[2016학년도 리듬농구 직전 모의평가 수학 영역(A형) 21번]

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 서로 다른 모든 $f(-1)$의 값의 합은? [4점]

(가) $x \leq -1$일 때, 함수 $f(x)$의 최댓값은 16이다.
(나) $-1 \leq x \leq 0$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이다.
(다) $x \geq 0$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 -16이다.

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

$sol)$

삼차함수의 개형은, 최고차항 계수를 양수라고 한정하였을 때, 변곡점에서의 기울기 부호에 따라 세 가지라 볼 수도 있고 아니면 극값의 개수에 따라 두 가지라 볼 수도 있습니다. 이를 보이기 위해 삼차함수가 변곡점 대칭임을 확인해보고 넘어가보겠습니다.

편의상 $g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (단, a, b, c는 실수)라 두겠습니다.

변곡점은 이계도함수의 부호변화로 인하여 그래프의 요철이 바뀌는 지점입니다. 그런데 삼차함수의 이계도함수는 일차함수이므로 이는 반드시 하나의 실근을 가지므로 삼차함수는 오직 하나의 변곡점을 갖습니다. 이를 확인하고자 미분을 거듭 해보면

$$g'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$
$$g''(x) = 6x + 2a$$

가 되어 삼차함수 $g(x)$의 변곡점의 x값은 $-\frac{a}{3}$임을 알 수 있습니다.

이때 조립제법을 이용해서 $g(x)$를 $x + \frac{a}{3}$에 대한 내림차순으로 정리해보면

$$
\begin{array}{cc|cccc}
 & & 1 & a & b & c \\
-\frac{a}{3} &) & & -\frac{a}{3} & -\frac{2}{3}a^2 & -\frac{1}{3}ab + \frac{2}{9}a^3 \\
\hline
 & & 1 & \frac{2}{3}a & b - \frac{2}{3}a^2 & \boxed{-\frac{1}{3}ab + \frac{2}{9}a^3 + c} \\
-\frac{a}{3} &) & & -\frac{a}{3} & -\frac{a^2}{3} & \\
\hline
 & & 1 & \frac{a}{3} & \boxed{b - a^2} & \\
-\frac{a}{3} &) & & -\frac{a}{3} & & \\
\hline
 & & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}
$$

$$g(x) = 1\left(x + \frac{a}{3}\right)^3 + 0\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 + (b - a^2)\left(x + \frac{a}{3}\right)^1 + \left(-\frac{1}{3}ab + \frac{2}{9}a^3 + c\right)$$
$$= \left(x + \frac{a}{3}\right)^3 + p\left(x + \frac{a}{3}\right) + q$$
$$(\text{단, } p = b - a^2, q = -\frac{1}{3}ab + \frac{2}{9}a^3 + c)$$

이때 $g(x)$를 x축 양의 방향으로 $\frac{a}{3}$만큼, y축 양의 방향으로 $-q$만큼 평행이동하면

$$g\left(x-\frac{a}{3}\right)-q=x^3+px=h(x)$$

가 되고, 이는 원점 대칭함수가 됩니다. 즉, $h(x)$는 원점 대칭함수입니다.

따라서, 원점이 $g(x)$의 변곡점 $\left(-\frac{a}{3}, q\right)$에 오도록 $h(x)$를 다시 평행이동한 $g(x)$는 변곡점 대칭함수임을 알 수 있습니다.

흔한 변곡점 대칭함수로 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x$와 같은 삼각함수를 들 수 있는데, 이들은 삼차함수와 달리 무수히 많은 변곡점에 대하여 대칭이지만 삼차함수는 오직 하나의 변곡점만 존재합니다.

다음으로, 삼차함수 $g(x)$의 극값 개수에 따른 개형을 관찰하고자 도함수를 보면

$$g'(x)=3x^2+2ax+b=0 \ \rightarrow D/4=a^2-3b$$

가 되는데, $a^2-3b>0$이면 $g(x)$는 서로 다른 두 극값을 갖고, $a^2-3b \le 0$이면 $g(x)$는 극값을 갖지 않습니다.

이것으로 삼차함수 이론에 대한 설명은 마치고 문제 풀이로 들어가겠습니다.

(가), (나), (다) 조건에서 모두 최댓값과 최솟값을 논하고 있는데, 최댓값과 최솟값은 원래 극값들과 구간 끝값들간에 가장 큰 값 혹은 가장 작은 값으로서 생각할 수 있습니다.

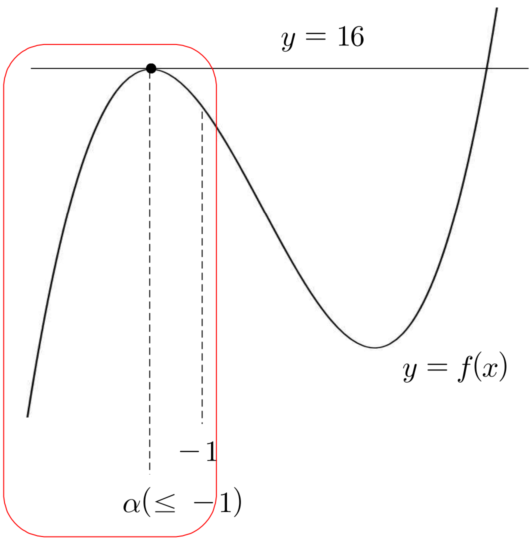
하나의 고정된 삼차함수 $f(x)$가 $x=-1$과 $x=0$을 경계로 최대최소를 각각 정의하고 있습니다. 만약 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않는 경우라면 최고차항의 계수가 1이므로 증가함수이기 때문에 구간 경계가 되는 값에서 최대, 최소가 될테지만 그러면 (나), (다) 조건이 충돌하게 됩니다. 따라서 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (단, a, b, c는 실수)라 하면

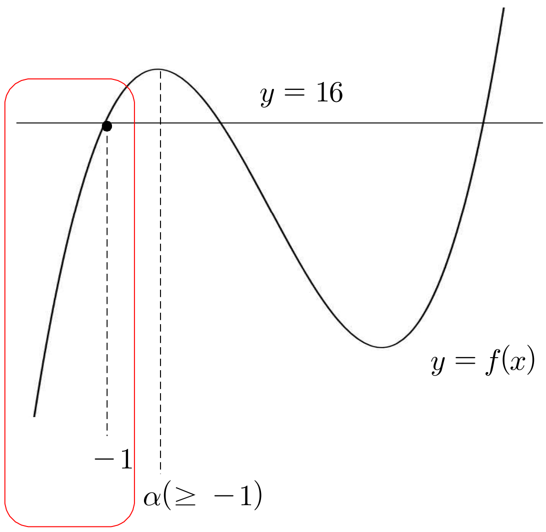
$$f'(x)=3x^2+2ax+b \ \rightarrow \ D/4=a^2-3b>0$$

으로서, $f(x)$는 두 개의 극값(극대와 극소)을 갖습니다.

(가) 조건부터 따져봅시다. $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값, $x=\beta$에서 극솟값을 갖는다 하면

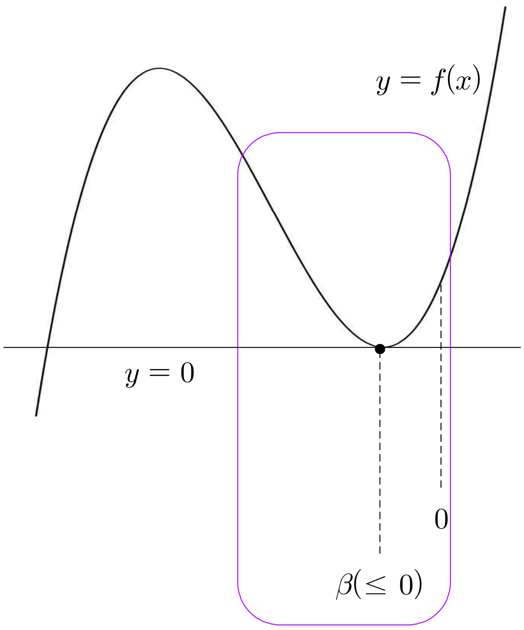
i) $x \le -1$에서 극댓값이 16 ii) $x=-1$에서 구간 끝값이 16



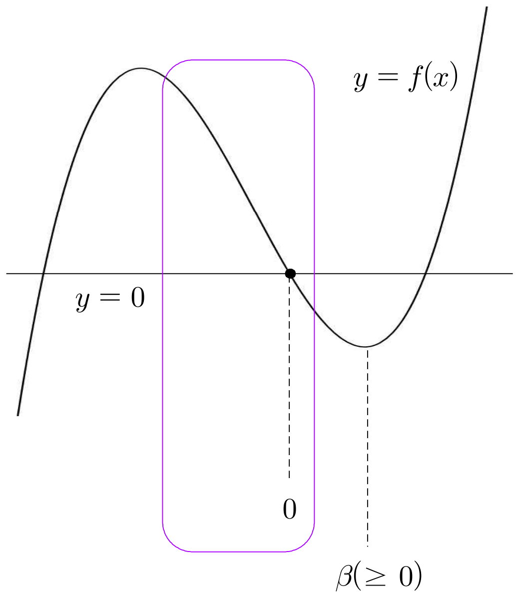


다음으로 (나) 조건을 보면

iii) $x \le 0$에서 극솟값이 0

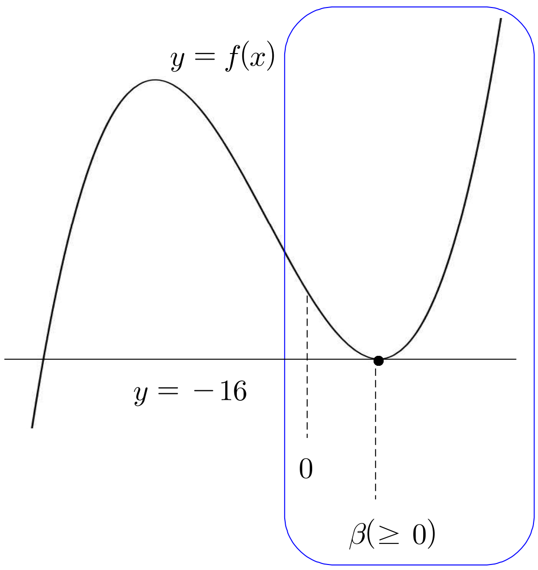


iv) $x = 0$에서 구간 끝값이 0

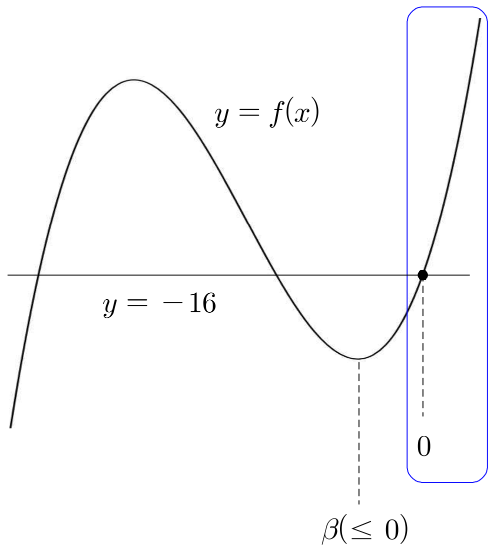


마지막으로 (다) 조건도 따져보면 각 조건들 간의 연결고리가 보입니다.

v) $x \ge 0$에서 극솟값이 0



vi) $x = 0$에서 구간 끝값이 0



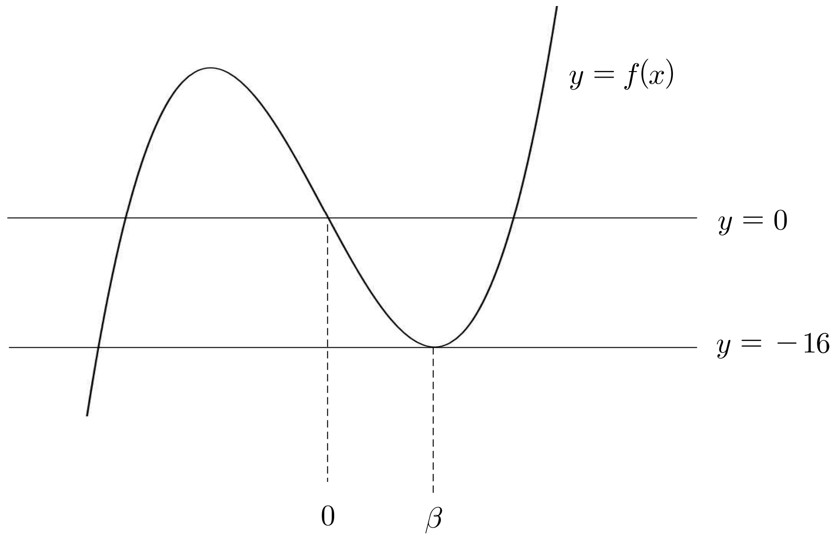
$f(x)$의 개형으로서 (다) 조건에서 만약 vi)의 개형을 택하면 적어도 $f(0) = -16$이 되므로 $-1 \le x \le 0$에서 최솟값이 0이라는 (나) 조건에 위배가 됩니다.

따라서 (다) 조건에서 v)의 개형을 택하여서 (나)의 iv)와 결합해보면 $\beta > 0$에 대하여

$$f(0) = 0, \;\; f(\beta) = -16, \;\; f'(\beta) = 0$$

가 되어야 합니다.

이것으로, $-1 \le x \le 0$에서 iv)이고, $x \ge 0$에서 v)의 개형이 되어야 합니다.



이제 남은 (가) 조건 각각의 개형에 따라 조금 전에 구해둔

$$f(0) = 0,\ \ f(\beta) = -16,\ \ f'(\beta) = 0$$

를 이용해서 $f(x)$의 식을 잡아주면 됩니다.

서로 다른 $f(-1)$을 구하라고 하였으니 적어도 $f(x)$의 개형이 유일하지는 않음을 추론해 낼 수 있으니까 이정도 생각은 해도 괜찮겠죠?

i) $x \le -1$에서 극댓값이 16, 즉 $f(\alpha) = 16$

삼차함수는 변곡점 대칭이고, 극댓값과 극솟값이 각각 $16, -16$이므로 변곡점의 y좌표는 $\dfrac{16 + (-16)}{2} = 0$이 되어야 합니다. 그런데 $f(0) = 0$으로서 원점이 곧 변곡점이 되어야만 합니다. 따라서, $\alpha = -\beta$를 고려하여 식을 세워보면

$$f'(x) = 3(x+\beta)(x-\beta) = 3x^2 - 3\beta^2$$

$$f(x) = x^3 - 3\beta^2 x \ \rightarrow\ f(\beta) = -2\beta^3 = -16$$

이므로 $\beta = 2$가 되어 $f(x) = x^3 - 12x \ \rightarrow\ f(-1) = 11$임을 이끌어 낼 수 있습니다.

ii) $x = -1$에서 구간 끝값이 16, 즉 $f(-1) = 16$

$$f'(x) = 3(x-\alpha)(x-\beta) = 3x^2 - 3(a+\beta)x + 3\alpha\beta$$

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}(\alpha+\beta)x^2 + 3\alpha\beta x$$

이라 잡고서

$$f(\beta) = \beta^3 - \frac{3}{2}(\alpha+\beta)\beta^2 + 3\alpha\beta^2 = -16$$

$$f(-1) = -1 - \frac{3}{2}(\alpha+\beta) - 3\alpha\beta = 16$$

그런데 힘들게 이 연립 방정식을 풀 필요 없이 바로 $f(-1) = 16$임을 이용하면 됩니다.

고로, 답은 $11 + 16 = 27$이 됩니다.