# 수학 영역(A 형) 해설지

Epsilon

## 정답 및 해설

1) [정답] ⑤ (출제자 : 15김효석)

**[출제의도] 지수법칙을 통하여 문제를 계산할 수 있는가?**

[해설]

$4^{\frac{3}{2}}+9^{\frac{1}{2}}=8+3=11$

2) [정답] ④ (출제자 : 15김효석)

**[출제의도] 행렬의 계산을 할 수 있는가?**

[해설]

$A-B=\begin{pmatrix} 4 & a-5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$이므로 모든 성분의 합은 $a-1$이다.

따라서 모든 성분의 합이 3이므로 $a=4$이다.

[별해]

같은 꼴의 행렬 $A$, $B$에 대하여, 행렬의 모든 성분의 합을 $S(A)$, $S(B)$라고 할 때, $S(mA+nB)=mS(A)+nS(B)$를 만족시킨다.

따라서 $S(A-B)=S(A)-S(B)$

$=(a+4)-5=a-1=3$

3) [정답] ③ (출제자 : 15김효석)

**[출제의도] 미분법 공식을 활용하여 다항함수의 도함수를 계산할 수 있는가?**

[해설]

$f(x)=x^2+4x+12$

$f'(x)=2x+4$

$f'(1)=6$

4) [정답] ② (출제자 : 13김찬호)

**[출제의도] 그래프를 나타내는 행렬을 구할 수 있는가?**

[해설]

다음 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결관계를 나타내는 행렬의 성분은 1과 0밖에 존재하지 않는다. 따라서 모든 성분의 합을 구하고자 하면, 행렬에서 1의 개수를 세어주면 된다.

그래프를 행렬로 나타낼 때, 1이 의미하는 바는 꼭짓점의 연결관계이다. 즉, 행렬의 1의 성분의 개수를 구할 때에는 각 점이 몇 개의 점과 연결되어 있는지 조사한 후 모두 더해주면 된다.

1개와 만나는 꼭짓점이 3개, 2개와 만나는 꼭짓점이 1개, 3개와 만나는 꼭짓점이 3개이므로, $3+2+9=14$이다.

[별해]

각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합은 그래프의 변의 개수의 두 배이므로 $7\times2=14$

5) [정답] ⑤ (출제자 : 12양한솔)

**[출제의도] 미분계수의 정의를 아는가?**

[해설]

$\lim_{h\to0}\frac{f(2+2h)-f(2)}{h}=2f'(2)=14$

$f'(2)=7$

$\therefore a=1$

6) [정답] ① (출제자 : 15이상민)

**[출제의도] 등차수열의 성질을 이해하고 있는가?**

[해설]

$a_3=a_1+2d=d$

$a_1=-d$

이고

$a_4=a_1+3d=-d+3d=2d$

$a_8=a_1+7d=-d+7d=6d$

$\frac{a_8}{a_4}=\frac{6d}{2d}=3$

7) [정답] ③ (출제자 : 11양종현)

**[출제의도] 독립사건을 이용하여 확률을 계산할 수 있는가?**

[해설]

양의 상수 $p$에 대하여 $\mathrm{P}(B)=p$라 하면

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$

$=P(B)-P(A)\cap P(B)$

$=p-\frac{1}{3}p=\frac{2}{3}p$

그런데 $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{2}$이므로 $p=\frac{3}{4}$이다.

[별해]
두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이므로 두 사건 $A^C$, $B$도 서로 독립이다.

$\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

$\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(B)\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$

8) [정답] ⑤ (출제자 : 12황성문)
**[출제의도] 이항분포의 정의를 이용하여 식의 계산을 할 수 있는가?**

[해설]
확률변수 $X$가 이항분포 $\mathrm{B}(6,\frac{1}{6})$을 따르므로 다음과 같은 식을 세울 수 있다.

$P(X=2)={}_6C_2(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^4$ 이고 $P(X=1)={}_6C_1(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})^5$

${}_6C_2(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^4=k_6C_1(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})^5$ 이다.

$15=30k$ 이므로

$k=\frac{1}{2}$ 이다.

9) [정답] ④ (출제자 : 15최봉규)
**[출제의도] 행렬로 표시된 연립일차방정식 문제를 해결할 수 있는가?**

[해설]
연립방정식의 해가 $x=0$, $y=0$ 으로 유일하려면

$\begin{pmatrix} a & 2 \\ -3 & a-5 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재해야 한다.

$\begin{pmatrix} a & 2 \\ -3 & a-5 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하기 위한 조건은

$a(a-5)+6=a^2-5a+6=(a-2)(a-3)\neq 0$ 이므로

$a\neq 2$, $a\neq 3$ 이다.

$a$는 5 이하의 자연수이므로 조건을 만족하는 $a$는 1, 4, 5 이다. 따라서 모든 $a$의 합은 10

참고로 문제에서 만약 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖는다고 했다면, 역행렬이 존재하지 않아야하므로

$a(a-5)+6=a^2-5a+6=(a-2)(a-3)=0$ 이고

이를 만족하는 $a$는 2와 3 이다.

[별해]
주어진 행렬로 표현된 연립방정식을 전개하면

$ax+2y=0$, $-3x+(a-5)y=0$ 이다.

두 식을 직선의 방정식으로 생각한다면, 두 직선은 모두 원점을 지난다. 따라서 두 직선의 교점으로는 이미 원점이 존재한다. 그런데 문제에서 해가 $x=0$, $y=0$ 으로 유일하다고 했기 때문에, 더 이상의 해가 생겨서는 안된다. 원점을 지나는 두 직선이 원점 이외에서는 교점을 갖지 않으려면 두 직선의 기울기는 달라야 한다.

따라서 $\frac{a}{-2}\neq\frac{3}{a-5}$ 식을 정리하면 $a^2-5a+6\neq 0$ 이므로

$a\neq 2$, $a\neq 3$.

$a$는 5 이하의 자연수이므로 조건을 만족하는 $a$는 1, 4, 5 이다. 따라서 모든 $a$의 합은 10

10) [정답] ② (출제자 : 15유정훈)
**[출제의도] 로그의 실생활활용 문제에서 주어진 내용을 잘 적용할 수 있는가?**

[해설]
$v_{\mathrm{A}}$ 의 값을 구해보면,

$p=\frac{3}{4}, r=\frac{1}{3}$ 일 때, $v_{\mathrm{A}}=k\times\frac{1}{3}\times\frac{\log\left(1-\frac{3}{4}\right)}{\frac{3}{4}}$ 이므로,

$v_{\mathrm{A}}=-\frac{8}{9}k\log 2$ 이다.

$v_{\mathrm{B}}$ 의 값을 구해보자.

$v=kr\frac{\log(1-p)}{p}$ 에서

$p=\frac{1}{2}, r=\frac{1}{9}$ 일 때, $v_{\mathrm{B}}=k\times\frac{1}{9}\times\frac{\log\left(1-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}$ 이므로,

$v_{\mathrm{B}}=-\frac{2}{9}k\log 2$ 이다.

$\frac{v_{\mathrm{A}}}{v_{\mathrm{B}}}$ 의 값을 구하는 것이므로, 답은 $\frac{-\frac{8}{9}k\log 2}{-\frac{2}{9}k\log 2}=4$ 이다.

11) [정답] ① (출제자 : 10최원재)
**[출제의도] 주어진 식을 이용하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구할 수 있는가?**

[해설]
수열$\{a_n\}$은 첫째항이 1인 계차수열이다.

$b_n=2n$이므로

$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}2k=1+2\cdot\frac{(n-1)n}{2}=1+(n-1)n$

$\therefore a_{10}=1+9\cdot 10=91$

12) [정답] ④ (출제자 : 14서재현)
**[출제의도] 조건부확률을 이해하고 활용할 수 있는가?**

[해설]
이 학교에서 임의로 뽑은 학생 한 명이 아침운동을 하지 않을 때.

이 학생이 여학생일 확률은 $\frac{140}{230}=\frac{14}{23}$ 이다. 따라서 정답은 ④

13) [정답] ② (출제자 : 12황성문)

**[출제의도] 무한급수의 성질을 이해하고 활용할 수 있는가?**
**수열의 극한의 성질을 이해하고 활용할 수 있는가?**

[해설]

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{2n}{n+1}\right)=3$, 즉 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{2n}{n+1}\right)$의 값이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{2n}{n+1}\right)=0$이다.

$a_n-\frac{2n}{n+1}=b_n$이라고 하면

$\lim_{n\to\infty} b_n=0$, $a_n=b_n+\frac{2n}{n+1}$

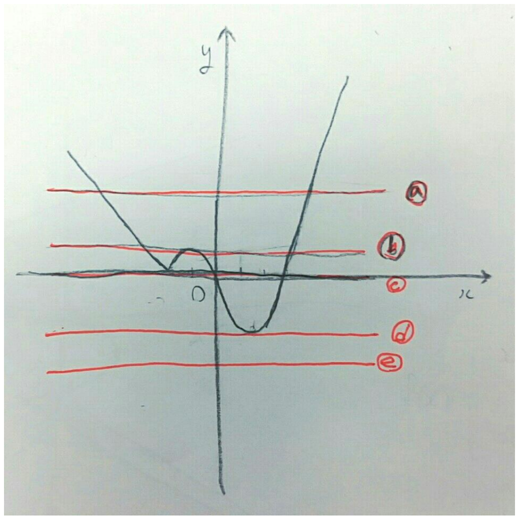
$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(b_n+\frac{2n}{n+1}\right)=2$$

따라서 정답은 ②

14) [정답] ③ (출제자 : 12황성문)

**[출제의도] null...**

[해설]

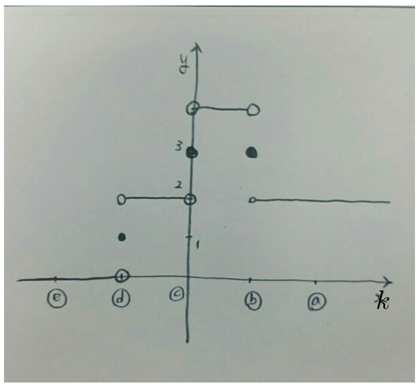



극한값을 구할 수는 있으나 굳이 구할 필요도 없고 정확한 값이 필요한 것이 아니므로 편하게 문자로 구분하였다.

함수 $f(x)$와 $y=k$와의 교점의 개수는 다음과 같다.

(1) $b<k$일 때, 2개
(2) $k=b$일 때, 3개
(3) $b<k<c$일 때, 4개
(4) $k=c$일 때, 3개
(5) $c<k<d$일 때, 2개
(6) $k=d$일 때, 1개
(7) $k>d$일 때, 0개

따라서 $g(k)$의 그래프는 다음과 같다.




불연속점은 $k=b,c,d$일 때 세 지점이므로 총 3개다.

15) [정답] ⑤ (출제자 : 12양한솔)

**[출제의도] 이산확률분포표를 그리고 그 계산을 할 수 있는가?**

[해설]

세 주사위의 숫자가 모두 다른 숫자가 나올 확률

$\frac{{}_6P_3}{6\times6\times6}=\frac{5}{9}$

두 주사위가 숫자가 같고 나머지 한 주사위의 숫자는 다를 확률

$\frac{{}_6C_2\times3!}{6\times6\times6}=\frac{5}{12}$

세 주사위의 숫자가 모두 같은 확률

$\frac{{}_6C_1}{6\times6\times6}=\frac{1}{36}$

| X | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{5}{9}$ | $\frac{5}{12}$ | $\frac{1}{36}$ |

$\mathrm{E}(X)=2\times\frac{5}{12}+3\times\frac{1}{36}=\frac{11}{12}$

[별해]

2가지 주사위의 숫자가 같고 한 가지 주사위의 숫자가 다를 확률을 여사건으로 구할 수 있다. 먼저 세 주사위의 숫자가 모두 다를 경우(120)를 구하고, 세 주사위의 숫자가 모두 같은 경우(6)를 구해서, 전체의 경우에서 이 두 경우를 빼주면 된다.

16) [정답] ① (출제자 : 13오인수)

**[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 통해 일반항을 구할 수 있는가?**

[해설]

주어진 식의 양변을 $a_n a_{n+1}$로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2\cdot\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \quad (n \ge 1)$$

이다. $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$이라 하면 $b_1 = 2$이고

$$b_n = 2\cdot b_{n+1}$$

$$b_{n+1} = \boxed{\frac{1}{2}} \times b_n$$

이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면

$$b_n = 2\times\left\{\boxed{\frac{1}{2}}\right\}^{n-1}$$

이다.

$$a_n = a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_n}{a_{n-1}} \quad (n\ge 2)$$

를 이용하여 $a_n$을 구하면

$$a_n = 2\times b_1\times b_2\times b_3\times\cdots\times b_{n-1}$$

$$a_n = 2\times(2)\times\left\{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\right\}\times\left\{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\times\cdots\times\left\{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}$$

$$a_n = 2^n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\boxed{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}} \quad (n\ge 1)$$

이다.

$\therefore\ \dfrac{1}{p}\times f(8) = 2\times\dfrac{6\cdot 7}{2} = 42$이다.

17) [정답] ① (출제자 : 14서재현)

**[출제의도] 무한급수의 성질을 알고 활용할 수 있는가?**

[해설]

부채꼴 DAO와 부채꼴 EOB는 중심각의 크기가 $\dfrac{\pi}{3}$이고, 반지름($\overline{\mathrm{DO}}$, $\overline{\mathrm{EO}}$)의 길이가 1인 부채골이다. 따라서 $R_1$의 색칠된 부분의 넓이는 (부채꼴 DAO의 넓이 − 삼각형 DAO의 넓이)×2 이다.

$$S_1 = \left(\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\times 2 = \frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

닮음비를 구하기 위해 $C_1$의 반지름의 길이를 $r$이라 하고, $C_2$의 중심을 $O_2$, 원 $C_2$와 선분 EO가 만나는 점을 H라 하면, $\angle \mathrm{D_2OH} = \dfrac{\pi}{6}$이므로 $\overline{\mathrm{OO_2}} = 2r$. 따라서 $3r = 1$, $r = \dfrac{1}{3}$

$C_1$과 $C_2$의 닮음비가 $1 : \dfrac{1}{3}$이므로 넓이비는 $1 : \dfrac{1}{9}$.

따라서 공비는 $\dfrac{1}{9}$이다.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1-\frac{1}{9}} = \frac{9}{8}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

18) [정답] ④ (출제자 : 14임현우)

**[출제의도] 중복조합을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?**

[해설]

$a\times b$는 3의 배수가 아니므로

$a = 2^A$, $b = 2^B$라 놓을 수 있다.

($A$, $B$는 음이 아닌 정수)

$c$, $d$는 $2^2\times 3^2$의 약수이면 되므로

$c = 2^C\times 3^{C'}$, $d = 2^D\times 3^{D'}$라 놓을 수 있다.

($C$, $C'$, $D$, $D'$는 음이 아닌 정수)

그러면 $2^A\times 2^B\times 2^C\times 2^D\times 3^{C'}\times 3^{D'} = 2^2\times 3^2$

$A+B+C+D = 2$, $C'+D' = 2$

순서쌍 $(A, B, C, D)$의 개수 = ${}_4\mathrm{H}_2 = {}_5\mathrm{C}_2 = 10$

순서쌍 $(C', D')$의 개수 = 3

=> 순서쌍 $(A, B, C, C', D, D')$의 개수 = $10\times 3 = 30$

순서쌍 $(A, B, C, C', D, D')$과 순서쌍 $(a, b, c, d)$는 일대일대응되므로 두 순서쌍의 개수는 같다.

따라서 순서쌍 $(a, b, c, d)$의 개수는 30

19) [정답] ③ (출제자 : 14임현우)

**[출제의도] 역행렬의 성질을 이용하여 식을 정리할 수 있는가?**

[해설]

ㄱ. (참)

주어진 식 $A^2B + A = E$에서 $A(AB+E) = E$이므로

$A^{-1} = AB+E$로 역행렬이 존재한다.

ㄴ. (참)

주어진 식 $A^2B+A = E$에서 $A(AB+E) = (AB+E)A = E$이므로

$A^2B = ABA$

행렬 $A$의 역행렬이 존재하므로 양변에 $A$의 역행렬을 곱하면

$AB = BA$이다.

ㄷ. (거짓)

$A^3 + A - E = BA^2$에서 $A^3 + A - BA^2 = E$,

$(A^2 + E - BA)A = E$이므로 $A^{-1} = A^2 + E - BA$

ㄱ.에서 $A^{-1} = AB + E$이므로

$A^{-1} = A^2 + E - BA = AB + E$

ㄴ.에서 얻은 $AB = BA$을 이용하여 위의 식을 정리하면

$A^2 = 2AB$, 양변에 $A$의 역행렬을 곱해주면

$A = 2B$이다.

이를 주어진 식 $A^2B + A = E$에 대입하면

$A^2B + A = (2B)^2B + 2B = 4B^3 + 2B = E$

20) [정답] ② (출제자 : 14서재현)

**[출제의도] 1. 정적분과 무한급수의 의미를 이해하고 활용할 수 있는가?**
**2. 함수의 극대와 극소의 의미를 이해하고 있는가?**

[해설]

함수 $g(a)$ 에서 $\dfrac{ak}{n} = x_k$, $\dfrac{a}{n} = \triangle x$ 로 놓으면

$g(a) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{ak}{n}\right) = \int_0^a f(x)dx$ 이 된다.

따라서 $g(a) = \int_0^a (3x^2 + 6x)dx = a^3 + 3a^2$ 이다.

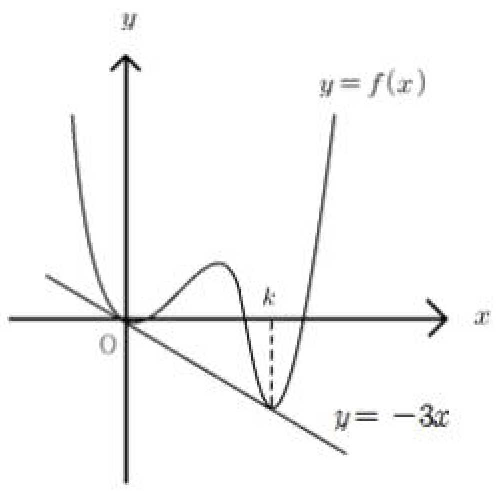
함수 $g(a)$ 의 극댓값과 극솟값을 구하기 위해
함수 $g(a)$ 의 도함수를 구하면
$g'(a) = 3a^2 + 6a = 3a(a+2)$ 가 되므로,
$a = -2$ 에서 극댓값, $a = 0$ 에서 극솟값을 가진다.
, $g(-2) = 4$ 이므로 $M = 4$ $g(0) = 0$ 이므로 $m = 0$
따라서 $M - m = 4$

21) [정답] ④ (출제자 : 11양종현)

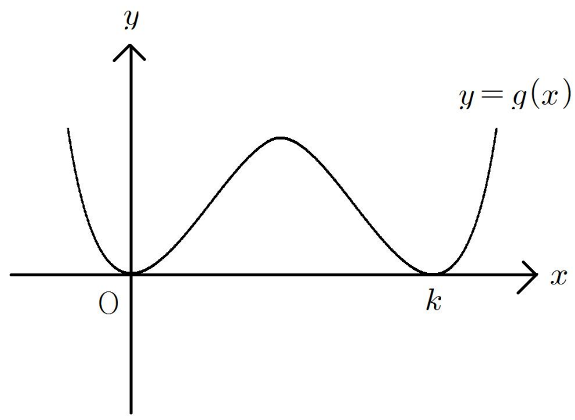
**[출제의도] 1. 사차함수의 그래프의 개형에 대해 파악할 수 있는가?**
**2. 삼차함수의 그래프의 개형을 이용하여 사차함수의 실근의 개수를 구할 수 있는가?**

[해설]

조건 (가)를 만족하려면 좌표평면에서 곡선 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y = -3x$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있어야하며, $f(0)=0$, $f(k) = -3k$ 를 만족해야한다. 즉, 모든 실수 $x$ 에 대하여 $-3x \le f(x)$ 이면서 $f(0)=0$, $f(k) = -3k$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다. (2016 학년도 엡실론 모의고사 A형 1회 21번 문제 참고)




따라서 새로운 함수 $g(x)$ 를 $g(x)=f(x)-(-3x)$ 즉, $g(x)=f(x)+3x$ 라 하면 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 과 $x=k$ 를 중근으로 갖는 사차함수이다.




$\therefore g(x) = x^2(x-k)^2$
$f(x)+3x = x^2(x-k)^2$
$\therefore f(x) = x^2(x-k)^2 - 3x$
(나) 조건에 의하여 $f(2) = -2$ 이므로
$f(2) = 2^2(2-k)^2 - 6 = -2$
$(2-k)^2 = 1$
$\therefore k=1$ 또는 $k=3$ 이다.

( i ) $k=1$ 일 때

$f(x) = x^2(x-1)^2 - 3x$
$= x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x$
$= x(x^3 - 2x^2 + x - 3)$ (조건 $f(0)=0$ 로부터 인수분해)

함수 $f(x)$ 를 $x$ 로 인수분해하고 남은 삼차함수를 $h_1(x)$ 라 하면
$h_1(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$
$h_1'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = (x-1)(3x-1)$
따라서 $h_1(x)$ 는 $x = \dfrac{1}{3}$ 에서 극댓값, $x=1$ 에서 극솟값을 갖는다.
각각의 값들을 구해보면
$h_1\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{27} - \dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{3} - 3 = \dfrac{1-6+9-81}{27} = -\dfrac{77}{27} < 0$
$h_1(1) = 1-2+1-3 = -3 < 0$
이므로 $h_1(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 부호가 같아서 한 개의 실근과 두 개의 허근을 갖는다. 그러므로 함수 $xh_1(x)$, 즉 함수 $f(x)$ 는 두 개의 실근과 두 개의 허근을 가지므로 조건 (다)에 부합하지 않는다.

( ii ) $k=3$ 일 때

$f(x) = x^2(x-3)^2 - 3x$
$= x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 3x$
$= x(x^3 - 6x^2 + 9x - 3)$ (조건 $f(0)=0$ 로부터 인수분해)

같은 방법으로 $h_2(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ 이라 하면
$h_2'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$
따라서 $h_2(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값, $x=3$ 에서 극솟값을 갖는다.
각각의 값들을 구해보면
$h_2(1) = 1-6+9-3 = 1 > 0$
$h_2(3) = 27-54+27-3 = -3 < 0$
이므로 $h_2(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 부호가 달라서 서로 다른 세 실근을 갖는다. 그런데 $h_2(0) = -3 \ne 0$ 이므로 $h_2(x)$ 는 0 이 아닌 서로 다른 세 실근을 갖는다. 그러므로 함수 $xh_2(x)$, 즉 함수 $f(x)$ 는 서로 다른 네 실근을 갖는다. 이는 조건 (다)에도 부합하므로 $f(x) = x^2(x-3)^2 - 3x$ 가 문제에서 요구하는 함수이다.

$\therefore f(1) = 1$

22) [정답] 8 (출제자 : 15유정훈)

**[출제의도] 함수의 극한을 구할 수 있는가?**

[해설]

$x=2$ 에서 주어진 함수가 연속이므로, $x$ 에 2 를 대입할 수 있다.
구하는 답은 8 이다.

23) [정답] 2 (출제자 : 13오현주)

**[출제의도] 정적분의 성질을 알고 연산을 적절히 할 수 있는가?**

[해설]

$$\int_0^a (4x^3+2x)\,dx + \int_{-a}^0 (4x^3+1)\,dx$$

$$= \int_{-a}^a 4x^3\,dx + \int_0^a (2x+1)\,dx = \int_0^a (2x+1)\,dx$$

$$= [x^2+x]_0^a = a^2+a=6$$

$$= [x^2+x]_0^a = a^2+a=6$$

$$\therefore a=2\ (\because a>0)$$

24) [정답] 81 (출제자 : 12양한솔)

**[출제의도] 등비수열의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?**

[해설]

$a_9 = ra_8$이므로 이를 (나) 식에 대입하면
$(r-1)a_8 = 6a_7$
마찬가지로 $a_8 = ra_7$ 이므로 $r(r-1)a_7 = 6a_7$ $(a_7 \neq 0)$
양변을 $a_7$로 나누면 $r(r-1)=6$ 이므로 $r=3, -2$이다.
$a_n > 0$이므로 $r=3$

$$\frac{a_7}{a_3} = r^4 = 81$$

25) [정답] 26 (출제자 : 15김효석)

**[출제의도] 1. 로그부등식의 해를 구할 수 있는가?**
**2. 진수조건을 잘 알고 있는가?**

[해설]

먼저, 로그의 진수조건에 의해 $x-3>0$ 을 만족시켜야 한다.
로그부등식을 풀면
$\log_3(x-3) < 3$
$\log_3(x-3) < \log_3 27$
$x-3 < 27$
$\therefore x < 30$
이를 진수조건을 고려하여 해를 구하면 $3 < x < 30$ 이 된다.
따라서 이 범위에 들어가는 자연수 $x$ 의 개수는 26개가 된다.

26) [정답] 7 (출제자 : 15김효석)

**[출제의도] 정규분포를 따르는 연속확률변수의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?**

[해설]

연속확률변수 $X$가 정규분포 $\mathrm{N}(m, 4^2)$ 을 따른다.
$\mathrm{P}(X \le 46) + \mathrm{P}(X \le 54) = 1$에서
$\mathrm{P}(X \le 46) = 1 - \mathrm{P}(X \le 54)$이므로 $m=50$ 임을 알 수 있다.
$\mathrm{P}(X \ge 56)$ 을 구하기 위해 표준화를 하면

$$\mathrm{P}(X \ge 56) = \mathrm{P}\left(\frac{X-50}{4} \ge \frac{56-50}{4}\right) = \mathrm{P}(Z \ge 1.5)$$

따라서 $k = 0.5 - 0.43 = 0.07$
$\therefore 100k = 7$

27) [정답] 44 (출제자 : 13오현주)

**[출제의도] 다항함수의 미정계수를 이용하여 다항함수를 추론할 수 있는가?**

[해설]

다항함수의 미정계수에 대해서 문제를 해결하기 위해서는 함수의 극한에 대한 기본 성질을 바탕으로 각 경우에 따른 분수함수의 극한에 대해서 다음의 성질을 알아야 한다.

우선, 분수함수의 극한에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ ($\alpha \neq 0$인 상수)이고 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이면, 다음의 두 가지 조건 ㉠,㉡을 만족한다.

㉠ $f(x)$의 차수와 $g(x)$의 차수가 같고,
㉡ 극한값 $\alpha$는 $f(x)$와 $g(x)$의 최고차항의 계수의 비이다.

또한 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ ($\alpha$는 상수)에 대해서,

(1) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ ($\alpha$는 상수)이고 $\lim_{x\to a} g(x) = 0$이면
$\lim_{x\to a} f(x) = 0$이고

(2) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ ($\alpha \neq 0$인 상수)이고 $\lim_{x\to a} f(x) = 0$이면
$\lim_{x\to a} g(x) = 0$이다.

이를 토대로 문제를 해결해보자.

첫 번째 조건 $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x^2+2x-15} = 2$에 대해서, 분수함수의 분모를 인수 분해하여 $x^2+2x-15 = (x-3)(x+5)$을 통해 $f(x)$가 $x-3$을 인수로 가지는 것을 확인할 수 있다.

두 번째 조건 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-2} = 3$을 통해서 $f(x)$의 차수가 2이며 최고차항의 계수가 3 임을 알 수 있고, 따라서 함수 $f$을 $f(x) = 3(x-3)(x-a)$으로 생각할 수 있다.

주어진 조건을 통해 구한 함수 $f(x)$을 첫 번째 조건에 적용해보면,
$\lim_{x\to 3}\frac{3(x-3)(x-a)}{(x-3)(x+5)} = 2$이고 $x-3 \neq 0$이므로
공통인수 $(x-3)$을 약분할 수 있다. 따라서
$\lim_{x\to 3}\frac{3(x-a)}{x+5} = \frac{3(3-a)}{8} = 2$이고 $3(3-a) = 16$이다.
구하고자하는 $f(5)$는, $f(5) = 3(5-3)(5-a) = 6(5-a)$이므로

$f(5)=6\times(\frac{16}{3}+2)=44$이다.

28) [정답] 128 (출제자 : 14임현우)

**[출제의도] 1. 부정적분을 이용하여 원시함수를 구할 수 있는가?**
**2. 정적분을 활용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구할 수 있는가?**
**3. 정적분의 성질을 잘 아는가?**

[해설]

$f'(t)=4t^3-8t+4$ 이므로

$f(t)=t^4-4t^2+4t+C$ ($C$는 적분상수)

곡선 $y=f(x)$는 원점을 지나므로 $C=0$

$f(x)=x^4-4x^2+4x$

$y=x^4-4x^2+4x$, $y=4x$를 연립하여 정리하면,

$x^4-4x^2=x^2(x^2-4)=(x+2)x^2(x-2)=0$

교점의 $x$좌표가 $-2$, $0$, $2$이고 구간 $[-2, 2]$에서 위

$(x+2)x^2(x-2)\le 0$ 이므로

$$S=-\left\{\int_{-2}^{0}(x^4-4x^2)\,dx+\int_{0}^{2}(x^4-4x^2)\,dx\right\}$$

$$=-\int_{-2}^{2}(x^4-4x^2)\,dx$$

$$=-2\int_{0}^{2}(x^4-4x^2)dx$$

$$=\frac{128}{15}$$

$\therefore 15S=128$

[별해]

$(x+2)x^2(x-2)\le 0$ 임을 잘 모르면 그냥

$$S=\left|\int_{-2}^{0}(x^4-4x^2)\,dx\right|+\left|\int_{0}^{2}(x^4-4x^2)\,dx\right|$$

$$=\left|-\frac{64}{15}\right|+\left|-\frac{64}{15}\right|$$

$$=\frac{128}{15}$$

$\therefore 15S=128$

29) [정답] 33 (출제자 : 12황성문)

**[출제의도] 지표와 가수의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?**

[해설]

(나)에서 $6g(x)$가 자연수가 되므로 가수는 $\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{3}{6},\frac{4}{6},\frac{5}{6}$ 중 하나가 될 수 있음을 알 수 있다. (0은 안 된다!)

(다)에서 $f(x^2)$과 $f(\frac{1}{x^2})$의 값은 가수에 따라 달라진다.

$\log x=n+a$ (이 때, $n$은 정수, $0\le a<1$인 실수)라 하자.

| 가수의 범위 | | $0$ | $0<a<\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}<a<1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 지표 | $\log x^2$ | $2n$ | $2n$ | $2n+1$ | $2n+1$ |
| | $\log\frac{1}{x^2}$ | $-2n$ | $-2n-1$ | $-2n-1$ | $-2n-2$ |
| 가수 | $\log x^2$ | $0$ | $2a$ | $0$ | $2a-1$ |
| | $\log\frac{1}{x^2}$ | $0$ | $1-2a$ | $0$ | $2-2a$ |
| $f(x^2)+\frac{1}{2}f(\frac{1}{x^2})=f(x)$ | | $n$ | $n-\frac{1}{2}$ | $n+\frac{1}{2}$ | $n$ |

가수가 $\frac{1}{2}<a<1$일 때, (다) 조건을 만족한다.

(나)와 (다) 조건에 따라 가수가 $\frac{4}{6},\frac{5}{6}$일 때 성립하고

(가) 조건에서 지표 $f(x)=2$라고 하였으므로

성립하는 값은 $x=10^{2+\frac{4}{6}}, 10^{2+\frac{5}{6}}$ 이다.

따라서 $m=10^{2+\frac{4}{6}+2+\frac{5}{6}}=10^{\frac{33}{6}}$

$6\log m=33$

30) [정답] 67 (출제자 : 10최원재)

**[출제의도] 주어진 조건을 이용하여 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?**

[해설]

(나)조건에서 점 A가 원 $(x-b)^2+(y-b)^2=n^2$의 외부 또는 경계의 점이려면 $(b-a)^2+(b-2^a)^2\ge n^2$이여야 하므로

$\sqrt{(b-a)^2+(b-2^a)^2}\ge n$ ⋯ ㉠

(다)조건에서 점 A와 원 사이의 거리의 최솟값은 점 A에서 원의 중심 $(b, b)$까지의 거리에서 반지름 $n$을 뺀 값이므로

점 $\mathrm{A}(a, 2^a)$과 원 $(x-b)^2+(y-b)^2=n^2$ 사이의 거리의 최솟값은

$\sqrt{(b-a)^2+(b-2^a)^2}-n$이 되고,

거리의 최솟값이 10보다 작거나 같으면

$\sqrt{(b-a)^2+(b-2^a)^2}-n\le 10$ 이다.⋯ ㉡

㉠과 ㉡에서 $0\le\sqrt{(b-a)^2+(b-2^a)^2}-n\le 10$

이 식을 정리하면 $n^2\le(b-a)^2+(b-2^a)\le(10+n)^2$이다.

$(i)$ $n=1$인 경우

$1\le(b-a)^2+(b-2^a)^2\le 11^2=121$을 만족하면 된다.

$a=2$일 때, $1\le(b-2)^2+(b-4)^2\le 121$에서

$6^2+8^2=100$, $7^2+9^2=130$이므로 $1\le b\le 10$

$a=3$일 때, $1\le(b-3)^2+(b-8)^2\le 121$에서

$4^2+9^2=97$, $5^2+10^2=125$이므로 $1\le b\le 12$

$a=4$일 때, $1\le(b-4)^2+(b-16)^2\le 121$에서

$b=6$부터 성립하고, $10^2+4^2=116$, $11^2+3^2=130$이므로

$6\le b\le 14$

$a=5$인 경우 $(5, 25)$에서 $y=x$까지의 거리 $d=\frac{20}{\sqrt{2}}=10\sqrt{2}>14$

이므로 자연수 $b$는 존재 하지 않는다.

$\therefore f(1)=10+12+9=31$

$(ii)$ $n=3$ 인 경우

$9 \le (b-a)^2+(b-2^a)^2 \le 13^2=169$ 를 만족하면 된다.

$i)$ 의 경우에서 $(b-a)^2+(b-2^a)^2<9$ 인 경우를 제외하고,

$121<(b-a)^2+(b-2^a)^2 \le 169$ 인 경우를 추가하자.

$a=2$ 일 때, $9 \le (b-2)^2+(b-4)^2 \le 13^2=169$ 에서

$i)$의 경우에서 $(b-2)^2+(b-4)^2<9$인 $b=2,\ 3,\ 4$ 인 경우가

제외되고, $b=11,\ 12$ 인 경우가 추가 되므로 $b=1$ or $5 \le b \le 12$

$a=3$ 일 때, $9 \le (b-3)^2+(b-8)^2 \le 13^2=169$

제외되는 경우는 없고, $b=13,\ 14$ 인 경우가 추가되어 $1 \le b \le 14$

$a=4$ 일 때, $9 \le (b-4)^2+(b-16)^2 \le 13^2=169$ 에서

$b=3$ 이면 $1^2+13^2>169$, $b=4$ 이면 $0^2+12^2 \le 169$ 이므로

$b=4$ 부터 가능하다. 차례대로 대입하여 보면 $(b-4)$의 숫자는 1 씩

작아지고, $(b-16)$의 숫자는 1 씩 커진다. 따라서 $12^2+0^2$이 되는

순간까지 부등식이 성립한다. $b-4=12$ , $b=16$ $4 \le b \le 16$

마찬가지로 $a=5$ 인 경우 만족하는 자연수 $b$ 는 존재 하지 않는다.

$\therefore f(3)=9+14+13=36$

따라서 $(i)$ , $(ii)$에 의해 $f(1)+f(3)=67$

엡실론을 봐주신 모든 수험생 및 선생님 여러분들에게

진심으로 감사의 말씀을 드립니다.

2016학년도 엡실론 모의고사는 이것으로 모두 끝났습니다.

부족한 해설지를 끝까지 읽어주셔서 감사하며,

엡실론을 사랑해주신 수험생 여러분들께 좋은 결과가

있으리라 믿습니다.

수험생 여러분들의 건승을 기원합니다. 화이팅!