著 : 雀
sukita1729@gmail.com

1. $(5+2x)^{60}$을 전개했을 때 x^k의 계수를 a_k라 하자. (단, $0 \le k \le 60$) 계수 a_k 중 가장 큰 것을 a_p, 두 번째로 큰 것을 a_q라 하자. 이때, $2p+q$의 값을 구하여라. [건국대 2022]

자연수가 관여하는 최대최소 문제. 일반적인 표현을 구해도 미분을 할 수가 없기 때문에 다른 전략이 필요하다.

일반항 표현을 실수에 대한 함수로 보고 미분을 해도 되지만 대부분의 경우 도함수가 0이 되는 값을 정확하게 구할 수가 없다. ($x=\cos x$ 등 푸는 것이 불가능한 초월방정식이 발생) 게다가 구한 값의 정수부분 n을 구한 후 n과 $n+1$을 대입하여 값을 비교해야 하는데, 정수부분을 구하는 것도 정말 쉬운 일이 아니다.

따라서 자연수 최대최소 문제의 경우 부등식을 이용한다. 가령, a_k가 $k=n$에서 최대가 된다면

$a_{n-1} < a_n > a_{n+1}$이 될 것이므로 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} > 1$을 만족시키는 n의 범위를 구하여 증감을 파악한다. 이러한 n이 여러 개 나올 경우 당연히 직접 대입을 통해 비교해야 하지만, 대부분의 문제의 경우 증가하다가 최댓값에 도달하고 다시 감소하는 간단한 형태이다.

이 문제의 경우 역시 확통의 탈을 쓴 최대최소 문제로, $a_k = {}_{60}\mathrm{C}_k 5^{60-k}2^k$를 구하는 것은 정말 쉽다. 이 일반항의 경우 이항계수(즉, 팩토리얼)가 등장하므로 실함수로 바꾸어 미분하는 것이 불가능에 가깝다. (감마함수를 이용하지 않는 이상..)

따라서 이를 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} > 1$에 대입하여 n의 범위를 구하는 것이 유일한 선택지이다.

$$a_k = {}_{60}\mathrm{C}_k 5^{60-k}2^k = \frac{60!}{k!(60-k)!}5^{60-k}2^k\text{이므로}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{60!}{n!(60-n)!}5^{60-n}2^n \times \frac{(n-1)!(61-n)!}{60!}5^{n-61}2^{1-n}$$

$$= \frac{2(61-n)}{5n} > 1$$

이고, 이를 정리하면 $7n < 122$, $n \le 17$이다. 즉, $n=17$일 때까지 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} > 1$이 성립하므로 $a_{16} < a_{17} > a_{18}$이고, a_k는 $k=17$에서 최대이므로 $p=17$이다.

또한, $a_0 < a_1 < \cdots < a_{16} < a_{17} > a_{18} > \cdots > a_{59} > a_{60}$이므로 두 번째 최댓값은 a_{16} 또는 a_{18}일 것이다.

$a_{16} = \dfrac{60!}{16!44!}5^{44}2^{16}$, $a_{18} = \dfrac{60!}{18!42!}5^{42}2^{18}$이므로

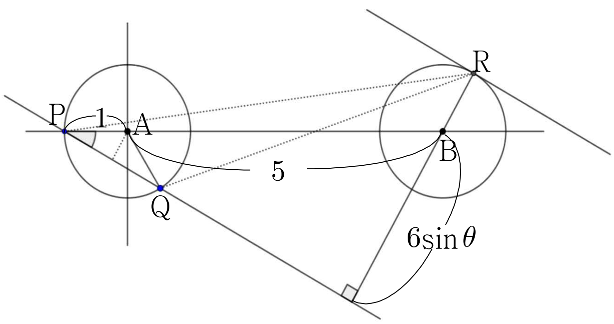
$\dfrac{a_{18}}{a_{16}} = \dfrac{22 \times 43 \times 4}{9 \times 17 \times 25} = \dfrac{3784}{3825} < 1$, $a_{16} > a_{18}$이다.

따라서 $q=16$이고 $2p+q=50$이다. ■

2. 반지름의 길이가 1이며 중심이 A와 B인 두 원이 있고, 선분 AB의 길이는 5이다. 직선 AB와 점 A를 중심으로 하는 원이 만나는 두 점 중 점 B와의 거리가 더 먼 점을 P라 하자. 점 A를 중심으로 하는 원 위의 점 Q와 점 B를 중심으로 하는 원 위의 점 R에 대하여 삼각형 PQR의 넓이의 최댓값을 구하시오. [KAIST 학추 2022]

전형적인 이변수 최대최소 문제이다. 두 점 Q, R이 각각 원 위에서 자유롭게 움직이므로 변수가 두 개이고, 삼각형 PQR의 넓이는 이들의 위치에 의해서 결정되는 이변수함수가 된다. 하지만 고등과정에서는 이변수함수의 최대최소는 물론 이변수함수 자체를 배우지 않으므로 이를 변수 하나에 관한 함수로 바꾸어야 한다.

최댓값의 최댓값을 구하는 전략을 사용하자. 점 Q의 위치가 고정되었을 때 삼각형 PQR의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 R의 위치 역시 정해진다. 따라서 점 Q가 특정한 위치에 있을 때의 최댓값이 결정된다. 하지만 점 Q는 점 A를 중심으로 하는 원 위를 움직이므로 이 최댓값이 매 순간마다 변한다. 따라서 이들의 최댓값을 구하면 전체의 최댓값이 될 것이다.



그림과 같이 $\angle \mathrm{APQ} = \theta$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$라 하자. (직선 AB에 대하여 대칭인 상황이므로 일반성을 잃지 않고 점 Q가 직선 AB 아래에 있다고 가정해도 된다.) 점 B를 중심으로 하는 원을 C라 하자.

이때 삼각형 PQR의 넓이가 최대가 되기 위한 점 R은 원 C의 직선 PQ와 평행한 접선이 원 C와 만나는 점 중 직선 AB 위에 있는 점이다. 직선 PQ와 직선 RB가 만나는 점을 H라 하면 삼각형 HPB에서 $\overline{\mathrm{HB}} = 6\sin\theta$이므로 $\overline{\mathrm{RH}} = 6\sin\theta + 1$이고, $\overline{\mathrm{PQ}} = 2\cos\theta$이므로 삼각형 PQR의 넓이는 $S(\theta) = \cos\theta(6\sin\theta + 1)$이다. 즉, 주어진 상황을 오직 θ에 관한 일변수 최대최소 문제로 바꾸었다.

마지막으로 $S(\theta)$를 미분하여 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$에서의 최댓값을 구해보면 $\sin\theta = \frac{2}{3}$일 때 $S(\theta) = \frac{5\sqrt{5}}{3}$가 최댓값이 된다. ■