‘미적분 백분위 99 쌉가능한 어둠의 적분 스킬’
(나만 알기 아까운 수학 필수 개념 #3)

[서론]

수학 2에서는 다항함수의 적분만 배우므로 문제의 난이도는 별개이지만, 적분 자체의 난이도는 매우 낮다.
하지만 미적분에서는 치환적분법과 부분적분법을 이용하여 낯선 함수들을 적분하므로 숙련되기 전까지는 적분 자체의 난이도 또한 매우 좆같다.

이번 글에서는 대학교 대수학 과정 중 배우는 계산 알고리즘을 소개할 것이다.
이를 통해 지수, 로그, 삼각, 다항함수만으로 구성된 거의 모든 식을 적분할 수 있게된다.
또한, 내가 수많은 문제를 풀며 얻은 경험을 공유하고자 한다.
이를 통해 어떤 상황에 치환적분, 부분적분을 적용해야 하는지 배울 수 있을 것이다.

[목차]

고등학교 수준에서 나올 수 있는 거의 모든 적분 내용을 다뤘다. 능숙하게 사용할 수 있도록 부단히 훈련하자.

[본론]

들어가기에 앞서 : 부분적분은 버거워도 할줄은 알아야 하고, 치환적분은 완벽히 숙련된 상태에서 봐야 학습효율이 좋다.

1. 암기 해야하는 적분식

완벽하게 암기해야 한다.

1) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ 꼴 $\rightarrow$ $\ln|f(x)|+C$ ($\ln$ 적분)

2) 삼각함수의 적분

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$
$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$
$$\int \sec x \times \tan x\,dx = \sec x + C$$

3) $f(ax+b)$ 꼴 $\rightarrow$ $\dfrac{1}{a}F(ax+b)+C$

4) $\dfrac{1}{x^a}$ $\rightarrow$ $\dfrac{1}{(a-1)x^{a-1}}+C$

5) $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 꼴 $\rightarrow$ $f(x)g(x)+C$

6) $f(x)+xf'(x)$꼴 $\rightarrow$ $xf(x)+C$

2. 부분적분의 활용 (도표적분법 - 대학과정)

도표적분법이란 부분적분의 반복성을 이용해 계산을 편하게 하기 위해 만들어진 계산 알고리즘이다.
쉽게 말해서 조립제법처럼 계산을 위한 체계이다.
증명은 생략한다.

도표적분법은 두 개의 함수가 곱해졌을 때 사용할 수 있다.
즉 어떤 함수를 도표적분법을 이용하여 적분하고 싶다면 두 개의 함수로 분리해야 한다.

아래와 같이 D(미분), I(적분) 칸을 그리고 두 개의 함수 중에 미분할 함수와 적분할 함수를 정한다.

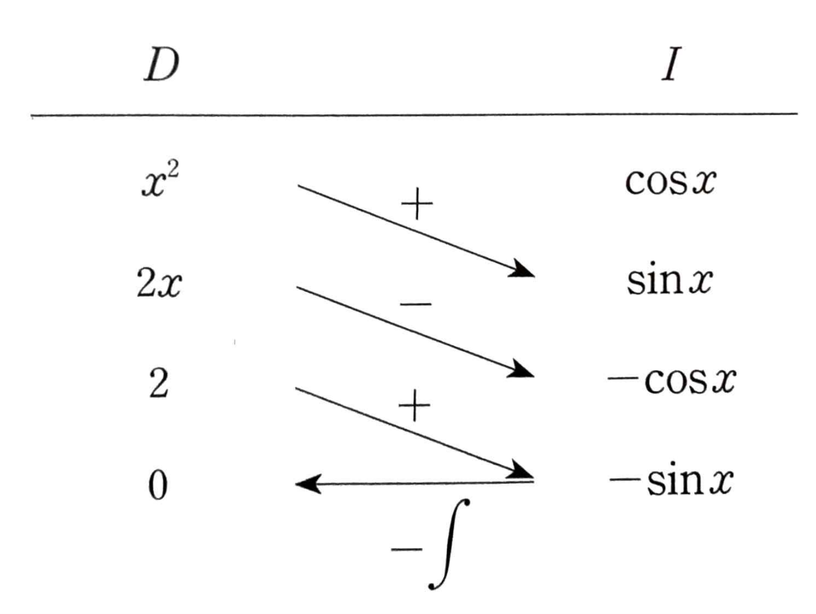
D	I

$ex)$ $f'(x) = x^2 \times \cos x$

미분할 함수는 아래로 계속 미분 해나가고, 적분할 함수는 아래로 계속 적분 해나간다. 아래와 같이 사선으로 선을 그으면서 +, -를 교대로 써나간다.

D		I
x^2	$+$	$\cos x$
$2x$	$-$	$\sin x$
2	$+$	$-\cos x$
0		$-\sin x$

충분히 간단한 함수로 미분된 것 같으면 세로로 선을 긋고 인테그랄$\left(\int\right)$을 표시한다. 아래처럼 표를 완성했으면 위에서부터 아래로 가면서 사선으로 짝지어진 함수를 곱하고 앞에 주어진 부호를 쓴다.



$$f(x) = \int x^2 \cos x\, dx = +(x^2 \sin x) - \{2x \times (-\cos x)\} + \{2 \times (-\sin x)\} - \int 0 \times (-\sin x)\, dx$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\sin x - \int 0\, dx$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\sin x + C$$

3. 적분 상황별 인지 방법

적분 상황은 크게 세 가지로 분류할 수 있다.
1) 분수식
2) 곱적분 (식이 곱의 꼴인 상황)
3) 합성함수, 루트식

해법)

1) 분수식은 $\ln$ 적분이 가능한지 확인한 후 불가능하면 몫의 식을 곱적분 형태로 바꾸거나 [1]부분분수로 분해한다. 용어 설명은 후에 자세히 서술하겠다.

$ex1)$ $\dfrac{-\sin x}{\cos x}$ 은 $\ln$ 적분이 가능하므로, 적분하면 $\ln(|\cos x|)+C$

* 주의 : 절댓값이랑 적분상수 빼먹으면 시험 조진다.

$ex2)$ $\dfrac{1}{x^2-x-2}$ 은 $\ln$ 적분이 불가능하므로,

부분분수로 바꾸면,

$\dfrac{1}{(x-2)(x+1)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+1}\right)$,

이 상태에서 각각 $\ln$적분 하면,

$\dfrac{1}{3}(\ln|x-2|-\ln|x+1|)+C=\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|+C$

---

1) $\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$

2) 곱의 꼴로 이루어진 식은 해법이 2가지이다.

2-1) 곱해진 식 간의 경향성이 아예 다른 경우
도표적분법을 이용한다.

$ex)$ $e^x \times \sin x$ (지수함수×삼각함수)

2-2) 곱해진 식 간의 미분관계가 성립하는 경우
치환적분법을 이용한다.

$ex1)$ $\int \sin x \cos x \, dx$ ($\sin x$를 미분하면 $\cos x$)

이 경우에는 원함수($\sin x$를 t로 치환하여 해결한다.)

$t = \sin x$

$dt = \cos x \, dx$

$$\rightarrow \int t \, dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$$

$ex2)$

$$\int \cos^5 x \, dx = \int \cos^2 x \times \cos^2 x \times \cos x \, dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \times \cos x \, dx$$

($\sin x$를 미분하여 곱해진 $\cos x$를 얻어낼 수 있다.)

$t = \sin x$

$dt = \cos x \, dx$

$$\rightarrow \int (1 - t^2)^2 dt = \int (t^4 - 2t^2 + 1) \, dt = \frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + t + C$$

$$= \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \sin x + C$$

3) 합성함수, 루트 안에 식이 포함된 경우는 다음과 같이 치환적분을 하는 것이 가장 빠르다. 경험상 루트 꼴의 식은 루트 전체를 치환하는 것이 편했다.

$$ex1)\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$$

$$t=\sqrt{\ln x}$$

$$t^2=\ln x$$

$$2t\ dt=\frac{1}{x}dx$$

$$\rightarrow \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx=\int t\times 2t\times dt=\frac{2}{3}t^3+C=\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}+C$$

4. 최종 정리

$$\begin{cases} \text{분수식} \rightarrow \ln\text{적분} \\ \text{곱적분} \begin{cases} \text{치환적분} & (\text{함수식 간에 미분관계가 성립}) \\ \text{부분적분 (도표적분법)} & (\text{함수식 간의 경향성이 다를때}) \end{cases} \\ \text{합성함수, 루트식} \rightarrow \text{치환적분} \end{cases}$$