\alpha, k)$ 라 하면 점 B 의 좌표는 $(\alpha + b\pi, k)$ 이다.

직선 OA 의 기울기는 $\frac{k}{\alpha}$ 이고 직선 OB 의 기울기는 $\frac{k}{\alpha + b\pi}$ 이다.

주어진 조건에 의하여 $\frac{k}{\alpha} = \frac{k}{\alpha + b\pi} \times 4$ 이므로

$\alpha = \frac{b\pi}{3}$ 이고 $k = a\tan\frac{\alpha}{b} = a\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\,a$ 이다.

삼각형 OAB 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times k$ 이므로

$\sqrt{3}\pi = \frac{1}{2} \times b\pi \times \sqrt{3}\,a$

따라서 $ab = 2$ 이다.

10) [정답] ③ (출제자 : 22 신요섭)

[출제의도] 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

[해설]

$g(x)$ 는 점 $(0, 2)$ 에 대하여 대칭이므로

점 B 와 점C 의 $x$ 좌표를 각각 $\alpha$, $-\alpha$ $(\alpha > 0)$ 라 하자.

$g(x)$ 는 점 $(0, 2)$ 에 대하여 대칭이므로 점 B 에서의 접선의 기울기와 점 C 에서의 접선의 기울기는 같고 접선의 기울기는 $f'(-\alpha)$ 이다.

직선 $h(x)$ 는 점 B 와 점 C 를 지나므로

기울기는 $\frac{\{4 - f(-\alpha)\} - f(-\alpha)}{\alpha - (-\alpha)}$ 이다.

점 B 와 점 C 사이의 거리와 점 B 에서의 접선과 점C 에서의 접선 사이의 거리가 같으므로 접선의 기울기와 직선 $h(x)$ 의 기울기의 곱은 $-1$ 이다.

$$f'(-\alpha) \times \frac{\{4 - f(-\alpha)\} - f(-\alpha)}{\alpha - (-\alpha)}$$
$$= (2\alpha - 3) \times \frac{4 - 2(-\alpha^2 + 3\alpha + 2)}{2\alpha}$$
$$= (2\alpha - 3) \times \frac{2 - (-\alpha^2 + 3\alpha + 2)}{\alpha}$$
$= (2\alpha - 3)(\alpha - 3) = -1$ 이므로

$(2\alpha - 3)(\alpha - 3) = -1$

$2\alpha^2 - 9\alpha + 10 = 0$

$(\alpha - 2)(2\alpha - 5) = 0$

$\alpha = 2$ 또는 $\alpha = \frac{5}{2}$ 이다.

$h(x) = (\alpha - 3)x + 2$ 이므로

$h(x) = -x + 2$ 또는 $h(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ 이다.

따라서 $h(3) = -1$ 또는 $h(3) = \frac{1}{2}$ 이므로

$h(3)$ 의 값으로 가능한 모든 값들의 합은 $-1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ 이다.

11) [정답] ① (출제자 : 23 한동화)

[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

[해설]

$\angle ABD$ 는 원 $O_1$과 $O_2$ 에 대한 원주각이다. 삼각형 ABC 에서

사인법칙에 의해 $\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABD)} = 2r_1$ 이고, 삼각형 ABD 에서

사인법칙에 의해 $\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ABD)} = 2r_2$ 이다.

주어진 조건에서 $r_1 : r_2 = 2 : 1$ 이므로, $\overline{AC} : \overline{AD} = 2 : 1$ 이다.

$\overline{AD} = k\ (k > 0)$ 라 하면, $\overline{AC} = 2k$ 이다.

$\angle ACD + \angle CAD = \angle ADB$ 이므로, $\angle CAD = \theta_2 - \theta_1$ 이다.

주어진 조건에서 $\overline{CD} = 1$, $\cos(\angle CAD) = \frac{3}{4}$ 이므로

삼각형 ACD 에서 코사인법칙에 의해

$\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \times \overline{AC} \times \overline{AD} \times \cos(\angle CAD)$ 에서

$1^2 = 4k^2 + k^2 - 2 \times 2k \times k \times \frac{3}{4}$ 이다.

위 식을 정리하면 $k^2 = \frac{1}{2}$에서 $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다. ($\because k > 0$)

$\sin^2(\angle \mathrm{CAD}) + \cos^2(\angle \mathrm{CAD}) = 1$ 에서

$\sin(\angle \mathrm{CAD}) = \frac{\sqrt{7}}{4}$ 이고,

삼각형 ACD 의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AC}} \times \overline{\mathrm{AD}} \times \sin(\angle \mathrm{CAD})$

$= \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{8}$ 이다.

12) [정답] ③ (출제자 : 23 하종수)

**[출제의도] 함수의 곱을 통해 함수의 주기성을 파악할 수 있는가?**

[해설]

$f(x) \times f(x+2) = 16$ 에서

$f(t) = 0$ 을 만족시키는 $t$가 존재하지 않음을 알 수 있다.

$f(x) \times f(x+2) = 16$ 과 $f(x+2) \times f(x+4) = 16$ 에서

$f(x) \times f(x+2) = f(x+2) \times f(x+4)$ 이고

$f(x+2) \neq 0$ 이므로

$f(x) = f(x+4)$ 이다.

$f(x) = f(x+4)$ 이므로

$\int_6^8 f(x)\,dx = \int_2^4 f(x)\,dx = 8\sqrt{2}$ 이다.

$$\int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^4 \frac{16}{f(x+2)}\,dx$$
$$= 16\int_4^6 \frac{1}{f(x)}\,dx$$
$$= 16\int_0^2 \frac{1}{f(x)}\,dx$$

따라서 $\int_0^2 \frac{1}{f(x)}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

$\int_0^2 \frac{\{f(x)\}^2 - 1}{f(x)}\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx - \int_0^2 \frac{1}{f(x)}\,dx = \frac{12-\sqrt{2}}{2}$ 이므로

$\int_0^2 f(x)dx = 6$ 이다.

그러므로 $\int_0^6 f(x)\,dx = 2\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx = 12 + 8\sqrt{2}$ 이다.

13) [정답] ② (출제자 : 23 한동화)

**[출제의도] 조건을 만족시키는 등차수열 $\{a_n\}$ 을 구할 수 있는가?**

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 $d$라 하자.

$d > 0$ 이라면 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 0 보다 크기 때문에 모든 자연수 $n$에 대하여 $S_n$ 의 최댓값이 존재하지 않는다. 이는 조건 (가)에 모순이다.

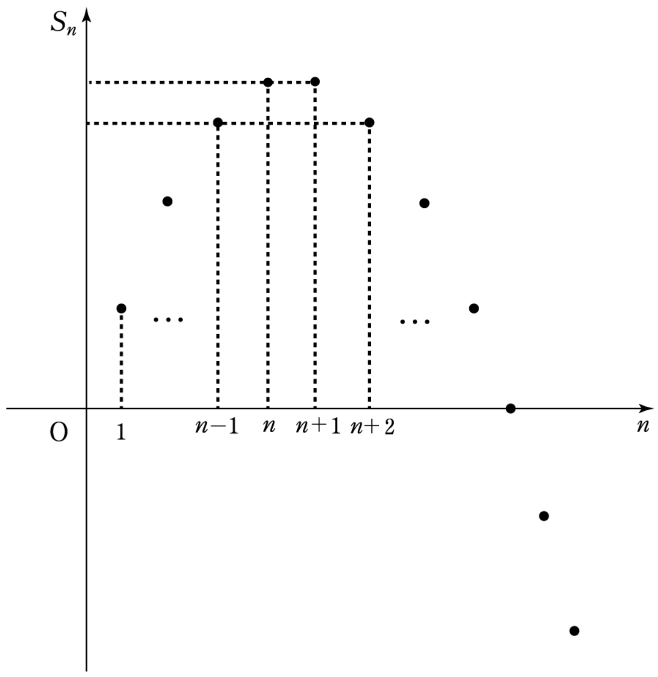
그러므로 공차 $d$는 0 보다 작다.

$S_m$ 의 값이 최대가 되도록 하는 자연수 $m$을 $k$, $l$이라 하면,

$S_k = S_l$ 이며, $l = k+1$ 이다.

그러므로 $a_{k+1} = 0$ 이 존재한다.

$S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2} = \frac{d}{2}n\left(n - 1 + \frac{144}{d}\right)$이므로 $S_n$ 의 그림은 다음과 같다.




$\alpha \le S_n \le \beta$를 만족시키는 자연수 $n$이 4 개가 되도록 하는 $\beta - \alpha$ 의 최솟값은 $S_k - S_{k-1} = a_k = 6$ 이다. $a_{k+1} = 0$ 이므로

$a_{k+1} - a_k = -6$ 에서 $d = -6$ 이다.

따라서 $a_6 = 72 + 5d = 42$ 이다.

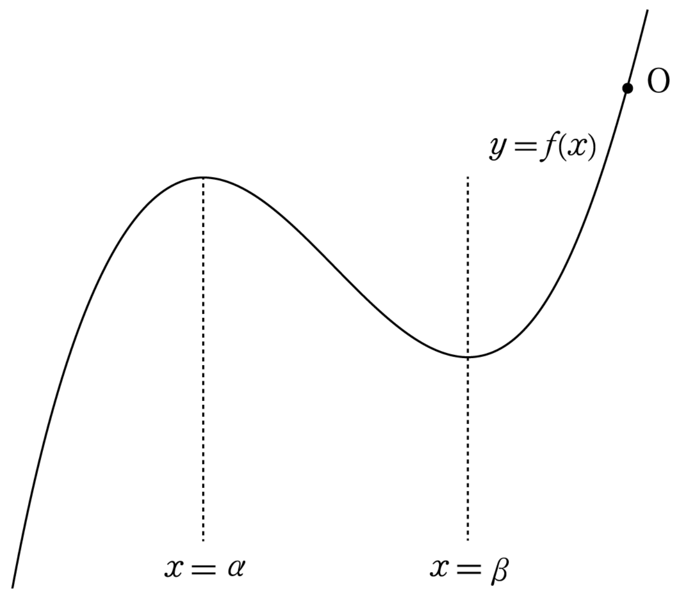
14) [정답] ⑤ (출제자 : 23 한동화, 22 신요섭)

**[출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 이해할 수 있는가?**

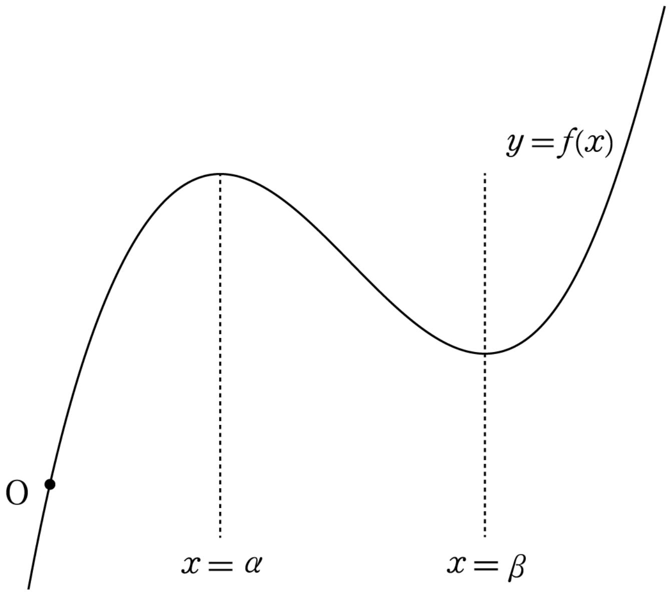
[해설]

$f(0) = f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ 을 만족시키는 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.

i) $\alpha < \beta < 0$




ii) $0 < \alpha < \beta$

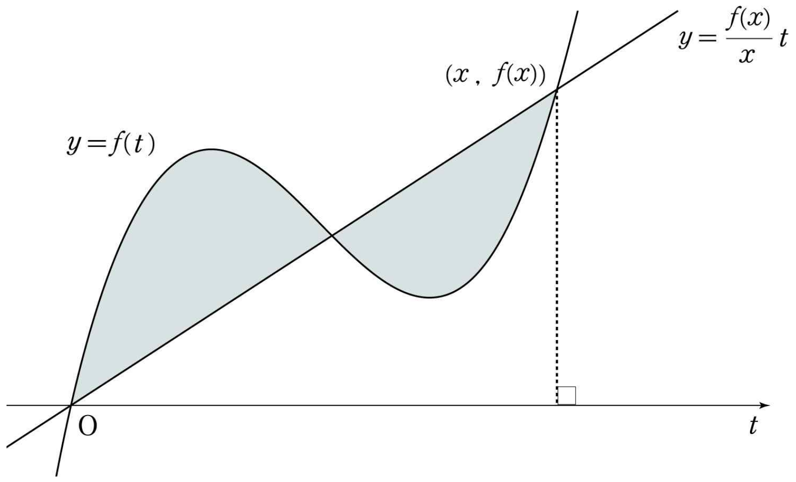



$h(x)=\dfrac{xf(x)}{2}$ 라 하자.

$|h(x)|$ 는 밑변의 길이가 $x$ 이고, 높이가 $f(x)$ 인 삼각형의 넓이와 같다.

$|h(x)|$ 는 기울기가 $\dfrac{f(x)}{x}$ 인 일차함수 $y=\dfrac{f(x)}{x}t$ 의 그래프와 $y=0$,

$t=x$ 로 둘러싸인 넓이와 같다. 그러므로 $h(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{f(x)}{x}t\,dt$ 이다.




따라서

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt-\int_0^x \frac{f(x)}{x}t\,dt=\int_0^x\left\{f(t)-\frac{f(x)}{x}t\right\}dt \text{ 이다.}$$

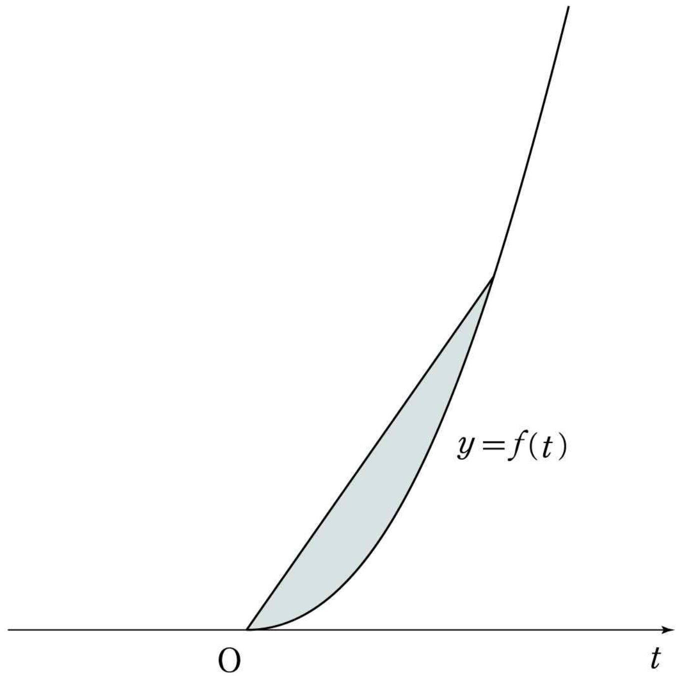
ㄱ.

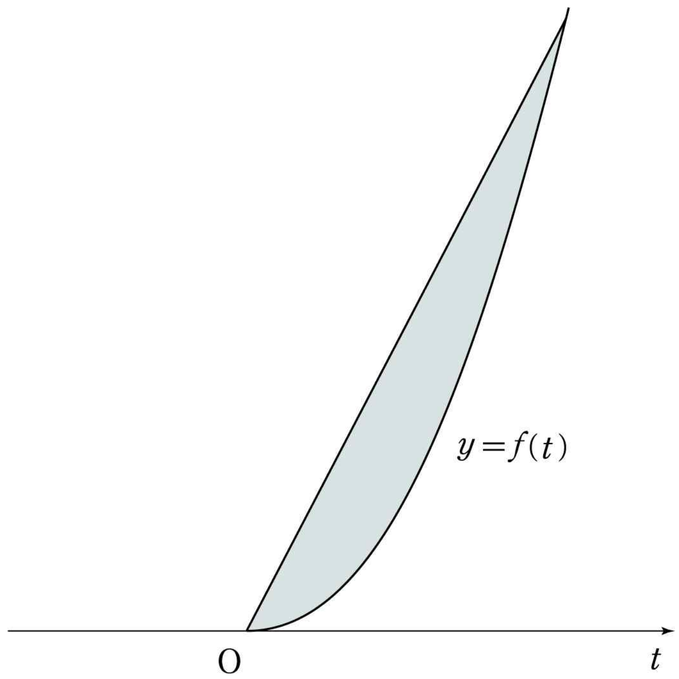
ⅰ)의 경우, $x\ge 0$ 에서 $x$ 가 증가함에 따라 두 함수의 그래프로 둘러싸인 영역의 넓이가 증가한다.

$$g(x)=\int_0^x\left\{f(t)-\frac{f(x)}{x}t\right\}dt$$

$= -$(두 함수의 그래프로 둘러싸인 영역의 넓이)

이므로 $g(x)$ 는 감소한다.



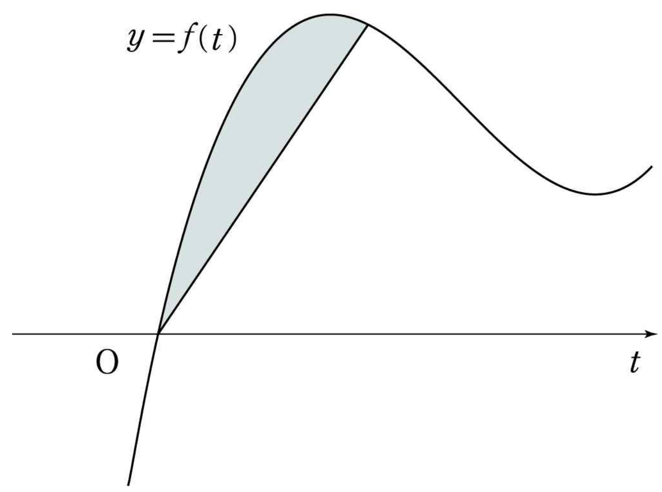



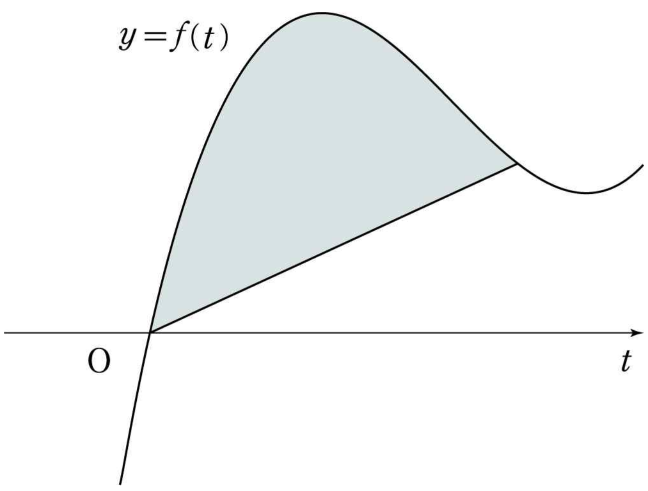

ⅱ)의 경우, $x\ge 0$ 에서 $x$ 가 증가함에 따라 두 함수의 그래프로 둘러싸인 영역의 넓이가 증가한다.

$$g(x)=\int_0^x\left\{f(t)-\frac{f(x)}{x}t\right\}dt$$

= (두 함수의 그래프로 둘러싸인 영역의 넓이)

를 만족시키는 구간에서 $g(x)$ 가 증가한다.

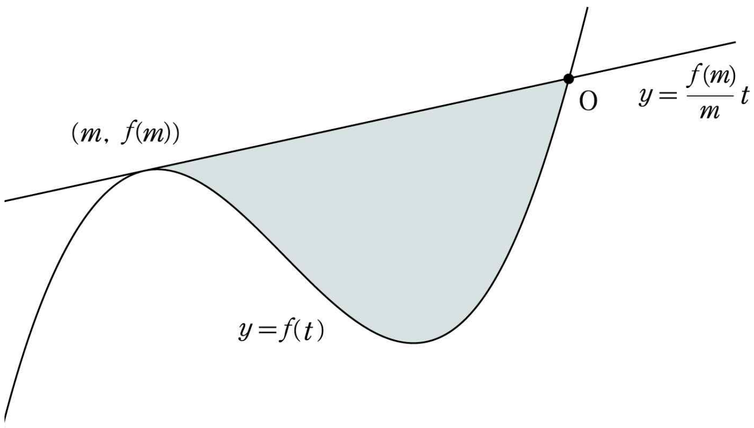


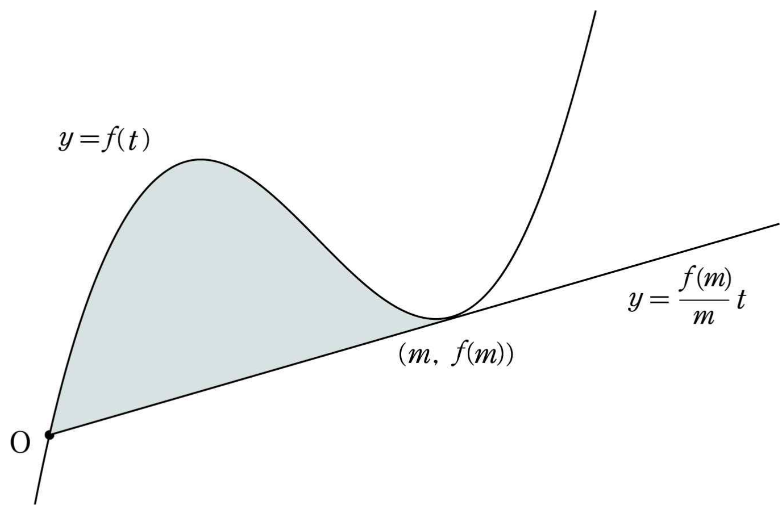



(거짓)

ㄴ.
$g(m)$ 의 값이 최대가 되도록 하는 $m$ 의 값은 함수 $f(t)$ 의 그래프와 함수 $y=\frac{f(x)}{x}t$ 의 그래프가 접할 때의 $t$ 의 값과 같다.

따라서 ⅰ), ⅱ)의 경우 모두 $f'(m)=\frac{f(m)}{m}$ 이다. (참)




ㄷ.
ⅰ)의 경우, 함수 $g(x)$ 의 증감은 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $n$ | $\cdots$ | $m$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $g(x)$ | ↗ | $0$ | ↗ | 극대 | ↘ | $0$ | ↘ |

ⅱ)의 경우, 함수 $g(x)$ 의 증감은 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $m$ | $\cdots$ | $n$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $g(x)$ | ↗ | $0$ | ↗ | 극대 | ↘ | $0$ | ↘ |

ⅰ), ⅱ)의 경우 $g(0)=0$ 이고 함수 $g(x)$ 는 $x<m$ 에서 증가하고, $x=m$ 에서 극대를 가지며, $x>m$ 에서는 감소한다. $g(m)$ 의 값은 양수이기 때문에 임의의 실수 $n\,(n\neq 0)$ 에 대하여 $x=n$ 에서 함수 $g(x)$ 의 그래프는 $x$ 축과 만난다.
따라서 방정식 $g(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2개이다. (참)

15) [정답] ③ (출제자 : 23 하종수)
**[출제의도] 수열의 주기와 조건에 맞는 수열을 파악할 수 있는가?**

[해설]
$a_n$ 은 $n=p$ 에서부터 다음과 같다.

| $n$ | $p$ | $p+1$ | $p+2$ | $p+3$ | $p+4$ | $p+5$ | $p+6$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | $11$ | $-5$ | $1$ | $15$ | $-13$ | $3$ | $11$ | $\cdots$ |

$p$ 부터 6 개의 항마다 수열이 반복되므로 0 이상의 정수 $t$ 에 대하여 $\sum_{n=p+6t+1}^{p+6t+6} a_n=12$ 이다.

$a_2$ 가 $11$, $-5$, $1$, $15$, $-13$, $3$ 중 하나이면 $a_2$ 부터 주기를 갖고 $a_1$ 이 주기에서 벗어나면 $n(A)=7$ 이 된다.
마찬가지로 $a_1$, $a_3$ 가 $11$, $-5$, $1$, $15$, $-13$, $3$ 중 하나이고, $a_2$ 의 값이 $11$, $-5$, $1$, $15$, $-13$, $3$ 가 아닐 때 $n(A)=7$ 이 된다.

조건 (가)에서 어떤 자연수 $p$ 에 대하여 $a_p=11$ 이므로 $p=1, 2, 3, \cdots$ 일 때의 수열 $\{a_n\}$ 은 다음과 같다.

ⅰ) $p=1$ 일 때,
$n(A)=6$ 이므로 조건을 만족하지 않는다.

ⅱ) $p=2$ 일 때,

| $n$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ | $7$ | $8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | $3$ / $-29$ | $11$ | $-5$ | $1$ | $15$ | $-13$ | $3$ | $11$ |

$a_1=3$ 이면 $n(A)=6$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다. 따라서, $a_1=-29$ 이다.

$\sum_{n=1}^{p} a_n=-18$ 이고 $\sum_{n=p+1}^{50} a_n=12\times 8=96$ 이므로 $\sum_{n=1}^{50} a_n=78$ 이다.

ⅲ) $p=3$ 일 때,

| $n$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ | $7$ | $8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | $7$ / $-13$ / $-1$ / $23$ | $3$ / $-29$ | $11$ | $-5$ | $1$ | $15$ | $-13$ | $3$ |

$a_1=-13$ 이면 $n(A)=6$, $a_1=23$ 이면 $n(A)=8$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$a_1 = 7$ 일 때 $\sum_{n=1}^{p} a_n = 21$, $a_1 = -1$ 일 때 $\sum_{n=1}^{p} a_n = 13$ 이다.

$\sum_{n=p+1}^{50} a_n = 12 \times 8 - 11 = 85$ 이므로 $\sum_{n=1}^{50} a_n$ 의 최댓값은 106, 최솟값은 98 이다.

iv) $p=4$ 일 때,

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | $-21$<br>$5$<br>$15$<br>$9$ | $7$<br>$-13$<br>$-1$ | 3 | 11 | $-5$ | 1 | 15 | $-13$ |

$a_1 = 15$ 이면 $n(A) = 6$, $a_2 = 7$ 또는 $a_2 = -1$ 이면 $n(A) = 8$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

v) $p=5$ 일 때,

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | $-37$<br>$1$ | 15 | $-13$ | 3 | 11 | $-5$ | 1 | 15 |

$a_1 = 1$ 이면 $n(A) = 6$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $a_1 = -37$ 일 때 $\sum_{n=1}^{p} a_n = -21$ 이고

$\sum_{n=p+1}^{50} a_n = 12 \times 7 + 11 = 95$ 이므로 $\sum_{n=1}^{50} a_n = 74$ 이다.

vi) $p=6$ 일 때,

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | $27$<br>$-9$<br>$-5$<br>$8$ | $-37$<br>$1$ | 15 | $-13$ | 3 | 11 | $-5$ | 1 |

$a_1 = -5$ 이면 $n(A) = 6$, $a_1 = 27$ 이면 $n(A) = 8$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$a_1 = 8$ 일 때 $\sum_{n=1}^{p} a_n = 25$, $a_1 = -9$ 일 때 $\sum_{n=1}^{p} a_n = 8$ 이고

$\sum_{n=p+1}^{50} a_n = 12 \times 7 - 4 = 80$ 이므로 $\sum_{n=1}^{50} a_n$ 의 최댓값은 105, 최솟값은 88 이다.

vii) $p=7$ 일 때,

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | $13$<br>$11$<br>$-23$<br>$\frac{9}{2}$ | $-9$<br>$-5$<br>$8$ | 1 | 15 | $-13$ | 3 | 11 | $-5$ |

$a_2 = -5$ 이면 $a_2 = a_{p+1}$ 이고, $a_2 = -9$, $a_2 = 8$ 이면 $n(A) = 8$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $M = 106$, $m = 74$ 이고 $M + m = 180$ 이다.

16) [정답] 4 (출제자 : 23 박정인)

[출제의도] 로그의 계산을 할 수 있는가?

[해설]

로그의 진수 조건에 의하여

$x + 12 > 0$ 이고 $x - 2 > 0$ 이므로 $x > 2$ 이다.

$\log_4 (x+12) = \log_4 (2x-4)^2$, $x + 12 = (2x-4)^2$

$4x^2 - 16x + 16 = x + 12$, $4x^2 - 17x + 4 = 0$

$(4x-1)(x-4) = 0$ 에서

$x = \frac{1}{4}$ 또는 $x = 4$

$x > 2$ 이므로 $x = 4$ 이다.

17) [정답] 9 (출제자 : 23 하종수)

[출제의도] 부정적분을 활용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

[해설]

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 8x$ 에서

$f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 + C$ (단, $C$ 는 적분상수) 이다.

$f(2) = 18$ 이므로 $16 - 16 + 16 + C = 18$ 에서 $C = 2$ 이다.

따라서 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2$ 이므로

$f(-1) = 1 + 2 + 4 + 2 = 9$ 이다.

18) [정답] 6 (출제자 : 23 한동화)

[출제의도] 조건에 맞는 $\{a_n\}$ 의 식을 구할 수 있는가?

[해설]

$S_n = n^2 + 3n + 4$ 라 하자.

$S_n - S_{n-1} = n2^{a_n + 1}$ $(n \ge 2)$ 이므로

$n2^{a_n + 1} = 2n + 2$ $(n \ge 2)$

$2^{a_n} = \frac{n+1}{n}$ $(n \ge 2)$

$a_n = \log_2 \frac{n+1}{n}$ $(n \ge 2)$ 이고,

$S_1 = 2^{a_1 + 1} = 8$ 이므로 $a_1 = 2$ 이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{31} a_n = a_1 + \log_2 \left( \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{32}{31} \right) = 6$ 이다.

19) [정답] 41 (출제자 : 23 한동화)

[출제의도] 수직선 위를 움직이는 점의 위치를 이용하여 점이 이동한 거리를 구할 수 있는가?

[해설]

점 P 의 시각 $t$ $(t \ge 0)$ 에서의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$ 라 하면

$v(t) = 4t^3 + 3at^2 + 2bt$, $a(t) = 12t^2 + 6at + 2b$ 이다.

$a(1) = 12 + 6a + 2b = -4$ 이고

$a(3) = 108 + 18a + 2b = -4$ 이므로

위 식을 연립하면 $a = -8$ , $b = 16$ 이다.

속도 $v(t) = 4t^3 - 24t^2 + 32t = 4t(t-2)(t-4)$ 이므로
시각 $t = 2$ 에서 $t = 5$ 까지 점 P 가 움직인 거리는

$$\int_2^5 |v(t)|dt = \int_2^4 \{-v(t)\}dt + \int_4^5 v(t)dt$$
$$= \{x(2) - x(4)\} + \{x(5) - x(4)\}$$
$$= 16 + 25 = 41$$

따라서 시각 $t = 1$ 에서 $t = 5$ 까지 점 P 가 움직인 거리는 41 이다.

20) [정답] 36 (출제자 : 22 이수훈)
**[출제의도] 연속의 성질을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?**

[해설]
만약 $f(t) \neq 0$ 이면 $g(t) = 0$ 이다.
만약 $f(x) = (x-t)^n Q(x)$ (단, $n$ 은 자연수, $Q(x)$ 는 $Q(t) \neq 0$ 인 다항함수)이면
$f'(x) = n(x-t)^{n-1}Q(x) + (x-t)^n Q'(x)$ 이므로

$$g(t) = \lim_{x \to t} \frac{n(x-t)^n Q(x) + (x-t)^{n+1} Q'(x)}{(x-t)^n Q(x)}$$
$$= \lim_{x \to t} \frac{nQ(x) + (x-t)Q'(x)}{Q(x)}$$
$$= \frac{nQ(t)}{Q(t)} = n \text{ 이다.}$$

$f(x)$ 는 삼차함수이므로 $n$ 의 최댓값은 3 이고, 따라서 가능한 $g(t)$ 의 값은 $0, 1, 2, 3$ 이다. 이때, 집합 $\{g(t) \mid t \text{는 실수}\}$ 의 모든 원소의 합이 3 이 되도록 하는 경우는 함수 $g(t)$ 의 치역이 $\{0, 3\}$ 인 경우, 또는 $\{0, 1, 2\}$ 인 경우이다.

함수 $g(t)$ 의 치역이 $\{0, 3\}$ 이라면 상수 $a$ 에 대하여 $f(x) = (x-a)^3$ 이고

$f(2) = 0$ 에서 $a = 2$ 이다.
따라서
$f(x) = (x-2)^3$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & (t \neq 2) \\ 1 & (t = 2) \end{cases}$$

이때, 함수 $f(-x)g(x)$ 는 $x = 2$ 에서 불연속이다.

함수 $g(t)$ 의 치역이 $\{0, 1, 2\}$ 이라면 서로 다른 상수 $a$ , $b$ 에 대하여
$f(x) = (x-a)(x-b)^2$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & (t \neq a,\ t \neq b) \\ 1 & (t = a) \\ 2 & (t = b) \end{cases}$$

이고 $f(2) = 0$ 에서 $a = 2$ 또는 $b = 2$ 이다.

함수 $g(x)$ 는 집합 $\{x \mid x \neq a,\ x \neq b\}$ 에서 연속이므로 연속함수의 성질에 의해 함수 $f(-x)g(x)$ 도 집합 $\{x \mid x \neq a,\ x \neq b\}$ 에서 연속이다.
함수 $f(-x)g(x)$ 가 $x = a$ 에서 연속이려면
$f(-a)g(a) = \lim_{x \to a} f(-x)g(x)$ 이어야 하므로
$f(-a)g(a) = f(-a) \times 1 = f(-a)$ ,
$\lim_{x \to a} f(-x)g(x) = f(-a) \times 0 = 0$ 에서 $f(-a) = 0$ 이다.
마찬가지로 함수 $f(-x)g(x)$ 가 $x = b$ 에서 연속이려면 $f(-b) = 0$ 이어야 한다.

$f(-a) = -2a(-a-b)^2 = 0$ 에서 $a = 0$ 또는 $a = -b$ 이다.
$a = 0$ 이라면 $b = 2$ 이고 $f(-2) = -2(-2-2)^2 = -32 \neq 0$ 이므로 모순이다.
$a = -b$ 이라면 $f(-b) = (-b-a)(-2b)^2 = 0$ 이므로 조건에 만족한다.
따라서 $a = 2$ , $b = -2$ 또는 $a = -2$ , $b = 2$ 이므로
$f(x) = (x-2)(x+2)^2$ 또는 $f(x) = (x+2)(x-2)^2$ 이다.
그러므로 가능한 $f(1)$ 의 값은 $-9$ 또는 3 이고 $k = -9 + 3 = -6$ 이므로 $k^2 = 36$ 이다.

21) [정답] 32 (출제자 : 22 이수훈)
**[출제의도] 로그함수의 그래프를 그릴 수 있는가?**

[해설]
$\frac{f(x)}{4} = t$ $(t > 0)$ 라 하면
$t = 2^{x-2}$
$\log_2 t = x - 2$
$x = \log_2 t + 2$ 이고
함수 $f(x)$ 의 치역이 $\{y \mid y > 0\}$ 이므로
$t > 0$ 인 모든 실수 $t$ 에 대하여 $g(t) = \log_2 t + 2$ 이다.

위와 같은 방식으로 $\frac{-4}{f(x)} = k$ $(k < 0)$ 라 하면 $k < 0$ 인 모든 실수 $k$ 에 대하여 $g(k) = -\log_2(-k) + 2$ 이다.
따라서

$$g(x) = \begin{cases} -\log_2(-x) + 2 & (x < 0) \\ \log_2 x + 2 & (x > 0) \end{cases} \text{ 이다.}$$

점 B 의 $x$ 좌표를 $b$ 라 하면 $0 < b < 2$ 이고 세 점 A , B , C 의 좌표는 차례대로 $\mathrm{A}\,(b-3,\ -\log_2(3-b)+2)$ , $\mathrm{B}\,(b,\ \log_2 b + 2)$ , $\mathrm{C}\,(b+3,\ \log_2(b+3)+2)$ 이다.

선분 AC 의 중점을 M 이라 하면 $\mathrm{M}\left(b,\ \frac{1}{2}\log_2\frac{3+b}{3-b} + 2\right)$ 이고
$\overline{\mathrm{MB}} = \frac{1}{2}\log_2\frac{3+b}{b^2(3-b)}$ 이다.
(삼각형 AMB 의 넓이) = (삼각형 CMB 의 넓이)
$= \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{1}{2}\log_2\frac{3+b}{b^2(3-b)}$
이므로
(삼각형 ABC 의 넓이)
= (삼각형 AMB 의 넓이) + (삼각형 CMB 의 넓이)
$= \frac{3}{2}\log_2\frac{3+b}{b^2(3-b)} = \frac{3}{2}$ 이다.

따라서

$\dfrac{3+b}{b^2(3-b)}=2$

$2b^3-6b^2+b+3=0$

$(b-1)(2b^2-4b-3)=0$

$b=1$ 또는 $b=\dfrac{4\pm\sqrt{22}}{2}$ 에서

$0<b<2$ 이므로 $b=1$ 이다.

점 A 의 좌표는 $(-2, -\log_2 2+2)=(-2, 1)$,

점 B 의 좌표는 $(1, \log_2 1+2)=(1, 2)$ 이므로

$p\{f(-2)\}^q=2^{-2q}p=1$, $p\{f(1)\}^q=2^q p=2$ 에서

$p=2^{\frac{2}{3}}$, $q=\dfrac{1}{3}$ 이다.

그러므로 $(6pq)^3=32$ 이다.

[별해]

$x>0$ 에서 정의된 함수 $g_1(x)$ 에 대해 $g_1(x)=g(x)$ 라 하면

모든 실수 $x$ 에 대하여 $g_1\left(\dfrac{f(x)}{4}\right)=x$ 이므로 역함수의 성질에 의해

$g_1{}^{-1}(x)=\dfrac{f(x)}{4}=2^{x-2}$ 이다. 따라서 $g_1(x)=\log_2 x+2$ 이다.

$x<0$ 에서 정의된 함수 $g_2(x)$ 에 대해 $g_2(x)=g(x)$ 라 하면

모든 실수 $x$ 에 대하여 $g_2\left(\dfrac{-4}{f(x)}\right)=x$ 이므로 역함수의 성질에 의해

$g_2{}^{-1}(x)=\dfrac{-4}{f(x)}=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2}$ 이다.

따라서 $g_2(x)=-\log_2(-x)+2$ 이다.

그러므로

$$g(x)=\begin{cases} g_2(x)=-\log_2(-x)+2 & (x<0) \\ g_1(x)=\log_2 x+2 & (x>0) \end{cases}$$ 이다.

22) [정답] 11 (출제자 : 22 신요섭)

**[출제의도] 함수의 그래프를 이용해서 부등식이 성립하도록 하는 실수의 범위를 구할 수 있는가?**

[해설]

주어진 부등식에 $x=0$ 을 대입하면

$|f(0)|\le g(0)$ 이다.

$g(0)=0$ 이므로

$|f(0)|\le 0$ 에서 $f(0)=0$ 이다.

주어진 부등식에서

$-g(x)+g'(a)x\le f(x)-f(0)\le g(x)-g'(a)x$ …… ㉠

i ) $x>0$ 일 때

㉠의 양변을 $x$ 로 나누면

$-\dfrac{g(x)}{x}+g'(a)\le\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\le\dfrac{g(x)}{x}-g'(a)$ 이므로

$-\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}+g'(a)\le\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$\le\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}-g'(a)$ …… ㉡

이다.

ii ) $x<0$ 일 때

㉠의 양변을 $x$ 로 나누면

$\dfrac{g(x)}{x}-g'(a)\le\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\le-\dfrac{g(x)}{x}+g'(a)$ 이므로

$\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}-g'(a)\le\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$\le-\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}+g'(a)$ …… ㉢

이다.

㉡, ㉢을 더하면

$\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}-g'(a)-\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}+g'(a)\le$

$\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}+\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\le$

$\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}-g'(a)-\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}+g'(a)$이다.

$f(x)$ 와 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}-g'(a)-\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}+g'(a)=0$,

$\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}-g'(a)-\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}+g'(a)=0$ 이고

함수의 극한의 대소 관계에 의해 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=0$ 이다.

㉡에서

$f'(0)=0$ 이므로 $g'(a)\le\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$ 이고,

㉢에서

$f'(0)=0$ 이므로 $\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}\le g'(a)$ 이다.

따라서, $\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}\le g'(a)\le\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$ 이고

$\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)$ 이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의해 $g'(a)=g'(0)$ 이다.

$x\le a$ 에서 방정식 $g(x)=g'(a)(x-a)+g(a)$ 의

서로 다른 세 실근을 $\alpha$, $\beta$, $a$ $(\alpha<\beta<a)$ 라 하자.

함수 $g(x)$ 가 닫힌구간 $[\alpha, \beta]$ 에서 연속이고 열린구간 $(\alpha, \beta)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의해 $\dfrac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}=g'(c_1)$ 을 만족시키는 $c_1$ 이 열린구간 $(\alpha, \beta)$ 에 적어도 하나 존재한다.

또한, 함수 $g(x)$ 가 닫힌구간 $[\beta, a]$ 에서 연속이고 열린구간 $(\beta, a)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의해 $\dfrac{g(a)-g(\beta)}{a-\beta}=g'(c_2)$ 을 만족시키는 $c_2$ 가 열린구간 $(\beta, a)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$\alpha$, $\beta$, $a$ 가 방정식 $g(x)=g'(a)(x-a)+g(a)$ 의 세 실근이므로

$\dfrac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}=\dfrac{g(a)-g(\beta)}{a-\beta}=g'(a)$ 이다.

따라서 $g'(c_1)=g'(c_2)=g'(a)$ 이다.

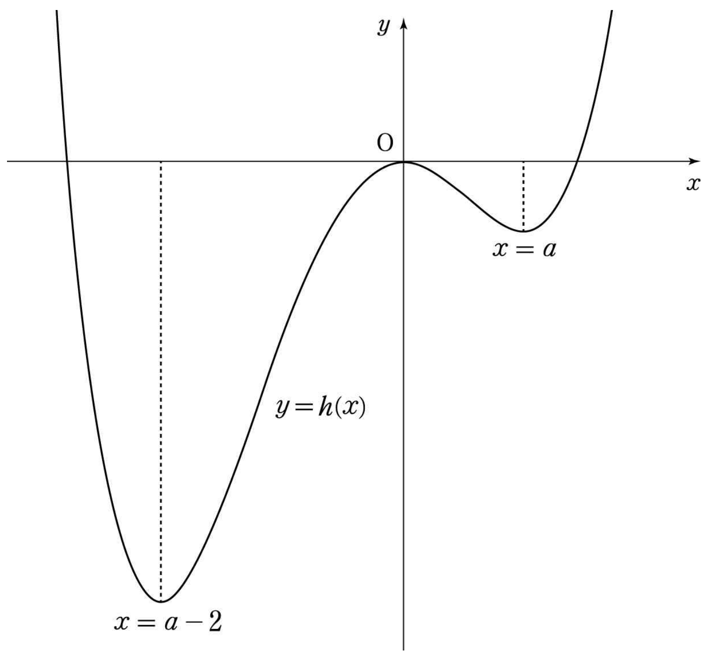
$g(x)$가 사차함수이므로 $g'(x)$는 삼차함수이다.
이에 방정식 $g'(x)=g'(a)$은 세 개 이하의 실근을 가진다.
$g'(c_1)=g'(c_2)=g'(a)$이므로 방정식 $g'(x)=g'(a)$의 실근은
$c_1$, $c_2$, $a$ $(c_1<c_2)$이다.

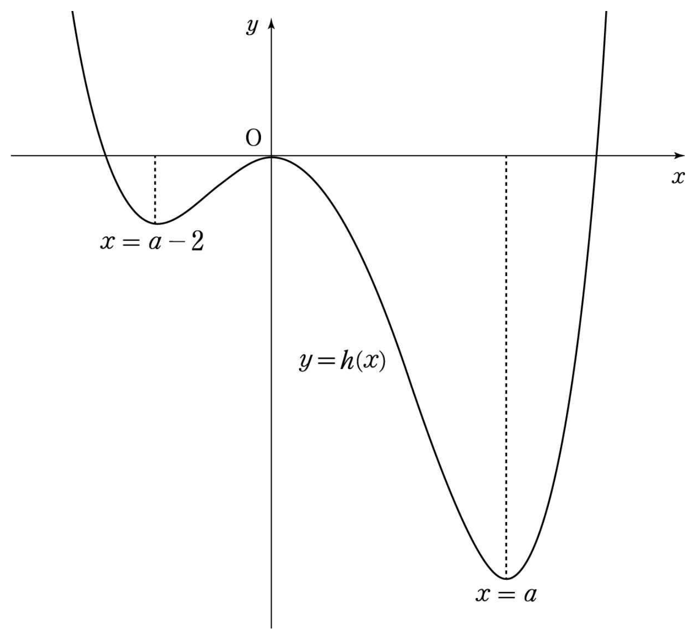
또한, (가) 조건에 의해 $g'(a)=g'(0)$이고 $g'(0)=g'(a-2)$이므로
$g'(0)=g'(a-2)=g'(a)$ $(a\neq 2)$이다.

그러므로 $c_1=a-2$, $c_2=0$ 또는 $c_1=0$, $c_2=a-2$이다.

$h(x)=g(x)-g'(a)x$라 하면 $g'(a)x=g'(0)(x-0)-g(0)$이므로
함수 $h(x)$는 함수 $g(x)$에서
점 $(0, g(0))$에서의 접선을 뺀 함수이다.
$g'(0)=g'(a-2)=g'(a)$이므로
$h'(x)=g'(x)-g'(a)=4x(x-a+2)(x-a)$이다.

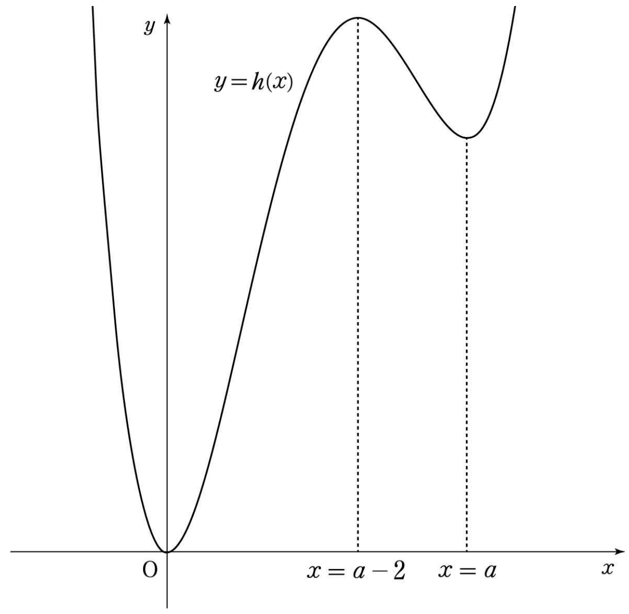
양수 $a$의 범위에 따라서 함수 $h(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.
ⅰ) $c_1=a-2$, $c_2=0$ $(0<a<2)$일 때

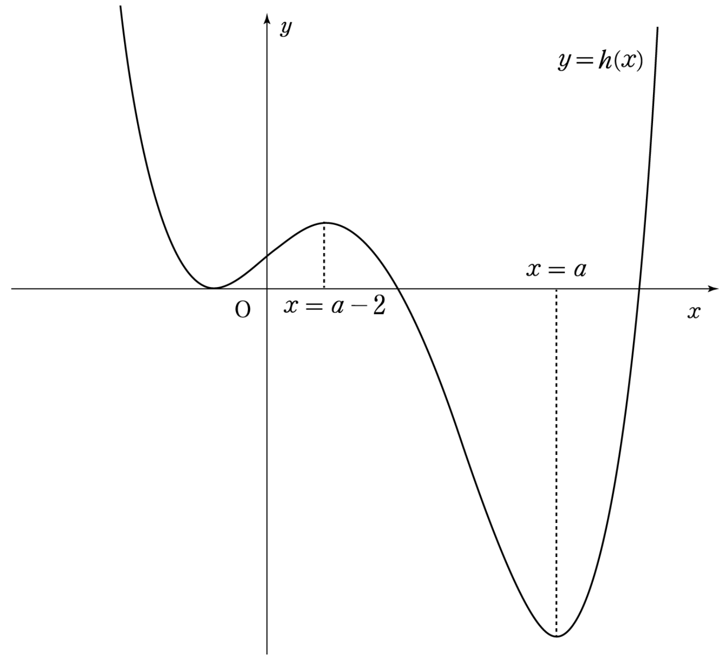



$c_1=a-2$, $c_2=0$ $(0<a<2)$일 때, $0\le|f(x)|\le h(x)$를
만족하지 못한다.

ⅱ) $c_1=0$, $c_2=a-2$ $(a>2)$일 때




$h(a)\ge 0$이면 $0\le|f(x)|\le h(x)$를 만족시킬 수 있다.

ⅰ), ⅱ)에 의하여 $c_1=0$, $c_2=a-2$이다.

$x\le a$에서 $|f(x)|\le g(x)-g'(a)x=h(x)$를 만족시켜야 한다.
$f(0)=f'(0)=0$이고 $f\left(\frac{3}{2}a\right)=0$이므로
$f(x)=x^2\left(x-\frac{3}{2}a\right)$이라 하면
$f'(x)=3x(x-a)$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{3}{2}a$이다.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

$x\le a$에서 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이면서 최대이므로 $f(x)\le 0$이다.

$x\le a$에서 $f(x)\le 0$이므로 $0\le h(x)+f(x)$를 만족시켜야 한다.
$p(x)=h(x)+f(x)$라 하자. $p(x)\ge 0$을 만족시키기 위해서는 $p(x)$의
최솟값이 0 이상이 되어야 한다.

$$p(x)=x^4+\frac{8-8a}{3}x^3+(2a^2-4a)x^2+x^2\left(x-\frac{3}{2}a\right)$$

$$= x^2\left(x^2+\frac{11-8a}{3}x+2a^2-\frac{11}{2}a\right)$$

$$\begin{aligned} p'(x) &= 4x^3+(11-8a)x^2+(4a^2-11a)x \\ &= x(x-a)(4x-4a+11) \end{aligned}$$

이므로 $p'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=a-\frac{11}{4}$ 또는 $x=a$이다.

i ) $a-\frac{11}{4}<0$ 일 때

| $x$ | $\cdots$ | $a-\frac{11}{4}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $p(x)$ | ↘ | 극소 | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

$x=0$일 때, 극댓값 $p(0)=0$을 가지므로 $x=a-\frac{11}{4}$, $x=a$일 때 극솟값은 $0$보다 작다. 그러므로 모든 실수 $x$에 대하여 $p(x)\geq 0$을 만족시키지 못한다.

ii ) $a-\frac{11}{4}>0$ 일 때

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $a-\frac{11}{4}$ | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $p(x)$ | ↘ | 극소 | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

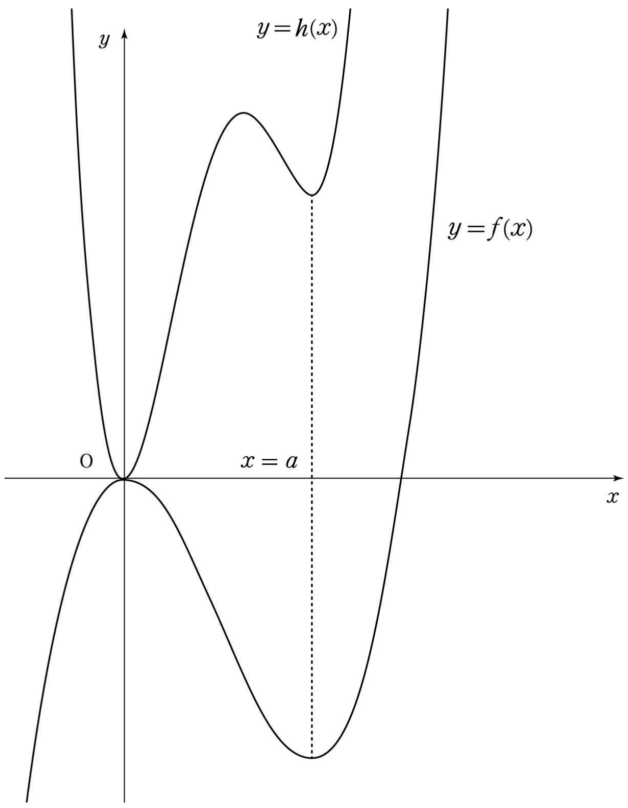
$x=0$일 때, $p(0)=0$이고

$$\begin{aligned} x=a\text{일 때, } p(a) &= a^2\left(a^2+\frac{11-8a}{3}a+2a^2-\frac{1}{2}a\right) \\ &= a^2\left(\frac{1}{3}a^2-\frac{11}{6}a\right) \\ &= a^3\left(\frac{2a-11}{6}\right) \end{aligned}$$

이므로 $a\geq\frac{11}{2}$이다.

따라서 $a$의 최솟값은 $\frac{11}{2}$이므로 $m=\frac{11}{2}$, $2m=11$이다.

<별해>
함수 $f(x)$의 그래프와 함수 $h(x)$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.




함수 $f(x)$와 함수 $h(x)$가 각각 $x=a$에서 모두 극솟값을 가지므로 $|f(x)|\leq h(x)$을 만족시키기 위해서는 $|f(a)|\leq h(a)$이 성립해야 한다.

$f(x)=x^2\left(x-\frac{3}{2}a\right)$이므로 $f(a)=-\frac{1}{2}a^3$이다.

$g'(0)=g'(a-2)=g'(a)$이므로
$h'(x)=g'(x)-g'(a)=4x(x-a+2)(x-a)$이다.

$$\begin{aligned} h(a)-h(0) &= \int_0^a h'(x)dx \\ &= \int_0^a 4x(x-a+2)(x-a)dx \\ &= \int_0^a 4x\left(x-\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-a+2\right)(x-a)dx \\ &= \int_0^a 4x\left(x-\frac{a}{2}\right)(x-a)dx+4\left(-\frac{a}{2}+2\right)\int_0^a x(x-a)dx \\ &= 0+4\left(-\frac{a}{2}+2\right)\int_0^a x(x-a)dx \\ &= (-2a+8)\times\frac{-1}{6}(a-0)^3 \\ &= a^3\left(\frac{a}{3}-\frac{4}{3}\right)\text{이고} \end{aligned}$$

$h(0)=0$이므로 $h(a)=a^3\left(\frac{a}{3}-\frac{4}{3}\right)$이다.

부등식 $|f(a)|\leq h(a)$를 만족시켜야 하므로

$$\left|-\frac{1}{2}a^3\right|\leq a^3\left(\frac{a}{3}-\frac{4}{3}\right)$$

$$\frac{1}{2}\leq\frac{a}{3}-\frac{4}{3}$$

$a\geq\frac{11}{2}$이다.

따라서 $a$의 최솟값은 $\frac{11}{2}$이므로 $m=\frac{11}{2}$, $2m=11$이다.

## 정답 및 해설

23) [정답] ② (출제자 : 22 임지훈)

[출제의도] 이항분포의 표준편차를 구할 수 있는가?

[해설]

확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(18,\ \frac{2}{3}\right)$을 따르므로

$\sigma(X)=\sqrt{18\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)}=2$ 이다.

24) [정답] ③ (출제자 : 22 고명준)

[출제의도] 여사건의 확률을 이해하고 적용할 수 있는가?

[해설]

$\sqrt{n}$ 이 무리수일 확률은 1에서 $\sqrt{n}$ 이 유리수인 확률을 뺀 것이다.

$n$의 범위는 $3\le n\le 13$ 이므로 $n$이 유리수인 경우는 $n=4$, $n=9$ 일 때뿐이다.

$n=4$ 일 때, 경우의 수는 1 이 적힌 카드와 3 이 적힌 카드를 뽑는 경우 1 이다.

$n=9$ 일 때, 경우의 수는 2 가 적힌 카드와 7 이 적힌 카드를 뽑는 경우, 3 이 적힌 카드와 6 이 적힌 카드를 뽑는 경우, 4 가 적힌 카드와 5 가 적힌 카드를 뽑는 경우 3 이다.

경우의 수의 합은 4 이고 전체 경우의 수는 ${}_7\mathrm{C}_2=21$ 이므로 구하는 확률은

$1-\frac{4}{21}=\frac{17}{21}$ 이다.

25) [정답] ① (출제자 : 22 고명준)

[출제의도] 이항정리를 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 곱을 구할 수 있는가?

[해설]

두 다항식 $(x^2+a)^4$, $(x^4+1)^3$ 의 곱에서 $x$ 의 차수가 4 인 항은

$\left\{{}_4\mathrm{C}_0\times(x^2)^0\times a^4\right\}\times\left\{{}_3\mathrm{C}_1\times(x^4)^1\times 1^2\right\}$ 과

$\left\{{}_4\mathrm{C}_2\times a^2\times(x^2)^2\right\}\times\left\{{}_3\mathrm{C}_0\times(x^4)^0\times 1^3\right\}$ 뿐이다.

따라서 ${}_4\mathrm{C}_0\times a^4\times{}_3\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_2\times a^2\times 1=9$ 이므로

$3a^4+6a^2=9$, $a^4+2a^2=3$, $a^4+2a^2-3=0$

$(a^2+3)(a^2-1)=0$ 에서 $a^2=1$ 이고, 양수 $a$ 의 값은 1 이다.

26) [정답] ④ (출제자 : 22 신요섭)

[출제의도] 모평균을 추정할 수 있는가?

[해설]

학생 $n_1$ 명을 임의추출하여 얻은 사용 시간의 표본평균이 $\overline{x_1}$ 이고 모평균 $m$ 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-1.96\times\frac{15}{\sqrt{n_1}}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\frac{15}{\sqrt{n_1}}$ 이므로

$b-a=2\times1.96\times\frac{15}{\sqrt{n_1}}$ 이다.

학생 $n_2$ 명을 임의추출하여 얻은 사용 시간의 표본평균이 $\overline{x_2}$ 이고 모평균 $m$ 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x_2}-2.58\times\frac{15}{\sqrt{n_2}}\le m\le\overline{x_2}+2.58\times\frac{15}{\sqrt{n_2}}$ 이므로

$d-c=2\times2.58\times\frac{15}{\sqrt{n_2}}$ 이다.

$\frac{b-a}{d-c}=\dfrac{2\times1.96\times\frac{15}{\sqrt{n_1}}}{2\times2.58\times\frac{15}{\sqrt{n_2}}}=\frac{1.96}{2.58}\times\sqrt{\frac{n_2}{n_1}}$ 이고

$\frac{b-a}{d-c}=\frac{49}{129}$ 이므로

$\frac{1.96}{2.58}\times\sqrt{\frac{n_2}{n_1}}=\frac{49}{129}$

$\sqrt{\frac{n_2}{n_1}}=\frac{1}{2}$

$\frac{n_2}{n_1}=\frac{1}{4}$

이다.

$n_1-n_2=108$ 에서 $n_1=144$, $n_2=36$ 이므로

$$
\begin{aligned}
a-b-c+d &= -(b-a)+(d-c)\\
&= -2\times1.96\times\frac{15}{\sqrt{144}}+2\times2.58\times\frac{15}{\sqrt{36}}\\
&= -2\times1.96\times\frac{15}{12}+2\times2.58\times\frac{15}{6}\\
&= \frac{15}{6}(5.16-1.96)\\
&= \frac{5}{2}\times\frac{16}{5}\\
&= 8 \text{ 이다.}
\end{aligned}
$$

따라서 $a-b-c+d=8$ 이다.

27) [정답] ⑤ (출제자 : 23 정현우)

**[출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍을 찾고, 확률을 구할 수 있는가?**

[해설]

동전이 앞면이 나올 때, 얻는 점수와 그 확률은 다음과 같다.

2 점을 얻는 확률은 1 이 적힌 공 두 개를 뽑을 확률이므로 $\frac{1}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{1}{28}$ 이다.

3 점을 얻는 확률은 1 이 적힌 공 하나와 2 가 적힌 공 하나를 뽑을 확률이므로 $\frac{2\times2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{1}{7}$ 이다.

4 점을 얻는 확률은 1, 3 이 적힌 공을 각각 하나씩, 또는 2 가 적힌 공을 두 개 뽑을 확률이므로 $\frac{2\times2+1}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{5}{28}$ 이다.

5 점을 뽑는 확률은 1, 4 가 적힌 공을 각각 하나씩, 또는 2, 3 이 적힌 공을 각각 하나씩 뽑을 확률이므로 $\frac{2\times2+2\times2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{2}{7}$ 이다.

동전이 뒷면이 나올 때, 얻는 점수와 그 확률은 다음과 같다.

0 점을 얻을 확률은 같은 숫자가 적힌 공 두 개를 뽑을 확률이므로 $\frac{1\times4}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{1}{7}$ 이다.

1 점을 얻을 확률은 1, 2 또는 2, 3 또는 3, 4 가 각각 적힌 공 두 개를 뽑는 경우이므로 $\frac{2\times2\times3}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{3}{7}$ 이다.

2 점을 얻을 확률은 1, 3 또는 2, 4 가 각각 적힌 공 두 개를 뽑는 경우이므로 $\frac{2\times2\times2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{2}{7}$ 이다.

3 점을 얻을 확률은 1, 4 가 각각 적힌 공 두 개를 뽑는 경우이므로 $\frac{2\times2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{1}{7}$ 이다.

이때, 시행에서 동전이 앞면과 뒷면이 나오는 경우에 따라 다음과 같이 분류할 수 있다.

i) 두 시행 모두 동전이 앞면이 나올 경우

이때의 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ 이다.

가능한 경우는 2 점과 3 점을 획득할 때이므로, 확률은 $2\times\frac{1}{28}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{98}$ 이다.

따라서, 구하고자 하는 확률은 $\frac{1}{4}\times\frac{1}{98}=\frac{1}{392}$ 이다.

ii) 동전이 앞면이 나오는 시행과 뒷면이 나오는 시행이 한 번씩일 경우

이때의 확률은 $2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ 이다.

첫 번째 시행에서 앞면이 나온다고 가정할 때, 가능한 경우는 얻은 점수의 순서쌍이 (5, 0), (4, 1), (3, 2), (2, 3) 일 경우이다.

각각의 경우는 $\frac{2}{7}\times\frac{1}{7}=\frac{2}{49}$, $\frac{5}{28}\times\frac{3}{7}=\frac{15}{196}$, $\frac{1}{7}\times\frac{2}{7}=\frac{2}{49}$, $\frac{1}{28}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{196}$ 이다. 첫 번째 시행에서 뒷면이 나왔을 때의 확률도 같으므로 구하고자 하는 확률은

$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{49}+\frac{15}{196}+\frac{2}{49}+\frac{1}{196}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{32}{196}=\frac{4}{49}$ 이다.

iii) 두 시행 모두 동전이 뒷면이 나오는 경우

이때의 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ 이다.

가능한 경우는 2 가 나오는 시행이 한 번, 3 이 나오는 시행이 한 번일 때이므로 $2\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{7}=\frac{4}{49}$ 이다.

구하고자 하는 확률은 $\frac{1}{4}\times\frac{4}{49}=\frac{1}{49}$ 이다.

i), ii), iii)에 의해 시행을 두 번 반복하여 얻은 점수의 합이 5 점일 확률은 $\frac{1}{392}+\frac{4}{49}+\frac{1}{49}=\frac{1+32+8}{392}=\frac{41}{392}$ 이다.

28) [정답] ④ (출제자 : 22 고명준)

**[출제의도] 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구할 수 있는가?**

[해설]

조건 (가)에서 집합 $X$ 의 $a<b$ 인 두 원소 $a$, $b$ 에 대하여 $f(a)\times f(b)$ 의 모든 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_2=10$ 이다. 따라서 $f(a)\times f(b)$ 가 홀수인 경우의 수는 $f(a)\times f(b)$ 의 전체 경우의 수 10 에서 짝수인 경우의 수 7 을 뺀 $10-7=3$ 이다.

$f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$ 중 홀수의 개수를 $n$ 이라 하면 $f(a)\times f(b)$ 가 홀수인 경우의 수는 $n=0$ 또는 1 일 때 0 이고 $n\geq2$ 일 때 ${}_n\mathrm{C}_2$ 이다. ${}_n\mathrm{C}_2=3$ 인 $n$ 의 값은 3 이므로 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$ 중 3 개가 홀수이다.

조건 (나)를 만족시키는 경우를 다음과 같이 구분할 수 있다.

i) $f(2)$, $f(3)$ 모두 짝수일 경우

$f(2)$, $f(3)$ 모두 짝수일 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_2=6$ 이다.

나머지 함숫값은 모두 홀수이므로 값을 택하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_3=2^3=8$ 이다.

따라서, 이때의 경우의 수는 $6\times8=48$ 이다.

ii) $f(2)$, $f(3)$ 중 하나만 짝수일 경우

가능한 경우는 (2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 6), (4, 5), (5, 6) 의 여섯 가지이고, 나머지 함숫값 중 두 개가 홀수여야 한다.

홀수가 될 값을 택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$ 이고, 3 과 5 중 택하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_2=4$ 이다. 또한, 홀수가 아닌 함숫값이 될 수 있는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$ 이다.

따라서, 경우의 수는 $6\times3\times4\times3=216$ 이다.

iii) $f(2)$, $f(3)$ 이 모두 홀수일 경우

$f(2)$ 와 $f(3)$ 의 값이 각각 3 과 5 가 되는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_2=3$ 이다.

나머지 함숫값 중 하나만 홀수여야 하므로 나머지 함숫값 중 홀수가 될 함숫값을 택할 경우의 수 ${}_3\mathrm{C}_1=3$ 이고, 3 과 5 중 택하는 경우의 수 ${}_2\mathrm{C}_1=2$ 이다.

짝수인 나머지 두 개의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_2=3^2=9$ 이다.

따라서, 경우의 수는 $3\times3\times2\times9=162$ 이다.

i), ii), iii) 에서

구하는 경우의 수는 $48+216+162=426$ 이다.

29) [정답] 13 (출제자 : 22 고명준)

**[출제의도] 확률밀도함수에서 면적의 의미를 이해하고 확률을 구할 수 있는가?**

[해설]

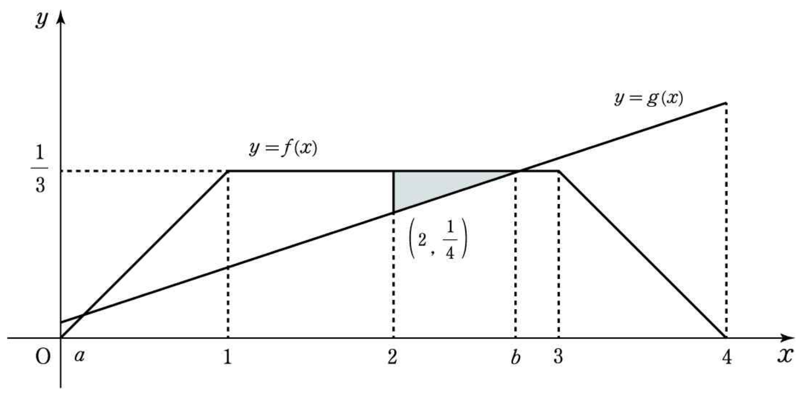
확률밀도함수의 성질에 의해 $y=g(x)$ 의 그래프와 $x$ 축 및 두 직선 $x=0$, $x=4$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 1 이다.

$y=g(x)$ 의 그래프는 직선이므로 $g(x)=mx+n$ 이라 하자. $g(0)=n$, $g(4)=4m+n$ 이므로 $\{g(0)+g(4)\}\times 4\times\frac{1}{2}=1$ 에서 $2m+n=\frac{1}{4}$ 이다. 이때, $g(2)=\frac{1}{4}$ 이므로 $g(x)$ 의 그래프는 $\left(2,\frac{1}{4}\right)$ 을 지난다.

$g(2)<f(2)$ 이고 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선이므로 $\mathrm{P}(2\le X\le b)-\mathrm{P}(2\le Y\le b)$ 는 두 그래프 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이이다.

이때, $b$ 의 값의 범위를 다음과 같이 나눌 수 있다.

i) $2<b\le 3$ 일 때

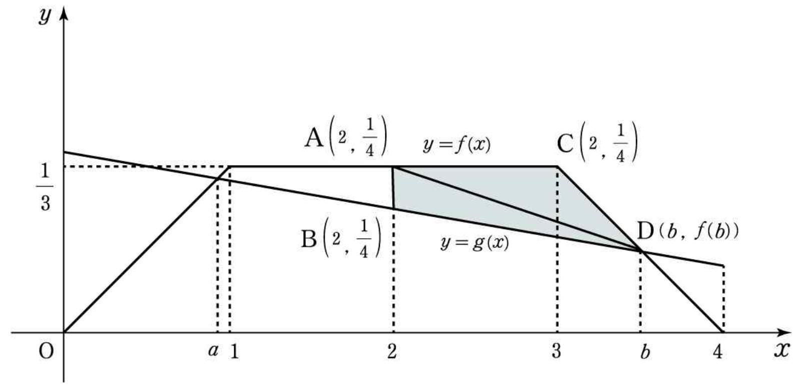



$\mathrm{P}(2\le X\le b)-\mathrm{P}(2\le Y\le b)$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\times(b-2)$

$=\frac{b-2}{24}<\frac{7}{48}$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

ii) $b>3$ 일 때




그림과 같이 $\mathrm{A}\left(2,\frac{1}{3}\right)$, $\mathrm{B}\left(2,\frac{1}{4}\right)$, $\mathrm{C}\left(3,\frac{1}{3}\right)$, $\mathrm{D}(b, f(b))$ 라 하자.

$3<x<4$ 일 때 $f(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$ 이므로 $f(b)=-\frac{1}{3}b+\frac{4}{3}$ 이다.

이때, $\mathrm{P}(2\le X\le b)-\mathrm{P}(2\le Y\le b)$ 의 값은 삼각형 ABD 와 삼각형 ACD 의 넓이의 합이다.

삼각형 ABD 의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times(b-2)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{12}\times(b-2)$

$=\frac{b-2}{24}$ 이다.

삼각형 ACD 의 넓이

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\left(\frac{1}{3}-f(b)\right)$

$=\frac{1}{2}\times 1\times\left(\frac{1}{3}b-1\right)$

$=\frac{1}{6}b-\frac{1}{2}$ 이다.

따라서,

$\mathrm{P}(2\le X\le b)-\mathrm{P}(2\le Y\le b)$

$=\frac{b-2}{24}+\frac{1}{6}b-\frac{1}{2}$

$=\frac{5}{24}b-\frac{7}{12}$

$=\frac{7}{48}$ 에서 $b=\frac{7}{2}$ 이다.

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 점 $\left(2,\frac{1}{4}\right)$ 을 지나므로 $g(x)=m(x-2)+\frac{1}{4}$ 이라 하자.

$f\left(\frac{7}{2}\right)=g\left(\frac{7}{2}\right)$

$-\frac{1}{3}b+\frac{4}{3}=m(b-2)+\frac{1}{4}$

에서 $m=-\frac{1}{18}$ 이다.

$g(1)=\frac{11}{36}<\frac{1}{3}$ 이므로 $0<a<1$ 이다. $0<x<1$ 일 때 $f(x)=\frac{1}{3}x$ 이므로 $\frac{1}{3}a=-\frac{1}{18}(a-2)+\frac{1}{4}$ 에서 $\frac{7}{18}a=\frac{13}{36}$,

$4ab=4\times\frac{13}{14}\times\frac{7}{2}=13$ 이다.

30) [정답] 185 (출제자 : 23 정현우)

**[출제의도] 주어진 조건에 맞추어 확률을 구할 수 있는가?**

[해설]

주머니 A에서 임의의 공 세 개를 뽑는 확률은 다음과 같다.

- 흰 공 3개를 뽑는 경우: $\frac{{}_4C_3}{{}_6C_3}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$
- 흰 공 2개, 검은 공 1개를 뽑는 경우: $\frac{{}_4C_2\times{}_2C_1}{{}_6C_3}=\frac{6\times 2}{20}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$
- 검은 공 2개를 뽑는 경우: $\frac{{}_4C_1\times{}_2C_2}{{}_6C_3}=\frac{4\times 1}{20}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

따라서, 시행 이후 주머니 B에 흰 공을 넣을 확률이 $\frac{4}{5}$, 검은 공을 넣을 확률이 $\frac{1}{5}$ 이다.

i) 주머니 B에 흰 공을 넣은 경우.

주머니 B에는 흰 공 6개, 검은 공 3개가 들어 있다.

$a_k<b_k$가 되기 위해서는 뽑은 공이

－ $k=1$인 경우: 검은 공

$$\frac{3}{9}$$

－ $k=3$인 경우: 흰 공 → 검은 공 → 검은 공

$$\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{1}{14}$$

－ $k=5$인 경우: 흰 공 → 검은 공 → 흰 공 → 검은 공

또는: 흰 공 → 흰 공 → 검은 공 → 검은 공 → 검은 공

$$2\times\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{42}$$

$k$가 짝수이고 $a_k<b_k$인 경우는 중복되므로 계산해주지 않아도 된다.

따라서, 주머니 B에 흰 공을 넣고 조건을 만족시킬 확률은

$\frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{14}+\frac{1}{42}\right)=\frac{12}{35}$이다.

ii) 주머니 B에 검은 공을 넣은 경우.

주머니 B에는 흰 공 5개, 검은 공 4개가 들어 있다.

$a_k<b_k$가 되기 위해서는 뽑은 공이

－ $k=1$인 경우: 검은 공

$$\frac{4}{9}$$

－ $k=3$인 경우: 흰 공 → 검은 공 → 검은 공

$$\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{5}{42}$$

－ $k=5$인 경우: 흰 공 → 검은 공 → 흰 공 → 검은 공

또는: 흰 공 → 흰 공 → 검은 공 → 검은 공 → 검은 공

$$2\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{63}$$

따라서, 주머니 B에 흰 공을 넣고 조건을 만족시킬 확률은

$\frac{1}{5}\left(\frac{4}{9}+\frac{5}{42}+\frac{4}{63}\right)=\frac{79}{630}$이다.

이와 같이, 조건을 만족시킬 확률은 $\frac{12}{35}+\frac{79}{630}=\frac{295}{630}=\frac{59}{126}$이다.

$p=126$, $q=59$ 이므로 $p+q=185$ 이다.

[별해]

구하고자 하는 확률은 1에서 5까지의 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n\geq b_n$일 확률을 구하여 1에서 빼면 된다.

주머니 $B$에서 임의로 공을 한 개 뽑는 시행을 함에 따른 흰 공의 개수와 검은 공의 개수를 순서쌍 $(a_n,b_n)$으로 표현하면 1에서 5까지의 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n\geq b_n$인 경우는 다음과 같다.

<table>
<tr><td>$n$</td><td colspan="5">$(a_n,b_n)$</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="5">$(1,0)$</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="3">$(2,0)$</td><td colspan="2">$(1,1)$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$(3,0)$</td><td colspan="2">$(2,1)$</td><td colspan="2">$(2,1)$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>－</td><td>$(3,1)$</td><td>$(2,2)$</td><td>$(3,1)$</td><td>$(2,2)$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>－</td><td>－</td><td>$(3,2)$</td><td>－</td><td>$(3,2)$</td></tr>
<tr><td></td><td>㉠</td><td>㉡</td><td>㉢</td><td>㉣</td><td>㉤</td></tr>
</table>

i) 주머니 B에 흰 공을 넣은 경우.

주머니 B에는 흰 공 6개, 검은 공 3개가 들어 있다.

㉠$=\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}$

㉡$=\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}$

㉢$=\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}$

㉣$=\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}=$㉡

㉤$=\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}=$㉢

㉠+㉡+㉢+㉣+㉤=㉠+2(㉡+㉢)

$=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot6\cdot5+2\cdot6\cdot5\cdot3\cdot4\cdot(5+2)}{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}$

$=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot6\cdot12}{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}=\frac{4}{7}$

ii) 주머니 B에 검은 공을 넣은 경우.

주머니 B에는 흰 공 5개, 검은 공 4개가 들어 있다.

㉠$=\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}$

㉡$=\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}$

㉢$=\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}$

㉣$=\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=$㉡

㉤$=\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}=$㉢

㉠+㉡+㉢+㉣+㉤=㉠+2(㉡+㉢)

$=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot6\cdot5+2\cdot5\cdot4\cdot4\cdot3\cdot(5+3)}{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}$

$=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot(15+32)}{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}$

$=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot47}{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}=\frac{47}{126}$

따라서 구하고자 하는 확률은 $1-\left(\frac{4}{5}\times\frac{4}{7}+\frac{1}{5}\times\frac{47}{126}\right)=\frac{59}{126}$이다

그러므로 $p+q=185$이다.

# 수학 영역(미적분) 해설지



## 정답 및 해설

23) [정답] ② (출제자 : 23 한승수)

**[출제의도] 지수함수와 삼각함수의 극한을 계산할 수 있는가?**

[해설]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x(e^{2x}-1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(e^{2x}-1)(\cos x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x(e^{2x}-1)(\cos x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin^2 x}{x^2}}{2\times\frac{e^{2x}-1}{2x}(\cos x+1)}$$
$$=\frac{-\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{2\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\lim_{x\to 0}(\cos x+1)}$$
$$=\frac{-1^2}{2\times 1\times 2}$$
$=-\frac{1}{4}$이다.

24) [정답] ⑤ (출제자 : 23 박정인)

**[출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 사용할 수 있는가?**

[해설]

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\times\tan\beta}=\tan 45^\circ=1$ 이므로

$\tan\alpha+\tan\beta=1-\tan\alpha\times\tan\beta$이다.

$$\begin{aligned}(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)&=1+(\tan\alpha+\tan\beta)+(\tan\alpha\times\tan\beta)\\&=1+(1-\tan\alpha\times\tan\beta)+\tan\alpha\times\tan\beta\\&=2\end{aligned}$$

따라서 $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=2$이다.

25) [정답] ④ (출제자 : 23 박정인)

**[출제의도] 등비급수의 값을 구할 수 있는가?**

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r$라 하자.

$a_4=-1$, $0<a_5<1$ 이므로 $-1<\dfrac{a_5}{a_4}<0$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비는 $-1<r<0$이다.

$a_p\times|a_p|=-16$을 만족시키는 $a_p$을 $t$라 하자.

i ) $t>0$ 일 때

$t\times|t|=t^2=-16$ 이므로 조건을 만족하는 $t$가 존재하지 않는다.

ii ) $t<0$ 일 때

$t\times|t|=-t^2=-16$ 이므로 $t=-4$이다.

i ), ii )에 의해 상수 $p$에 대하여 $a_p=-4$이다.

$a_4=-1$ 이고, $-1<r<0$이므로

$p\geq 5$ 일 때, $|a_p|<1$ 이다.

$p<4$ 일 때, $a_1=-\dfrac{1}{r^3}>0$, $a_2=-\dfrac{1}{r^2}<0$, $a_3=-\dfrac{1}{r}>0$ 이다.

따라서 $a_p=-4$를 만족시키는 상수 $p$는 2이다.

$a_2=-4$ , $a_4=-1$ 에서

$\dfrac{a_4}{a_2}=r^2=\dfrac{1}{4}$, $r=-\dfrac{1}{2}$ 이므로

$a_n=8\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$, $a_{2n}=(-4)\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ 이다.

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=p}^{n}a_{2k}=\frac{-1}{1-\frac{1}{4}}=-\frac{4}{3}$ 이고,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=8\times 0=0$ 이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\sum_{k=p}^{n}a_{2k}\right)=0-\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3}$ 이다.

26) [정답] ① (출제자 : 23 하종수)

**[출제의도] 정적분과 급수의 관계를 이해하고 응용할 수 있는가?**

[해설]

$\displaystyle\int_0^3 f^{-1}(x)dx$ 에서 $x=f(t)$ 라 하면 $dx=f'(t)dt$ 이고, $f(0)=0$, $f(3)=3$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^3 f^{-1}(x)dx&=\int_0^3 tf'(t)dt\\&=[tf(t)]_0^3-\int_0^3 f(t)dt\\&=9-\int_0^3 f(x)dx\end{aligned}$$
이다.

$$\begin{aligned}\int_0^3\{f(x)-f^{-1}(x)\}dx&=\int_0^3 f(x)dx-\left(9-\int_0^3 f(x)dx\right)\\&=2\int_0^3 f(x)dx-9\end{aligned}$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{3k}{n}\right) - 9$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{n}\times\frac{4n^2+3n-1}{2n}\right) - 9$$
$$= 12 - 9$$
$$= 3$$

따라서 $\int_0^3 \{f(x) - f^{-1}(x)\}\,dx = 3$ 이다.

27) [정답] ③ (출제자 : 22 이수훈)

**[출제의도] 무한히 반복되는 도형에서 넓이의 극한값을 구할 수 있는가?**

[해설]

부채꼴 $O_1A_1B_1$ 에서 두 점 $C_1$, $D_1$ 이 호 $A_1B_1$ 를 삼등분하므로
$\angle B_1O_1D_1 = \angle D_1O_1C_1 = \angle C_1O_1A_1$ 이고
$\angle B_1O_1D_1 + \angle D_1O_1C_1 + \angle C_1O_1A_1 = \angle B_1O_1A_1 = \frac{\pi}{2}$ 이므로
$\angle B_1O_1D_1 = \angle D_1O_1C_1 = \angle C_1O_1A_1 = \frac{\pi}{6}$ 이다.

세 선분 $A_2O_2$, $A_2C_1$, $O_2D_1$ 과 호 $C_1D_1$ 로 둘러싸인 부분으로 이루어진 도형의 넓이를 $S$라 하면
$S_1 =$ (부채꼴 $O_1A_1B_1$ 의 넓이)$- S = \frac{\pi}{4} - S$ 이다.

(부채꼴 $O_1C_1D_1$ 의 넓이)$= \frac{1}{2}\times 1^2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$

(삼각형 $O_1C_1D_1$ 의 넓이)$= \frac{1}{2}\times 1^2 \times \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}$ 이므로

(선분 $C_1D_1$ 과 호 $C_1D_1$ 으로 둘러싸인 부분으로 이루어진 도형의 넓이)
$= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}$ 이다.

$\overline{A_2C_1} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\overline{O_2D_1} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\overline{O_2A_2} = \overline{O_1A_2} - \overline{O_1O_2} = \cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$ 이므로

(사다리꼴 $A_2C_1D_1O_2$ 의 넓이)$= \frac{1}{2}\times\overline{O_2A_2}\times\left(\overline{A_2C_1}+\overline{O_2D_1}\right)$
$$= \frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)$$
$= \frac{1}{4}$ 이다.

따라서 $S = \left(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{12}$ 이고 $S_1 = \frac{\pi}{4} - S = \frac{\pi}{6}$ 이다.

$\overline{O_2A_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$ 이므로 부채꼴 $O_1A_1B_1$ 과 부채꼴 $O_2A_2B_2$ 의 길이의 비는 $1 : \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)$ 이고 넓이의 비는 $1 : \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 이다.

따라서 그림 $R_2$ 에서 새롭게 색칠되는 부분의 넓이는 그림 $R_1$ 에서 색칠되는 부분의 넓이의 $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{\pi}{6}$ 이고 공비가 $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 인 등비수열의 합이다.

그러므로 구하고자 하는 값은 $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{\frac{\pi}{6}}{1 - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi$ 이다.

28) [정답] ② (출제자 : 23 하종수)

**[출제의도] 조건을 만족시키는 함수를 파악하여 정적분의 최댓값을 구할 수 있는가?**

[해설]

함수 $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 함숫값에 따라 다음과 같으므로

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (f(x) \geq 0) \\ 2f(x) & (f(x) < 0) \end{cases}$$

따라서 (가)에서 $[\pi, 2\pi]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이다.

진수 조건에 의해 $2\cos x + a > 0$ 이므로 $a > 2$ 이다.

$f(x) = \dfrac{(\sin 2x - a\sin x)\times\ln(2\cos x + a)}{4\sin^2 x + 5}$ 에서
$= \dfrac{\sin x\times(2\cos x - a)\times\ln(2\cos x + a)}{4\sin^2 x + 5}$ 이고

$(\pi, 2\pi)$ 에서 $4\sin^2 x + 5 > 0$, $\sin x < 0$, $2\cos x - a < 0$ 이므로
$\ln(2\cos x + a) > 0$ 이고 $2\cos x + a > 1$ 이다.

$(0, \pi)$ 에서 $4\sin^2 x + 5 > 0$, $\sin x > 0$, $2\cos x - a < 0$, 이고
$2\cos x + a > 1$ 에서 $\ln(2\cos x + a) > 0$ 이므로
$f(x) < 0$ 이다.

함수 $g'(x)$ 는 $f(x)$ 의 값에 따라 살펴보면 다음과 같다.

$$g'(x) = \begin{cases} 0 & (f(x) > 0) \\ 2f'(x) & (f(x) < 0) \end{cases}$$

(나)에서 $\lim_{x\to\pi+} g'(x) = \lim_{x\to\pi-} g'(x)$ 이다.

$\lim_{x\to\pi+} g'(x) = 0$,

$h(x) = \dfrac{(2\cos x - a)\times\ln(2\cos x + a)}{4\sin^2 x + 5}$ 라 하면
$f(x) = \sin x \times h(x)$ 이고
$f'(x) = \sin x \times h'(x) + \cos x \times h(x)$ 이므로
$\lim_{x\to\pi-} g'(x) = 2f'(\pi) = -2h(\pi) = \dfrac{(4+2a)\ln(-2+a)}{5}$ 이다.

따라서 $\dfrac{(4+2a)\ln(-2+a)}{5} = 0$ 이고 $a = 3$ 이다.

$$f(x) = \frac{\sin x\times(2\cos x - 3)\times\ln(2\cos x + 3)}{4\sin^2 x + 5}$$
$$= \frac{\sin x\times(2\cos x - 3)\times(2\cos x + 3)\times\ln(2\cos x + 3)}{(4\sin^2 x + 5)\times(2\cos x + 3)}$$
$$= \frac{\sin x\times(-4\sin^2 x - 5)\times\ln(2\cos x + 3)}{(4\sin^2 x + 5)\times(2\cos x + 3)}$$
$$= \frac{(-\sin x)\times\ln(2\cos x + 3)}{2\cos x + 3}$$

함수 $f(x)$는 $2\pi$를 주기로 갖는 주기함수이다.

$\int_0^{\pi} \frac{(-\sin x)\times \ln(2\cos x+3)}{2\cos x+3}dx$ 에서 $t=\ln(2\cos x+3)$ 라 놓으면

$dt=\frac{-2\sin x}{2\cos x+3}dx$ 이고

$x=0$ 일 때 $t=\ln 5$, $x=\pi$ 일 때 $t=0$ 이므로

$$\int_0^{\pi} \frac{(-\sin x)\times \ln(2\cos x+3)}{2\cos x+3}dx = \int_{\ln 5}^{0} \frac{t}{2}dt$$

$$=\left[\frac{t^2}{4}\right]_{\ln 5}^{0}$$

$$=-\frac{(\ln 5)^2}{4}$$ 이다.

$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{(-\sin x)\times \ln(2\cos x+3)}{2\cos x+3}dx$ 에서 $t=\ln(2\cos x+3)$ 라 놓으면

$dt=\frac{-2\sin x}{2\cos x+3}dx$ 이고

$x=\pi$ 일 때 $t=0$, $x=2\pi$ 일 때 $t=\ln 5$ 이므로

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{(-\sin x)\times \ln(2\cos x+3)}{2\cos x+3}dx = \int_{0}^{\ln 5} \frac{t}{2}dt$$

$$=\left[\frac{t^2}{4}\right]_{0}^{\ln 5}$$

$$=\frac{(\ln 5)^2}{4}$$ 이다.

따라서 $\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi} f(x)dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx = 0$ 이다.

$\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$ 이므로 $\int_p^q f(x)dx$ 가 최댓값을 가지려면

$p=(2n+1)\pi$, $q-p=(2k-1)\pi$ (단, $n$은 정수, $k$는 자연수) 이고

적분값은 한 주기 내에서 함숫값이 양수인 부분의 적분값과 같으므로

$\int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx$ 와 같다.

그러므로 $4\int_p^q f(x)dx$ 의 최댓값은 $(\ln 5)^2$ 이다.

29) [정답] 11 (출제자 : 22 고명준)

**[출제의도] 삼각함수의 극한을 이해하고 문제에 활용할 수 있는가?**

[해설]

삼각형 RAB에서 $\angle ARB=\pi-\angle RAB-\angle RBA=\pi-4\theta$ 이므로

$\angle QRP=\pi-4\theta$, $\angle RPQ+\angle RQP=4\theta$ 이고 삼각형 PQR는

$\overline{PR}=\overline{QR}$ 인 이등변삼각형이므로 $\angle RPQ=\angle RQP=2\theta$ 이다.

$f(\theta)$ 의 값은 부채꼴 QOA의 넓이와 삼각형 QOB의 넓이의 합에서

삼각형 RAB의 넓이를 뺀 것과 같다.

부채꼴 QOA의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 1^2\times 6\theta=3\theta$ 이고,

삼각형 QOB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 1\times 1\times \sin(\pi-6\theta)=\frac{\sin 6\theta}{2}$ 이다.

또한, 삼각형 RAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{RA}\times\overline{AB}\times\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2\times\sin 3\theta}{\sin(\pi-4\theta)}\times 2\times\sin\theta$

$=\frac{2\sin\theta\sin 3\theta}{\sin 4\theta}$ 이다.

그러므로

$f(\theta)=3\theta+\frac{\sin 6\theta}{2}-\frac{2\sin\theta\sin 3\theta}{\sin 4\theta}$ 이다.

선분 OS와 선분 AP가 만나는 점을 U라 하면, $g(\theta)$는

삼각형 SUP의 넓이와 삼각형 UOT의 넓이의 합에서

부채꼴 SOT의 넓이를 뺀 것과 같다.

원주각의 성질에 의해 $\angle SOB=2\angle SQB$, $\angle TOB=2\angle TAB$ 이므로

$\angle UOT=\angle SOT=\angle SOB-\angle SOT=2(\angle SQB-\angle TAB)=2\theta$

이다.

또한, $\angle OUT=\pi-\angle UOT-\angle UTO=\pi-3\theta$ 이므로

삼각형 UOT에서 사인법칙에 의해 $\frac{\overline{UO}}{\sin(\angle UTO)}=\frac{\overline{OT}}{\sin(\angle OUT)}$,

$\overline{UO}=\frac{1\times\sin\theta}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}$ 이다.

따라서 삼각형 UOT의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{UO}\times\overline{OT}\times\sin(\angle UOT)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}\times 1\times\sin 2\theta$

$=\frac{\sin\theta\sin 2\theta}{2\sin 3\theta}$ 이다.

삼각형 SUP에서 사인법칙에 의해 $\frac{\overline{UP}}{\sin(\angle USP)}=\frac{\overline{SU}}{\sin(\angle SPU)}$

이고, $\overline{SU}=\overline{SO}-\overline{UO}=1-\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}$ 이므로

$\overline{UP}=\frac{\sin(\angle USP)}{\sin(\angle SPU)}\times\overline{SU}=\frac{\sin 5\theta}{\sin 2\theta}\times\left(1-\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}\right)$ 이다.

따라서 삼각형 SUP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{SU}\times\overline{UP}\times\sin(\angle SUP)$

$=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}\right)\times\frac{\sin 5\theta}{\sin 2\theta}\times\left(1-\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}\right)\times\sin 3\theta$

$=\left(1-\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}\right)^2\times\frac{\sin 3\theta\sin 5\theta}{2\sin 2\theta}$

이다.

부채꼴 SOT의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 1^2\times 2\theta=\theta$ 이므로

$g(\theta)=\frac{\sin\theta\sin 2\theta}{2\sin 3\theta}+\left(1-\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}\right)^2\times\frac{\sin 3\theta\sin 5\theta}{2\sin 2\theta}-\theta$ 이다.

따라서

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{3\theta+\frac{\sin 6\theta}{2}-\frac{2\sin\theta\sin 3\theta}{\sin 4\theta}}{\frac{\sin\theta\sin 2\theta}{2\sin 3\theta}+\left(1-\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}\right)^2\times\frac{\sin 3\theta\sin 5\theta}{2\sin 2\theta}-\theta}$$

$$= \frac{\lim_{\theta \to 0+}\left(3 + \frac{\sin 6\theta}{2\theta} - \frac{2\sin\theta\sin 3\theta}{\sin 4\theta \times \theta}\right)}{\lim_{\theta \to 0+}\left\{\frac{\sin\theta\sin 2\theta}{2\theta\sin 3\theta} + \left(1 - \frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}\right)^2 \times \frac{\sin 3\theta \sin 5\theta}{2\theta \sin 2\theta} - 1\right\}}$$

$$= \frac{3 + \frac{6}{2} - \frac{2\times 3}{4}}{\frac{1\times 2}{2\times 3} + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{3\times 5}{2\times 2} - 1}$$

$$= \frac{3 + 3 - \frac{3}{2}}{\frac{1}{3} + \frac{5}{3} - 1}$$

$$= \frac{9}{2}$$

이므로 $p = 2$, $q = 9$ 에서 $p + q = 11$ 이다.

30) [정답] 60 (출제자 : 23 채상진)

**[출제의도] 구간별로 정의된 함수를 부분적분할 수 있는가?**

[해설]

$f(-x) = -2xf(x)$ 이다.

$f(x)$ 는 연속이고 $\lim_{x \to 0^+} f(-x) = \lim_{x \to 0^+} 2xf(x) = 0$ 이므로

$f(0) = 0$ 이다.

따라서 $f(0) = a\cos(-a\pi) + b = a\cos(a\pi) + b = 0$ 이다. …… ㄱ

함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$2xf(x) + f(-x) = 0$ 의 양변을 미분하면

$2f(x) + 2xf'(x) - f'(-x) = 0$ 이다.

$f'(x)$ 의 $x = 0$ 에서의 좌극한은

$\lim_{x \to 0^+} 2f(x) + \lim_{x \to 0^+} 2xf'(x) - \lim_{x \to 0^+} f'(-x) = 0$ 에서

$\lim_{x \to 0+} f'(-x) = \lim_{x \to 0-} f'(x) = 0$ 이다.

$f(x)$ 는 미분가능하므로 $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$ 이다.

$0 \le x < \pi$ 에서 $f(x) = a\cos(x - a\pi) + b$ 이므로

$f'(x) = -a\sin(x - a\pi)$ 이다.

$f'(0) = -a\sin(-a\pi) = a\sin a\pi = 0$ 이므로 $a$ 는 양의 정수이다.

ㄱ 에서 $a = 2k$ ($k$ 는 자연수)이면 $b = -a$ 이고,

$a = 2k - 1$ 이면 $b = a$ 이다.

$f(x)$ 는 연속이므로 $\lim_{x \to \pi^-} f(x) = \lim_{x \to \pi^+} f(x)$ 이다.

$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = \lim_{x \to \pi^-} a\cos(x - a\pi) + b = a\cos((1-a)\pi) + b$ 이므로

$a = 2k$ 일 때는 $\lim_{x \to \pi^-} f(x) = -a + b = -2a$ 이고,

$a = 2k - 1$ 일 때는 $\lim_{x \to \pi^-} f(x) = a + b = 2a$ 이다.

$f(x)$ 의 $x = \pi$ 에서의 우극한은

$\lim_{x \to 0^+} f(x + \pi) = \lim_{x \to \pi^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+}\left\{-\frac{1}{2}f(x) + c\right\}$ 에서 $\lim_{x \to \pi^+} f(x) = c$ 이다.

따라서

$a = 2k$ 일 때는 $c = -2a$ 이고, $a = 2k - 1$ 일 때는 $c = 2a$ 이다.

$f(x)$ 를 구간별로 살펴보면 다음과 같다.

$x < 0$ 일 때, $2xf(x) + f(-x) = 0$ 에서 $f(-x) = -2xf(x)$ 이고,
$-x = t$ 로 치환하면 $f(t) = 2tf(-t)$ $(t < 0)$ 이다.

$x > 0$ 에서는

$0 \le x < \pi$ 에서 $f(x) = a\cos(x - a\pi) + b$ 이고,

$f(x + \pi) = -\frac{1}{2}f(x) + c$ 이므로 $x + \pi = t$ 로 치환하면

$f(t) = -\frac{1}{2}f(t - \pi) + c$ $(t \ge \pi)$ 이다.

따라서 $f(x)$ 는 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} 2xf(-x) & (x < 0) \\ a\cos(x - a\pi) + b & (0 \le x < \pi \\ -\frac{1}{2}f(x - \pi) + c & (x \ge \pi) \end{cases}$$

$a$ 의 값에 따라 $\frac{1}{a}\int_{-\pi}^{3\pi} f(x)\,dx$ 의 값이 달라진다.

i ) $a = 2k$ ($k$ 는 자연수) 일 때, ($b = -a$, $c = -2a$ )

$f(x) = a\cos(x - a\pi) - a = a\cos x - a$ $(0 \le x < \pi)$ 이다.

$\int_{-\pi}^{3\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{3\pi} f(x)dx$ 이므로

$\int_{-\pi}^{0} f(x)dx$ 와 $\int_{0}^{3\pi} f(x)dx$ 를 따로 구해보자.

$-\pi \le t < 0$ 에서

$f(t) = 2t \times \{a\cos(-t) - a\} = 2at\cos t - 2at$ 이다,

$\int_{-\pi}^{0} f(t)\,dt$

$= \int_{-\pi}^{0} (2at\cos t - 2at)\,dt = 2a\int_{-\pi}^{0} (t\cos t - t)\,dt$

$= 2a\left\{[t\sin t]_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0} \sin t\,dt - \left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-\pi}^{0}\right\}$

$= 2a\left\{-[-\cos t]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2}\pi^2\right\} = 2a\left(2 + \frac{1}{2}\pi^2\right)$

$= a(4 + \pi^2)$

$0 \le x < \pi$ 에서 $f(x) = a\cos x - a$ 이다.

$\pi \le x < 2\pi$ 에서

$f(x) = -\frac{1}{2}a\{\cos(x - \pi) - 1\} - 2a = \frac{1}{2}a\cos x - \frac{3}{2}a$ 이고

$2\pi \le x < 3\pi$ 에서

$f(x) = -\frac{1}{2}a\left\{\frac{1}{2}\cos(x - \pi) - \frac{3}{2}\right\} - 2a = \frac{1}{4}a\cos x - \frac{5}{4}a$ 이다.

$\int_{0}^{3\pi} f(x)dx$

$= a\left\{\int_{0}^{\pi}(\cos x - 1)dx + \int_{\pi}^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{3}{2}\right)dx + \int_{2\pi}^{3\pi}\left(\frac{1}{4}\cos x - \frac{5}{4}\right)dx\right\}$

$= a\left\{[\sin x - x]_{0}^{\pi} + \left[\frac{1}{2}\sin x - \frac{3}{2}x\right]_{\pi}^{2\pi} + \left[\frac{1}{4}\sin x - \frac{5}{4}x\right]_{2\pi}^{3\pi}\right\}$

$= -\frac{15}{4}a\pi$

그러므로 $\frac{1}{a}\int_{-\pi}^{3\pi} f(x)dx = \pi^2 + 4 - \frac{15}{4}\pi$ 이다.

ii) $a = 2k-1$ ($k$는 양의 정수)일 때, ($b = a$, $c = 2a$)

$f(x) = a\cos(x - a\pi) + a = -a\cos x + a\ (0 \le x < \pi)$ 이다.

$-\pi \le t < 0$ 에서
$f(t) = 2t \times \{-a\cos(-t) + a\} = -2at\cos t + 2at$ 이다,

$\int_{-\pi}^{0} f(x)dx$, $\int_{0}^{3\pi} f(x)dx$ 를 i)와 같은 방식으로 계산하면
$\int_{-\pi}^{0} f(x)dx = a(-4 - \pi^2)$
$\int_{0}^{3\pi} f(x)dx = \frac{15}{4}a\pi$ 이다.
그러므로 $\frac{1}{a}\int_{-\pi}^{3\pi} f(x)dx = \frac{15}{4}\pi - 4 - \pi^2$ 이다.

i)와 ii)에서
$\pi^2 + 4 - \frac{15}{4}\pi > \frac{15}{4}\pi - 4 - \pi^2$ 이므로 $a = 2k$일 때 $\frac{1}{a}\int_{-\pi}^{3\pi} f(x)dx$ 이 최대이다.

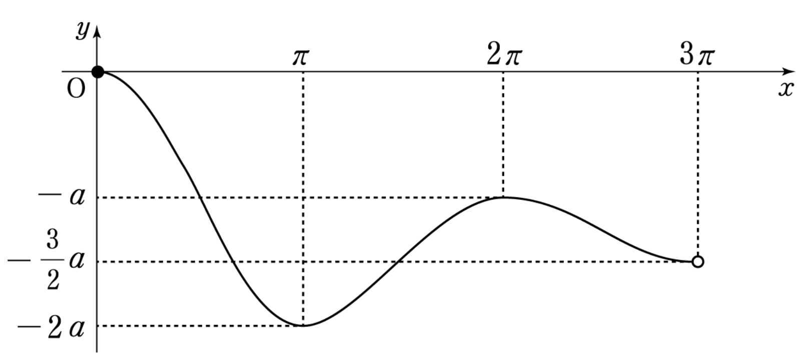
가능한 $a$의 값은 2, 4, 6, ⋯ 이고 $a_{10} = 20$ 이다.

$2\pi \le x < 3\pi$ 에서
$f(x) = \frac{1}{4}a\cos x - \frac{5}{4}a$ 이므로 $f(3\pi) = -\frac{3}{2}a$ 이다.

따라서 $\frac{4a_{10}}{c}f(3\pi) = 4 \times 20 \times \frac{1}{(-2a)} \times \left(-\frac{3}{2}a\right) = 60$ 이다.

[별해]

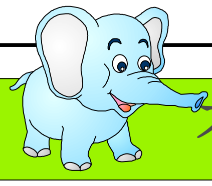
$(n-1)\pi \le x < n\pi$ ($n$은 자연수) 의 각 구간에 대하여 $f(x)$는 점 $\left(\frac{2n-1}{2}\pi, \frac{2n-1}{2^{n-1}}a\right)$에 대하여 대칭이므로 점대칭의 성질에 의하여
$\int_{0}^{\pi} f(x)dx = -a\pi$, $\int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx = -\frac{3}{2}a\pi$,
$\int_{2\pi}^{3\pi} f(x)dx = -\frac{5}{4}a\pi$
와 같이 구할 수 있다.



2024학년도 대학수학능력시험 모의평가 1회

# 수학 영역(기하) 해설지

Epsilon



## 정답 및 해설

23) [정답] ① (출제자 : 22 임지훈)

**[출제의도] 좌표공간에서의 내분을 이해하고 있는가?**

[해설]

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점은

$\left(\dfrac{2a+4}{3},\ \dfrac{2\times0+b}{3},\ \dfrac{2\times2-1}{3}\right)=(2,\ 0,\ 1)$ 이므로

$a=1$, $b=0$ 에서 $a+b=1$ 이다.

24) [정답] ② (출제자 : 23 강주연)

**[출제의도] 포물선에서 한 점에서의 접선의 방정식과 기울기가 주어진 접선의 방정식을 구할 수 있는가?**

[해설]

포물선 $y^2=2x$ 위의 점 $\left(\dfrac{9}{2},\ 3\right)$에서의 접선의 방정식은

$3y=x+\dfrac{9}{2}$

$y=\dfrac{1}{3}\left(x+\dfrac{9}{2}\right)$

포물선 $y^2=2x$ 위의 점 $\left(\dfrac{9}{2},\ 3\right)$에서의 접선은 점 $(a,\ b)$에서의 접선과 수직이므로, 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기는 $-3$이다.

포물선 $y^2=2x$ 에서 기울기가 $-3$인 접선의 방정식은

$y=-3x-\dfrac{1}{6}$

점 $(a,\ b)$는 포물선 $y^2=2x$와 직선 $y=-3x-\dfrac{1}{6}$를 동시에 지난다.

$b^2=2a$

$b=-3a-\dfrac{1}{6}$

위 식을 연립하여 정리하면

$\left(-3a-\dfrac{1}{6}\right)^2=9a^2+a+\dfrac{1}{36}=2a$

$9a^2-a+\dfrac{1}{36}=\left(3a-\dfrac{1}{6}\right)^2=0$

$a=\dfrac{1}{18}$, $b=-\dfrac{1}{3}$ 이므로

$ab=\dfrac{1}{18}\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{1}{54}$ 이다.

25) [정답] ③ (출제자 : 23 강주연)

**[출제의도] 타원에서 기울기가 주어진 접선의 방정식을 구할 수 있는가?**

[해설]

$y$축이 현 $\overline{\mathrm{F'F}}$를 수직이등분하므로 원 $O$의 중심은 $y$축 위에 있다.

직선 $3x-4y+6=0$이 원 $O$의 중심을 지나므로

원 $O$의 중심은 $y$축과 직선 $3x-4y+6=0$의 교점인 $\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$이다.

원 $O$의 반지름은 원의 중심 $\mathrm{C}\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$와 점 $\mathrm{F}(2,\ 0)$사이의 거리인

$\sqrt{(0-2)^2+\left(\dfrac{3}{2}-0\right)^2}=\sqrt{4+\dfrac{9}{4}}=\dfrac{5}{2}$ 이다.

$\overline{\mathrm{AF'}}$이 원 $O$의 지름이므로 삼각형 $\mathrm{AF'F}$은 $\angle\mathrm{AFF'}=90^\circ$ 인 직각삼각형이다. 따라서 점 F와 점 A 의 $x$좌표는 같고, $\mathrm{A}(2,\ 3)$이다.

점 $\mathrm{F}(2,\ 0)$과 점 $\mathrm{F'}(-2,\ 0)$을 두 초점으로 하는 타원의 중심은 원점이다.

이 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$라 하자.

타원의 장축 길이 $2a$는

$\overline{\mathrm{F'A}}+\overline{\mathrm{AF}}=\sqrt{(-2-2)^2+(0-3)^2}+\sqrt{(2-2)^2+(3-0)^2}=8$이므로

$a^2=16$ 이다.

또한 두 초점 사이의 거리 $2\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{16-b^2}=4$ 이므로

$b^2=12$ 이다.

따라서 구하고자 하는 타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$ 이다.

직선 $3x-4y+6=0$와 평행한 접선의 기울기는 $\dfrac{3}{4}$ 이다.

타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$ 에서 기울기가 $\dfrac{3}{4}$ 인 접선의 방정식은

$y=\dfrac{3}{4}x\pm\sqrt{16\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+12}=\dfrac{3}{4}x\pm\sqrt{21}$ 이다.

평행한 두 직선 사이의 거리는

한 직선 위의 점과 다른 한 직선 사이의 거리와 같다.

직선 $y=\dfrac{3}{4}x-\sqrt{21}$ 위 점 $(0,\ -\sqrt{21})$과

직선 $y=\dfrac{3}{4}x+\sqrt{21}$ 사이의 거리는 점과 직선 사이 거리 공식에 의해

$\dfrac{\left|\left(\dfrac{3}{4}\times0\right)-(-\sqrt{21})+\sqrt{21}\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+(-1)^2}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{\dfrac{5}{4}}=\dfrac{8}{5}\sqrt{21}$ 이다.

26) [정답] ⑤ (출제자 : 23 강주연)

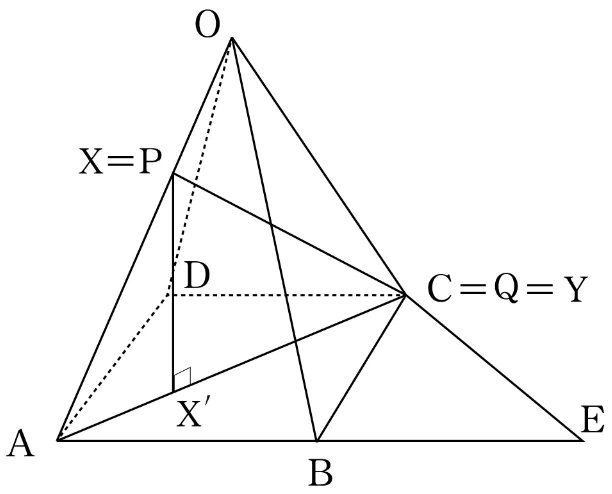
**[출제의도] 꼬인 위치에 있는 직선 사이의 거리를 구하고 공간도형에서 선분의 정사영을 바르게 찾을 수 있는가?**

[해설]

선분 PQ가 두 직선 OA, CE와 모두 수직으로 만날 때

선분 PQ 의 길이는 꼬인 위치에 있는 두 직선 OA , CE 사이의 거리와 같고
이때 선분 PQ 의 길이가 최소이다.

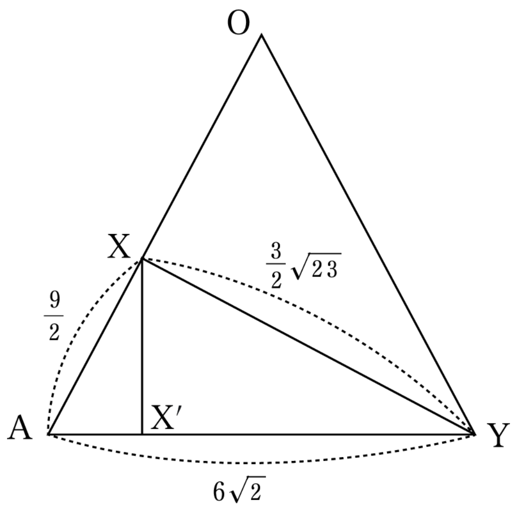
아래 그림과 같이 점 Q 가 점 C 와 같고 점 P 가 점 Q 에서 직선 OA 에 내린 수선의 발일 때 선분 PQ 는 두 직선 OA , CE 와 모두 수직으로 만난다.
따라서 아래 그림의 점 P 가 점 X 이고 점 Q 가 점 Y 이다.




점 X 의 평면 ABCD 위로의 정사영 점 에 대하여
$\overleftrightarrow{XY} \perp \overleftrightarrow{CE}$ 이고 $\overleftrightarrow{XX'} \perp \square ABCD$ 이므로
삼수선의 정리에 의하여 $\overleftrightarrow{X'Y} \perp \overleftrightarrow{CE}$ 이다.
$\overleftrightarrow{X'Y} = \overleftrightarrow{AC}$ 이므로 점 X′ 은 직선 AC 위에 있다.

피타고라스 정리에 의하여
삼각형 YAB 에서 $\overline{YA} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BY}^2} = 6\sqrt{2}$ 이다.

삼각형 OAY 에서 밑변 $\overline{OA}$ 와 높이 $\overline{YX}$ 에 대하여
$\overline{YA}^2 - \overline{AX}^2 = \overline{YO}^2 - \overline{OX}^2 = \overline{XY}^2$ 이므로
$(6\sqrt{2})^2 - \overline{AX}^2 = 8^2 - (8 - \overline{AX}^2) = \overline{XY}^2$
$\overline{AX} = \frac{9}{2}$ , $\overline{XY} = \frac{3}{2}\sqrt{23}$ 이다.




삼각형 YXA 와 삼각형 XX′Y 가 AA 닮음이므로
$\overline{XY} : \overline{YX'} = \overline{AY} : \overline{YX}$
$\frac{3}{2}\sqrt{23} : \overline{YX'} = 6\sqrt{2} : \frac{3}{2}\sqrt{23}$ 에서
$\overline{YX'} = \frac{69}{16}\sqrt{2}$ 이다.

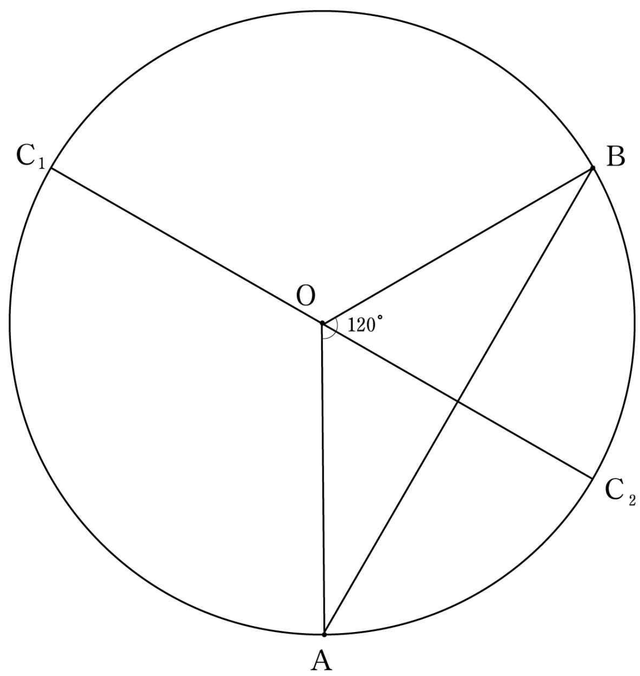
따라서 $\overline{X'Y} = \frac{69}{16}\sqrt{2}$ 이다.

27) [정답] ④ (출제자 : 23 강주연)
**[출제의도] 벡터의 실수배, 연산, 내적을 이해하고 활용할 수 있는가?**

[해설]
점 A , B , C , D 는 원 위의 점이므로
$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = 6$

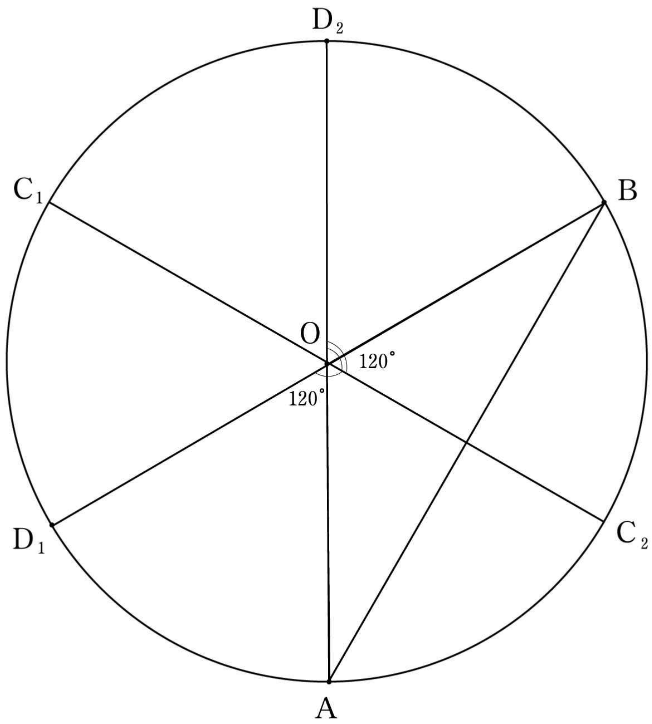
(가)에서
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos(\angle AOB)$
$= 36\cos(\angle AOB) = -18$
$\cos(\angle AOB) = -\frac{1}{2}$
$\angle AOB = 120^\circ$

(나)에서
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC})$
$= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OA}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$
$= \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + |\overrightarrow{OA}|^2$
$\quad + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} - |\overrightarrow{OA}|^2$
$= \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$ 이므로 $\overline{OC} \perp \overline{AB}$ 이다.
$\overline{OC} \perp \overline{AB}$ 를 만족하는 점 C 는 아래 그림과 같이 점 $C_1$ , $C_2$ 2 개 존재한다.




위 그림에서 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$ 와 $\overrightarrow{OA}$ 가 이루는 각은 $150^\circ$ 이다.

(다)에서 양 변을 정리하면
$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OD}$
$= \frac{1}{3} \times (|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{OA}|\cos 150^\circ)$
$= \frac{1}{3} \times (-54)$
$= -18$ 이고
$\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OC_2} \cdot \overrightarrow{OD} = |\overrightarrow{OC_2}||\overrightarrow{OD}|\cos(\angle C_2OD)$
$= 36\cos(\angle C_2OD)$ 이다.
$36\cos(\angle C_2OD) = -18$ 이므로 $\angle C_2OD = 120^\circ$ 이다.
$\cos(\angle C_2OD) = 120^\circ$ 를 만족하는 점 D 는 아래 그림과 같이 점 $D_1$, $D_2$ 2개 존재한다.




$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OD_1}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{OD_1}|\cos 150^\circ=-54$,
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OD_2}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{OD_2}|\cos 30^\circ=54$ 이므로
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OD}$ 는 점 D 가 점 $D_2$에 위치할 때 최대이다.

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC_1}=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{AC_1}|\cos 90^\circ=0$,
$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC_2}=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{AC_2}|\cos 180^\circ=36$ 이므로
$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 는 점 C 가 점 $C_1$ 에 위치할 때 최소이다.

조건에 맞는 삼각형 $AC_1D_2$ 에서 $\angle AC_1D_2=90^\circ$ 이므로
삼각형 $AC_1D_2$ 의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{AC_1}\times\overline{C_1D_2}=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{3}\times 6=18\sqrt{3}$ 이다.

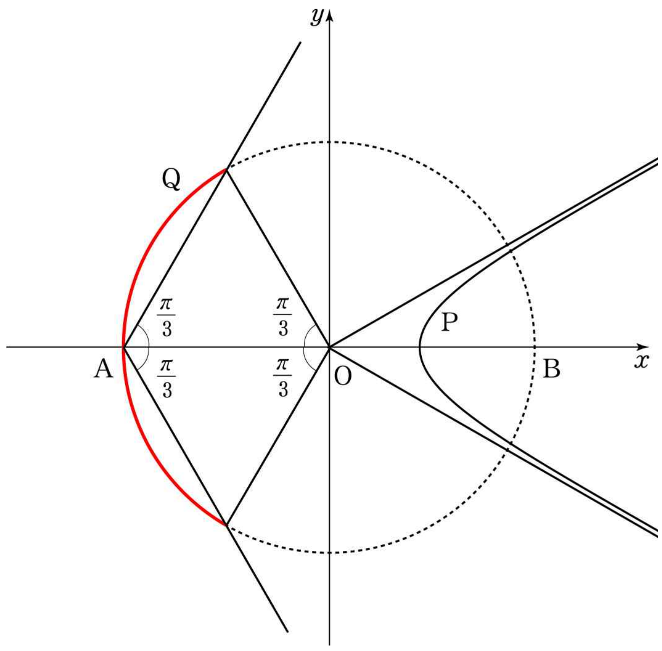
28) [정답] ④ (출제자 : 22 이수훈)
**[출제의도] 쌍곡선의 점근선에 대하여 이해하고 응용할 수 있는가?**

[해설]
점 A 의 좌표를 $A(-1, 0)$, 점 B 의 좌표를 $B(1, 0)$ 라 하면
$\overline{AP}-\overline{BP}=\sqrt{3}$ 이므로 점 P 는 쌍곡선 $\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$
$(x>0)$ 위의 점이다.
이 쌍곡선의 점근선은 $y=\pm\frac{\sqrt{3}x}{3}$ 이므로 직선 AP 가 $x$ 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\alpha$ 라 하면 $-\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{6}$ 이다.

$\overline{AQ}\perp\overline{BQ}$ 이므로 점 Q 는 선분 AB 를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

직선 AQ 가 $x$ 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\beta$ 라 하면
$\overline{AP}\perp\overline{AQ}$ 이므로 $\frac{\pi}{3}<\beta<\pi$, $-\pi<\beta<-\frac{\pi}{3}$ 이다.

점 Q 가 나타내는 도형은 다음 그림과 같다.




그러므로 점 Q 가 나타내는 도형의 길이는 $1\times\frac{\pi}{3}+1\times\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$ 이다.

29) [정답] 5 (출제자 : 23 강주연)
**[출제의도] 공간에서 조건에 맞는 도형을 찾고 정사영을 구할 수 있는가?**

[해설]
$xy$ 평면에서 타원 $\frac{(x-\sqrt{3})^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{6}=1$ 의 장축 길이는 6, 단축 길이는 $2\sqrt{3}$, 중심은 $A(\sqrt{3}, 2)$ 이다.

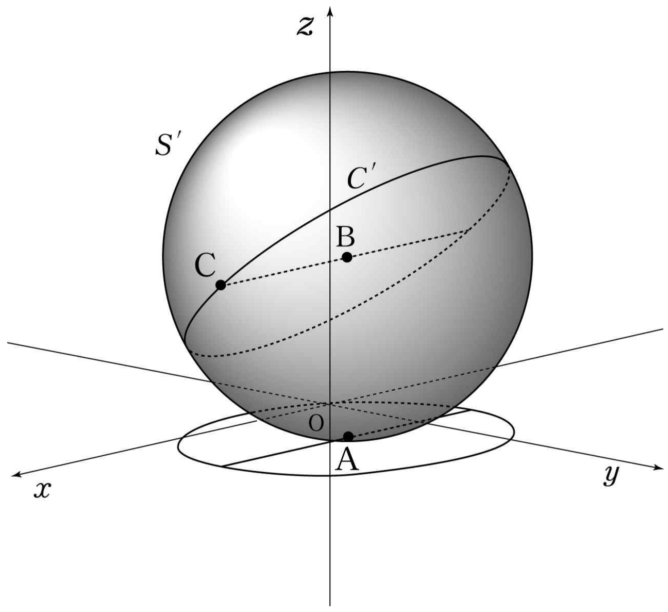
원 $C$를 $xy$ 평면 위로 정사영하여 타원 $\frac{(x-\sqrt{3})^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{6}=1$ 이 될 때, 원 $C$의 지름의 $xy$ 평면 위로의 정사영 중 가장 긴 선분이 타원의 장축이고 가장 짧은 선분이 타원의 단축이다.
따라서 원 $C$의 지름과 $xy$ 평면이 이루는 각을 $\theta$ $\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 할 때, $\cos\theta$ 가 최대일 때의 지름의 정사영이 타원의 장축이고 $\cos\theta$ 가 최소일 때의 지름의 정사영이 타원의 단축이다.

$\cos\theta$ 가 최대일 때, 원 $C$의 지름은 $xy$ 평면과 평행하다. $\theta=0$ 이고 $\cos\theta=1$ 이므로 이때의 지름과 $xy$ 평면으로의 이 지름의 정사영인 타원의 장축 길이는 같고, 그 길이는 6 이다.

중심의 $z$ 좌표가 양수이고 $xy$ 평면에 접하는 구 $S$의 방정식을
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-r)^2=r^2$ $(a>0, r>0)$ 이라 하자.
구 $S$의 반지름 $r$ 은 구 $S$의 단면인 원 $C$의 반지름 3 보다 크거나 같다.
가능한 가장 작은 구 $S'$ 의 반지름은 3 이고,
$S'$ 의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-3)^2=3^2$ $(a>0)$ 이다.

구 $S'$ 과 단면 $C$의 반지름이 같으므로 단면 $C'$ 는 구 $S'$ 의 단면 중 반지름이 가장 큰 단면이며, 단면 $C'$ 의 중심의 좌표가 구 $S'$ 의 중심의 좌표와 같다.
단면 $C'$ 의 중심의 $xy$ 평면으로의 정사영은 좌표공간에서 타원의 중심 $A(\sqrt{3}, 2, 0)$ 이므로 $S'$ 의 중심 B 의 $x$ 좌표는 $\sqrt{3}$ 이고 $y$ 좌표는 2 이다.
따라서 $S'$ 의 방정식은 $(x-\sqrt{3})^2+(y-2)^2+(z-3)^2=3^2$ 이고
중심은 $B(\sqrt{3}, 2, 3)$ 이다.

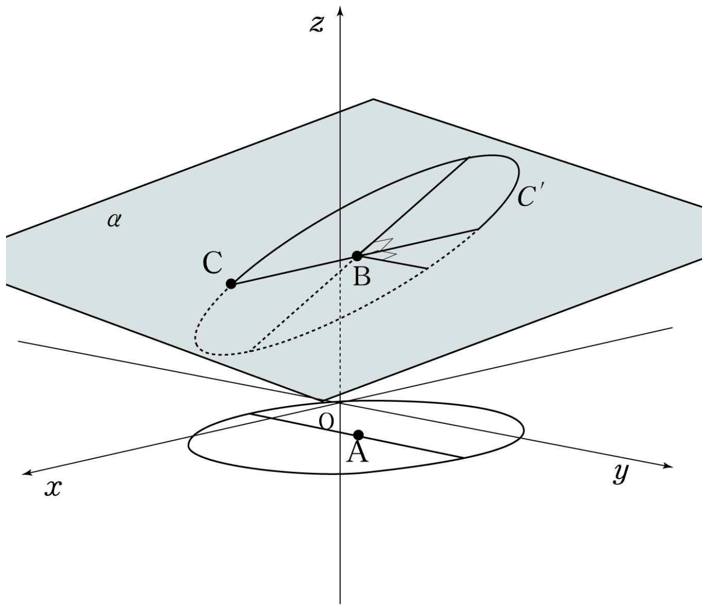
구 $S'$ 위의 점 중 $x$ 좌표가 가장 큰 점은 $S'$ 의 중심 $\mathrm{B}(\sqrt{3}, 2, 3)$ 으로부터 $x$ 축의 양의 방향으로 구 $S'$ 의 반지름의 길이인 3 만큼 떨어진 $\mathrm{C}(\sqrt{3}+3, 2, 3)$ 이다.




$\cos\theta$ 가 최소일 때, 길이가 6인 원 $C$의 지름의 $xy$ 평면으로의 정사영은 길이가 $2\sqrt{6}$ 인 타원의 단축이다. 이때의 $\theta$ 를 $\theta'$ 라 하고 $\cos\theta'$ 를 구하면

$\cos\theta' = \dfrac{2\sqrt{6}}{6} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 이다.

원 $C$의 중심을 지나고 $xy$ 평면과 평행한 평면을 $\alpha$ 라 하면
$\theta = \theta'$ 일 때 원 $C$의 지름과 $xy$ 평면 위로의 그 정사영은 그림과 같이 평면 $\alpha$ 와 평면 $C$의 교선에 각각 수직이다.



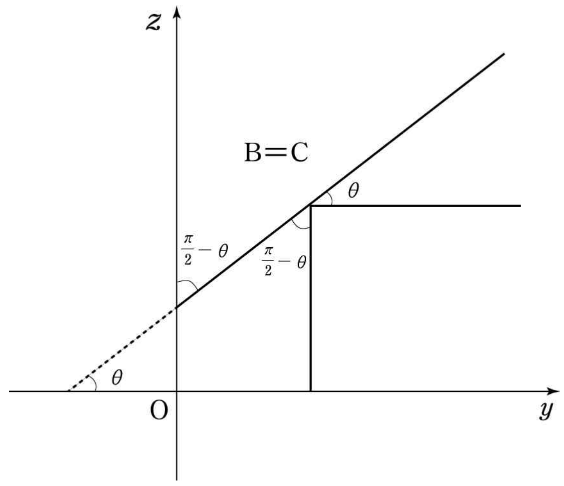

따라서 평면 $C$가 평면 $\alpha$ 와 이루는 이면각의 크기는 $\theta'$ 이고, 평면 $\alpha$ 는 $xy$ 평면과 평행하므로 평면 $C$가 $xy$ 평면과 이루는 이면각의 크기도 $\theta'$ 이다.

$\mathrm{A}(\sqrt{3}, 2, 0)$, $\mathrm{B}(\sqrt{3}, 2, 3)$, $\mathrm{C}(\sqrt{3}+3, 2, 3)$ 에 대하여
$\overline{\mathrm{BC}} = 3$ 이고, 선분 BC 를 밑변으로 하는 삼각형 ABC 의 높이는 3 이므로

$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\times 3\times 3 = \dfrac{9}{2}$ 이다.

삼각형 ABC 는 $xz$ 평면과 평행하므로 그림과 같이

평면 $C'$ 과 $xz$ 평면이 이루는 각은 $\dfrac{\pi}{2} - \theta$ 이다.



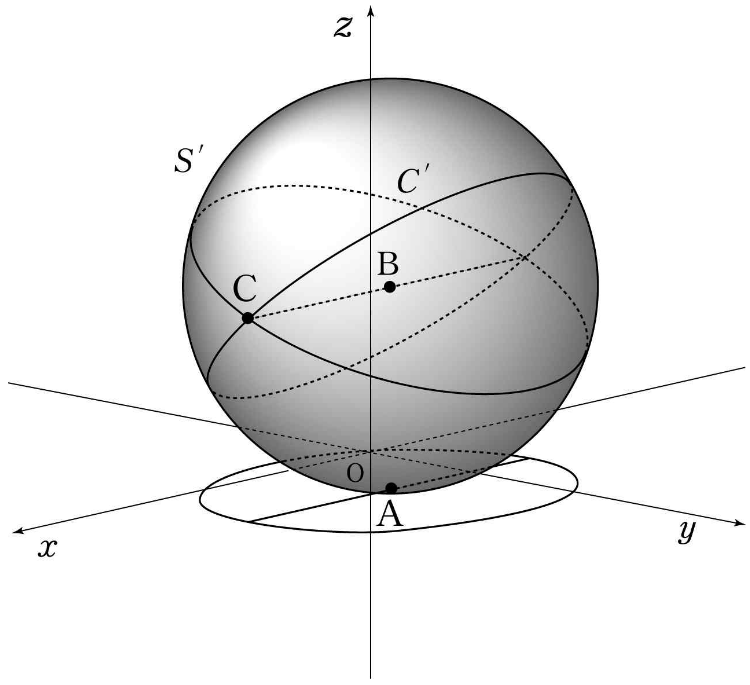

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ .

삼각형 ABC 의 평면 $C'$ 위로의 정사영의 넓이는

$\triangle\mathrm{ABC}\times\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \dfrac{9}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$

따라서 $p=2$, $q=3$ 이다.
$p+q=5$

[별해]
가능한 $C'$ 은 아래 그림과 같이 두 개 존재한다.




30) [정답] 3 (출제자 : 22 신요섭)
**[출제의도] 평면벡터의 연산과 내적을 이용하여 원하는 값을 구할 수 있는가?**

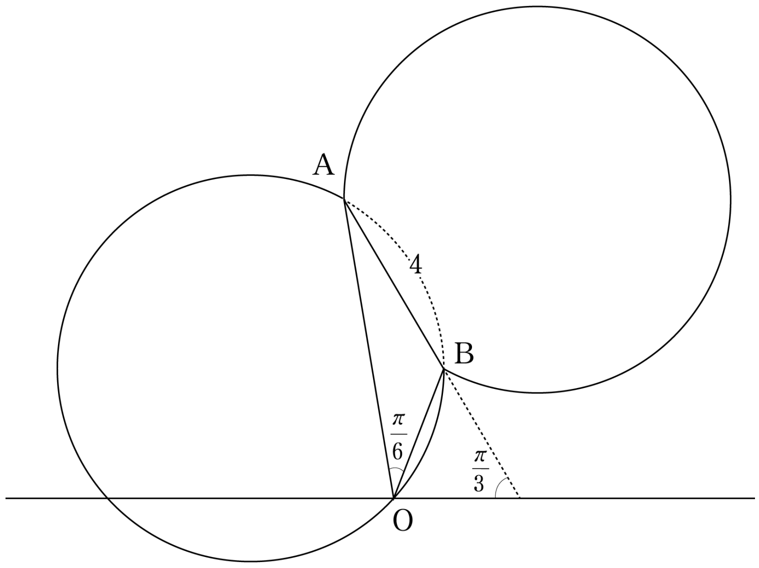
[해설]
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2, -2\sqrt{3})$ 에서
$\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (2, -2\sqrt{3})$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + (2, -2\sqrt{3})$ 이므로
두 점 A, B 는 기울기가 $-\sqrt{3}$ 인 직선 위의 점이며,
$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{4+12} = 4$ 이므로 두 점 사이의 거리는 4 이다.

$\cos(\angle\mathrm{AOB}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 에서

$\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{\sin(\angle AOB)} = \dfrac{4}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \dfrac{4}{\dfrac{1}{2}} = 8$ 이므로

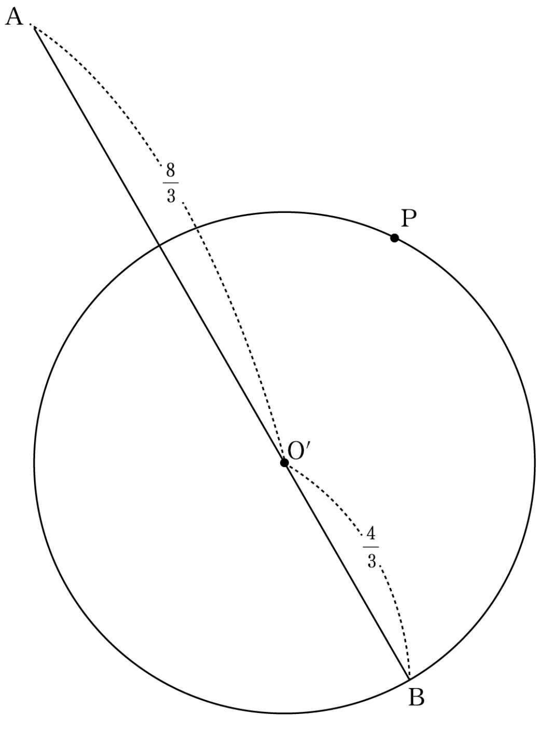
삼각형 OAB 는 $\angle AOB = \dfrac{\pi}{6}$ 를 만족시키며 반지름이 4 인 원에 내접한다.

이때 선분 AB 을 고정하고 점 O 을 움직이는 경우 점 O 가 나타내는 도형은 다음과 같다.




$|\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{BP}|=4$ 에서 $\left|\dfrac{\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{BP}}{1+2}\right| = \dfrac{4}{3}$ 이므로 점 P 는 선분 AB 를 2 : 1 로 내분하는 점을 중심으로 하고 반지름이 $\dfrac{4}{3}$ 인 원 위의 점이다.

점 P 가 나타내는 원의 중심을 O$'$라 하면 점 P 가 나타내는 원은 다음과 같다.




$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$ 이므로

$-3 \le \overrightarrow{OP} \cdot (3,\ 0) \le 5$ 에서 $-3 \le (\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}) \cdot (3,\ 0) \le 5$ 이다.

$|\overrightarrow{O'P}| = \dfrac{4}{3}$ 이므로 $-4 \le \overrightarrow{O'P} \cdot (3,\ 0) \le 4$ 이다.

$\overrightarrow{OO'} \cdot (3,\ 0) = m$ 이라 하면

$-3 \le m + \overrightarrow{O'P} \cdot (3,\ 0) \le 5$

$-3 - m \le \overrightarrow{O'P} \cdot (3,\ 0) \le 5 - m$ 이므로 $m = 1$ 이다.

그러므로 점 O$'$ 의 좌표를 $(x,\ y)$ 라 하면 $x = \dfrac{1}{3}$ 이다.

점 O$'$ 을 지나고 $x$ 축과 평행한 직선이 점 P 가 나타내는 원과 만나는 두 점을 각각 C, D 라 하고 $y$ 축과 만나는 점을 E 라 하자.

$\overline{CO'} = \overline{DO'} = \dfrac{4}{3}$, $\overline{EO'} = \dfrac{1}{3}$ 이므로

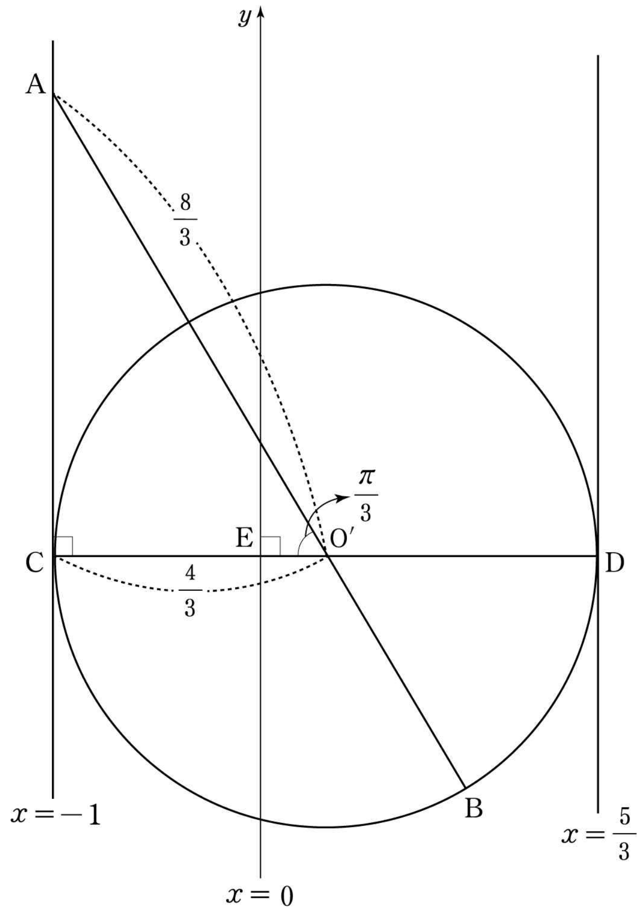
$\overline{CE} = \overline{CO'} - \overline{EO'} = \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{3} = 1$,

$\overline{ED} = \overline{DO'} + \overline{EO'} = \dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{3}$ 이며,

두 점 A, B 는 기울기가 $-\sqrt{3}$ 인 직선 위의 점이고 이 직선이 $x$ 축과 이루는 예각의 크기가 $\dfrac{\pi}{3}$ 이므로 $\angle AO'C = \dfrac{\pi}{3}$ 이다.

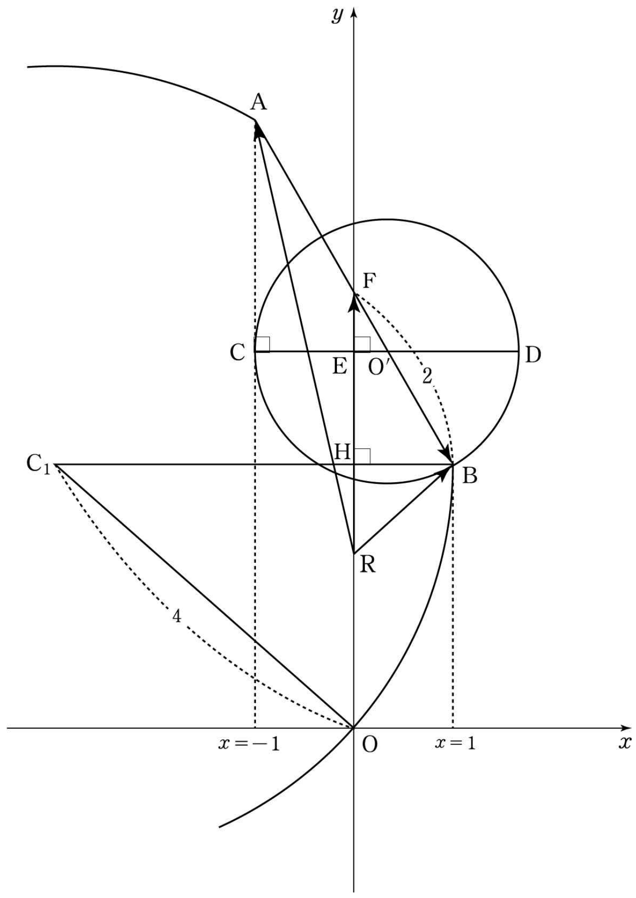
또한 $\overline{AO'} = \dfrac{8}{3}$, $\overline{CO'} = \dfrac{4}{3}$ 이고 $\angle AO'E = \dfrac{\pi}{3}$ 이므로

$\angle ACO' = \dfrac{\pi}{2}$ 이다.




원점 O 는 반지름이 4 인 원 위에 있으며, $y$ 축이 점 E 를 지나고 있으므로 원점의 위치는 다음과 같이 두 가지 경우가 있다.

i )




삼각형 OAB 가 내접하는 원의 중심을 $C_1$, $y$ 축이 선분 AB, 선분 $C_1B$ 와 만나는 점을 각각 F, H 라 하자.

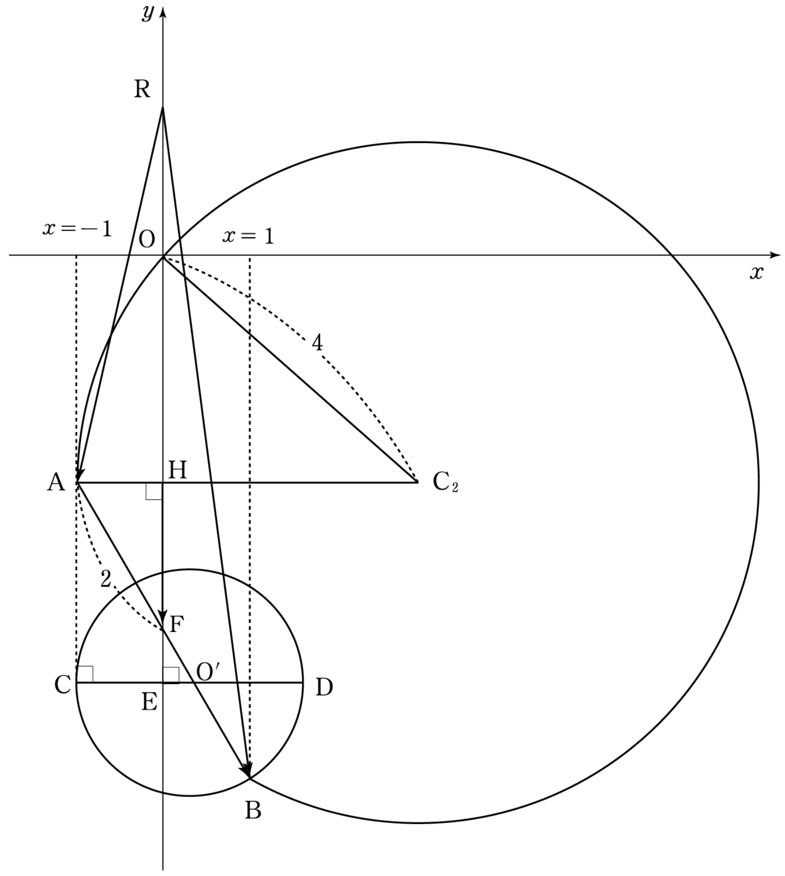
$$\overline{OH} = \sqrt{(\overline{OC_1})^2 - (\overline{C_1H})^2}$$
$$= \sqrt{16-(4-1)^2}$$
$$= \sqrt{7} \text{ 이고}$$

$$\overline{HF} = \overline{BF}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \frac{\overline{AB}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \sqrt{3} \text{ 이므로}$$

$$\overline{RF} = \overline{OF} - \overline{OR}$$
$$= (\sqrt{7}+\sqrt{3}) - \sqrt{3}$$
$$= \sqrt{7}$$
이다.

$$\overrightarrow{RA}\cdot\overrightarrow{RB} = (\overrightarrow{RF}+\overrightarrow{FA})\cdot(\overrightarrow{RF}+\overrightarrow{FB})$$
$$= |\overrightarrow{RF}|^2 - |\overrightarrow{FB}|^2$$
$$= |\overrightarrow{RF}|^2 - \left(\frac{|\overrightarrow{AB}|}{2}\right)^2$$
$$= 7-4$$
$$= 3$$
따라서 $\overrightarrow{RA}\cdot\overrightarrow{RB} = 3$ 이다.

ii )




삼각형 OAB 가 내접하는 원의 중심을 $C_2$, $y$ 축이 선분 $C_2A$, 선분 AB 와 만나는 점을 각각 H, F 라 하자.

$$\overline{OH} = \sqrt{(\overline{OC_2})^2 - (\overline{C_2H})^2}$$
$$= \sqrt{16-(4-1)^2}$$
$$= \sqrt{7} \text{ 이고}$$

$$\overline{HF} = \overline{AF}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \frac{\overline{AB}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \sqrt{3} \text{ 이므로}$$

$$\overline{RF} = \overline{OF} + \overline{OR}$$
$$= (\sqrt{7}+\sqrt{3}) + \sqrt{3}$$
$$= \sqrt{7}+2\sqrt{3}$$
이다.

$$\overrightarrow{RA}\cdot\overrightarrow{RB} = (\overrightarrow{RF}+\overrightarrow{FA})\cdot(\overrightarrow{RF}+\overrightarrow{FB})$$
$$= |\overrightarrow{RF}|^2 - |\overrightarrow{FB}|^2$$
$$= |\overrightarrow{RF}|^2 - \left(\frac{|\overrightarrow{AB}|}{2}\right)^2$$
$$= (\sqrt{7}+2\sqrt{3})^2 - 4$$
$$= 15+4\sqrt{21}$$
따라서 $\overrightarrow{RA}\cdot\overrightarrow{RB} = 15+4\sqrt{21}$ 이다.

i ), ii )에 의하여 $\overrightarrow{RA}\cdot\overrightarrow{RB}$ 의 최솟값은 3 이다.