# 수학 영역

KSM

제 2 교시 

5지선다형

*1.* $8^{-\frac{1}{2}} \div \sqrt{2}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

*2.* 곡선 $y=x^3+x^2-5$ 위의 점 $(1,\ -3)$에서의 접선의 기울기는? [2점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$y'=3x^2+2x$

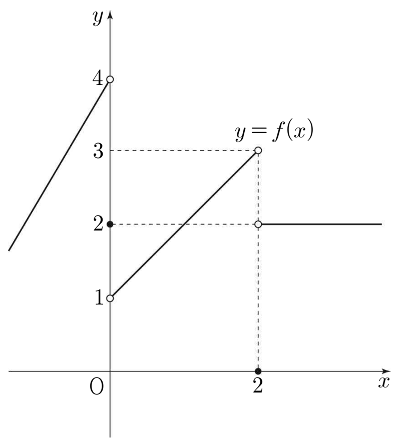
$1 \to 5$

*3.* 네 수 2, $a$, $b$, 14가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $a+b$의 값은? [2점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

2, 6, 10, 14

*4.* 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



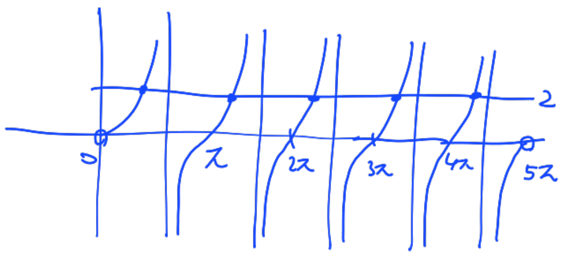

$\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 2+} f(x)$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$4+2=6$

*5.* $0 < x < 5\pi$에서 함수 $y = \tan x$의 그래프와 직선 $y = 2$가 만나는 점의 개수는? [3점]

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7




*6.* 함수

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & (x < 1) \\ -3bx - 1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은? (단, $a$, $b$는 상수이다.) [3점]

① $-3$　　② $-1$　　③ 1　　④ 3　　⑤ 5

$x=1$ 연속 $\rightarrow$ $a+b+1 = -3b-1$, $a+4b=-2$

$$f' = \begin{cases} 2ax+b & (x<1) \\ -3b & (x>1) \end{cases}$$

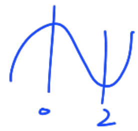
$2a+b=-3b$, $a+2b=0$

$b=-1$
$a=2$

*7.* 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 3x^2 - 6x$이고 $f(1) = 1$일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은? [3점]

① $-2$　　② $-1$　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

$f' = 3x(x-2)$

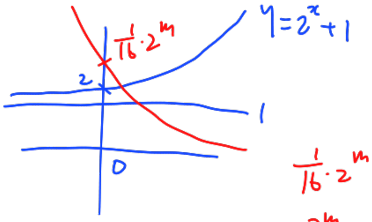



$f = x^3 - 3x^2 + c$
$f(1) = c-2=1$, $c=3$

$f(2) = 8-12+3 = -1$

*8.* 곡선 $y=\frac{1}{16}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{x-m}$이 곡선 $y=2^x+1$과 제1사분면에서 만나도록 하는 자연수 $m$의 최솟값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10




$\frac{1}{16}\cdot 2^m > 2$

$2^m > 2^5$, $m>5$

*9.* $2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta\times\tan(\pi+\theta)$일 때, $\sin^2\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

$2\cos\theta = \sin\theta \tan\theta$

$2c = \frac{s^2}{c}$, $2c^2 = s^2$

$2(1-s^2) = s^2$, $s^2 = \frac{2}{3}$

*10.* 함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

$$f(x)=x+\int_0^2 f(t)dt$$

를 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\int_0^2 f(t)dt = k$

$f(x) = x+k$

$\int_0^2 (t+k)dk = k$

$\frac{1}{2}t^2+kt\Big|_0^2 = 2+2k = k$

$k=-2$

$f(3) = 3+k = 1$

*11.* $a_3=6$이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\underbrace{a_4+a_5}_{A}=2(a_6+a_7)+3(a_8+a_9)$일 때, $a_1$의 값은? [3점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

$A=2Ar^2+3Ar^4$

$3r^4+2r^2-1=0$

$(3r^2-1)(r^2+1)=0 \quad r^2=\frac{1}{3}$

$a_3=ar^2=\frac{1}{3}a=6, \ a=18$

*12.* 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2-2x)f(x)$$

라 하자. $g'(0)+g'(2)=16$일 때, $f(2)-f(0)$의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

$g'(x)=(2x-2)f(x)+(x^2-2x)f'(x)$

$g'(0)=-2f(0)$

$g'(2)=2f(2)$

$2f(2)-2f(0)=16$

$\therefore f(2)-f(0)=8$

*13.* 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n + b_n = n$을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{10}(3a_k+1)=40$일 때, $\sum_{k=1}^{10}b_k$의 값은? [3점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

$\left(3\sum_1^{10}a_k\right)+10=40$

$\therefore \sum_1^{10}a_k=10$

$\sum_1^{10}(a_k+b_k)=\sum_1^{10}k$

$10+\sum_1^{10}b_k=55 \quad \therefore \sum_1^{10}b_k=45$

*14.* 자연수 $n(n \geq 2)$에 대하여 $m-2n$의 $n$제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(2)+f(3)+f(4)=3$을 만족시키는 모든 자연수 $m$의 값의 합은? [4점]

① 18 ② 23 ③ 28 ④ 33 ⑤ 38

$x^n=m-2n$

$f(2) \Rightarrow x^2=m-4 \rightarrow f(2)=2$

$f(3) \Rightarrow x^3=m-6 \rightarrow f(3)=1$

$f(4) \Rightarrow x^4=m-8 \rightarrow f(4)=0$

$m=5,6,7$

*15.* 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{S_n\}$과 상수 $k$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n+S_n=k$이다.

$S_6=189$일 때, $k$의 값은? [4점]

① 192 ② 196 ③ 200 ④ 204 ⑤ 208

$a_{n+1}+S_{n+1}=k$

$-\ \underline{a_n+S_n=k}$

$a_{n+1}-a_n+a_{n+1}=0\quad(n\ge 1)$

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n\quad(n\ge 1)$

$n=1 \to a_1+S_1=2a_1=k,\ a_1=\frac{k}{2}$

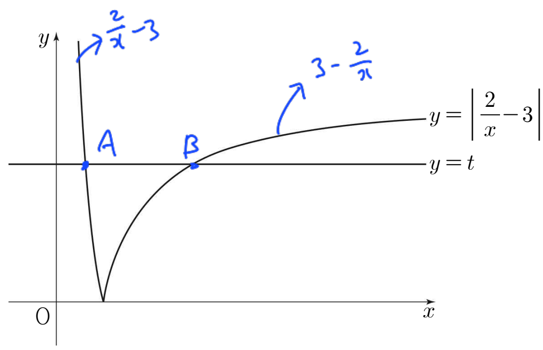
$r=\frac{1}{2}$

$S_6=\dfrac{\frac{k}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1-\frac{1}{2}}=189$

$k\left(\frac{63}{64}\right)=189,\ k=192$

*16.* $0<t<3$인 실수 $t$에 대하여 함수 $y=\left|\frac{2}{x}-3\right|$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 두 점 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t}$의 값은? [4점]

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$




$A\left(\frac{2}{t+3},t\right),\ B\left(\frac{2}{3-t},t\right)$

$f(t)=\overline{AB}=\frac{2}{3-t}-\frac{2}{t+3}=\frac{4t}{9-t^2}$

$\lim\limits_{t\to0^+}\frac{f(t)}{t}=\lim\limits_{t\to0^+}\left(\frac{1}{t}\times\frac{4t}{9-t^2}\right)=\frac{4}{9}$

*17.* 1이 아닌 세 양수 $a$, $b$, $c$가

$$-4\log_a b = 54\log_b c = \log_c a \ = k$$

를 만족시킨다. $b\times c$의 값이 300 이하의 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 $a$의 값의 합은? [4점]

① 91 ② 93 ③ 95 ④ 97 ⑤ 99

$\log_a b = -\frac{k}{4} \rightarrow b = a^{-\frac{k}{4}}$

$\log_b c = \frac{k}{54} \rightarrow c = b^{\frac{k}{54}} = a^{-\frac{k^2}{216}}$

$\log_c a = k \rightarrow a = c^k = a^{-\frac{k^3}{216}}$

$1 = -\frac{k^3}{216}$, $k=-6$

$b = a^{\frac{3}{2}}$, $c = a^{-\frac{1}{6}}$

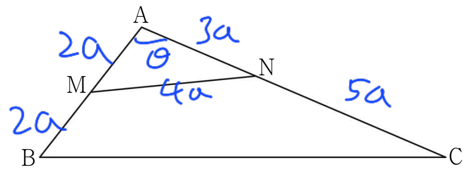
$b\times c = a^{\frac{4}{3}}$

| $a$ | $a^{\frac{4}{3}}$ | |
|---|---|---|
| $2^3$ | 16 | |
| $3^3$ | 81 | |
| $4^3$ | 256 | |
| $5^3$ | 625 | (x) |

$8+27+64=99$

*18.* 그림과 같이 $2\overline{AB}=\overline{AC}$인 삼각형 ABC에 대하여 선분 AB의 중점을 M, 선분 AC를 $3:5$로 내분하는 점을 N이라 하자. $\overline{MN}=\overline{AB}$이고, 삼각형 AMN의 외접원의 넓이가 $16\pi$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

$R=4$




① $24\sqrt{3}$ ② $13\sqrt{13}$ ③ $14\sqrt{14}$ ④ $15\sqrt{15}$ ⑤ 64

$\cos\theta = \frac{4+9-16}{2\cdot2\cdot3} = \frac{-3}{12} = -\frac{1}{4}$

$\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\frac{4a}{\sin\theta} = 2R$

$4a = \frac{\sqrt{15}}{4}\times 8 = 2\sqrt{15}$

$a = \frac{\sqrt{15}}{2}$, $a^2 = \frac{15}{4}$

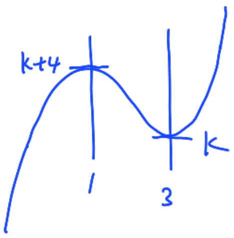
$\triangle ABC = \frac{1}{2}\times 4a\times 8a\times\sin\theta$

$= 16a^2\times\frac{\sqrt{15}}{4} = 4\sqrt{15} + \frac{15}{4} = 15\sqrt{15}$

*19.* 실수 $k$에 대하여 함수 $f(x)$는 $f(x)=x^3-6x^2+9x+k$이다. 자연수 $n$에 대하여 직선 $y=3n$과 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 $a_n$이라 하자. $\sum_{n=1}^{4} a_n = 7$을 만족시키는 모든 $k$의 값의 합은? [4점]

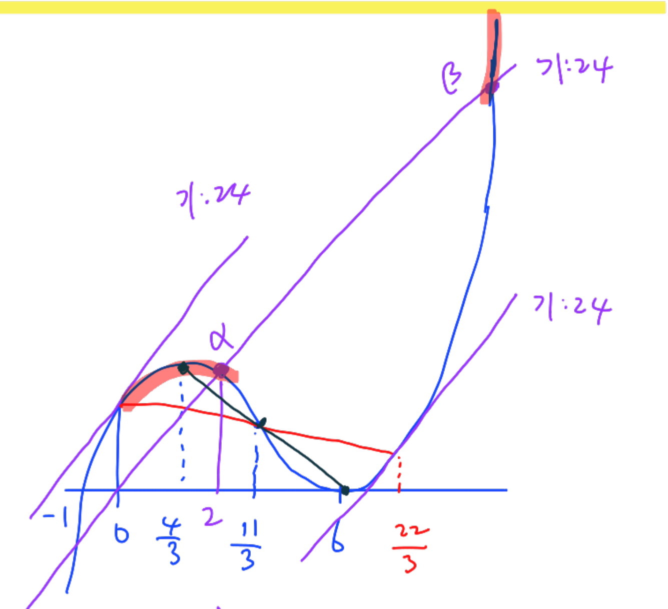
① 30 ② 33 ③ 36 ④ 39 ⑤ 42

$f' = 3x^2-12x+9 = 3(x-1)(x-3)$




| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y=3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 |
| y=6 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 2 |
| y=9 | 2 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 |
| y=12 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| k → | 9 | 8 | 6 | 5 | 3 | 2 |

$\underbrace{9+8+6+5+3+2}_{33}$




$f'(0)=24$ $\frac{f(t)}{t}=24$, $f(t)=24t$

$t^3-11t^2+36=0$, $(t-2)(t^2-9t-18)=0$

$t=2$, $t=\frac{9\pm\sqrt{153}}{2}=\frac{9\pm3\sqrt{17}}{2}$

$\alpha=2$, $\beta=\frac{9+3\sqrt{17}}{2}$

*20.* 함수 $f(x)=(x+1)(x-6)^2$과 양의 실수 $t$에 대하여 $g(t)$를 다음과 같이 정의한다. $=x^3-11x^2+24x+36,$

> 두 점 $(0, 0)$, $(t, f(t))$를 지나는 직선의 기울기와
> 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(k, f(k))$에서의 접선의 기울기가
> 같아지는 양의 실수 $k$의 개수가
> 1이면 $k$의 값을 $g(t)$,
> 2이면 $k$의 값 중 작은 값을 $g(t)$라 한다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

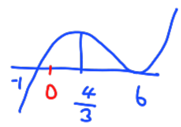
ㄱ. $f'(0)=24$

ㄴ. $g(6)=\frac{4}{3}$

ㄷ. 함수 $g(t)$의 치역의 원소가 아닌 모든 자연수의 합은 27이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$f'(x)=3x^2-22x+24$




ㄱ. $f'(0)=24$

ㄴ. $(0,0)$, $(6,0)$ $f'(k)=0$ $k=\frac{4}{3}, 6$ 2개

$g(6)=\frac{4}{3}$

ㄷ. $f'(-1)=3+46=49$

$0<t\le2$, $t\ge\beta \rightarrow k\ge\frac{22}{3}$

$2<t<6$, $6<t<\beta \rightarrow 0<k<\frac{4}{3}$

$t=6 \rightarrow k=\frac{4}{3}$

$\therefore 0<k\le\frac{4}{3}$, $k\ge\frac{22}{3}$

$\therefore$ $g(t)$ 치역 X

$\Rightarrow$ $\underbrace{k=2,3,4,5,6,7}_{27}$

*21.* 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1$의 최댓값과 최솟값을 각각 $M$, $m$이라 할 때, $M-m$의 값은? [4점]

> (가) $a_5 = 63$
> (나) 모든 자연수 $n$에 대하여
> $$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + a_n & (a_{n+1} \times a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ a_{n+1} + a_n - 2 & (a_{n+1} \times a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$
> 이다.

홀×홀 짝

홀 홀 짝

홀 짝 홀

짝 짝 짝

① 16　② 19　③ 22　④ 25　⑤ 28

$a_5=63 \Rightarrow a_4+a_3-2=63$

$a_4+a_3=65 \rightarrow$ 홀&짝

| $a_5$ | $a_4$ | $a_3$ | $a_2$ | $a_1$ |
|---|---|---|---|---|
| 63 | 홀 | 짝 | 홀 | 홀 |
| | $2a+4b-5$ | $2a+2b-2$ | $2b-1$ | $2a-1$ |

$4a+6b-7=65$

$2a+3b=36$

| $b$ | $a$ | $a_1$ |
|---|---|---|
| 2 | 15 | 29 |
| 4 | 12 | 23 |
| 6 | 9 | 17 |
| 8 | 6 | 11 |
| 10 | 3 | 5 |

| $a_5$ | $a_4$ | $a_3$ | $a_2$ | $a_1$ |
|---|---|---|---|---|
| 63 | 짝 | 홀 | 홀 | 짝 |
| | $2p+4q-4$ | $2p+2q-3$ | $2q-1$ | $2p$ |

$4p+6q-7=65$

$2p+3q=36$

| $q$ | $p$ | $a_1$ |
|---|---|---|
| 2 | 15 | 30 |
| 4 | 12 | 24 |
| 6 | 9 | 18 |
| 8 | 6 | 12 |
| 10 | 3 | 6 |

$\therefore M=30$, $m=5$　$M-m=25$

**단답형**

*22.* $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{4}$

$\displaystyle\lim_{x\to3}(\sqrt{x+1}+2)=4$

*23.* 중심각의 크기가 $\frac{4}{5}\pi$이고 호의 길이가 $12\pi$인 부채꼴의 반지름의 길이를 구하시오. [3점]

$\boxed{15}$

$12\pi=\left(\frac{4}{5}\pi\right)r$

$r=15$

24. 함수 $f(x)=x^3+2x^2+2$에 대하여

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f'(t)dt$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{7}$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

$f'(x)=3x^2+4x,\ f'(1)=7$

25. 방정식 $\log_2 x-3=\log_x 16$을 만족시키는 모든 실수 $x$의 값의 곱을 구하시오. [3점]

$\boxed{8}$

$x>0$
$x\neq1$

$\log_2 x=t$

$t-3=\frac{4}{t}$

$t^2-3t-4=0\quad t=-1,\ 4$

$\log_2 x=-1,\ 4$

$x=\frac{1}{2},\ 16\quad \frac{1}{2}\times16=8$

26. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치가 각각

$$x_1(t)=t^3-3t^2-24t,\ x_2(t)=t^2-at$$

이다. 두 점 P, Q의 운동 방향이 시각 $t=k$에서 동시에 바뀔 때, $a+k$의 값을 구하시오. (단, $a$와 $k$는 상수이다.) [4점]

$\boxed{12}$

$V_1(t)=3t^2-6t-24$

$=3(t-4)(t+2)=0\quad t=4$

$V_2(t)=2t-a=0,\ t=\frac{a}{2}\ /\ a=8$

$k=4$

*27.* 공차가 $d$인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 $d$의 값의 합을 구하시오. [4점] $\boxed{18}$

| |
|---|
| (가) $a_8 = 2a_5 + 10$ |
| (나) 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n \times a_{n+1} \ge 0$이다. |

$a+7d = 2a+8d+10$

$a = -d-10$

$-d-10 \quad -10 \quad d-10 \quad 2d-10 \quad 3d-10 \quad \cdots$

$kd-10=0$

$kd=10$

| $k$ | $d$ |
|---|---|
| 1 | 10 |
| 2 | 5 |
| 5 | 2 |
| 10 | 1 |

$d = 10, 5, 2, 1 \to 18$

*28.* 상수항과 계수가 모두 음이 아닌 정수인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)+g(2)$의 값을 구하시오. [4점]

| |
|---|
| (가) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\{f(x)\}^2 g(x)}{x^5} = 4$ |
| (나) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)\{g(x)\}^2}{x^5} = 2$ $\to fg^2 = x^5 h(x)$ |

| $f$ | $g$ | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | (O) |
| 2 | 1 | (X) |

$\boxed{16}$

(가) $f = ax\sim$

$g = bx^3\sim$

$\boxed{a^2b=4}$

(나) $fg^2 = x^5 h(x)$

$f = ax$

$g = bx^3 + cx^2$ ) $fg^2 = ax^5(bx+c)^2$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{ax^5(bx+c)^2}{x^5} = \boxed{ac^2=2}$

| $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 |

$f(x)=2x$, $g(x)=x^3+x^2$

$f(2)+g(2) = 4+12 = 16$

*29.* 두 상수 $a$, $b(0 \le b \le \pi)$에 대하여

닫힌구간 $\left[\frac{\pi}{2},\ a\right]$에서 함수 $f(x) = 2\cos(3x + b)$의

최댓값은 1이고 최솟값은 $-\sqrt{3}$이다.

$a \times b = \frac{q}{p}\pi^2$일 때, $p + q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점] $\boxed{14}$

$3x+b = t$

$\frac{\pi}{2} \le x \le a$

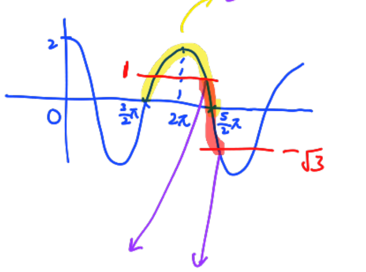
$\frac{3}{2}\pi + b \le 3x+b \le 3a+b$

$0 \le b \le \pi$

$\frac{3}{2}\pi \le \frac{3}{2}\pi + b \le \frac{5}{2}\pi$

$y = 2\cos t$

$\frac{3}{2}\pi \le \frac{3}{2}\pi + b \le \frac{5}{2}\pi$




$\frac{3}{2}\pi + b = \frac{7}{3}\pi$ 　 $3a + b = \frac{17}{6}\pi$

$b = \frac{5}{6}\pi$, 　 $3a = 2\pi$

$a = \frac{2}{3}\pi$

$a \times b = \frac{5}{9}\pi^2$

*30.* 최고차항의 계수가 양수이고 $f'(2) < 0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x f(t)dt - 4 & (x < 2) \\ \displaystyle -\int_0^x f(t)dt + 4 & (x \ge 2) \end{cases}$$

$g' = \begin{cases} f(x) & (x<2) \\ -f(x) & (x>2) \end{cases}$

이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\lim_{x\to 2-} \frac{g(x)-4}{x-2} = \lim_{x \to 2+} \frac{g(x)+4}{x-2} = g'(0)$

(나) 방정식 $g(x) = 4$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점] $\boxed{30}$

$\int_0^x f(t)dt = F(x)$, $g(x) = \begin{cases} F(x) - 4 & (x<2) \\ -F(x)+4 & (x \ge 2) \end{cases}$

(가) $g(2^-) = 4 \rightarrow F(2) = 8$
$g(2^+) = -4 \rightarrow F(2) = 8$

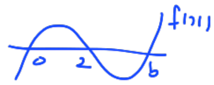
$g'(2^-) = g'(2^+) = g'(0)$

$f(2^-) = -f(2^+) = f(0)$

$\therefore f(2) = 0 = f(0)$

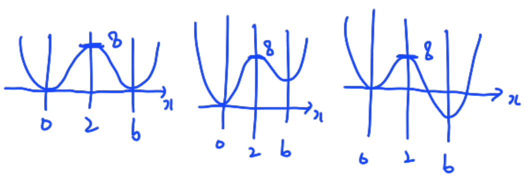
$f(x) = ax(x-2)(x-b)$ 　 $a>0$

$f'(2) = 2a(2-b) < 0$ 　 $\therefore 2-b<0$, $b>2$

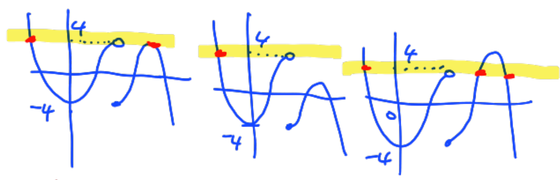



$F(x)$

$F(0) = 0$




$g(x)$




$\Downarrow$ $b=4$

$F(x) = \frac{a}{4}x^2(x-4)^2$ 　 $\therefore f(x) = 2x(x-2)(x-4)$

$F(2) = 4a = 8$, $a=2$ 　 $f(5) = 10 \cdot 3 \cdot 1 = 30$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.