1회 정답									
1	①	2	⑤	3	②	4	⑤	5	②
6	④	7	②	8	①	9	③	10	④
11	③	12	③	13	④	14	①	15	⑤
16	2	17	3	18	40	19	130	20	25
21	51	22	54	23	④	24	③	25	②
26	⑤	27	②	28	①	29	10	30	36

예상 1컷. 80~84
(12.15.21.30.+α)

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\left(\dfrac{2^{3+\sqrt{3}}}{2}\right)^{2-\sqrt{3}}$ 의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

$\frac{2^{3+\sqrt{5}}}{2}=2^{2+\sqrt{5}}$.
$(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})=1$ ∴ $2^1=2$

2. 함수 $f(x)=x^3+2x+1$에 대하여 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-f(1)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$2f'(1)=2\cdot(3+2)=10$.

3. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

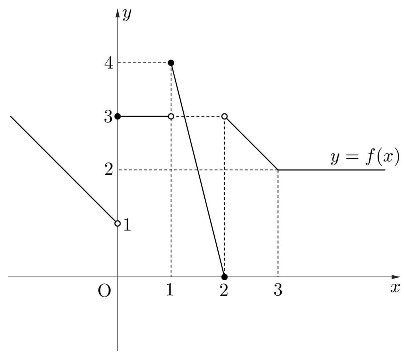
$$a_2=3,\quad a_5+a_6=20$$

일 때, a_1의 값은? [3점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

$a+d=3$. $(a+4d)+(a+5d)=2a+9d=20$.
∴ $d=2$. $a=1$

4. 함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x\to 1-}\overset{3}{f(x)}+\lim\limits_{x\to 2+}\overset{3}{f(x)}$의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

5. $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2}$일 때, $\sin^3\theta + \cos^3\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{11}{16}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$. $\sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{8}$.

$\sin^3\theta + \cos^3\theta = (\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)$

$= \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{3}{8}\right) = \frac{11}{16}$.

6. 다항함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가

$$\lim_{x\to 0-}\{f(x) - g(x)\} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0+}\{f(x) + g(x)\} = 3$$

을 만족시킬 때, $\lim_{h\to 0}\{g(h) + g(-h)\}$의 값은? [3점]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

$\lim_{x\to 0+}\{f(x)+g(x)\} = 3$

$-\,\lim_{x\to 0+}\{f(-x)-g(-x)\} = 1$

$\lim_{x\to 0+}\{g(x)+g(-x)\} = 2$

7. $6^a = 3^b = 5$를 만족시키는 두 실수 a, b에 대하여 $25^{\frac{b-a}{ab}}$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$6 = 5^{\frac{1}{a}}$. $3 = 5^{\frac{1}{b}}$.

$5^{\frac{b-a}{ab}} = 5^{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} = 6\cdot\frac{1}{3} = 2$.

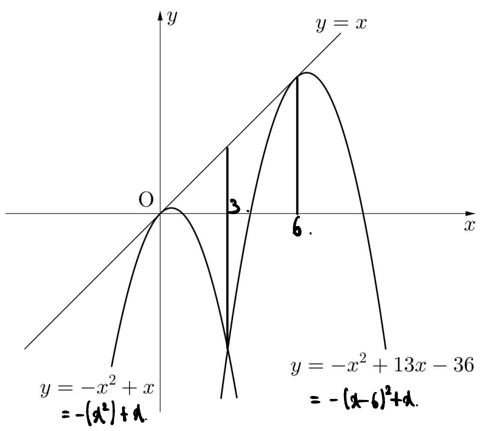
$\therefore 25^{\frac{b-a}{ab}} = 4$.

8. 두 곡선

$$y=-x^2+x,\quad y=-x^2+13x-36$$

과 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30



$2\int_0^3 f(x)dx=18.$

9. 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_2의 값은? [4점]

> (가) $a_4=|a_6|+3$
>
> (나) $\sum_{k=1}^{8} a_k=32$

① $\frac{27}{2}$ ② 15 ③ $\frac{33}{2}$ ④ 18 ⑤ $\frac{39}{2}$

i) $a_6 \geq 0.$

$a_4+a_6=3.$ $a_5=\frac{3}{2}.$

$a_4+a_5=3-d=8.$ $d=-5.$ ok. $\therefore a_2=\frac{3}{2}-3d.$

$=\frac{33}{2}.$

ii) $a_6<0.$

$a_4-a_6=2d=3.$ X.

10. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 위치 $x(t)$가

$$x(t)=t^3-9t^2+15t$$

이다. 시각 $t=a$에서 점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀔 때, 시각 $t=0$부터 시각 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

① 48 ② 45 ③ 42 ④ 39 ⑤ 36

$v(t)=3t^2-18t+15.$ $a=5.$

$v(1)=v(5)=0.$

$x(1)=1-9+15=7.$

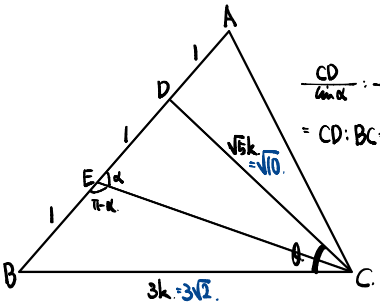
$|x(4)-x(1)|=32.$ $\therefore 7+32=39.$

11. 삼각형 ABC에 대하여 선분 AB를 삼등분하는 두 점 중 점 A에 가까운 점을 D, 점 B에 가까운 점을 E라 하자. 삼각형 ABC와 점 D, E는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{AB} = 3$
> (나) 삼각형 CDE의 외접원의 넓이를 S_1, 삼각형 BCE의 외접원의 넓이를 S_2라 할 때, $S_1 : S_2 = 5 : 9$이다.

$\cos(\angle BCD) = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② 3 ③ $\frac{9}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{15}{2}$



$\dfrac{CD}{\sin\alpha} : \dfrac{BC}{\sin(\pi-\alpha)}$

$= CD : BC = \sqrt{5} : \sqrt{9} = \sqrt{5} : 3$

$\cos\theta = \dfrac{9k^2+5k^2-4}{2\cdot 3k\cdot\sqrt{5}k} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$14k^2-4=12k^2$. $k=\sqrt{2}$. v

$\triangle ABC = \frac{3}{2}\cdot\triangle BCD$

$= \frac{3}{2}\left\{\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$

$= \frac{9}{2}$

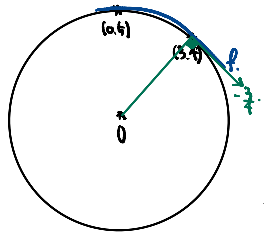
12. 최고차항의 계수가 음수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 원점과 점 $(t,\ f(t))$ 사이의 거리를 $g(t)$라 하자. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $g(t)$는 $t=0$, $t=3$에서만 최솟값 5를 갖는다.

함수 $y=|f(x)|$는 $x=\alpha$에서만 미분가능하지 않다. α의 값은? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

sol 1>



$f(0)=5$. $f'(0)=0$. $f(x)=ax^3+bx^2+5$.

$f(3)=4$. $27a+9b=1$.

$f'(3)=-\frac{3}{4}$. $27a+6b=-\frac{3}{4}$.

$\therefore b=-\frac{1}{12}$, $a=-\frac{1}{108}$ $f(x)=-\frac{1}{108}x^2(x+9)+5$.

by 비율관계. 극소 $f(-6)=-\frac{1}{108}\cdot 36\cdot 3+5=4>0$.

극대 $f(0)=5$.

$f(x)=0$. $x^3+9x^2-540=0$. 실근 $x=\alpha$ 유일.

540의 약수 중 5보다 큰 것부터.

$x=6$. $216+324-540=0$. ok. $\therefore \alpha=6$.

sol 2> g의 정의. $\{g(t)\}^2=\{f(t)\}^2+t^2$.

$t=0$. $g(0)=5$. $f(0)=\pm5$.

$t=3$. $g(3)=5$. $f(3)=\pm4$.

미분. $2g(t)g'(t)=2f(t)f'(t)+2t$.

미분가능 & 극값 ⇒ (미분계수)=0.

$g'(0)=g'(3)=0$. $\begin{cases} f'(0)=0.\ \&\ f(3)=4\text{일 때 } f'(3)=-\frac{3}{4}. \\ f'(0)=0.\ \&\ f(3)=-4\text{일 때 } f'(3)=\frac{3}{4}. \end{cases}$

i) $f(0)=5$. $f(3)=4$; $f(x)=-\frac{1}{108}x^3-\frac{1}{12}x^2+5$.

ii) $f(0)=5$. $f(3)=-4$. ; $f(x)=\frac{3}{4}x^3-\frac{13}{4}x^2+5$. 최고차 음수에 모순.

iii) $f(0)=-5$. $f(3)=4$; $f(x)=-\frac{3}{4}x^3+\frac{13}{4}x^2-5$. $g(-1)=\sqrt{2}<5$. 모순.

iv) $f(0)=-5$. $f(3)=-4$; $f(x)=\frac{1}{108}x^3+\frac{1}{12}x^2-5$. 최고차 음수에 모순.

i)에서 $\{g(x)\}^2-25=\left(-\frac{1}{108}x^3-\frac{1}{12}x^2+5\right)^2+x^2-25=p(x)$라 하면,

$\dfrac{p(x)}{x^2(x-3)^2}=\dfrac{1}{108^2}(x^2+24x+216)>0$ $(x\neq 0.\ 3)$ 이므로

실제로 $g(t)$는 $t=0.\ 3$에서만 최솟값 5를 갖는다.

13. $a_3=7$이고 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$(3a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}-a_n-4)=0$$

을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{9} a_k$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은? [4점]

① 166 ② 162 ③ 158 ④ 154 ⑤ 150

$a_{n+1}=\begin{cases} \frac{1}{3}a_n \\ a_n+4 \end{cases}$ $a_n=\begin{cases} 3a_{n+1} \\ a_{n+1}-4 \end{cases}$

$a_3=7 \to$ X, $a_4=11$
$a_4=11 \to$ X, $a_5=15$
$a_5=15 \to a_6=5$, $a_6=19$
$a_6=5 \to$ X, $a_7=9$
$a_7=9 \to a_8=3$, $a_8=13$
$a_8=3 \to a_9=1$, $a_9=7$
$a_8=13 \to$ X, $a_9=17$
$a_6=19 \to$ X, $a_7=23$
$a_7=23 \to$ X, $a_8=27$
$a_8=27 \to a_9=9$, $a_9=31$

$a_3=7 \to a_2=21$, $a_2=3$
$a_2=21 \to a_1=63$, $a_1=17$
$a_2=3 \to a_1=9$, X

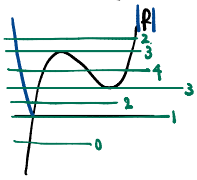
$\therefore M=(63+21)+\cancel{7}+(\cancel{11+15}+19+23+27+31)$
$m=(9+3)+\cancel{7}+(\cancel{11+15}+5+9+3+1)$
$M-m=184-30=154$

14. 함수 $f(x)=2x^3+3x^2+1$에 대하여 x에 대한 방정식 $|f(x)|=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $y=g(t)-g(t-k)$가 $t=\alpha$에서 불연속인 실수 α의 개수가 5 이하가 되도록 하는 실수 k의 값을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열하면 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ (n은 자연수)이다. $\sum_{i=1}^{n}(k_i)^2$의 값은? [4점]

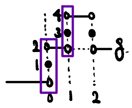
or ↑

① 10 ② 8 ③ 6 ④ 4 ⑤ 2

$f(x)=2x^2(x+\frac{3}{2})+1$. $x=-1$에서 극대 2.



$\therefore g(t)=\begin{cases} 0 & (t<0) \\ 1 & (t=0) \\ 2 & (0<t<1) \\ 3 & (t=1) \\ 4 & (1<t<2) \\ 3 & (t=2) \\ 2 & (t>2) \end{cases}$



$t=0, 1, 2$일 때 g 불연속.

<+1, +1>만큼 평행이동.
<-1, -1>만큼 평행이동.

i) $k=0$; $y=g(t)-g(t)=0$. 실수 전체의 집합에서 연속 ok.

ii) $k\neq0$; $y=g(t)-g(t-k)$는 최대 6곳에서 불연속

$g(t)$와 $g(t-k)$ 모두 불연속인 t가 최소 하나 존재해야 한다.

$\therefore k=-2, -1, 1, 2$

$k=-2$일 때; $t=-2, -1, 0, 1, 2$에서 불연속.

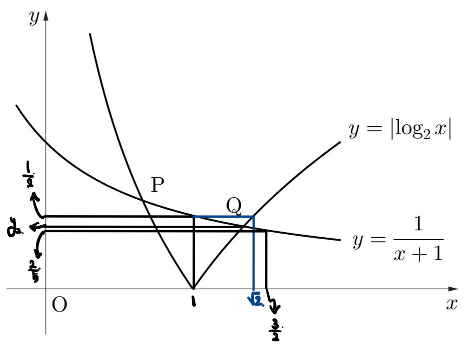
$k=-1$일 때; $t=-1, \cancel{0}, 1, 2$에서 불연속
평행이동. $t=0$에서 연속.

$k=1$일 때; $t=0, \cancel{1}, 2, 3$에서 연속.
평행이동. $t=1$에서 연속

$k=2$일 때; $t=0, 1, 2, 3, 4$에서 불연속

$\therefore k_n: -2, -1, 0, 1, 2$.
$\sum_{i=1}^{n}(k_i)^2=4+1+0+1+4=10$.

15. 그림과 같이 두 함수 $y=|\log_2 x|$, $y=\dfrac{1}{x+1}$의 그래프가 만나는 두 점을 각각 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1<x_2)$라 하자. 다음 중 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $\dfrac{2}{5}<y_2<\dfrac{1}{2}$

ㄴ. 직선 PQ의 기울기를 m이라 하면 $-\dfrac{1}{3}<m<4-3\sqrt{2}$

ㄷ. $y_1<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}<x_1$

① ㄱ　　② ㄱ, ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

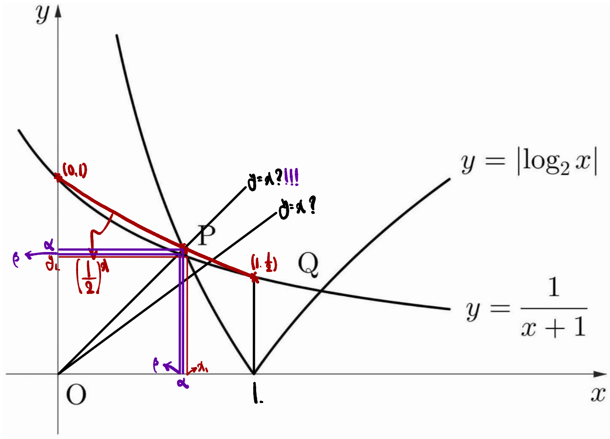
P ; $y_1=-\log_2 x_1=\frac{1}{x_1+1}$
Q ; $y_2=\log_2 x_2=\frac{1}{x_2+1}$

ㄱ $x=1$; $\log_2 1=0$. $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$
$y=\frac12$; $\log_2 x=\frac12$ $x=\sqrt2$. $<\frac32$
$x=\frac32$; $\frac{1}{\frac32+1}=\frac25$

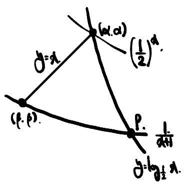
ㄴ $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
$=\dfrac{\frac{1}{x_2+1}-\frac{1}{x_1+1}}{x_2-x_1}$
$=-\dfrac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}$ ∴ $3<(x_1+1)(x_2+1)<2+\frac{3}{\sqrt2}$이 성립하는지...

$x=\frac12$; $|\log_2\frac12|=1>\frac{1}{\frac12+1}=\frac23$. $x_1>\frac12$
$x=\frac{1}{\sqrt2}$; $|\log_2\frac{1}{\sqrt2}|=\frac12<\frac{1}{\frac{1}{\sqrt2}+1}=2-\sqrt2$. $x_1<\frac{1}{\sqrt2}$
∴ $\frac12<x_1<\frac{1}{\sqrt2}$

$1<x_2<\sqrt2$에서
$(\frac12+1)(1+1)=3<(x_1+1)(x_2+1)<(\frac{1}{\sqrt2}+1)(\sqrt2+1)=\frac{1}{\sqrt2}(\sqrt2+1)^2$
$=2+\frac{3}{\sqrt2}$ ok.

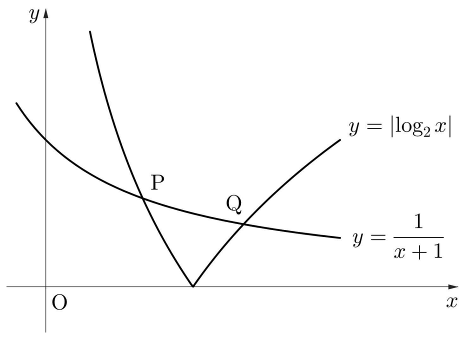


ㄷ x_1 vs y_1 ⇒ $y=x$와 비교.
⇒ 역함수와 비교.
$y=-\log_2 x$의 역함수 $y=(\frac12)^x$.
$0<x<1$에서 $2^x<x+1$ ∴ $(\frac12)^x>\frac{1}{x+1}$
$\log_{\frac12}x=(\frac12)^x=x$. $x=\alpha$.
$\frac{1}{x+1}=x$. $x=\beta=\frac{-1+\sqrt5}{2}$. (∵ $0<x<1$).



$0<x<1$에서 $(\frac12)^x>\frac{1}{x+1}$. $y=x$가 증가함수 $\alpha>\beta$.
$y=\frac{1}{x+1}$ & $y=\log_{\frac12}x$가 감소함수 ∴ $x_1>\alpha$. $y_1<\beta$
∴ $y_1<\beta<\alpha<x_1$. $y_1<\frac{-1+\sqrt5}{2}<x_1$.

15. 그림과 같이 두 함수 $y=|\log_2 x|$, $y=\dfrac{1}{x+1}$의 그래프가 만나는 두 점을 각각 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1<x_2)$라 하자. 다음 중 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $\dfrac{2}{5}<y_2<\dfrac{1}{2}$

ㄴ. 직선 PQ의 기울기를 m이라 하면 $-\dfrac{1}{3}<m<4-3\sqrt{2}$

ㄷ. $y_1<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}<x_1$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

16. $\log_4 144-\log_2 3$의 값을 구하시오. [3점] 2

$\log_2 12-\log_2 3=2.$

17. $\displaystyle\int_0^2 3x|x-1|\,dx$의 값을 구하시오. [3점] 3

sol 1>

$\displaystyle\int_0^1 3x(1-x)dx+\int_1^2 3x(x-1)dx.$

$=-x^3+\frac{3}{2}x^2\Big|_0^1+x^3-\frac{3}{2}x^2\Big|_1^2$

$=3.$

sol 2> $3x|x-1|=3(x-1)|x-1|+3|x-1|.$

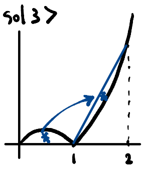
(1.0) 점대칭. 0.

$\displaystyle\int_0^2 3x|x-1|dx=\int_0^2\{\cancel{3(x-1)|x-1|}+3|x-1|\}dx.$

$\displaystyle=2\int_1^2 3|x-1|dx$

$=2\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3\right)=3.$

sol 3>



$\displaystyle\int_0^2 3x|x-1|dx$의 값은 세 점 (1.0).(2.0).(2.6)을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이와 같다.

$\therefore \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 6=3.$

18. 함수 $f(x)=x^3-x$에서 x의 값이 0에서 2까지 변할 때의 평균변화율과 $f'(a)$의 값이 같게 되도록 하는 상수 a에 대하여 $30a^2$의 값을 구하시오. [3점] 40.

$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{6}{2}=3.$ $\left(\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=a^2-1 \; 2.5\ldots\right)$

$f'(a)=3a^2-1=3.$ $\therefore 30a^2=40.$

19. 공비가 같은 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=54, \quad \sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)=90$$

를 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{20}(a_k+b_k)$의 값을 구하시오. [3점] 130.

$C_n=a_n+b_n.$ 등비수열.

$C_n.$ 첫째항부터 제 n항까지 합 $S_n.$

$S_{n+5}-S_n$ 또한 등비수열.

$S_5=54.$ $S_{10}-S_5=36.$

$\therefore S_{15}-S_{10}=24$ $S_{20}-S_{15}=16.$

$\therefore \sum_{k=1}^{20}(a_k+b_k)=S_5+(S_{10}-S_5)+(S_{15}-S_{10})+(S_{20}-S_{15})$
$=54+36+24+16$
$=130.$

20. $0\le x<4$에서 $f(x)=x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수)이고 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$인 함수 $f(x)$가 있다. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수

$$g(x)=\int_0^x\{3f(t)-|f(t)|\}dt$$

가 최솟값과 최댓값을 모두 가질 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. [4점] 25

$3f(t)-|f(t)|=\begin{cases}2f(t) & (f(t)\ge 0)\\ 4f(t) & (f(t)<0)\end{cases}$

실수 전체에서 g 미분계수 존재

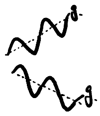
$g'(x)=3f(x)-|f(x)|=\begin{cases}2f(x) & (f(x)\ge 0)\\ 4f(x) & (f(x)<0)\end{cases}$ $x\ne 4n$ (n은 정수)에서 연속 실수 전체에서 정의.

If g'이 $x=0$에서 불연속. g는 $x=0$에서 미분 X. $\therefore g'$은 연속함수.

If f가 $x=0$에서 불연속. $f(0)$과 $\lim_{x\to 0-} f(x)$의 부호가 같을 때. g' 불연속 / 다를 때 불연속 $\therefore f.$ 연속함수 **.

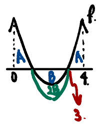
$f(0)=\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 4-}f(x).$ $\therefore 0<x<4$에서 $f(x)$는 $x=2$ 대칭. $a=-4.$

If $\int_0^4\{3f(t)-|f(t)|\}dt=g(4)-g(0)=g(4)\ne 0.$ $g(4)>0.$ / $g(4)<0.$



최대 & 최소 존재 X.

$\therefore g(4)=0.=\int_0^4\{3f(t)-|f(t)|\}dt$



2A+2B=0.
A+B=0.
$\therefore$ 삼차함수 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$는 x축에 접한다.
$F(x)=0$ (세 근의 합)$=3\times 2=6.$
$=0+3+3.$ $f(3)=0.$ $f(1)=0.$

비율관계 파악해서 바로 뚫어도 good.

$\therefore 0\le x<4$에서 $f(x)=(x-1)(x-3).$ $b=3.$ $a^2+b^2=25.$

21. 두 함수

$$f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right),\quad g(x)=\frac{1}{2}\cos kx$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 20 이하의 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오. [4점] 51

(가) 두 집합
$\{p \mid$ 모든 실수 x에 대하여 $f(p-x)=f(p+x)\}$과
$\{q \mid$ 모든 실수 x에 대하여 $g(q-x)=g(q+x)\}$는
서로소가 아니다.

(나) $x=\dfrac{k\pi}{2}$는 방정식 $f(x)=g(x)$의 해가 아니다.

f. 직선 $x=\frac{\pi}{3}+n\pi$ (n은 정수)에 대하여 대칭.
g. 직선 $x=\frac{n}{k}\pi$ (n은 정수)에 대하여 대칭

k. 3의 배수.
$=3.6.9.\cancel{12}.15.18.$

$f\left(\frac{k\pi}{2}\right)\neq g\left(\frac{k\pi}{2}\right)$

$$f\left(\frac{k\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\begin{cases}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{1}{2} & k=4\text{의 배수}+1\\ \sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2} & k=4\text{의 배수}+2.\\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}<-\frac{1}{2} & k=4\text{의 배수}+3.\\ \sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} & k=4\text{의 배수}.\end{cases}$$

$$g\left(\frac{k\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{k^2\pi}{2}\right)=\begin{cases}0. & k\text{가 홀수}\\ \frac{1}{2} & k\text{가 짝수}\end{cases}$$

k가 4의 배수일 때만 $f\left(\frac{k\pi}{2}\right)=g\left(\frac{k\pi}{2}\right)$
$\therefore k\neq 4$의 배수.

$\therefore k=3.6.9.15.18.$ 합 51

22. 최고차항의 계수가 1이고 원점과 점 $(2, 2)$를 지나는 삼차함수 $f(x)$와 실수 k에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(f(x))=k\{f(x)-2\}+2$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(k)$라 하자. 함수 $g(k)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(6)$의 값을 구하시오. [4점] 54

(가) $g(k)=9$를 만족시키는 k의 값의 범위는 $-3<k<1$이다.
(나) $g(1)=7$

22번 풀이는 이전에 타이핑해놓은 것으로 대신합니다.

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

22. $f(x)$가 직선 $y=x$와 원점과 $(2,2)$에서 만난다.
나머지 한 교점의 x좌표를 α라 하면
$f(x)=x(x-2)(x-\alpha)+x$로 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-2)(x-\alpha)+x(x-\alpha)+x(x-2)+1 \\ &= 3x^2-(2\alpha+4)x+2\alpha+1 \\ &= (x-1)(3x-2\alpha-1) \end{aligned}$$

따라서 $f(x)$는 $\alpha \neq 1$일 때 극값
$f(1)=-(1-\alpha)+1=\alpha$를 갖고,
$\alpha=1$일 때는 $x=1$에서 극값을 갖지 않는다.

방정식 $f(f(x))=k\{f(x)-2\}+2\ (-3<k<1)$에서
$f(x)=t$라 하면 방정식 $f(t)=k(t-2)+2$의 해 $t_1,\ t_2,\ t_3$에 대하여 방정식 $f(x)=t_1,\ f(x)=t_2,\ f(x)=t_3$는 각각 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

우선 함수 $y=f(x)$와 직선 $y=k(x-2)+2\ (-3<k<1)$은 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.
$y=f(x)$와 직선 $y=-3(x-2)+2,\ y=x$가 접하는 경우를 살펴보자.

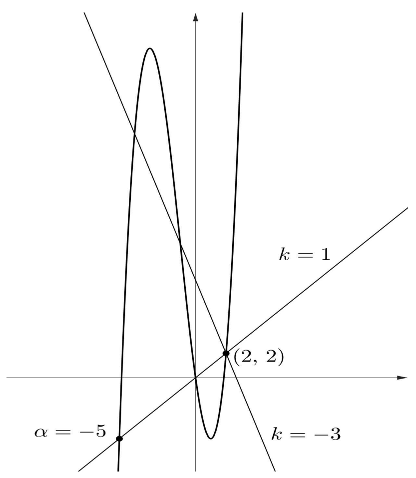
$y=-3(x-2)+2$와 접할 때;
접점의 x좌표를 s라 하면
$f(x)=(x-2)(x-s)^2+(-3x+8)$로 쓸 수 있다.

(세 근의 합)$=0+2+\alpha=2+s+s$
$\therefore s=\dfrac{\alpha}{2}$
(상수항)$=0=8-2s^2$
$\therefore s=\pm 2,\ \alpha=\pm 4$

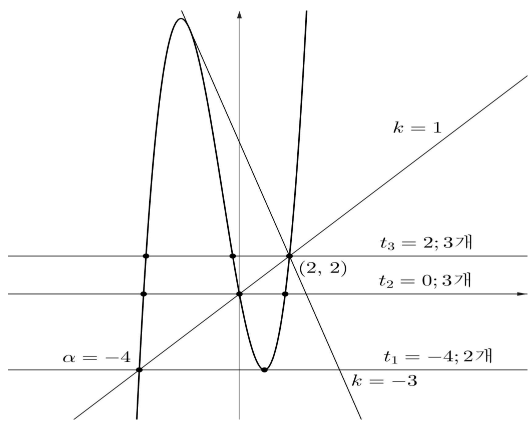
$y=x$와 접할 때;
$x(x-2)(x-\alpha)+x=x$
$x(x-2)(x-\alpha)=0$
$\therefore \alpha=0$ 또는 2

따라서 α의 범위를 다음과 같이 나눠보자.

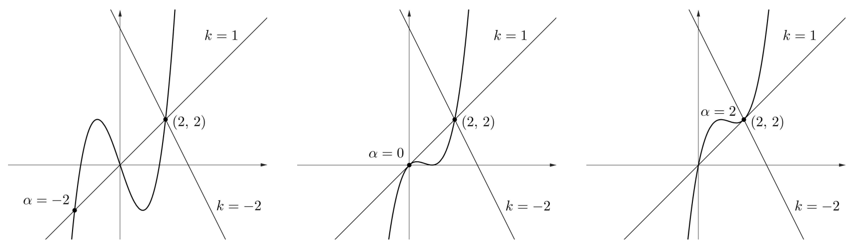
$\alpha<-4$일 때;
$g(k)=9$를 만족하는 $k\leq -3$인 k가 존재한다.



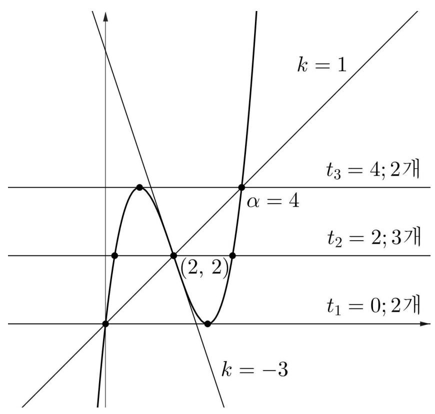
$\alpha=-4$일 때;
$k=1$일 때 방정식 $f(t)=t$의 세 실근은
$t_1=-4,\ t_2=0,\ t_3=2$이고,
세 방정식 $f(x)=t_1,\ f(x)=t_2,\ f(x)=t_3$의 실근의 개수는 각각 2, 3, 3이므로 $g(1)=8$이다.
따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.



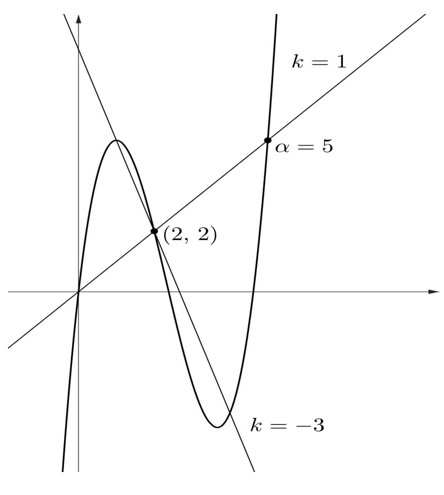
$-4<\alpha<4$일 때;
$g(k)=9$를 만족시키지 않는 $-3<k<1$인 k가 존재한다.



$\alpha=4$일 때;
$g(1)=7$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.



$\alpha>4$일 때;
$g(k)=9$를 만족하는 $k\leq -3$인 k가 존재한다.



따라서 $f(x)=x(x-2)(x-4)+x$이고
$f(6)=54$

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\left(n\sqrt{n^2+4}-n^2\right)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$\lim_{n\to\infty}\left(n\sqrt{n^2+4}-n^2\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+4n^2}-n^2\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{\sqrt{n^4+4n^2}+n^2}=2.$

24. 함수 $f(x)=(ax^2+ax+3)e^x$가 극값을 갖도록 하는 자연수 a의 최솟값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x)=(ax^2+ax+3+2ax+a)e^x$

$=\{ax^2+3ax+(a+3)\}e^x=0.$

이차방정식 $ax^2+3ax+a+3=0$이 서로 다른 두 실근.

$D=9a^2-4a(a+3)=5a^2-12a>0.$

$\therefore a<0$ or $a>\frac{12}{5}$. 자연수 a 최소 3.

25. 양수 t에 대하여 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가

$$x = \ln t - t^2,\ \ y = 2\sqrt{2}\,t + 1$$

일 때, 시각 $t = 1$에서 $t = 2$까지 점 P가 움직인 거리는? [3점]

① $\frac{3}{2} + \ln 2$ ② $3 + \ln 2$ ③ $6 + \ln 2$
④ $3 + 2\ln 2$ ⑤ $6 + 2\ln 2$

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} - 2t.\ \ \frac{dy}{dt} = 2\sqrt{2}$

$(\text{거리}) = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$

$= \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{1}{t} - 2t\right)^2 + 8}\ dt.$

$= \int_1^2 \left|\frac{1}{t} + 2t\right| dt. = \int_1^2 \left(\frac{1}{t} + 2t\right) dt.$

$= \ln t + t^2 \Big|_1^2$

$= \ln 2 + 3.$

26. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{8^n}{2^n+1}\right)$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{k^n}{a_n}$의 값이 존재하도록 하는 정수 k의 개수는? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

급수가 수렴 $\therefore \lim_{n\to\infty}\left(a_n - \frac{8^n}{2^n+1}\right) = 0.$ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{4^n} - \frac{2^n}{2^n+1}\right) = 0.$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n} = 1 = \lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{a_n}.$

$\therefore -4 < k \le 4.$ 8개

27. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$의 부정적분을 $F(x)$라 하자. 함수 $F(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$F(x)-F(-x)=x$$

를 만족시킬 때, $\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ 1

sol 1>

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx = x^2 F(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 2xF(x)dx$$

$$=\{F(1)-F(-1)\} - \left(\int_{-1}^{0} 2xF(x)dx + \int_{0}^{1} 2xF(x)dx\right)$$

$x=-t$로 치환

$$= 1 - \left(\int_{1}^{0} 2(-t)F(-t)(-dt) + \int_{0}^{1} 2xF(x)dx\right)$$

$$= 1 - \int_{0}^{1} 2t\{F(t)-F(-t)\}dt = 1 - \int_{0}^{1} 2t^2 dt$$

$$= \frac{1}{3}$$

sol 2>

$F(x)-F(-x)=x$를 미분. $f(x)+f(-x)=1$.

$\therefore f(x)$ $(0, \frac{1}{2})$ 점대칭

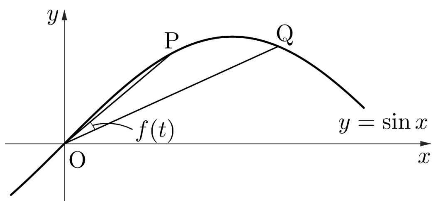
$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2 \left\{f(x) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right\}dx$$

기함수. 0.

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}x^2 dx = \int_{0}^{1} x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}$$

28. 그림과 같이 $0<t<\pi$인 t에 대하여 곡선 $y=\sin x$ 위에 두 점 $\mathrm{P}(t, \sin t)$, $\mathrm{Q}(2t, \sin 2t)$이 있다. 원점 O에 대하여 두 선분 OP, OQ가 이루는 각의 크기를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 0+} \frac{f(t)}{t^2}$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 4

sol 1>

x축의 양의 방향과 { 직선 OP가 이루는 각 α. $\tan\alpha = \frac{\sin t}{t}$
직선 OQ가 이루는 각 β. $\tan\beta = \frac{\sin 2t}{2t} = \frac{\sin t\cos t}{t}$

$f(t) = \alpha - \beta$

$$\tan f(t) = \tan(\alpha-\beta)$$

$$= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$= \frac{\frac{\sin t}{t} - \frac{\sin t\cos t}{t}}{1+\frac{\sin^2 t\cos t}{t^2}} = \frac{t\sin t(1-\cos t)}{t^2+\sin^2 t\cos t} \to 0. \quad \text{as } t\to 0+.$$

$$\lim_{t\to 0+} \frac{f(t)}{t^2} = \lim_{t\to 0+}\left\{\frac{\tan f(t)}{t^2}\cdot\frac{f(t)}{\tan f(t)}\right\}$$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\tan f(t)}{t^2} = \lim_{t\to 0+}\frac{t\sin t(1-\cos t)}{t^2(t^2+\sin^2 t\cos t)}$$

$$= \frac{1\cdot 1\cdot \frac{1}{2}}{1\cdot(1+1\cdot 1)} = \frac{1}{4}.\ \text{수렴.}$$

$$= \lim_{t\to 0+}\frac{\tan f(t)}{t^2}\cdot\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{\tan f(t)}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{4}.$$

sol 2> O. P. Q. 일직선 위 X.

신발끈 ; $\triangle OPQ = \frac{1}{2}|t\sin 2t - 2t\sin t|$

$= t\sin t(1-\cos t)$

$\frac{1}{2}ab\sin\theta$; $\triangle OPQ = \frac{1}{2}\cdot\overline{OP}\cdot\overline{OQ}\cdot\sin f(t)$

$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{t^2+\sin^2 t}\cdot\sqrt{(2t)^2+\sin^2 2t}\cdot\sin f(t)$

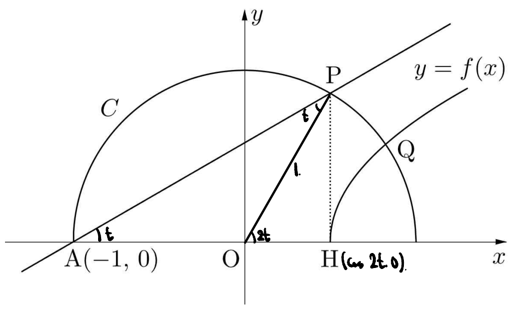
$= \sqrt{t^2+\sin^2 t}\cdot\sqrt{t^2+(\sin t\cos t)^2}\cdot\sin f(t)$

$$\therefore \sin f(t) = \frac{t\sin t(1-\cos t)}{\sqrt{t^2+\sin^2 t}\cdot\sqrt{t^2+(\sin t\cos t)^2}}$$

정리하면 $\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t^2} = \frac{1}{4}$을 얻는다.

단답형

29. 그림과 같이 기울기가 $\tan t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$이고 점 $\mathrm{A}(-1,0)$을 지나는 직선이 곡선 $C: y=\sqrt{1-x^2}$과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}(s,0)$이라 하자. 함수 $f(x)=\sqrt{x-s}$의 그래프와 곡선 C가 만나는 점을 Q라 할 때, 점 Q의 x좌표를 $g(t)$라 하자. $\left\{g'\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\}^2=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 10.



sol 1>

$f(x)=\sqrt{x-\cos 2t}$.

Q ; $\sqrt{x-\cos 2t}=\sqrt{1-x^2}$.

$x^2+x-1-\cos 2t=0$. $x=g(t)$

$t=\frac{\pi}{6}$. $\left\{g\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\}^2+g\left(\frac{\pi}{6}\right)-1-\frac{1}{2}=0$.

$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{-1\pm\sqrt{7}}{2}=\frac{-1+\sqrt{7}}{2}$ $(\because g(t)>-1)$.

t에 대해서 미분. $2g(t)g'(t)+g'(t)+2\sin 2t=0$.

$\therefore g'(t)=\frac{-2\sin 2t}{2g(t)+1}$

$g'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{(-2)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{(-1+\sqrt{7})+1}=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ $\left\{g'\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\}^2=\frac{3}{7}$.

$\therefore p+q=10$.

sol 2>

$\{g(t)\}^2+g(t)+1-\cos 2t=0$. $\left\{g(t)+\frac{1}{2}\right\}^2=\frac{5}{4}+\cos 2t$

$\therefore \{2g(t)+1\}^2=5+4\cos 2t$.

미분. $g'(t)=\frac{-2\sin 2t}{2g(t)+1}$

$\{g'(t)\}^2=\frac{4\sin^2 2t}{\{2g(t)+1\}^2}=\frac{4\sin^2 2t}{5+4\cos 2t}$

$\therefore\left\{g'\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\}^2=\frac{4\cdot\frac{3}{4}}{5+4\cdot\frac{1}{2}}=\frac{3}{7}$.

30. 함수 $f(x)=|\sin x|$에 대하여 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\int_0^t|f(x)-f(t)|\,dx$$

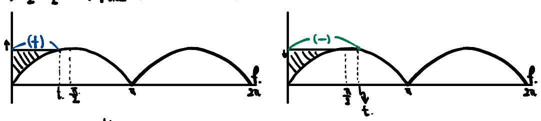
라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 극값을 갖고 $0<\alpha<2\pi$인 모든 α의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$($m$은 자연수)라 할 때,

$\frac{1}{\pi}\left\{\sum_{i=1}^{m}(i+1)\alpha_i+\lim_{t\to 2\pi-}g'(t)\right\}$의 값을 구하시오. [4점] 36.

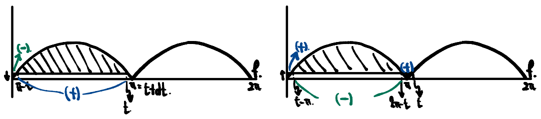
sol 1> 변화율...

증가→감소. or 감소→증가일 때 극값.
(+)길이=(−)길이일 때 극값.

$t=\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$; 극값을 갖는다. $\therefore \alpha=\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$



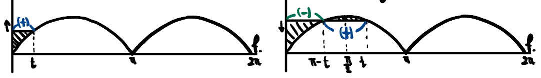
$t=\pi$; 극값을 갖는다. $\therefore \alpha=\pi$



$0<t<\frac{\pi}{2}$; 증가만. 극값 X.

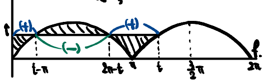
$\frac{\pi}{2}<t<\pi$; $t-(\pi-t)=(\pi-t)$인 $t=\alpha$에서 극값

$\therefore \alpha=\frac{2}{3}\pi$



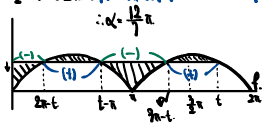
$\pi<t<\frac{3}{2}\pi$; $(t-\pi)+\{t-(2\pi-t)\}=\{(2\pi-t)-(t-\pi)\}$인 $t=\alpha$에서 극값

$\therefore \alpha=\frac{6}{5}\pi$



$\frac{3}{2}\pi<t<2\pi$; $\{t-(3\pi-t)\}+\{(t-\pi)-(2\pi-t)\}=\{(3\pi-t)-(t-\pi)\}+(2\pi-t)$인 $t=\alpha$에서 극값

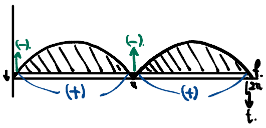
$\therefore \alpha=\frac{12}{7}\pi$



$\therefore m=6$.

작은 것부터 나열. α_n : $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2}{3}\pi$, π, $\frac{6}{5}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{12}{7}\pi$.

$t\to 2\pi-$. ; $2\pi-t=h$라 하면 $h\to 0+$.



$\therefore \lim_{t\to 2\pi-}g'(t)=\lim_{\substack{t\to 2\pi-\\ h\to 0+}}(t-3h)$

$=2\pi$

$\therefore \frac{1}{\pi}\left\{\sum_{i=1}^{m}(i+1)\alpha_i+\lim_{t\to 2\pi-}g'(t)\right\}=(1+2+4+6+9+12)+2$.

$=36$.

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

sol 2> 식으로...

$0 \le x \le 2\pi$ 에서 $f(x) = \begin{cases} \sin x & (0 \le x < \pi) \\ -\sin x & (\pi \le x \le 2\pi) \end{cases}$

(*) 연속함수 $f(x)$의 부정적분 $F(x)$.
$g.h.$ 미분가능. then

$\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt = F(t)\Big|_{g(x)}^{h(x)} = F(h(x)) - F(g(x))$

& $\frac{d}{dx}\left\{\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt\right\} = \frac{d}{dx}\left\{F(h(x)) - F(g(x))\right\} = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$.

$0<t<\frac{\pi}{2}$; $g(t) = \int_0^t |\sin t - \sin x|dx = \int_0^t (\sin t - \sin x)dx$

$= t\sin t - \int_0^t \sin x\, dx$. $\quad \therefore g'(t) = \sin t + t\cos t - \sin t = t\cos t$.

$\frac{\pi}{2} \le t < \pi$; $g(t) = \int_0^t |\sin t - \sin x|dx = \int_0^{\pi-t}(\sin t - \sin x)dx + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^t (\sin x - \sin t)dx$.

$= \left\{(\pi - t)\sin t - \int_0^{\pi-t} \sin x\, dx\right\} + \left\{2\int_{\frac{\pi}{2}}^t \sin x\, dx - (2t-\pi)\sin t\right\}$.

$= (2\pi - 3t)\sin t - \int_0^{\pi-t}\sin x\, dx + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^t \sin x\, dx$.

$\therefore g'(t) = \left\{-\cancel{3\sin t} + (2\pi - 3t)\cos t\right\} - \left\{\cancel{\underbrace{\sin(\pi - t)\cdot(-1)}_{\text{by }(*)}}^{\sin t} + 2\sin t\right\} = (2\pi - 3t)\cos t$.

$\pi \le t < \frac{3}{2}\pi$; $|\sin t| = -\sin t$.

$g(t) = 3\int_0^{t-\pi}(-\sin t - \sin x)dx + 2\int_{t-\pi}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x - (-\sin t))dx$

$= \left\{-3(t-\pi)\sin t + 2\left(\frac{\pi}{2} - (t+\pi)\right)\sin t\right\} - 3\int_0^{t-\pi}\sin x\, dx + 2\int_{t-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\, dx$.

$= (-5t + 6\pi)\sin t - 3\int_0^{t-\pi}\sin x\, dx + 2\int_{t-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\, dx$.

$\therefore g'(t) = \left\{\cancel{-5\sin t} + (-5t+6\pi)\cos t\right\} - \left\{\cancel{3\sin(t-\pi) - 2\sin(t-\pi)\cdot\underbrace{(-1)}_{\text{by }(*)}}\right\}$.

$= (-5t + 6\pi)\cos t$.

$\frac{3}{2}\pi \le t \le 2\pi$; $g(t) = 3\int_0^{2\pi - t}((-\sin t) - \sin x)dx + 4\int_{2\pi-t}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x - (-\sin t))dx$.

$= \left\{3(2\pi - t)(-\sin t) + 4\left(\frac{\pi}{2} - (2\pi - t)\right)(-\sin t)\right\} - 3\int_0^{2\pi-t}\sin x\, dx + 4\int_{2\pi-t}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\, dx$

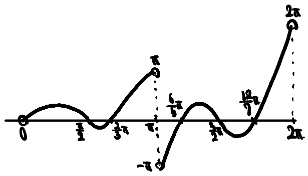
$= (7t - 12\pi)\sin t - 3\int_0^{2\pi-t}\sin x\, dx + 4\int_{2\pi-t}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\, dx$.

$\therefore g'(t) = \left\{\cancel{7\sin t} + (7t - 12\pi)\cos t\right\} - \left\{\cancel{3\sin(2\pi - t)\cdot(-1)\ \ 4\sin(2\pi - t)\cdot\underbrace{(-1)}_{\text{by }(*)}}\right\}$

$= (7t - 12\pi)\cos t$.

$\therefore g'(t) = \begin{cases} t\cos t & (0<t<\frac{\pi}{2}) \\ (2\pi - 3t)\cos t & (\frac{\pi}{2}<t<\pi) \\ (-5t+6\pi)\cos t & (\pi<t<\frac{3}{2}\pi) \\ (7t - 12\pi)\cos t & (\frac{3}{2}\pi<t<2\pi) \end{cases}$

$y = g'(t)\ (0<t<2\pi)$의 그래프는 다음과 같다.



$\therefore m = 6$. α_n: ________.

$\lim_{t \to 2\pi-} g'(t) = 2\pi$.