개념서

해설편

COMPACT

고1

수학(상)

COMPACT 수(상)

1) $-y^2-10y+1+(3y+1)x+2x^2$

x에 대하여 차수가 낮은 항부터 정리하면
$-y^2-10y+1+(3y+1)x+2x^2$

2) 풀이참조

(1) $\mathrm{P}=4x^3+(5y^3-2y^4)x^2+(3y^2-4)x+5y^5+2y+6$
(2) $\mathrm{P}=(4x^3-4x+6)+2y+3xy^2+5x^2y^3-2x^2y^4+5y^5$

(1) x에 관한 삼차의 다항식이므로 x^3의 항부터 정리해 본다.
x^3의 항 …… $4x^3$
x^2의 항 …… $-2x^2y^4+5x^2y^3=(5y^3-2y^4)x^2$
x의 항 …… $3xy^2-4x=(3y^2-4)x$
x를 포함하지 않는 항 …… $5y^5+2y+6$

(2) 위와 같은 방법으로 하여 y를 포함하지 않는 항,
y의 항, y^2항, y^3의 항, y^4의 항, y^5의 항의 순으로 정리한다.

3) 풀이참조

(1)
$$(-x^2y^3z)^5\div(-xy^2z^4)^3=(-x^{2\times5}y^{3\times5}z^5)\div(-x^3y^{2\times3}z^{4\times3})$$
$$=\frac{x^{10}y^{15}z^5}{x^3y^6z^{12}}=\frac{x^{10-3}y^{15-6}}{z^{12-5}}=\frac{x^7y^9}{z^7}$$

(2) $(6a^4b^5c^3)^2\times(-2ab^2)^3=6^2a^{4\times2}b^{5\times2}c^{3\times2}\times(-2)^3a^3b^{2\times3}$
$=36\times(-8)\times a^{8+3}b^{10+6}c^6$
$=-288a^{11}b^{16}c^6$

4) 풀이참조

(1) $\{(a^l)^m\}^n=(a^{lm})^n=a^{lmn}$
(2) $(-a)^3\times(-a)^5=(-a)^8=(-1)^8\times a^8=a^8$

(3) $\left(\frac{q^2}{p^3}\right)^4\div\left(\frac{q^4}{p^2}\right)^3=\frac{q^{2\times4}}{p^{3\times4}}\div\frac{q^{4\times3}}{p^{2\times3}}=\frac{q^8}{p^{12}}\times\frac{p^6}{q^{12}}$
$=\frac{1}{p^{12-6}q^{12-8}}=\frac{1}{p^6q^4}$

5) $x^3-3x^2y+2xy^2+3xy-3y^2$

$(x^2-2xy+3y)(x-y)=x^3-x^2y-2x^2y+2xy^2+3xy-3y^2$
$=x^3-3x^2y+2xy^2+3xy-3y^2$

6) $2x^4-x^2y-y^2$

$(x^2-y)(2x^2+y)=2x^4+x^2y-2x^2y-y^2$
$=2x^4-x^2y-y^2$

7) ④

$(1+2x+3x^2+4x^3)(4+3x+2x^2+x^3)$의 전개식에서 x^4항은
$2x\cdot x^3+3x^2\cdot2x^2+4x^3\cdot3x=2x^4+6x+12x^4=20x^4$
따라서 x^4의 계수는 20이다.

8) ③

$(3x-1)^3(x-2)^2$
$=\{(3x)^3-3(3x)^2+3\cdot3x-1\}(x^2-4x+4)$
$=(27x^3-27x^2+9x-1)(x^2-4x+4)$
이 식의 전개식에서 x^3항은
$27x^3\cdot4+(-27x^2)\cdot(-4x)+9x\cdot x^2$
$=108x^3+108x^3+9x^3=225x^3$
따라서 x^3의 계수는 225이다.

9) -9

$(x^2-x+1)(x^2-x+k)$의 전개식에서 x^2항은
$x^2\cdot k+(-x)\cdot(-x)+1\cdot x^2=(k+2)x^2$
…………………………………………………………… (가)

x^2의 계수가 10이므로

$k+2=10 \quad \therefore \ k=8$

…………………………………………………………… (나)

전개식에서 x항은

$-x \cdot k+1 \cdot (-x)=(-k-1)x$

…………………………………………………………… (다)

이므로 x의 계수는

$-k-1=-8-1=-9$

…………………………………………………………… (라)

<다른풀이>

$x^2-x=X$로 놓으면

$(x^2-x+1)(x^2-x+k)$

$=(X+1)(X+k)$

$=X^2+(k+1)X+k$

$=(x^2-x)^2+(k+1)(x^2-x)+k$

$=(x^4-2x^3+x^2)+(k+1)x^2-(k+1)x+k$

$=x^4-2x^3+(k+2)x^2-(k+1)x+k$

x^2의 계수가 10이므로

$k+2=10 \quad \therefore \ k=8$

따라서 x의 계수는 $-(k+1)=-9$

10) ②

$(x+2x^2+3x^3+ \cdots +10x^{10})^2$

$=(x+2x^2+3x^3+ \cdots +10x^{10})(x+2x^2+3x^3+ \cdots +10x^{10})$

이 식의 전개식에서 x^5항은

$x \cdot 4x^4+2x^2 \cdot 3x^3+3x^3 \cdot 2x^2+4x^4 \cdot x$

$=4x^5+6x^5+6x^5+4x^5=20x^5$

따라서 x^5의 계수는 20이다.

11) $a^2+4b^2+c^2+4ab-4bc-2ca$

$(a+2b-c)^2$

$=a^2+(2b)^2+(-c)^2+2 \cdot a \cdot 2b+2 \cdot 2b \cdot (-c)+2 \cdot (-c) \cdot a$

$=a^2+4b^2+c^2+4ab-4bc-2ca$

12) $x^3+3x^2-18x-40$

$(x+2)(x-4)(x+5)$

$=x^3+(2-4+5)x^2+(-8-20+10)x+2 \cdot (-4) \cdot 5$

$=x^3+3x^2-18x-40$

13) $8a^3+b^3-c^3+6abc$

$(2a+b-c)(4a^2+b^2+c^2-2ab+bc+2ca)$

$=(2a)^3+b^3+(-c)^3-3 \cdot 2a \cdot b \cdot (-c)$

$=8a^3+b^3-c^3+6abc$

14) 풀이참조

(1) $x^3-3x^2-10x+24$

(2) $x^3-y^3+3xy+1$

(3) a^8-b^8

(1) $(x-2)(x+3)(x-4)$

$=x^3+(-2+3-4)x^2+\{(-2) \cdot 3+3 \cdot (-4)$

$\qquad +(-4) \cdot (-2)\}x+(-2) \cdot 3 \cdot (-4)$

$=x^3-3x^2-10x+24$

(2) $(x-y+1)(x^2+y^2+xy-x+y+1)$

$=\{x+(-y)+1\}\{x^2+(-y)^2+1^2-x \cdot (-y)-(-y) \cdot 1-1 \cdot x\}$

$=x^3+(-y)^3+1^3-3 \cdot x \cdot (-y) \cdot 1$

$=x^3-y^3+3xy+1$

(3) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$

$=(a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$

$=(a^4-b^4)(a^4+b^4)$

$=a^8-b^8$

15) -2

$(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)-(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$

$=(3x+y)\{(3x)^2-3x \cdot y+y^2\}-(x-3y)\{x^2+x \cdot 3y+(3y)^2\}$

$=(3x)^3+y^3-\{x^3-(3y)^3\}$

$=27x^3+y^3-(x^3-27y^3)$

$= 26x^3 + 28y^3$
$= ax^3 + by^3$
따라서 $a = 26$, $b = 28$이므로
$a - b = -2$

16) 45

$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 3^3 - 3 \cdot (-2) \cdot 3$
$= 27 + 18 = 45$

17) 7

$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$

18) $\pm\sqrt{5}$

$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 = 3^2 - 4 = 5$
$\therefore\ x - \frac{1}{x} = \pm\sqrt{5}$

19) ②

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 3$에서 $\frac{a+b}{ab} = 3$
이때 $ab = 2$이므로
$\frac{a+b}{ab} = 3 \quad \therefore\ a + b = 6$
$\therefore\ (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = 6^2 - 4 \cdot 2 = 28$
그런데 $a > b$이므로 $a - b = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

20) 65

$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$
$= 9^2 - 2 \cdot 8 = 65$

21) ①

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$에서
$3^2 = 15 + 2(ab+bc+ca)$
$\therefore\ ab + bc + ca = -3$
$\therefore\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{-3}{3} = -1$

22) -1

$x + y + z = 1$의 양변을 제곱하면
$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 1$
$x^2 + y^2 + z^2 = 3$이므로 $xy + yz + zx = -1$
$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$
$1 - 3xyz = 1 \cdot \{3 - (-1)\}$, $3xyz = -3$
$\therefore\ xyz = -1$

23) $-5x^2 + 3xy - 2y^2$

$A - B = -3x^2 + 2xy - 2y^2 \quad \cdots\cdots$ ㉠
$2A + B = xy - 4y^2 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠+㉡을 하면
$3A = -3x^2 + 3xy - 6y^2$
$\therefore\ A = -x^2 + xy - 2y^2$
이것을 ㉠에 대입하면
$(-x^2 + xy - 2y^2) - B = -3x^2 + 2xy - 2y^2$
$\therefore\ B = (-x^2 + xy - 2y^2) - (-3x^2 + 2xy - 2y^2)$
$= -x^2 + xy - 2y^2 + 3x^2 - 2xy + 2y^2$
$= 2x^2 - xy$
$\therefore\ A - 2B = (-x^2 + xy - 2y^2) - 2(2x^2 - xy)$
$= -x^2 + xy - 2y^2 - 4x^2 + 2xy$
$= -5x^2 + 3xy - 2y^2$

24) ③

$(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+10)$의 전개식에서 x^9항은
$x^9\cdot 10+x^9\cdot 9+x^9\cdot 8+\cdots+x^9\cdot 2+x^9\cdot 1$
$=(1+2+\cdots+8+9+10)x^9$
$=55x^9$
따라서 x^9의 계수는 55이다.

25) 10

$(1+x+2x^2+\cdots+100x^{100})^2$
$=(1+x+2x^2+\cdots+100x^{100})(1+x+2x^2+\cdots+100x^{100})$
이 식의 전개식에서 x^3항은
$1\cdot 3x^3+x\cdot 2x^2+2x^2\cdot x+3x^3\cdot 1=10x^3$
따라서 x^3의 계수는 10이다.

26) ②

$(a+b+c)^2+(-a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2$
$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca+a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$
$\quad+a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca+a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$
$=4a^2+4b^2+4c^2$

27) -12

$a+b+c=2$에서
$a+b=2-c,\ b+c=2-a,\ c+a=2-b$
이므로
$(a+b)(b+c)(c+a)$
$=(2-c)(2-a)(2-b)$
$=8-4(a+b+c)+2(ab+bc+ca)-abc$
$=8-4\cdot 2+2\cdot(-7)-(-2)$
$=-12$

28) ④

$3+2k=a,\ 3-2k=b$로 놓으면
(주어진 식)$=(a^3+b^3)^2-(a^3-b^3)^2$
$=a^6+2a^3b^3+b^6-(a^6-2a^3b^3+b^6)=4a^3b^3$
$=4(3+2k)^3(3-2k)^3$
$=4(9-4k^2)^3$
$=4(9-4\cdot 2)^3=4$

29) ②

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$=(-1)^2-2\cdot(-3)=7$,
$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=(-1)^3-3\cdot(-3)\cdot(-1)=-10$
이고
$(x^2+y^2)(x^3+y^3)=x^5+x^2y^3+x^3y^2+y^5$
$=x^5+y^5+x^2y^2(x+y)$
이므로
$x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)$
$=7\cdot(-10)-(-3)^2\cdot(-1)=-61$,
$x^6+y^6=(x^3)^2+(y^3)^2=(x^3+y^3)^2-2x^3y^3$
$=(-10)^2-2\cdot(-3)^3=154$
$\therefore\ x^5+y^5+x^6+y^6=93$

30) 17

$x\neq 0$이므로 $x^2-3x+1=0$의 양변을 x로 나누면
$x-3+\dfrac{1}{x}=0 \qquad \therefore\ x+\dfrac{1}{x}=3$
따라서 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$,
$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=3^3-3\cdot 3=18$이므로
$x^3+3x^2-5x-7-\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$
$=x^3+\dfrac{1}{x^3}+3\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-7$
$=18+3\cdot 7-5\cdot 3-7=17$

31) ⑤

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$3^2=15+2(ab+bc+ca)$

$\therefore\ ab+bc+ca=-3$

$\therefore\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{-3}{-1}=3$

32) 13

$a-b=4$, $b-c=-1$을 변끼리 더하면

$a-c=3$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a)^2\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$=\frac{1}{2}\{4^2+(-1)^2+3^2\}$

$=\frac{1}{2}\cdot 26=13$

33) ②

$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)$

$=\left(ab+\frac{a}{c}+1+\frac{1}{bc}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)$

$=abc+b+a+\frac{1}{c}+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{abc}$

$=abc+\frac{1}{abc}+\left(a+\frac{1}{b}\right)+\left(b+\frac{1}{c}\right)+\left(c+\frac{1}{a}\right)$

$=abc+\frac{1}{abc}+1+2+\frac{5}{6}$

$=abc+\frac{1}{abc}+\frac{23}{6}$

이때, $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)=1\times 2\times\frac{5}{6}=\frac{5}{3}$ 이므로

$abc+\frac{1}{abc}+\frac{23}{6}=\frac{5}{3}$

$\therefore\ abc+\frac{1}{abc}=-\frac{13}{6}$

〈다른풀이〉

$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)$

$=\frac{(ab+1)(bc+1)(ca+1)}{abc}$

$=\frac{a^2b^2c^2+abc(a+b+c)+(ab+bc+ca)+1}{abc}$

$=abc+(a+b+c)+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{abc}$

$=abc+\frac{1}{abc}+\left(a+\frac{1}{b}\right)+\left(b+\frac{1}{c}\right)+\left(c+\frac{1}{a}\right)$

이후 풀이는 본풀이와 같다.

34) $a=3,\ b=-2,\ c=6$

주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$a+b=1$, $b+2=0$, $c-5=1$

$\therefore\ a=3,\ b=-2,\ c=6$

35) ①

$kx^2+x+ky^2+y-13k+1=0$을 k에 대하여 정리하면

$(x^2+y^2-13)k+x+y+1=0$

이 식이 k에 대한 항등식이므로

$x^2+y^2-13=0,\quad x+y+1=0$

$\therefore\ x^2+y^2=13,\quad x+y=-1$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ 이므로

$13=1-2xy,\qquad 2xy=-12$

$\therefore\ xy=-6$

36) ①

37) 35

$x+2y=1$ 에서 $x=1-2y$

이것을 주어진 식에 대입하면

$3a(1-2y)+by=15,\qquad (-6a+b)y+3a-15=0$

이 식은 y에 대한 항등식이므로

$-6a+b=0$, $3a-15=0$

따라서 $a=5,\ b=30$ 이므로 $a+b=35$

38) 1, 122

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$(0+0+1)^5 = a_{10}+a_9+\cdots+a_1+a_0$

$\therefore\ a_0+a_1+\cdots+a_9+a_{10}=1$

주어진 등식의 양변에 $x=-2$을 대입하면

$(3)^5 = a_{10}-a_9+\cdots-a_1+a_0$가 나온다.

$1 = a_{10}+a_9+\cdots+a_1+a_0$과 양변을 다하면

$244 = 2(a_{10}+a_8+\cdots+a_2+a_0)$

$122 = a_{10}+a_8+\cdots+a_2+a_0$

39) 몫: x^2+x+3, 나머지 : 14

$$
\begin{array}{r l}
 & x^2+x+3 \\ \hline
x-3 &)\, x^3-2x^2\qquad +5 \\
 & x^3-3x^2 \\ \hline
 & x^2 \\
 & x^2-3x \\ \hline
 & 3x+5 \\
 & 3x-9 \\ \hline
 & 14
\end{array}
$$

$\therefore$ 몫 : x^2+x+3, 나머지 : 14

40) $2x^3+x^2-7x+7=(2x-1)(x^2+x-3)+4$

$$
\begin{array}{r l}
 & x^2+x-3 \\ \hline
2x-1 &)\, 2x^3+x^2-7x+7 \\
 & 2x^3-x^2 \\ \hline
 & 2x^2-7x \\
 & 2x^2-x \\ \hline
 & -6x+7 \\
 & -6x+3 \\ \hline
 & 4
\end{array}
$$

$\therefore\ 2x^3+x^2-7x+7=(2x-1)(x^2+x-3)+4$

41) 1

$$
\begin{array}{r l}
 & 2x-1 \\ \hline
x^2-x-1 &)\, 2x^3-3x^2+x-3 \\
 & 2x^3-2x^2-2x \\ \hline
 & -x^2+3x-3 \\
 & -x^2+x+1 \\ \hline
 & 2x-4
\end{array}
$$

따라서 $Q(x)=2x-1$, $R(x)=2x-4$이므로

$Q(2)+R(1)=(2\cdot2-1)+(2\cdot1-4)$

$=3-2=1$

42) 4

x^3+ax^2+b를 x^2-x+2로 나누었을 때의 몫을

$x+c$ (c는 상수)라 하면

$x^3+ax^2+b=(x^2-x+2)(x+c)$

$=x^3+(c-1)x^2+(-c+2)x+2c$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a=c-1$, $0=-c+2$, $b=2c$

$\therefore\ a=1$, $b=4$, $c=2$

$\therefore\ ab=4$

〈참고〉 x^3+ax^2+b의 최고차항의 계수가 1, x^2-x+2의 최고차항의 계수가 1이므로 몫은 $x+c$ (c는 상수) 꼴이다.

43) 1

x^3의 계수가 1이므로 x^3+ax+b를 x^2-x+1로 나누었을 때의 몫을 $x+q$(q는 상수)라 하면

$x^3+ax+b=(x^2-x+1)(x+q)$

즉, $x^3+ax+b=x^3+(q-1)x^2+(1-q)x+q$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로

$0=q-1$, $a=1-q$, $b=q$

따라서 $q=1$, $a=0$, $b=1$이므로

$a^2+b^2=1$

〈다른풀이〉

$$\begin{array}{rl} & x+1 \\ x^2-x+1\,\big) & x^3 \quad + \quad ax+ \quad b \\ & x^3-x^2+ \quad x \\ \hline & \quad x^2+(a-1)x+ \quad b \\ & \quad x^2- \quad\quad x+ \quad 1 \\ \hline & \quad\quad ax+(b-1) \end{array}$$

나누어 떨어지려면 나머지가 0이어야 하므로

$ax+(b-1)=0$ $\qquad \therefore\ a=0,\ b=1$

$\therefore\ a^2+b^2=1$

44) ②

$x^4+ax^3+bx-11$을 x^2-2x+4로 나누었을 때의

몫을 x^2+cx+d (c, d는 상수)라 하면

$x^4+ax^3+bx-11=(x^2-2x+4)(x^2+cx+d)+x-3$

$=x^4+(c-2)x^3+(d-2c+4)x^2+(-2d+4c+1)x+4d-3$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a=c-2,\ 0=d-2c+4,\ b=-2d+4c+1,\ -11=4d-3$

$\therefore\ a=-1,\ b=9,\ c=1,\ d=-2$

$\therefore\ a-b=-10$

45) 몫 : $x^2+x+\frac{1}{2}$, 나머지 : $\frac{7}{2}$

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{2} & 2 & 1 & 0 & 3 \\ & & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \hline & 2 & 2 & 1 & \boxed{\frac{7}{2}} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2x^3+x^2+3 &= \left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+2x+1)+\frac{7}{2} \\ &= \left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot 2\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)+\frac{7}{2} \\ &= (2x-1)\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)+\frac{7}{2} \end{aligned}$$

$\therefore$ 몫 : $x^2+x+\frac{1}{2}$, 나머지 : $\frac{7}{2}$

46) x^2-x+1

$2x^3-3x^2+3x+1$을 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의

몫은 $2x^2-2x+2$, 나머지는 2이므로

$2x^3-3x^2+3x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-2x+2)+2$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot 2(x^2-x+1)+2$

$=(2x-1)(x^2-x+1)+2$

따라서 주어진 다항식을 $2x-1$로 나누었을 때의 몫은 x^2-x+1이다.

47) ②

$f(x)$를 $x-\frac{1}{3}$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$f(x)=\left(x-\frac{1}{3}\right)Q(x)+R$

$=\frac{1}{3}(3x-1)Q(x)+R$

$=(3x-1)\cdot\frac{1}{3}Q(x)+R$

따라서 $f(x)$를 $3x-1$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{3}Q(x)$, 나머지는 R이다.

48) 몫 : $aQ(x)$, 나머지 : R

$f(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= (ax+b)Q(x)+R \\ &= a\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R \\ &= \left(x+\frac{b}{a}\right)\cdot aQ(x)+R \end{aligned}$$

따라서 $f(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나누었을 때의 몫은 $aQ(x)$, 나머지는 R이다.

49) 1

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=1-1+1=1$

50) 13

나머지정리에 의하여 $f(2)=3,\ g(2)=-1$
따라서 구하는 나머지는
$$3f(2)-4g(2)=3\cdot3-4\cdot(-1)=13$$

51) ②

$f(x)+g(x)$를 $x-1$로 나누면 나누어떨어지므로
$$f(1)+g(1)=0 \quad \cdots\cdots \ ㉠$$
$f(x)-g(x)$를 $x-1$로 나누면 나머지가 2이므로
$$f(1)-g(1)=2 \quad \cdots\cdots \ ㉡$$
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $f(1)=1,\ g(1)=-1$
따라서 $f(x)g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는
$$f(1)g(1)=-1$$

52) $-x+1$

$2x^3+x^2-3x$를 $(x-1)(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ ($a,\ b$는 상수)라 하면
$$2x^3+x^2-3x=(x-1)(x+1)Q(x)+ax+b$$
이 식이 x에 대한 항등식이므로
$x=-1$을 대입하면 $2=-a+b$ ⋯⋯ ㉠
$x=1$을 대입하면 $0=a+b$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-1,\quad b=1$
따라서 구하는 나머지는 $-x+1$이다.

53) x

x^{99}을 $(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$($a,\ b$는 상수)라 하면
$$x^{99}=(x+1)(x-1)Q(x)ax+b$$
이 식이 x에 대한 항등식이므로
$x=-1$을 대입하면 $-a+b=-1$ ⋯⋯ ㉠
$x=1$을 대입하면 $a+b=1$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면, $a=1,\ b=0$
따라서 구하는 나머지는 x이다.

54) ③

$f(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면
$f(x)=(x^2-4)Q_1(x)+x+1$
$=(x+2)(x-2)Q_1(x)+x+1$ ⋯⋯ ㉠
$f(x)$를 x^2+2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면
$f(x)=(x^2+2x-3)Q_2(x)-x+2=(x+3)(x-1)Q_2(x)-x+2$
⋯⋯ ㉡
$f(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ ($a,\ b$는 상수)라 하면
$f(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$
$=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$ ⋯⋯ ㉢
㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $f(2)=3$
㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=1$
㉢의 양변에 $x=1,\ x=2$를 각각 대입하면
$f(1)=a+b,\ f(2)=2a+b,$
$\therefore\ a+b=1,\ 2a+b=3$
두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-1$
따라서 구하는 나머지는 $2x-1$이다.

55) ③

다항식 $f(x)$를 $(x^2-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c ($a,\ b,\ c$는 상수)라 하면
$$f(x)=(x^2-1)(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$$
그런데 $f(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 나머지가 $2x+3$
ax^2+bx+c를 x^2-1로 나누었을 때의 나머지가 $2x+3$이 되어야 한다.
$\therefore\ f(x)=(x^2-1)(x-2)Q(x)+a(x^2-1)+2x+3$ ⋯⋯ ㉠
한편, $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로
㉠에서 $f(2)=3a+7=4 \quad \therefore\ a=-1$
따라서 구한 나머지는 $-(x^2-1)+2x+3=-x^2+2x+4$

56) -4

$f(x+4)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는
$$f(-3+4)=f(1)$$
이때 $f(x)=(2x^2+x-3)Q(x)+x-5$이므로 구하는 나머지 $f(1)=-4$

57) -11

$f(3x+1)$을 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(3\cdot(-1)+1)=f(-2)$

$f(x)$를 $(2x+1)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(2x+1)(x+2)Q(x)+4x-3$

따라서 구하는 나머지는

$f(-2)=4\cdot(-2)-3=-11$

58) ③

$f(x+1004)$를 $x+1005$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-1005+1004)=f(-1)$

$f(x+1005)$를 $x+1004$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-1004+1005)=f(1)$

따라서 $f(x)=x^3+ax+b$에서

$f(-1)=-1-a+b=4,\ f(1)=1+a+b=2$

$\therefore\ a-b=-5,\ a+b=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=3$

$\therefore\ ab=-6$

59) ①

$f(x)=x^{30}+x^{29}+x$라 하고 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를R라 하면

$f(x)=(x-1)Q(x)+R$

$x=1$을 대입하면 $R=f(1)=3$

$\therefore\ f(x)=(x-1)Q(x)+3$ …… ㉠

$Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(-1)$ 이므로 ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)=-2Q(-1)+3,\quad 2Q(-1)=4$

$\therefore\ Q(-1)=2$

60) 6

$f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 2

$f(x)=(x+1)Q(x)+2$ …… ㉠

$Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 1이므로

$Q(3)=1$

$f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 $f(3)$이므로 ㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$f(3)=4Q(3)+2=6$

61) ②

$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면

$f(x)=(x-2)Q(x)+3$ …… ㉠

$Q(x)=(x+2)Q'(x)-1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x-2)\{(x+2)Q'(x)-1\}+3$

$=(x-2)(x+2)Q'(x)-x+5$

$\therefore\ f(-2)=7$

따라서 $xf(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$-2f(-2)=-2\cdot 7=-14$

62) -2

$f(2)=0$ 이므로

$24+4k-12-4=0 \qquad \therefore\ k=-2$

63) ③

$f(x)=x^4+mx^3+nx+4$라 하면 $f(x)$가 $x+2,\ x-1$로 나누어떨어지므로

$f(-2)=0,\ f(1)=0$

$16-8m-2n+4=0,\ 1+m+n+4=0$

$\therefore\ 4m+n=10,\ m+n=-5$

두 식을 연립하여 풀면 $m=5,\ n=-10$

$\therefore\ m-n=15$

64) 9

$f(x)=x^3+x^2+ax+b$라 하면 $f(x)$가 $(x-1)(x+3)$으로 나누어떨어지므로

$f(1)=0,\ f(-3)=0$

$1+1+a+b=0,\ -27+9-3a+b=0$

$\therefore\ a+b=-2,\ 3a-b=-18$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-5,\ b=3$

$\therefore\ f(x)=x^3+x^2-5x+3$

따라서 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-2)=-8+4+10+3=9$

65) -1

$\dfrac{ax+by+1}{x+2y-3}=k$ (k는 상수)로 놓으면

$ax+by+1=k(x+2y-3)$

$\therefore\ (a-k)x+(b-2k)y+1+3k=0$

이 등식이 $x,\ y$에 대한 항등식이므로

$a-k=0,\ b-2k=0,\ 1+3k=0$

$\therefore\ k=-\dfrac{1}{3},\ a=-\dfrac{1}{3},\ b=-\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ a+b=-1$

66) 1

$$\begin{array}{r l}
 & \quad 2x-1 \\ \cline{2-2}
x^2-x-1 & \big)\, 2x^3-3x^2+\ \ x-3 \\
 & \quad 2x^3-2x^2-2x \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad -x^2+3x-3 \\
 & \qquad\quad -x^2+\ \ x+1 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad 2x-4
\end{array}$$

따라서 $Q(x)=2x-1,\ R(x)=2x-4$이므로

$Q(2)+R(1)=(2\cdot2-1)+(2\cdot1-4)$

$=3-2=1$

67) -3

x^3+ax+b를 x^2+3x-2로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면

$x^3+ax+b=(x^2+3x-2)(x+c)+2$

$=x^3+(c+3)x^2+(3c-2)x-2c+2$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$0=c+3,\ a=3c-2,\ b=-2c+2$

$\therefore\ a=-11,\ b=8,\ c=-3$

$\therefore\ a+b=-3$

68) 4

$P(x)=2x^2+kx-5$라 하면 나머지정리에 의하여

$R_1=P(3)=3k+13,\ R_2=P(-3)=-3k+13$

$R_1R_2=25$이므로 $(3k+13)9-3k+13)=25$

$169-9k^2,\ k^2=16$

$\therefore\ k=4\ (\because\ k>0)$

69) 6

$P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 2이므로

$P(x)=(x+1)Q(x)+2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 1이므로 $Q(3)=1$

$P(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 $P(3)$이므로 ㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$P(3)=4Q(3)+2=4\cdot1+2=6$

70) -8

$P(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $x-12$이므로

$P(x)=(x^2+x+1)Q(x)+x-12 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면 나머지가 1이므로

$Q(x)=(x-1)Q'(x)+1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$P(x)=(x^2+x+1)\{(x-1)Q'(x)+1\}+x-12$

$=(x^3-1)Q'(x)+x^2+2x-11$

따라서 $R(x)=x^2+2x-11$이므로 $R(1)=-8$

71) ②

$P(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$라 하면 $P(1-x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 -4이므로

$P(1-1)=P(0)=-4 \qquad \therefore\ c=-4$

$xP(x)+x^2$이 x^2-4, 즉 $(x+2)(x-2)$로 나누어떨어지므로

$-2P(-2)+4=0,\ 2P(2)+4=0$

$P(-2)=2,\ P(2)=-2$

$4a-2b-4=2,\ 4a+2b-4=-2$

$\therefore\ 2a-b=3,\ 2a+b=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-1$

따라서 $P(x)=x^2-x-4$이므로 $P(1)=-4$

72) 10

$P(1)=1,\ P(2)=2,\ P(3)=3$에서
$P(1)-1=0,\ P(2)-2=0,\ P(3)-3=0$
이므로 $P(x)-x$는 $x-1,\ x-2,\ x-3$으로 나누어떨어진다.
이때 $P(x)$는 x^3의 계수가 1인 삼차식이므로
$P(x)-x=(x-1)(x-2)(x-3)$
$\therefore\ P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+x$
따라서 $P(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는
$P(4)=(4-1)(4-2)(4-3)+4=10$

73) (1) $(x-1)(a+1)$ (2) $(1-y)(1-x)$
(3) $(c-d)(a+b)$

(1) $(x-1)a+(x-1)=(x-1)(a+1)$
(2) $1-x-y+xy=1-y-x(1-y)=(1-y)(1-x)$
(3) $ac-bd-ad+bc=ac-ad-bd+bc$
$=a(c-d)+b(c-d)$
$=(c-d)(a+b)$

74) $2b(ab+3)$

75) $(1-m)(1-n)$

$1-m-n+mn=1-m-n(1-m)$
$=(1-m)(1-n)$

76) ③

$xy+y^2-xz-yz=y(x+y)-z(x+y)$
$=(x+y)(y-z)$

77) (1) $(3x-4)(x+2)$ (2) $(3x-2y)(2x+3y)$

78) (1) $(8x+3y)(8x-3y)$ (2) $3(2a+3b)(2a-3b)$
(3) $3x(x+2y)$

(1) $64x^2-9y^2=(8x)^2-(3y)^2$
$=(8x+3y)(8x-3y)$
(2) $12a^2-27b^2=3(4a^2-9b^2)=3\{(2a)^2-(3b)^2\}$
$=3(2a+3b)(2a-3b)$
(3) $(2x+y)^2-(x-y)^2=(2x+y+x-y)\{2x+y-(x-y)\}$
$=3x(x+2y)$

79) $(x+3)^3$

$x^3+9x^2+27x+27=x^3+3\cdot x^2\cdot 3+3\cdot x\cdot 3^2+3^3$
$=(x+3)^3$

80) $(-2a+3b)^3$

$-8a^3+36a^2b-54ab^2+27b^3$
$=(-2a)^3+3\cdot(-2a)^2\cdot 3b+3\cdot(-2a)\cdot(3b)^2+(3b)^3$
$=(-2a+3b)^3$

81) $(3a-4b)(9a^2+12ab+16b^2)$

$27a^3-64b^3=(3a)^3-(4b)^3$
$=(3a-4b)(9a^2+12ab+16b^2)$

82) (1) $(x-2)^3$ (2) $(x+3y)^3$

(1) $x^3-6x^2+12x-8=x^3-3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2-2^3$
$=(x-2)^3$
(2) $x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3$
$=x^3+3\cdot x^2\cdot 3y+3\cdot x\cdot(3y)^2+(3y)^3=(x+3y)^3$

83) (1) $(a-b+c)^2$ (2) $(x+y+1)^2$

(1) $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$
$=a^2+(-b)^2+c^2+2\cdot a\cdot(-b)+2\cdot(-b)\cdot c+2\cdot c\cdot a$
$=(a-b+c)^2$
(2) $x^2+y^2+1+2(xy+x+y)$
$=x^2+y^2+1^2+2\cdot x\cdot y+2\cdot y\cdot 1+2\cdot 1\cdot x$
$=(x+y+1)^2$

84) $(a+b+2c)^2$

$a^2+b^2+4c^2+2ab+4bc+4ca$
$=a^2+b^2+(2c)^2+2ab+2\cdot b\cdot 2c+2\cdot 2c\cdot a$
$=(a+b+2c)^2$

85) 풀이참조

(1) $a^3-b^3+c^3+3abc=a^3+(-b)^3+c^3-3\cdot a\cdot(-b)\cdot c$
$=(a-b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc-ca)$

86) 풀이참조

$x^3+y^3-3xy+1=x^3+y^3+1^3-3\cdot x\cdot y\cdot 1$
$=(x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-x-y)$

87) ③

$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$

88) 풀이참조

(1) $x+1=t$로 놓으면
$(x+1)^2-3(x+1)+2=t^2-3t+2=(t-1)(t-2)$
$=(x+1-1)(x+1-2)$
$=x(x-1)$

(2) $x^2+5x=t$로 놓으면
$(x^2+5x+4)(x^2+5x+2)-24$
$=(t+4)(t+2)-24$
$=t^2+6t-16=(t+8)(t-2)$
$=(x^2+5x+8)(x^2+5x-2)$

(3) $x+1=X,\ \ x-3=Y$로 놓으면
$2(x+1)^2+(x+1)(x-3)-(x-3)^2$
$=2X^2+XY-Y^2=(2X-Y)(X+Y)$
$=\{2(x+1)-(x-3)\}(x+1+x-3)$
$=(x+5)(2x-2)=2(x+5)(x-1)$

(4) $(x-1)(x-3)(x+2)(x+4)+24$
$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24$
$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$
$=(t-2)(t-12)+24$ $\leftarrow\ x^2+x=t$
$=t^2-14t+48=(t-6)(t-8)$
$=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$
$=(x+3)(x-2)(x^2+x-8)$

89) 풀이참조

(1) $x^2-2x=X$로 놓으면
$(x^2-2x+2)(x^2-2x-4)+5$
$=(X+2)(X-4)+5$
$=X^2-2X-3=(X-3)(X+1)$
$=(x-3)(x+1)(x-1)^2$
(2) $x^2-2x=X$로 놓으면
$(x^2-2x)^2+2x^2-4x-15=(x^2-2x)^2+2(x^2-2x)-15$
$=X^2+2X-15=(X+5)(X-3)$
$=(x^2-2x+5)(x^2-2x-3)$
$=(x^2-2x+5)(x-3)(x+1)$

(3) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1$
$=\{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\}+1$
$=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)+1$
$=(X+4)(X+6)+1$ $\leftarrow\ x^2-5x=X$
$=X^2+10X+25=(X+5)^2$
$=(x^2-5x+5)^2$

90) 풀이참조

(1) $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$이라 하면
$f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)(x^2-x-6)$
$=(x-1)(x+2)(x-3)$

(2) $f(x)=x^4-3x^3+3x^2+x-6$이라 하면
$f(-1)=0,\ f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -3 & 3 & 1 & -6 \\ & & -1 & 4 & -7 & 6 \\ \hline 2 & 1 & -4 & 7 & -6 & \boxed{0} \\ & & 2 & -4 & 6 & \\ \hline & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore\ f(x)=(x+1)(x-2)(x^2-2x+3)$

91) 풀이참조

$x^4+9x^2+25=(x^4+10x^2+25)-x^2$
$=(x^2+5)^2-x^2=(x^2+x+5)(x^2-x+5)$

92) $(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

$x^4+2x^2+9=(x^4+6x^2+9)-4x^2$
$=(x^2+3)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

93) $(x+1)(x-2)(x-3)$

$f(x)=x^3-4x^2+x+6$ 이라 하면
$f(-1)=-1-4-1+6=0$
이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^2-5x+6)$
$=(x+1)(x-2)(x-3)$

94) ⑤

오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} a & 1 & -a & -4a^2 & 4a^3 \\ & & a & 0 & -4a^3 \\ \hline & 1 & 0 & -4a^2 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3-ax^2-4a^2x+4a^3$
$=(x-a)(x^2-4a^2)$
$=(x-a)(x-2a)(x+2a)$
따라서 주어진 다항식의 인수가 아닌 것은 ⑤이다.
$x^3-ax^2-4a^2x+4a^3=x^2(x-a)-4a^2(x-a)=(x-a)(x^2-4a^2)$
$=(x-a)(x-2a)(x+2a)$

95) ①

$x^3-xy^2-y^2z+x^2z=x(x^2-y^2)+z(x^2-y^2)$
$=(x^2-y^2)(x+z)=(x-y)(x+y)(z+x)$

96) $(x-y)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$

복잡한 식 (2개 이상의 문자, 항이 5개 이상의 다항식)은 차수가 가장 낮은 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.
사용된 문자는 x,y,z이고 차수가 가장 낮은 문자는 z이므로 z에 대하여 내림차순으로 정리한다.
(주어진 식)$=(x-y)z^2+(x^2-y^2)z+x^3-y^3$
$=(x-y)\{z^2+(x+y)z+x^2+xy+y^2\}$
$=(x-y)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$

97) $(x-2y-3)(x-y+1)$

$x^2-3xy+2y^2-2x+y-3$
$=x^2-(3y+2)x+2y^2+y-3$
$=x^2-(3y+2)x+(2y+3)(y-1)$
$=\{x-(2y+3)\}\{x-(y-1)\}$
$=(x-2y-3)(x-y+1)$

98) 풀이참조

주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면
$x^2+y^2-2xy-3x+3y+2$

$= x^2 - (2y+3)x + y^2 + 3y + 2$
$= x^2 - (2y+3)x + (y+1)(y+2)$
$= \{x - (y+1)\}\{x - (y+2)\}$
$= (x - y - 1)(x - y - 2)$

99) ④

주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면
$x^2 + xy - 2y^2 + x + 5y - 2 = x^2 + (y+1)x - (2y^2 - 5y - 2)$
$= x^2 + (y+1)x - (2y-1)(y-2) = \{x + (2y-1)\}\{x - (y-2)\}$
$= (x + 2y - 1)(x - y + 2)$

100) ③

주어진 식을 a에 대한 내림차순으로 정리하면
$(b-a)c^2 + (c-b)a^2 + (a-c)b^2$
$= bc^2 - ac^2 + ca^2 - ba^2 + ab^2 - cb^2$
$= (c-b)a^2 - (c^2 - b^2)a + bc^2 - cb^2$
$= (c-b)a^2 - (c+b)(c-b)a + bc(c-b)$
$= (c-b)\{a^2 - (c+b)a + bc\}$
$= (c-b)(a-b)(a-c)$
$= (a-b)(b-c)(c-a)$

101) 1

주어진 식의 분자를 전개한 후, x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$xy(x-y) + zx(z-x) + yz(y-z)$
$= x^2y - xy^2 + z^2x - zx^2 + y^2z - yz^2$
$= (y-z)x^2 - (y^2 - z^2)x + yz(y-z)$
$= (y-z)x^2 - (y-z)(y+z)x + yz(y-z)$
$= (y-z)\{x^2 - (y+z)x + yz\}$
$= (y-z)(x-y)(x-z)$
$\therefore$ (주어진 식)$= \dfrac{(x-y)(y-z)(x-z)}{(x-y)(y-z)(x-z)} = 1$

102) -1

주어진 식의 분자를 정리하면
$ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)$
$= a^2b - ab^2 + b^2c - bc^2 + c^2a - ca^2$
$= (b-c)a^2 - (b^2 - c^2)a + b^2c - bc^2$
$= (b-c)a^2 - (b+c)(b-c)a + bc(b-c)$
$= (b-c)\{a^2 - (b+c)a + bc\}$
$= (b-c)(a-b)(a-c)$
$= -(a-b)(b-c)(c-a)$
$\therefore$ (주어진 식)$= \dfrac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = -1$

103) $(a+b)(b+c)(c+a)$

주어진 식을 전개한 후, a 에 대하여 내림차순으로 정리하면
$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc$
$= a^2(b+c) + b^2c + ab^2 + c^2a + bc^2 + 2abc$
$= (b+c)a^2 + (b^2 + c^2 + 2bc)a + b^2c + bc^2$
$= (b+c)a^2 + (b+c)^2a + bc(b+c)$
$= (b+c)\{a^2 + (b+c)a + bc\}$
$= (b+c)(a+b)(a+c)$
$= (a+b)(b+c)(c+a)$

104) $(a+b)(b+c)(c+a)$

주어진 식을 a에 대한 내림차순으로 정리하면
$a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 4abc$
$= a(b^2 + 2bc + c^2) + b(c^2 + 2ac + a^2) + c(a^2 + 2ab + b^2) - 4abc$
$= ab^2 + 2abc + ac^2 + bc^2 + 2abc + a^2b + a^2c + 2abc + cb^2 - 4abc$
$= (b+c)a^2 + (b^2 + 2bc + c^2)a + b^2c + bc^2$
$= (b+c)a^2 + (b+c)^2a + bc(b+c)$
$= (b+c)\{a^2 + (b+c)a + bc\}$
$= (b+c)(a+b)(a+c)$
$= (a+b)(b+c)(c+a)$

105) ①

106) ③

$$x^4-3x^3-2x^2-3x+1=x^2\left(x^2-3x-2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\right\}$$
$$=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4\right\}$$

이때 $x+\frac{1}{x}=t$로 놓으면

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=t^2-3t-4$$
$$=(t+1)(t-4)$$
$$=\left(x+\frac{1}{x}+1\right)\left(x+\frac{1}{x}-4\right)$$

∴ (주어진 식) $=x^2\left(x+\frac{1}{x}+1\right)\left(x+\frac{1}{x}-4\right)$

$$=x\left(x+\frac{1}{x}+1\right)\cdot x\left(x+\frac{1}{x}-4\right)$$
$$=(x^2+x+1)(x^2-4x+1)$$

107) ③

$$x^4-x^3-4x^2+x+1=x^2\left(x^2-x-4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}-\left(x-\frac{1}{x}\right)-4\right\}$$
$$=x^2\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)-2\right\}$$
$$=x^2\left(x-\frac{1}{x}+1\right)\left(x-\frac{1}{x}-2\right)$$
$$=(x^2+x-1)(x^2-2x-1)$$

108) 1

$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+k$

$=\{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\}+k$

$=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)+k$

$x^2-5x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t+4)(t+6)+k$

$=t^2+10t+24+k$ …… ㉠

주어진 식이 x에 대한 이차식의 완전제곱식으로 인수분해 되려면 ㉠이 t에 대한 완전제곱식이 되어야 하므로

$24+k=25$ ∴ $k=1$

참고 $k=1$일 때, 주어진 식은 다음과 같이 인수분해된다.

(주어진 식) $=t^2+10t+25=(t+5)^2=(x^2-5x+5)^2$

109) 4

주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+2xy-3y^2+ax+4y+4$

$=x^2+(2y+a)x-(3y^2-4y-4)$

$=x^2+(2y+a)x-(y-2)(3y+2)$

주어진 식이 x, y에 대한 일차식의 곱으로 인수분해되려면

$-(y-2)+(3y+2)=2y+a$ ∴ $a=4$

110) ⑤

111) 20

$N=a^4-3a^2+9$

$=\{(a^2)^2+6a^2+9\}-9a^2$

$=(a^2+3)^2-(3a)^2$

$=(a^2+3a+3)(a^2-3a+3)$ …… ㉠

이때, N이 소수이므로 $a^2+3a+3=1$ 또는 $a^2-3a+3=1$이다.

(ⅰ) $a^2+3a+3=1$인 경우

$a^2+3a+2=0$, $(a+2)(a+1)=0$에서 $a=-2$ 또는 $a=-1$이므로 a가 자연수라는 조건에 모순이다.

(ⅱ) $a^2-3a+3=1$인 경우

$a^2-3a+2=0$, $(a-1)(a-2)=0$에서 $a=1$ 또는 $a=2$이고 ㉠에 각각 대입하면 $N=7$ 또는 $N=13$

(ⅰ), (ⅱ)에서 가능한 소수 N의 값의 합은 $7+13=20$이다.

112) (1) $\sqrt{5}i$ (2) $4i$ (3) $3\sqrt{3}i$ (4) $-4\sqrt{2}i$

(1) $\sqrt{-5}=\sqrt{5}i$

(2) $\sqrt{-16}=\sqrt{16}i=4i$

(3) $\sqrt{-27}=\sqrt{27}i=3\sqrt{3}i$
(4) $-\sqrt{-32}=-\sqrt{32}i=-4\sqrt{2}i$

113) (1) i (2) $-i$ (3) i (4) 2

(1) $i^{25}=(i^4)^6\cdot i=i$
(2) $(-i)^5=-i^5=-i^4\cdot i=-i$
(3) $-i^7=-i^4\cdot i^3=-(-i)=i$
(4) $i^{100}+i^{200}=(i^4)^{25}+(i^4)^{50}=1+1=2$

114) (1) 0 (2) $-26+25i$

(1) 음이 아닌 정수 k에 대하여
$i^{4k}=1$, $i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$ 이므로
$i+i^2+i^3+\cdots+i^{4000}$
$=(i-1-i+1)+(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)$
$=0$
(2) $i+2i^2+3i^3+\cdots+49i^{49}+50i^{50}$
$=(i-2-3i+4)+\cdots+(45i-46-47i+48)+49i-50$
$=(2-2i)+\cdots+(2-2i)+49i-50$
$=12(2-2i)+49i-50=-26+25i$

115) $-i$

$i=i^5=i^9$, $i^2=i^6=i^{10}=-1$, $i^3=i^7=-i$, $i^4=i^8=1$이므로
$1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\cdots+\frac{1}{i^{10}}$
$=1+\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\frac{1}{i}-1$
$=1+\frac{1}{i}-1=\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i$

116) ㄱ, ㄷ

ㄴ. $(\sqrt{-3})^2=(\sqrt{3}i)^2=-3$이므로 실수이다.
ㄷ. $\sqrt{-4}=\sqrt{4}i=2i$이므로 허수이다.
ㄹ. $2i^2=2\cdot(-1)=-2$이므로 실수이다.
이상에서 허수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

117) 실수부분 : 3, 허수부분 : -1

118) $x=-4$, $y=2$

$(x+y)+4i=-2+2yi$에서
$x+y=-2$, $4=2y$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$x=-4$, $y=2$

119) $3+9i$

$(5+3i)+(-2+6i)=(5-2)+(3+6)i=3+9i$

120) $3+5i$

$(7+2i)-(4-3i)=(7-4)+(2+3)i=3+5i$

121) $11-2i$

$(3+4i)(1-2i)=3-6i+4i-8i^2=3-2i-8\cdot(-1)=11-2i$

122) 242

$(1-i)(1+i)(3-\sqrt{2}i)^2(3+\sqrt{2}i)^2$
$=(1+1)(9-6\sqrt{2}i-2)(9+6\sqrt{2}i-2)$
$=2(7-6\sqrt{2}i)(7+6\sqrt{2}i)$
$=2(49+72)$
$=242$

<다른풀이>
$(1-i)(1+i)(3-\sqrt{2}i)^2(3+\sqrt{2}i)^2$
$=(1^2-i^2)\{(3-\sqrt{2}i)(3+\sqrt{2}i)\}^2$
$=2(9+2)^2$
$=242$

123) $1-4i$

$\frac{5-3i}{1+i}=\frac{(5-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$
$=\frac{5-5i-3i+3i^2}{1-i^2}$
$=\frac{2-8i}{2}=1-4i$

124) $8+2i$

$(2-i)(3+2i)+\frac{1+2i}{2-i}$
$=6+4i-3i+2+\frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$
$=8+i+\frac{5i}{5}$
$=8+2i$

125) $x=3,\ y=1$

준 식의 좌변은 통분하고, 우변은 분모를 실수화하면
$\frac{(1-i)x+(1+i)y}{(1+i)(1-i)}=\frac{5(2-i)}{(2+i)(2-i)}$
$\therefore\ \frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}i=2-i$
여기에서 $x,\ y$는 실수이므로 $\frac{x+y}{2},\ \frac{x-y}{2}$도 실수이다.
$\therefore\ \frac{x+y}{2}=2,\ \frac{x-y}{2}=1$
$\therefore\ x+y=4,\ x-y=2$
연립하여 풀면 $x=3,\ y=1$
①에서 $x,\ y$ 가 실수라는 조건이 없으면 ②라고 할 수 없다.

126) $2+i$

$\frac{5i}{1+2i}=\frac{5i(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{5i-10i^2}{1-4i^2}=\frac{5i+10}{5}=2+i$

127) $-15+4i$

$x=1+2i$에서 $x-1=2i$
양변을 제곱하면 $x^2-2x+1=4i^2$ $\therefore$ $x^2-2x+5=0$
그런데 x^3+2x^2-x+3을 x^2-2x+5로 나눈 몫은 $x+4$이고, 나머지는 $2x-17$이므로
$x^3+2x^2-x+3=(x^2-2x+5)(x+4)+2x-17$
$=2x-17=2(1+2i)-17=-15+4i$

128) $5+10i$

$x=\frac{3-i}{1+i}=\frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{3-3i-i+i^2}{1-i^2}$
$=\frac{2-4i}{2}=1-2i$ 에서 $x-1=-2i$
양변을 제곱하면 $x^2-2x+1=-4$
$\therefore\ x^2-2x+5=0$
$\therefore\ x^2-3x^2+2x+5=(x^2-2x+5)(x-1)-5x+10$
$=-5x+10=-5(1-2i)+10=5+10i$

129) ③

$z^2=(a^2-6a+8)^2-(a-2)^2+2(a^2-6a+8)(a-2)i$
이것이 실수가 되려면
$2(a^2-6a+8)(a-2)=0$, $(a-2)^2(a-4)=0$
$\therefore\ a=2$ 또는 $a=4$
따라서 구하는 모든 a의 값의 합은
$2+4=6$

<다른풀이>
z^2이 실수가 되려면 z는 실수 또는 순허수이어야 하므로
$(a^2-6a+8)=0$ 또는 $a-2=0$
$\therefore\ a=2$ 또는 $a=4$

130) $3-2i$

$\overline{3+2i}=3-2i$

131) $4i+1$

$\overline{-4i+1}=4i+1$

132) -8

$\overline{-8}=-8$

133) $-15i$

$\overline{15i}=-15i$
<참고>
① 실수 a의 켤레복소수는 a이다.
② 순허수 bi의 켤레복소수는 $-bi$이다.

134) ②

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하자.
① $z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$이므로 실수이다.
② $\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}=\frac{1}{a+bi}+\frac{1}{a-bi}$
$=\frac{a-bi+a+bi}{(a+bi)(a-bi)}$
$=\frac{2a}{a^2+b^2}$이므로 실수이다.
③ $a+bi=a-bi$에서 $2bi=0$ $\therefore$ $b=0$
따라서 $z=a$이므로 z는 실수이다.
④ $z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=0$에서
$a=0$, $b=0$ $\therefore$ $z=0$
⑤ $\overline{z}=a-bi$가 순허수이면 $a=0$, $b\neq 0$
따라서 $z=bi$이므로 z도 순허수이다.

135) 4

$\overline{z}=-z$, 즉 $z+\overline{z}=0$이므로 z는 0 또는 순허수이다.
따라서 조건을 만족시키는 것은
$-2i$, $(1+\sqrt{3})i$, 0, i의 4개다.

136) ①

$2x(2-i)-y(1+3i)=\overline{7-7i}$에서
$4x-2xi-y-3yi=7+7i$
$(4x-y)+(-2x-3y)i=7+7i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$4x-y=7$, $-2x-3y=7$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=-3$
$\therefore$ $x+y=-2$

137) ③

$z=a+bi$(a, b는 실수)로 놓으면 $\overline{z}=a-bi$
$(1+i)z+3\overline{z}=10-i$ 에 대입하면
$(1+2i)(a+bi)+3(a-bi)=10-i$
$(a+bi+ai-b)+(3a-3bi)=10-i$
$(4a-b)+(a-2b)i=10-i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$4a-b=10$, $a-2b=-1$
두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=2$
$\therefore$ $z=3+2i$

138) $-1+3\sqrt{3}i$

$z=a+bi$(a,b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로
$\frac{z+1}{1+\sqrt{3}i}+\frac{\overline{z}}{4}=2$에서
$\frac{a+bi+1}{1+\sqrt{3}i}+\frac{a-bi}{4}=2$
$\frac{\{(a+1)+bi\}(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}+\frac{a-bi}{4}=2$
$\frac{a+1+\sqrt{3}b-\sqrt{3}(a+1)i+bi+a-bi}{4}=2$
$(2a+\sqrt{3}b+1)-\sqrt{3}(a+1)i=8$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$2a+\sqrt{3}b+1=8$, $-\sqrt{3}(a+1)=0$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1, b=3\sqrt{3}$
$\therefore$ $z=-1+3\sqrt{3}i$

139) $\frac{17}{13}$

$z\overline{z}=\frac{w+2}{2w-1}\cdot\overline{\left(\frac{w+2}{2w-1}\right)}=\frac{w+2}{2w-1}\cdot\frac{\overline{w}+2}{2\overline{w}-1}$
$=\frac{w\overline{w}+2(w+\overline{w})+4}{4w\overline{w}-2(w+\overline{w})+1}$

$w=2-i$, $\overline{w}=2+i$이므로

$w+\overline{w}=4$, $w\overline{w}=(2-i)(2+i)=5$

$\therefore$ (주어진 식) $=\dfrac{5+2\cdot4+4}{4\cdot5-2\cdot4+1}=\dfrac{17}{13}$

〈참고〉 복소수 w와 두 실수 a, b에 대하여 $\overline{a}=a, \overline{b}=b$

$$\overline{\left(\frac{w+b}{w-b}\right)}=\frac{\overline{w+b}}{\overline{w-a}}=\frac{\overline{w}+\overline{b}}{\overline{w}-\overline{a}}=\frac{\overline{w}+b}{\overline{w}-a}$$

140) $\dfrac{1}{29}$

$$z\overline{z}=\frac{w-2}{2w+1}\cdot\overline{\left(\frac{w-2}{2w+1}\right)}=\frac{w-2}{2w+1}\cdot\frac{\overline{w}-2}{2\overline{w}+1}$$
$$=\frac{w\overline{w}-2(w+\overline{w})+4}{4w\overline{w}+2(w+\overline{w})+1}$$

$w=2-i$, $\overline{w}=2+i$이므로

$w+\overline{w}=4$, $w\overline{w}=(2-i)(2+i)=5$

$\therefore$ (주어진 식) $=\dfrac{5-2\cdot4+4}{4\cdot5+2\cdot4+1}=\dfrac{1}{29}$

〈참고〉 복소수 w와 두 실수 a, b에 대하여 $\overline{a}=a, \overline{b}=b$이므로

$$\overline{\left(\frac{w+b}{w-b}\right)}=\frac{\overline{w+b}}{\overline{w-a}}=\frac{\overline{w}+\overline{b}}{\overline{w}-\overline{a}}=\frac{\overline{w}+b}{\overline{w}-a}$$

141) $\pm\sqrt{3}i$

$\pm\sqrt{-3}=\pm\sqrt{3}i$

142) $\pm2\sqrt{2}i$

$\pm\sqrt{-8}=\pm\sqrt{8}i=\pm2\sqrt{2}i$

143) -4

$\sqrt{-2}\sqrt{-8}=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{8}i=\sqrt{16}i^2=-4$

144) $-2i$

$\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{4}{\sqrt{4}i}=\dfrac{4i}{2i^2}=\dfrac{4i}{-2}=-2i$

145) ②

① $\sqrt{-3}\sqrt{7}=\sqrt{3}i\cdot\sqrt{7}=\sqrt{21}i$

② $\sqrt{-3}\sqrt{-7}=\sqrt{3}i\cdot\sqrt{7}i=\sqrt{21}i^2=-\sqrt{21}$

③ $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-7}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}i}=\dfrac{\sqrt{3}i}{-\sqrt{7}}=-\sqrt{-\dfrac{3}{7}}$

④ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-7}}=\dfrac{\sqrt{3}i}{\sqrt{7}i}=\sqrt{\dfrac{3}{7}}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{3}i}{\sqrt{7}}=\sqrt{\dfrac{3}{7}}i=\sqrt{-\dfrac{3}{7}}$

146) ③

$a<0$, $b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{a}\sqrt{b}$ 이므로

$\sqrt{(-3)(-3)}\neq\sqrt{-3}\sqrt{-3}$

147) 22

$\sqrt{a-7}\sqrt{4-a}=-\sqrt{(a-7)(4-a)}$에서

$a-7\leq0, 4-a\leq0$

$\therefore\ 4\leq a\leq7$

따라서 구하는 모든 정수 a의 값의 합은

$4+5+6+7=22$

148) ④

$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ 이므로 $a<0, b<0$

즉, $-a>0$이므로

$\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{-\dfrac{a}{b}}$

149) $1+2i$

$0 < a < 2$ 이므로 $a-2<0$

$\therefore \sqrt{a}\times\sqrt{-a}+\sqrt{a-2}\times\sqrt{2-a}+\dfrac{\sqrt{2-a}}{\sqrt{a-2}}\times\sqrt{\dfrac{a-2}{2-a}}$

$=\sqrt{a}\times\sqrt{a}\,i+\sqrt{2-a}\,i\times\sqrt{2-a}+\dfrac{\sqrt{2-a}}{\sqrt{2-a}\,i}\times\sqrt{-\dfrac{2-a}{2-a}}$

$=ai+(2-a)i+\dfrac{1}{i}\times i=1+2i$

150) 7

두 실수 $x,\ y$의 합이 음수이고 곱이 양수이므로

$x<0,\ y<0$ 이다.

$\therefore \sqrt{\dfrac{x}{3y}}+\sqrt{\dfrac{3y}{x}}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{3y}}+\dfrac{\sqrt{3y}}{\sqrt{x}}$

$=\dfrac{\sqrt{x}\sqrt{x}+\sqrt{3y}\sqrt{3y}}{\sqrt{3y}\sqrt{x}}=\dfrac{x+3y}{-\sqrt{3xy}}=\dfrac{-21}{-3}=7$

<다른풀이>

$x+3y=-21$ …… ㉠

$xy=3$ …… ㉡

이므로 $x<0,\ y<0$

㉠에서 $x=-21-3y$ 이므로 ㉡에 대입하여 정리하면

$y^2+7y+1=0$

양변을 y로 나누면 $y+\dfrac{1}{y}=-7$ …… ㉢

한변 ㉡에서 $x=\dfrac{3}{y}$ 이므로

$\sqrt{\dfrac{x}{3y}}+\sqrt{\dfrac{3y}{x}}=\sqrt{\dfrac{1}{y^2}}+\sqrt{y^2}=-\dfrac{1}{y}-y\ (\because y<0)$

$=-\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=7$ ($\because$ ㉢)

151) $12+16i$

$f(a,\ b)=\dfrac{a+bi}{a-bi}=\dfrac{(a+bi)^2}{(a-bi)(a+bi)}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\dfrac{2ab}{a^2+b^2}i$

이때 $a=2b$ 이면

$f(2b,\ b)=\dfrac{(2b)^2-b^2}{(2b)^2+b^2}+\dfrac{4b^2}{(2b)^2+b^2}i=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i\ \ (\because\ b\neq 0)$

이므로

$f(2,\ 1)=f(4,\ 2)=\cdots=f(40,\ 20)=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i$

$\therefore f(2,\ 1)+f(4,\ 2)+\cdots+f(40,\ 20)=\left(\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i\right)\cdot 20$

$=12+16i$

152) 10

$z=i(a+2i)^2=i(a^2+4ai-4)=-4a+(a^2-4)i$ … ①

이 복소수가 실수가 되려면 $a^2-4=0,\ \ a^2=4,\ \ a=2\ (\because\ a>0)$

$\therefore\ \alpha=2$ … ②

$a=2$를 $z=-4a+(a^2-4)i$에 대입하면 $\beta=-8$ … ③

$\therefore\ \alpha-\beta=10$ … ④

153) ②

ㄱ. z^2+z가 실수이므로 $\overline{z^2+z}$도 실수이다.

ㄴ. $z^2+z=(a+bi)^2+a+bi=a^2+2abi-b^2+a+bi$

$=(a^2+a-b^2)+(2a+1)bi$

이때 z^2+z가 실수이고 $b\neq 0$이므로 $2a+1=0$

$\therefore\ a=-\dfrac{1}{2}$ $\qquad\therefore\ z+\bar{z}=2a=-1$

ㄷ. $z\bar{z}=\left(-\dfrac{1}{2}+bi\right)\left(-\dfrac{1}{2}-bi\right)=\dfrac{1}{4}+b^2$

이때 b는 0이 아닌 실수이므로 $\dfrac{1}{4}+b^2>\dfrac{1}{4}$ $\qquad\therefore\ z\bar{z}>\dfrac{1}{4}$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

154) $2\pm 4i$

$z=a+bi$ ($a,\ b$는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

$z+\bar{z}=4,\ \ z\bar{z}=20$에서

$(a+bi)+(a-bi)=4,\ \ (a+bi)(a-bi)=20$

$2a=4,\ \ a^2+b^2=20$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ \ b=\pm 4$

$\therefore\ z=2\pm 4i$

155) 풀이참조

$(a^2-1)x=a+1$ 에서 $(a+1)(a-1)x=a+1$

(i) $a\neq 1$ 이고 $a\neq -1$ 일 때, $x=\dfrac{a+1}{(a+1)(a-1)}=\dfrac{1}{a-1}$

(ii) $a=-1$ 일 때, $0\cdot x=0$ 이므로 해는 무수히 많다.

(iii) $a=1$ 일 때, $0 \cdot x=2$ 이므로 해는 없다.

156) (1) -1 (2) -3 또는 4 (3) 2

(1) $|x-1|=2x+4$ 에서

(i) $x \geq 1$ 일 때, $x-1=2x+4$ $\therefore$ $x=-5$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x=-5$ 는 해가 아니다.

(ii) $x<1$ 일 때, $-(x-1)=2x+4$, $3x=-3$

$\therefore$ $x=-1$

(i), (ii)에서 $x=-1$

(2) $|x+2|+|x-3|=7$ 에서

(i) $x< -2$ 일 때, $-(x+2)-(x-3)=7$

$-2x+1=7$, $-2x=6$ $\therefore$ $x=-3$

(ii) $-2 \leq x<3$ 일 때, $x+2-(x-3)=7$

$\therefore$ $0 \cdot x=2$

따라서 해는 없다.

(iii) $x \geq 3$ 일 때, $x+2+x-3=7$

$2x-1=7$, $2x=8$ $\therefore$ $x=4$

(i), (ii), (iii)에서 $x=-3$ 또는 $x=4$

(3) $|x-1|=|3-x|$ 에서 $x-1=\pm(3-x)$

(i) $x-1=3-x$ 일 때, $2x=4$ $\therefore$ $x=2$

(ii) $x-1=-(3-x)$ 일 때, $x-1=-3+x$

$\therefore$ $0 \cdot x=-2$

따라서 해는 없다.

(i), (ii)에서 $x=2$

157) -1

방정식 $x^2+kx+\sqrt{2}-2=0$ 의 한 근이 $1-\sqrt{2}$ 이므로

$(1-\sqrt{2})^2+k(1-\sqrt{2})+\sqrt{2}-2=0$

$3-2\sqrt{2}+k(1-\sqrt{2})+\sqrt{2}-2=0$

$1-\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})k=0$, $(1-\sqrt{2})k=\sqrt{2}-1$

$\therefore$ $k=-1$

158) (1) 1 (2) -1

(1) 주어진 이차방정식의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2+\alpha-3=0$, $\beta^2+\beta-3=0$

$\therefore \alpha^2+\alpha=3$, $\beta^2+\beta=3$

$\therefore$ $(2-\alpha^2-\alpha)(2-\beta^2-\beta)=(2-3)(2-3)=1$

(2) 주어진 방정식의 한 근이 α이므로

$\alpha^2-\alpha+1=0$

$\alpha \neq 0$이므로 양변을 α로 나누면

$\alpha-1+\frac{1}{\alpha}=0$ $\therefore$ $\alpha+\frac{1}{\alpha}=1$

$\therefore$ $\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-2=1^2-2=-1$

159) 풀이참조

(1) $x^2-5x+4=0$ 에서 $(x-1)(x-4)=0$

$\therefore$ $x=1$ 또는 $x=4$

(2) $10x^2-x-3=0$ 에서 $(2x+1)(5x-3)=0$

$\therefore$ $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{5}$

160) 풀이참조

(1) $x^2+3x+1=0$ 에서

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot1}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

(2) $2x^2+3x+4=0$ 에서

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot2\cdot4}}{2\cdot2}=\frac{-3\pm\sqrt{-23}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{23}i}{4}$$

(3) $x^2-8x+28=0$ 에서

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-1\cdot28}}{1}=4\pm\sqrt{-12}=4\pm2\sqrt{3}i$$

(4) $2(x-1)^2=x^2-2x+3$

$2x^2-4x+2=x^2-2x+3$ $\therefore$ $x^2-2x-1=0$

근의 공식에 의하여

$x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot(-1)}=1\pm\sqrt{2}$

161) $x=\frac{-5\pm\sqrt{7}i}{4}$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot2\cdot4}}{2\cdot2}=\frac{-5\pm\sqrt{-7}}{4}=\frac{-5\pm\sqrt{7}i}{4}$$

162) $x=\frac{-2\pm\sqrt{2}i}{3}$

$3x^2+2\cdot 2x+2=0$ 이므로

$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-3\cdot 2}}{3}=\frac{-2\pm\sqrt{-2}}{3}=\frac{-2\pm\sqrt{2}i}{3}$

163) ①

주어진 식의 양변에 $\sqrt{2}+1$ 을 곱하면

$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)x^2-(\sqrt{2}+1)(3-\sqrt{2})x+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$

$x^2-(1+2\sqrt{2})x+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$

$(x-\sqrt{2})\{x-(\sqrt{2}+1)\}=0$

$\therefore\ x=\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}+1$

따라서 $\alpha=\sqrt{2},\ \beta=\sqrt{2}+1$ ($\because\ \alpha<\beta$) 이므로

$2\alpha-\beta=2\sqrt{2}-(\sqrt{2}+1)=\sqrt{2}-1$

164) 풀이참조

(1) $x^2+2x-4=0$ 에서 근의 공식에 의하여

$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot(-4)}=-1\pm\sqrt{5}$

$\therefore\ x^2+2x-4=\{x-(-1+\sqrt{5})\}\{x-(-1-\sqrt{5})\}$

$=(x+1-\sqrt{5})(x+1+\sqrt{5})$

(2) $x^2+25=0$ 에서 $x^2=-25$ $\therefore\ x=\pm\sqrt{-25}=\pm 5i$

$\therefore\ x^2+25=(x-5i)(x+5i)$

(3) $2x^2-3x+2=0$ 에서 근의 공식에 의하여

$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot 2}}{2\cdot 2}=\frac{3\pm\sqrt{-7}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{7}i}{4}$

$\therefore 2x^2-3x+2=2\left(x-\frac{3+\sqrt{7}i}{4}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{7}i}{4}\right)$

165) (1) $-4-2\sqrt{3}$ (2) $-2+\sqrt{2}$

(1) $|x|^2-2|x|-2=0$ 에서

(i) $x\geq 0$ 일 때, $x^2-2x-2=0$

$\therefore\ x=1\pm\sqrt{3}$

그런데 $x\geq 0$ 이므로 $x=1+\sqrt{3}$

(ii) $x<0$ 일 때, $x^2+2x-2=0$

$\therefore\ x=-1\pm\sqrt{3}$

그런데 $x<0$ 이므로 $x=-1-\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 $x=1+\sqrt{3}$ 또는 $x=-1-\sqrt{3}$ 이므로 모든 근의 곱은 $(1+\sqrt{3})(-1-\sqrt{3})=-4-2\sqrt{3}$

(2) $x^2-|x|-2=\sqrt{(x-1)^2}$ 에서 $\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$

$x^2-|x|-2=|x-1|$

(i) $x<0$ 일 때, $x^2+x-2=-(x-1)$

$x^2+2x-3=0,\ (x+3)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=1$

그런데 $x<0$ 이므로 $x=-3$

(ii) $0\leq x<1$ 일 때, $x^2-x-2=-(x-1)$

$x^2-3=0$ $\therefore\ x=\pm\sqrt{3}$

그런데 $0\leq x<1$ 이므로 해가 존재하지 않는다.

(iii) $x\geq 1$ 일 때, $x^2-x-2=x-1$

$x^2-2x-1=0$ $\therefore\ x=1\pm\sqrt{2}$

그런데 $x\geq 1$ 이므로 $x=1+\sqrt{2}$

(i), (ii), (iii)에서 $x=-3$ 또는 $x=1+\sqrt{2}$ 이므로 모든 근의 합은 $-3+(1+\sqrt{2})=-2+\sqrt{2}$

166) 풀이참조

(1) $D=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2=13>0$ $\therefore$ 서로 다른 두 실근

(2) $D=(-3)^2-9\cdot 1=0$ $\therefore$ 중근(서로 같은 두 실근)

(3) $D=(-5)^2-4\cdot 3\cdot 5=-35<0$ $\therefore$ 서로 다른 두 허근

167) 서로 다른 두 실근

주어진 방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\cdot 5\cdot(-3)=61>0$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

168)
(1) ㄱ, ㄷ, ㅂ (2) ㄹ (3) ㄴ, ㅁ
(4) ㄱ, ㄷ, ㅂ, ㄹ

보기에 주어진 각 방정식의 판별식을 D라 하면
ㄱ. $D=5^2-4\cdot1\cdot3=13>0$
ㄴ. $D=(-3)^2-4\cdot2\cdot2=-7<0$
ㄷ. $\frac{D}{4}=1^2-1\cdot(-5)=6>0$
ㄹ. $\frac{D}{4}=(-2)^2-4\cdot1=0$
ㅁ. $\frac{D}{4}=2^2-2\cdot3=-2<0$
ㅂ. $\frac{D}{4}=1^2-2\cdot(-1)=3>0$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지면 $D>0$이므로
ㄱ, ㄷ, ㅂ
(2) 중근을 가지면 $D=0$이므로 ㄹ
(3) 허근을 가지면 $D<0$이므로 ㄴ, ㅁ
(4) 실근을 갖는다는 것은 (1),(2) 모두이다.

169) (1) $k<\frac{9}{4}$ (2) $k=\frac{9}{4}$ (3) $k>\frac{9}{4}$

$3x^2-3x+k=0$ 에서 $D=(-3)^2-4\cdot1\cdot k=9-4k$
(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$ 이어야 하므로

$D=9-4k>0 \quad \therefore\ k<\frac{9}{4}$

(2) 중근을 가지려면 $D=0$ 이어야 하므로

$D=9-4k=0 \quad \therefore\ k=\frac{9}{4}$

(3) 서로 다른 두 허근을 가지려면 $D<0$ 이어야 한다.

$D=9-4k<0 \quad \therefore\ k>\frac{9}{4}$

170) $k<-2$ 또는 $-2<k\le-\frac{6}{5}$

$(k+2)x^2+2kx+k+3=0$ 이 이차방정식이므로
$k+2\ne0 \qquad \therefore k\ne-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
이 방정식이 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(k+2)(k+3)\ge0$

$-5k-6\ge0 \qquad \therefore k\le-\frac{6}{5} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $k<-2$ 또는 $-2<k\le-\frac{6}{5}$

171) $\frac{5}{3}$

주어진 방정식이 이차방정식이므로
$k^2-1\ne0, \qquad (k+1)(k-1)\ne0$
$\therefore\ k\ne-1,\ k\ne1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
이차방정식 $(k^2-1)x^2-(k+1)x+1=0$ 의 판별식을 D라 하면
$D=\{-(k+1)\}^2-4(k^2-1)=0$
$k^2+2k+1-4k^2+4=0, \qquad 3k^2-2k-5=0$
$(k+1)(3k-5)=0$
$\therefore\ k=\frac{5}{3}$ ($\because$ ㉠)

172) ③

이차방정식 $x^2+ax+a-1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=a^2-4(a-1)=0, \qquad a^2-4a+4=0$
$(a-2)^2=0 \qquad \therefore\ a=2$
$a=2$를 주어진 방정식에 대입하면
$x^2+2x+1=0, \qquad (x+1)^2=0$
$\therefore\ x=-1$
따라서 $m=-1$ 이므로
$a+m=1$

173) 12

이차방정식 $x^2-2(k-a)x+(k^2-6k+b)=0$이
중근을 가지므로 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(k-a)^2-(k^2-6k+b)=0$
$k^2-2ak+a^2-k^2+6k-b=0$
$(6-2a)k+a^2-b=0$
이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로
$6-2a=0$, $a^2-b=0$
따라서 $a=3$, $b=9$이므로 $a+b=12$

174) (1) -2 (2) -2 (3) 8 (4) $2\sqrt{3}$

$x^2+2x-2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여
(1) $\alpha+\beta=-2$
(2) $\alpha\beta=-2$

(3) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\cdot(-2)=8$

(4) $|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{|1|}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

175) (1) 6 (2) $\dfrac{2}{3}$ (3) 2 (4) $\dfrac{10}{11}$

$x^2-2x+3=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$

(1) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=3\cdot2=6$

(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{2}{3}$

(3) $(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=3-2+1=2$

(4) $\dfrac{\alpha}{\alpha+2}+\dfrac{\beta}{\beta+2}=\dfrac{\alpha(\beta+2)+\beta(\alpha+2)}{(\alpha+2)(\beta+2)}$

$=\dfrac{2\alpha\beta+2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4}$

$=\dfrac{2\cdot3+2\cdot2}{3+2\cdot2+4}=\dfrac{10}{11}$

176) ③

$x^2+ax+b=0$ 의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$ …… ㉠

또, $x^2+bx+a=0$ 의 두 근이 $\alpha+1$, $\beta+1$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+1)+(\beta+1)=-b$, $(\alpha+1)(\beta+1)=a$

즉, $(\alpha+\beta)+2=-b$, $\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=a$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-a+2=-b$, $b-a+1=a$

즉, $a-b=2$, $2a-b=1$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=-3$ $\therefore ab=3$

177) ④

α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$\alpha^2-(3a-2)\alpha+1=0$, $\beta^2-(3a-2)\beta+1=0$

$\therefore$ $\alpha^2-3a\alpha+1=-2\alpha$, $\beta^2-3a\beta+1=-2\beta$

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=1$이므로

$(\alpha^2-3a\alpha+1)(\beta^2-3a\beta+1)=(-2\alpha)\cdot(-2\beta)$

$=4\alpha\beta=4$

178) $\dfrac{21}{2}$

$x^2-5x+2=0$ 의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2-5\alpha+2=0$, $\beta^2-5\beta+2=0$

$\therefore$ $\alpha^2-4\alpha+2=\alpha$, $\beta^2-4\beta+2=\beta$

또, 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=2$

$\therefore \dfrac{\beta}{\alpha^2-4\alpha+2}+\dfrac{\alpha}{\beta^2-4\beta+2}=\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$

$=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{5^2-2\cdot2}{2}=\dfrac{21}{2}$

179) $x^2+x-12=0$

$x^2-\{(-4)+3\}x+4\cdot(-3)=0$

$\therefore$ $x^2+x-12=0$

180) $x^2-6x+7=0$

$x^2-\{(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})\}x+(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=0$

$\therefore$ $x^2-6x+7=0$

181) (1) $x^2-x-2=0$ (2) $x^2-6x+1=0$

(1) $x^2-(-1+2)x+(-1)\cdot2=0$

$\therefore$ $x^2-x-2=0$

(2)

$x^2-\{(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})\}x+(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=0$

$\therefore$ $x^2-6x+1=0$

182) $6x^2-3x+2=0$

방정식 $2x^2-3x+6=0$ 의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{3}{2},\ \alpha\beta=3$

$\therefore\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2},$

$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{3}$

따라서 $\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta}$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 6인 이차방정식은

$6\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)=0$, 즉 $6x^2-3x+2=0$

183) ④

방정식 $x^2+3x-1=0$ 의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=-1$

$\therefore\ \frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=\frac{(-3)^2-2\cdot(-1)}{-1}=-11,\quad \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}=1$

따라서 $\frac{\beta}{\alpha},\ \frac{\alpha}{\beta}$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2+11x+1=0$

184) $a=-6,\ b=13$

$a,\ b$는 실수이고 주어진 방정식의 한 근이 $3+2i$ 이므로 다른 한 근은 $3-2i$ 이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(3+2i)+(3-2i)=-a,\ (3+2i)(3-2i)=b$

$\therefore\ a=-6,\ b=13$

185) ②

$f(\alpha)=0,\ f(\beta)=0$이므로 $f(4x-3)=0$ 이려면

$4x-3=\alpha$ 또는 $4x-3=\beta$

$\therefore\ x=\frac{\alpha+3}{4}$ 또는 $x=\frac{\beta+3}{4}$

따라서 이차방정식 $f(4x-3)=0$의 두 근의 합은

$\frac{\alpha+3}{4}+\frac{\beta+3}{4}=\frac{\alpha+\beta+6}{4}=\frac{6+6}{4}=3$

186) ②

주어진 방정식의 두 근을 $\alpha,\ 4\alpha$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+4\alpha=5(m-1)\qquad \therefore\ \alpha=m-1x$ …… ㉠

$\alpha\cdot 4\alpha=-16m\qquad \therefore\ \alpha^2=-4m$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(m-1)^2=-4m,\quad m^2+2m+1=0$

$(m+1)^2=0$

$\therefore\ m=-1$

187) ①

주어진 방정식의 두 근을 $\alpha,\ 2\alpha$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha=-6m\qquad \therefore\ \alpha=-2m$ …… ㉠

$\alpha\cdot 2\alpha=-m^2+1\qquad \therefore\ 2\alpha^2=-m^2+1$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2\cdot(-2m)^2=-m^2+1,\quad 9m^2=1$

$m^2=\frac{1}{9}\qquad \therefore\ m=\frac{1}{3}$ $(\because m>0)$

188) ⑤

$x^2+2x+a^2-2a=0$ 의 두 근의 차가 2이므로 두 근을 $\alpha,\ \alpha+2$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+2)=-2$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+2)=a^2-2a$ …… ㉡

㉠에서 $2\alpha=-4\qquad \therefore\alpha=-2$

$\alpha=-2$를 ㉡에 대입하면

$a^2-2a=0,\ a(a-2)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=2$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 2이다.

189) ①

주어진 방정식의 두 근을 $\alpha,\ \alpha+4$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+4)=2k \qquad \therefore\ \alpha=k-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\alpha(\alpha+4)=k-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(k-2)(k+2)=k-2,\qquad k^2-4=k-2$

$k^2-k-2=0,\qquad (k+1)(k-2)=0$

$\therefore\ k=-1$ 또는 $k=2$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 1이다.

<다른풀이> 주어진 방정식의 두 근을 $\alpha,\ \beta\,(\alpha>\beta)$라 하면 $\alpha-\beta=4$이고 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k,\ \alpha\beta=k-2$

이때 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$4^2=(2k)^2-4(k-2)$

$k^2-k-2=0,\qquad (k+1)(k-2)=0$

$\therefore k=-1$또는 $k=2$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 1이다.

190) ⑤

$x^2-ax+a+1=0$ 의 두 근이 연속된 자연수이므로 두 근을 n, $n+1$(n은 자연수) 이라 하면 근과 계수의 관계

$n+(n+1)=a \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$n(n+1)=a+1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $2n+1=a$ 이므로 ㉡에 대입하면

$n^2+n=(2n+1)+1,\quad n^2-n-2=0$

$(n-2)(n+1)=0 \quad \therefore n=2$ ($\because$ n은 자연수)

$n=2$를 ㉠에 대입하면 $a=5$

191) ③

주어진 이차방정식의 한 근이 -1이므로

$k\cdot(-1)^2-(a+1)\cdot(-1)-kb=0$

$(1-b)k+a+1=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$1-b=0,\ a+1=0$

따라서 $a=-1,\ b=1$이므로 $a+b=0$

192) ⑤

$x^2+4x+5=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-2\pm\sqrt{2^2-1\cdot5}=-2\pm i$

$\therefore\ x^2+4x+5=\{x-(-2+i)\}\{x-(-2-i)\}$

$=(x+2-i)(x+2+i)$

따라서 인수인 것은 ⑤이다.

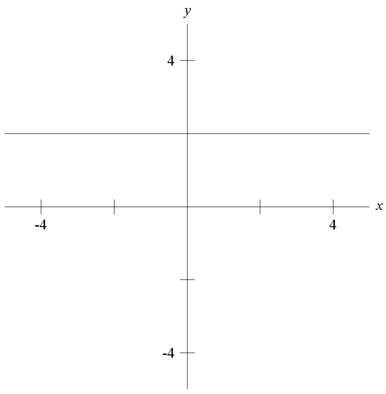
193) ㄱ, ㄷ

$\dfrac{3}{x},\ \dfrac{1}{x^2-1}$은 x에 대한 다항식이 아니므로 다항함수가 아닌 분수함수이다.

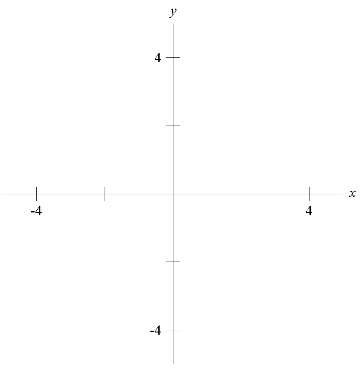
따라서 다항함수가 아닌 것은 ㄱ, ㄷ이다.

194)

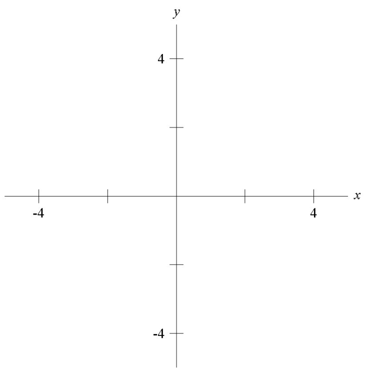
(1)



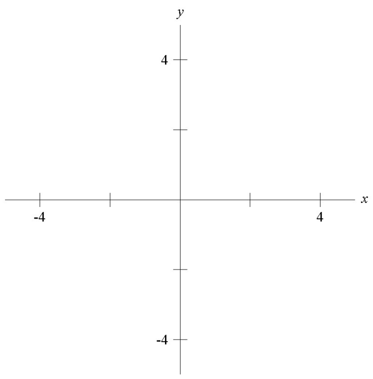
(2)



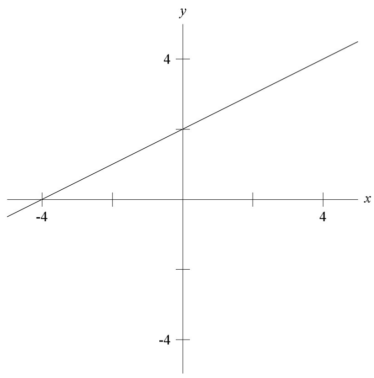
(3) x축



(4) y축

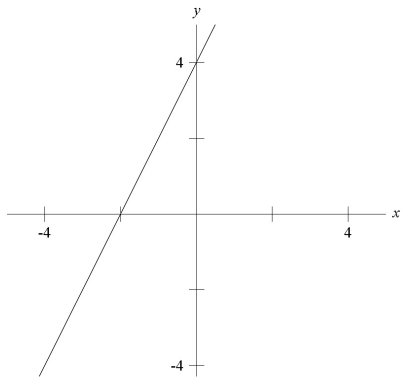


195) $y=\dfrac{1}{2}x+2$

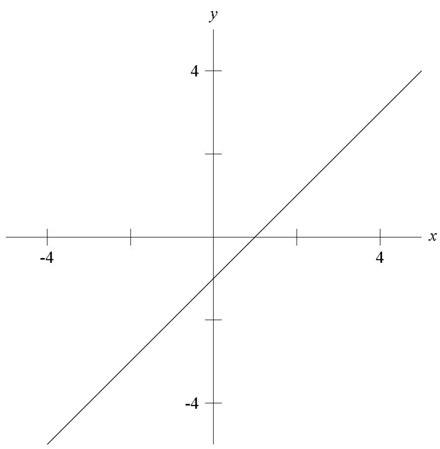


196)

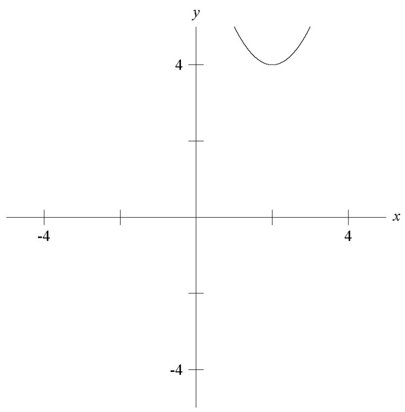
$y=2x+4$



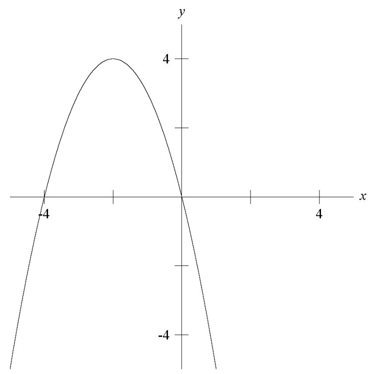
197) $y=x-1$



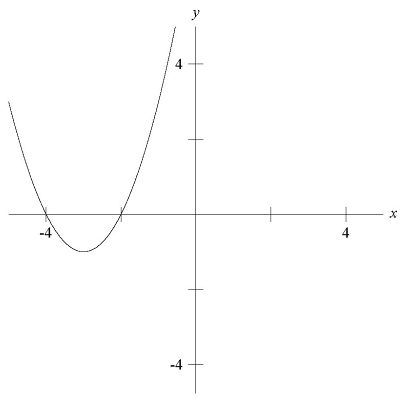
198) $y=(x-2)^2+4$



199) $y=-(x+2)^2+4$



200) $y=(x+4)(x+2)$

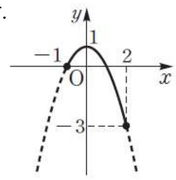


201) 최댓값: 1, 최솟값:-3

$-1 \le x \le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 즉,

$f(-1)=0$, $f(0)=1$, $f(2)=-3$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 1, 최솟값은 -3이다.



202) 풀이참조

(1) 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

축의 방정식 $x=-\dfrac{b}{2a}$에서 $-\dfrac{b}{2a}<0$ $\quad \therefore b>0$

또, y축과 $y>0$인 부분에서 만나므로 $c>0$

(2) 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$

축의 방정식 $x=-\dfrac{b}{2a}$에서 $-\dfrac{b}{2a}>0$ $\quad \therefore b>0$

또, y축과 $y<0$인 부분에서 만나므로 $c<0$

203) 2

$x^2-x+5=3x+1$ 에서

$x^2-4x+4=0 \quad (x-2)^2=0 \qquad \therefore x=2$

204) 1, 4

$-x^2+4x+1=-x+5$ 에서

$x^2-5x+4=0 \quad (x-1)(x-4)=0 \quad \therefore x=1$ 또는 $x=4$

205) ③

$x^2-1=ax+b$에서 $x^2-ax-1-b=0$

이 이차방정식의 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $1+\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $1-\sqrt{3}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=a$

$(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=-1-b$

이므로 $a=2,\ -2=-1-b$

$\therefore a=2,\ b=1 \qquad \therefore a+b=3$

206) ④

직선 $y=2x+k$와 이차함수 $y=x^2-6x+12$의 그래프의 교점의 좌표를 $(\alpha,\ 2\alpha+k)$, $(\beta,\ 2\beta+k)$라 하면 이차방정식 $2x+k=x^2-6x+12$, 즉 $x^2-8x+12-k=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=8$, $\alpha\beta=12-k$

이때 주어진 직선과 이차함수의 그래프가 만나는 두 점 사이의 거리가 $6\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(2\alpha+k-2\beta-k)^2}=6\sqrt{5}$

양변을 제곱하여 정리하면

$(\alpha-\beta)^2=36$, $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=36$

$8^2-4(12-k)=36 \quad \therefore k=5$

207) 0, 2

이차방정식 $3x^2-6x=0$에서

$3x(x-2)=0 \quad \therefore x=0$ 또는$x=2$

208) (1) 1 (2) 2 (3) 없다.

(1) 이차방정식 $x^2-x+1=x$ 에서 $x^2-2x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot 1=0$

이므로 $x^2-2x+1=0$은 중근을 가진다.

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점은 1개

(2) 이차방정식$x^2-x+1=3x-2$에서 $x^2-4x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot 3=1>0$

이므로 $x^2-4x+3=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다.

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점은 2개다.

(3) 이차방정식$x^2-x+1=-x-4$에서 $x^2+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(0)^2-4\cdot 1\cdot 5=-20<0$

이므로 $x^2+5=0$은 서로 다른 두 허근을 가진다.

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점은 없다.

209) (1)$k>-8$ (2)$k=-8$ (3)$k<-8$ (4) $k\geq -8$

이차방정식 $x^2-4x+1=2x+k$ 에서 $x^2-6x+1-k=0$ 의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\cdot(1-k)=8+k$

(1) $\frac{D}{4}=8+k>0 \quad \therefore k>-8$

(2) $\frac{D}{4}=8+k=0 \quad \therefore k=-8$

(3) $\frac{D}{4}=8+k<0 \quad \therefore k<-8$

(4) $\frac{D}{4}=8+k\geq 0 \quad \therefore k\geq -8$

210) 2

이차방정식 $2x^2-8x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-2\cdot 4=8>0$

이므로 $2x^2-8x+4=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다.

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축과의 교점은 2개

211) 0

이차방정식 $2x^2-x+5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\cdot 2\cdot 5=-39<0$

이므로 방정식 $2x^2-x+5=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다. 따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 없다.

212) (1) $k<4$ (2) $k=4$ (3) $k>4$

이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot k=4-k$

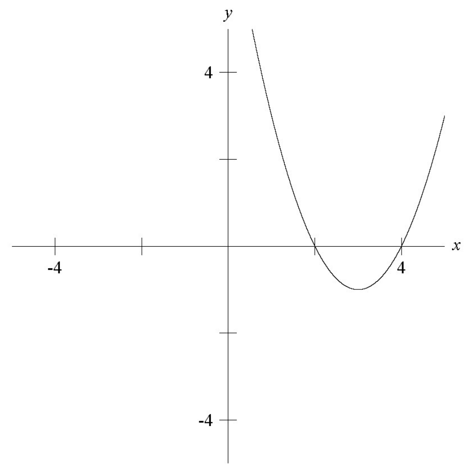
(1) $\frac{D}{4}=4-k>0 \quad \therefore k<4$

(2) $\frac{D}{4}=4-k=0 \quad \therefore k=4$

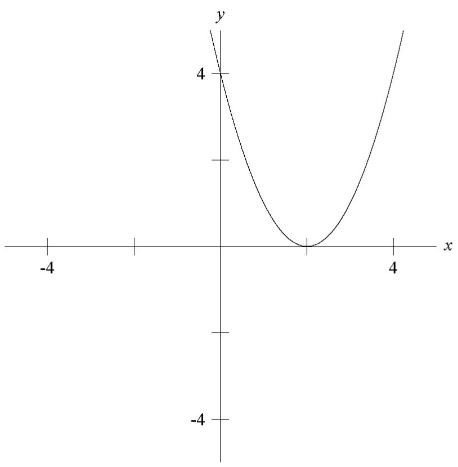
(3) $\frac{D}{4}=4-k<0 \quad \therefore k>4$

213)

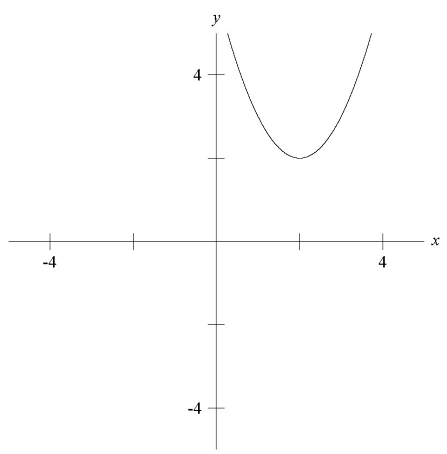
(1)



(2)



(3)



214) 서로 다른 두 점에서 만난다.

$x^2+2x+2=-x+1$, 즉 $x^2+3x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=3^2-4\cdot 1\cdot 1=5>0$$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

215) 한 점에서 만난다(접한다).

$2x^2-3x+4=x+2$, 즉 $x^2-2x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot 1=0$$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 한 점에서 만난다 (접한다).

216) (1) $y=x$ (2) 5

(1) 점 $(1,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식을 $y=a(x-1)+1$이라 하면 이 직선이 이차함수 $y=2x^2-3x+2$의 그래프와 접하므로 방정식 $2x^2-3x+2=a(x-1)+1$, 즉

$2x^2-(3+a)x+1+a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(3+a)\}^2-8(1+a)=0$

$a^2-2a+1=0,\quad (a-1)^2=0\ \therefore\ a=1$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=x$

(2) 기울기가 2이므로 $a=2$

직선 $y=2x+b$가 이차함수 $y=-x^2+2$의 그래프와 접하므로 이차방정식 $-x^2+2=2x+b$,

즉 $x^2+2x+b-2=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=1^2-(b-2)=0 \qquad \therefore b=3$$

$$\therefore a+b=5$$

217) 2

$f(x)-g(x)=0$에서 $f(x)=g(x)$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 만족시키는 해는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이므로

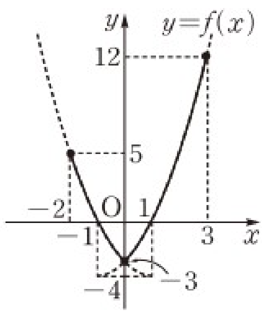
$x=-2$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 모든 해의 합은 2이다.

218) ①

조건 (나)에서 이차함수 $f(x)$의 최댓값은 4이므로
$f(x)=a(x-m)^2+4$ $(a<0)$라 하면 조건 (가)에서 $f(1)=2$이므로
$a(1-m)^2+4=2$, 즉 $a(1-m)^2=-2$ ⋯⋯㉠
한편 방정식 $f(x)+10=0$에서
$$a(x-m)^2+4+10=0$$
즉 $ax^2-2amx+am^2+14=0$의 두 실근의 합이 6이므로
$$\frac{2am}{a}=6 \qquad \therefore m=3$$
$m=3$을 ㉠에 대입하면
$$4a=-2 \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$$
따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}(x-3)^2+4$이므로
방정식 $-\frac{1}{2}(x-3)^2+4=0$, 즉 $x^2-6x+1=0$의 두 실근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 1이다.

219) ②



$f(x)=x^2+2|x|-3$이라 하면
(i) $-2\le x\le 0$일 때
$f(x)=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$

(ii) $0\le x\le 3$일 때
$f(x)=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$

(i),(ii)에서 $-2\le x\le 3$일 때,
$y=f(x)$의 그래프는
오른쪽 그림과 같으므로 $M=f(3)=12$, $m=f(0)=-3$
$\therefore Mm=-36$

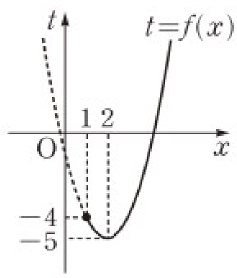
220) -4

$x^2+2x=t$로 놓으면
$t=x^2+2x=(x+1)^2-1\ge -1$
이때 주어진 함수는
$y=t^2+4t=(t+2)^2-4\,(t\ge -1)$
따라서 $t=-1$일 때 최솟값 -3을 갖는다.
$t=-1$에서 $x^2+2x=-1$
$x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0$
$\therefore x=-1$
따라서 $a=-1$, $b=-3$이므로
$a+b=-4$

221) 최댓값 : 5, 최솟값 : -1

$a-2b=3$에서 $b=\frac{1}{2}a-\frac{3}{2}$
$$\therefore ab=a\left(\frac{1}{2}a-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}a^2-\frac{3}{2}a$$
$$=\frac{1}{2}\left(a-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{8}$$
이때 $-2\le a\le 1$이므로 $a=-2$일 때 최댓값은 5, $a=1$일 때 최솟값은 -1이다.

222) -5



$x^2-2y^2=1$에서
$2y^2=x-1$ ⋯㉠
y가 실수이므로 $2y^2=x-1\ge 0$
$\therefore x\ge 1$
㉠을 x^2+2y^2-5x에 대입하면
$$x^2+2y^2-5x=x^2+x-1-5x$$
$$=(x-2)^2-5$$
$f(x)=(x-2)^2-5$라 하면 $x\ge 1$에서 함수 $t=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 -5를 갖는다.
즉 x^2+2y^2-5x의 최솟값은 -5이다.

223) ②

$x^3-2x^2+kx+6=0$의 한 근이 3이므로
$27-18+3k+6=0$ $\therefore k=-5$
$x^3-2x^2-5x+6=0$을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 3 & 3 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$(x-3)(x^2+x-2)=0$$
이 때 주어진 방정식의 다른 두 근은 $x^2+x-2=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 다른 두 근의 곱은 -2이다.

224) $\frac{7}{8}$

$f(x)=x^3-(1+2k)x+2k$로 놓으면
$f(1)=1-(1+2k)+2k=0$
조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & -(1+2k) & 2k \\ & & 1 & 1 & -2k \\ \hline & 1 & 1 & -2k & 0 \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)(x^2+x-2k)$
이때 방정식 $f(x)=0$이 중근을 가지려면
(ⅰ) 방정식 $x^2+x-2k=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우
$1+1-2k=0 \qquad \therefore k=1$
(ⅱ) 방정식 $x^2+x-2k=0$이 중근을 갖는 경우
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=1^2-4\cdot1\cdot(-2k)=0 \qquad \therefore k=-\frac{1}{8}$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 k의 값의 합은 $1+\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{7}{8}$

225) ②

방정식 $x^4+5x^3-4x^2+5x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면
$x^2+5x-4+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$
$x^2+\frac{1}{x^2}+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$
$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$
이때, $x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면
$X^2+5X-6=0$, $(X+6)(X-1)=0$
$\therefore\ X=-6$ 또는 $X=1$
(ⅰ) $X=-6$일 때, $x+\frac{1}{x}=-6$에서
$x^2+6x+1=0 \ \therefore\ x=-3\pm2\sqrt{2}$
(ⅱ) $X=1$일 때, $x+\frac{1}{x}=1$에서
$x^2-x+1=0 \ \therefore\ x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$
(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 방정식의 실근은 $-3\pm2\sqrt{2}$이다.

226) ③

$x\neq0$이므로 양변을 x^2으로 나누면
$x^2-4x+5-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0$
$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0$
$\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0$
$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$
이때 $x+\frac{1}{x}=t$라 하면
$t^2-4t+3=0$, $(t-1)(t-3)=0$
$\therefore t=1$ 또는 $t=3$
(i) $t=1$ 일 때, $x+\frac{1}{x}=1$, $x^2-x+1=0$
판별식 $D=1-4=-3<0$이므로 허근을 갖는다.
(ii) $t=3$ 일 때, $x+\frac{1}{x}=3$, $x^2-3x+1=0$
판별식 $D=9-4=5>0$이므로 실근을 갖는다.
따라서 주어진 방정식의 한 실근이 α이므로 (ii)에서
$\alpha+\frac{1}{\alpha}=3$

227) $x^3-5x^2+2x+8=0$

x^3의 계수가 1이고 근이 -1, 2, 4인 삼차방정식은
$\therefore\ x^3-5x^2+2x+8=0$

228) -2

주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 $1-\sqrt{3}$이 근이면 $1+\sqrt{3}$도 근이다.
따라서 주어진 방정식의 세 근이 $-2, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-2(1-\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})-2(1+\sqrt{3})=a$
$-2(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})=b$
$\therefore a=-6,\quad b=4 \qquad \therefore a+b=-2$

229) ⑤

주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 한 근이 $2-\sqrt{2}i$이면 $2+\sqrt{2}i$도 근이다. 나머지 한 근이 c이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$c+(2-\sqrt{2}i)+(2+\sqrt{2}i)=3$,
$c(2-\sqrt{2}i)+(2-\sqrt{2}i)(2+\sqrt{2}i)+c(2+\sqrt{2}i)=a$,
$c(2-\sqrt{2}i)(2+\sqrt{2}i)=-b$
앞의 세 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=6,\ c=-1$
$\therefore\ a+b+c=2+6-1=7$

230) ②

$x^2+x+1=0$의 양변에 $x-1$을 곱하면
$(x-1)(x^2+x+1)=0,\ x^3-1=0 \qquad \therefore x^3=1$
$\therefore x^{2012}=x^{2011}+x^{2010}+x^{2009}+x^{2008}$
$=(x^3)^{670}\cdot x^2+(x^3)^{670}\cdot x+(x^3)^{670}+(x^3)^{669}\cdot x^2+(x^3)^{669}\cdot x$
$=(x^2+x+1)+(x^2+x)$
$=0-1=-1$

231) -3

$\begin{cases} x^2+y^2+2y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2+x+y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠ - ㉡을 하면 $y-x=-1$
$\therefore y=x-1 \qquad \cdots\cdots ㉢$
㉢을 ㉠에 대입하면
$x^2+(x-1)^2+2(x-1)=1,\ x^2=1$
$\therefore x=1$ 또는 $x=-1$
이를 ㉢에 대입하면
$x=1,\ y=0$ 또는 $x=-1,\ y=-2$
따라서 $x+y$의 최솟값은 $(-1)+(-2)=(-3)$

232) $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$

$x+y=2,\quad xy=-8$ 이므로
$x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2-2t-8=0$의 두 근이다.
$(t-4)(t+2)=0 \qquad \therefore\ t=4$ 또는 $t=-2$
따라서 구하는 해는
$\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$

233) (1) 6 (2) $\frac{5}{6}$

(1) $\begin{cases} x+y=a & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=18 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $y=-x+a$를 ㉡에 대입하면
$x^2+(-x+a)^2=18,\ 2x^2-2ax+a^2-18=0$
주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지므로 위의 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-2(a^2-18)=0,\ a^2=36$
$\therefore\ a=6\ (\because a>0)$
(2) $x,\ y$를 두 근으로 하는 t에 대한 이차방정식은
$t^2-2(a-3)t+a^2+4=0$
위의 이차방정식이 실근을 가지려면 판별식을 D라 할 때,
$\frac{D}{4}=(a^2-3)^2-(a^2+4)\ge 0,\ -6+5\ge 0$
$\therefore a\le \frac{5}{6}$
따라서 실수 a의 최댓값은 $\frac{5}{6}$이다.

234) 0

$x^4+3x^2+36=0$에서
$(x^4+12x^2+36)-9x^2=0,\ (x^2+6)^2-(3x)^2=0$
$(x^2+3x+6)(x^2-3x+6)=0$
방정식 $x^2+3x+6=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$,
방정식 $x^2-3x+6=0$의 두 근을 $\gamma,\ \delta$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=6,\ \gamma+\delta=3,\ \gamma\delta=6$
$\therefore\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}=\frac{-3}{6}+\frac{3}{6}=0$

235) ④

$P(x)=x^3-4x^2+(k+4)x-2k$로 놓으면
$P(2)=8-16+2(k+4)-2k=0$
조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

2	1	-4	$k+4$	$-2k$
		2	-4	$2k$
	1	-2	$-2k$	0

$\therefore\ P(x)=(x-2)(x^2-2x+k)$
방정식 $P(x)=0$의 모든 근이 실수가 되려면 이차방정식 $x^2-2x+k=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-k \geq 0 \qquad \therefore\ k \leq 1$

236) ②

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 w는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이고, 방정식의 계수가 실수이므로 w의 켤레복소수인 $\overline{w}$도 $x^2+x+1=0$의 근이다. 즉

$\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$, $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

ㄱ. $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{100}$

$=(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)$

$+\cdots+\omega^{96}(1+\omega+\omega^2)+(\omega^3)^{33}+(\omega^3)^{33}\cdot\omega$

$=\omega+1$

ㄴ. $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)(1+\omega^4)(1+\omega^5)$

$=2(1+\omega)^2(1+\omega^2)^2=2(-\omega^2)^2(-\omega^2)^2$

$=2\omega^6=2$

ㄷ. $\frac{1}{1-\omega}+\frac{1}{1-\overline{\omega}}=\frac{2-(\omega+\overline{\omega})}{(1-\omega)(1-\overline{\omega})}=\frac{2-(\omega+\overline{\omega})}{1-(\omega+\overline{\omega})+\omega\overline{\omega}}$

$=\frac{2-(-1)}{1-(-1)+1}=1$

ㄹ. $\frac{\omega^2}{1+\omega}+\frac{\overline{\omega}}{1+\overline{\omega}^2}=\frac{\omega^2}{-\omega^2}+\frac{\overline{\omega}}{-\overline{\omega}}=-1-1=-2$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

237) 2

$x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, 즉 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이다.

따라서 $\omega^2-\omega+1=0$이므로 $\omega^2=\omega-1$

$\therefore\ \frac{\omega-1}{\omega^2}+\frac{\omega^2}{\omega-1}=\frac{\omega^2}{\omega^2}+\frac{\omega^2}{\omega^2}=2$

238) ①

$\omega=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$에서 $2\omega-1=-\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면 $4\omega^2-4\omega+1=-3$

$4\omega^2-4\omega+4=0 \quad \therefore\ \omega^2-\omega+1=0$

양변에 $\omega+1$을 곱하면

$(\omega+1)(\omega^2-\omega+1)=0$, $\omega^3+1=0$

$\therefore\ \omega^3=-1$

$\therefore\ \omega^{2019}+\frac{1}{\omega^{2019}}=(\omega^3)^{673}+\frac{1}{(\omega^3)^{673}}=-1-1=-2$

239) -9

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 w는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다.

$\therefore\ \omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$

이때,

$f(1)=\frac{\omega}{1+\omega^2}=\frac{\omega}{-\omega}=-1$,

$f(2)=\frac{\omega^2}{1+\omega^4}=\frac{\omega^2}{1+\omega}=\frac{\omega^2}{-\omega^2}=-1$,

$f(3)=\frac{\omega^3}{1+\omega^6}=\frac{1}{2}$,

$f(4)=\frac{\omega^4}{1+\omega^8}=\frac{\omega}{1+\omega^2}=f(1)$,

$f(5)=\frac{\omega^5}{1+\omega^{10}}=\frac{\omega^2}{1+\omega^4}=f(2)$,

$f(6)=\frac{\omega^6}{1+\omega^{12}}=\frac{\omega^3}{1+\omega^6}=f(3)$,

$\vdots$

이므로

$f(1)=f(4)=f(7)=\cdots=f(16)=-1$,

$f(2)=f(5)=f(8)=\cdots=f(17)=-1$,

$f(3)=f(6)=f(9)=\cdots=f(18)=\frac{1}{2}$

$\therefore\ f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(18)$

$=\left(-1-1+\frac{1}{2}\right)\cdot 6=-9$

240) $(-3,\ 1)$, $(1,\ -3)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u-v=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-v=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $v=u-1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $u^2-u-6=0$, $(u+2)(u-3)=0$

$\therefore\ u=-2$ 또는 $u=3$

이것을 ㉢에 대입하면

$u=-2$, $v=-3$ 또는 $u=3$, $v=2$

(ⅰ) $u=-2,\ v=-3$, 즉 $x+y=-2,\ xy=-3$일 때
$x,\ y$는 이차방정식 $t^2+2t-3=0$의 두 근이므로
$(t+3)(t-1)=0$ $\therefore\ t=-3$ 또는 $t=1$
$\therefore \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$
(ⅱ) $u=3,\ v=2$, 즉 $x+y=3,\ xy=2$일 때
$x,\ y$는 이차방정식 $t^2-3t+2=0$의 두 근이므로
$(t-1)(t-2)=0$ $\therefore\ t=1$ 또는 $t=2$
$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 순서쌍 $(x,\ y)$는
$(-3,\ 1),\ (1,\ -3),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$

241) $\frac{9}{8}$

$\begin{cases} x-y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+k=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $y=x-3$
이것을 ㉡에 대입하면 $x^2+x(x-3)+k=0$
$\therefore\ 2x^2-3x+k=0$
이를 만족시키는 실수 x의 값이 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot k\geq 0$
$9-8k\geq 0$ $\therefore\ k\leq \frac{9}{8}$
따라서 실수 k의 최댓값은 $\frac{9}{8}$이다.

242) ㄱ, ㄴ

ㄱ. $a>b$이므로 $a+c>b+c$ $\cdots\cdots$ ㉠
$c>d$이므로 $b+c>b+d$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a+c>b+c>b+d$
$\therefore a+c>b+d$ (참)
ㄴ. $a>b,\ c>0$이므로 $ac>bc$ $\cdots\cdots$ ㉠
$b>0,\ c>d$이므로 $bc>bd$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $ac>bc>bd$
$\therefore ac>bd$ (참)
ㄷ. (반례) $a=3,\ b=2,\ c=2,\ d=1$이면
$\frac{a}{c}=\frac{3}{2}<\frac{b}{d}=\frac{2}{1}$ (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

243) ⑤

ㄱ. $a<b$에서 $-a>-b$
이때 $-a>0,\ -b>0$이므로 $-\frac{1}{a}<-\frac{1}{b}$
$\therefore\ \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$
ㄴ. $|a|>|b|$이므로 $a^2>b^2$
$ab>0$이므로 양변을 ab로 나누면 $\frac{a}{b}>\frac{b}{a}$
ㄷ. $a<b<0$에서 $a^3<b^3$
$ab>0$이므로 양변을 ab로 나누면 $\frac{a^2}{b}<\frac{b^2}{a}$
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.
〈참고〉
ㄷ. $a<b<0$에서 $-a>-b>0$
$(-a)^3>(-b)^3,\ -a^3>-b^3$ $\therefore\ a^3<b^3$

244) ①

$x-3y=10$에서 $x=3y+10$
이것을 $-5\leq x+y\leq -1$에 대입하면
$-5\leq 4y+10\leq -1,\ -15\leq 4y\leq -11$
$\therefore\ -\frac{15}{4}\leq y\leq -\frac{11}{4}$
따라서 $M=-\frac{11}{4},\ m=-\frac{15}{4}$이므로
$M-m=1$

245) $3\leq x+y\leq 8$

$1+2\leq x+y\leq 3+5$ $\therefore\ 3\leq x+y\leq 8$

246) 풀이참조

(1) $-2\leqq x+y\leqq 6$
(2) $-5\leqq x-y\leqq 3$
(3) $-6\leqq xy\leqq 8$
(4) $-3\leqq \frac{x}{y}\leqq 4$

247) ⑤

$-1 < x \le 2$, $1 < y \le 3$일 때,
① $0 < x+y \le 5$
② $-4 < x-y < 1$
③ $-3 < xy \le 6$
④ $-1 < y-x < 4$
따라서 옳은 것은 ⑤이다.

248) ④

$(1-a)x > a+b$의 해가 $x < -2$이므로 $1-a < 0$
$\therefore x < \dfrac{a+b}{1-a}$
따라서 $\dfrac{a+b}{1-a} = -2$이므로 $a+b = -2+2a$
$\therefore a-b = 2$
이것을 부등식 $(a-b)x \ge 6$에 대입하면
$2x \ge 6$ $\therefore x \ge 3$

249) 풀이참조

$(a+1)x < a$에서
(i) $a < -1$일 때 $x > \dfrac{a}{a+1}$
(ii) $a > -1$일 때 $x < \dfrac{a}{a+1}$
(iii) $a = -1$일 때 $0 \cdot x < -1$이므로 해가 없다.

250) ④

부등식 $x+a > bx+3$에서 $(1-b)x > 3-a$
이 부등식의 해가 모든 실수이므로
$1-b = 0$, $3-a < 0$

$\therefore a > 3$, $b = 1$

251) -1

부등식 $a^2x - a^2 \ge x+b$에서 $(a^2-1)x \ge a^2+b$
이 부등식의 해가 모든 실수이므로
$a^2-1 = 0$, $a^2+b \le 0$
$\therefore a^2 = 1$, $b \le -1$
따라서 b의 최댓값은 -1이다.

252) $x > -2$

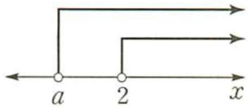
부등식 $(a-b)x + a - 2b \le 0$에서
$(a-b)x \le -a+2b$
이 부등식의 해가 존재하지 않으려면
$a-b = 0$, $-a+2b < 0$
$a-b=0$에서 $b = a$이므로
$-a+2a < 0$ $\therefore a < 0$
$b = a$를 $(a-3b)x + a - 5b > 0$에 대입하면
$(a-3a)x + a - 5a > 0$, $-2ax - 4a > 0$
$-2ax > 4a$
$-2a > 0$이므로 $x > -2$

253) $1 < x < 2$

$|2x-3| < 1$ 에서 $-1 < 2x-3 < 1$
$2 < 2x < 4$ $\therefore 1 < x < 2$

254) $a \le 2$

부등식 $|x-1| < 2x-3$에서
(i) $x \ge 1$일 때
$x-1 < 2x-3$ $\therefore x > 2$
그런데 $x \ge 1$이므로 $x > 2$
(ii) $x < 1$일 때
$-(x-1) < 2x-3$, $-3x < -4$
$\therefore x > \dfrac{4}{3}$
그런데 $x < 1$이므로 해는 없다.
(i), (ii)에서
부등식의 해는 $x > 2$



$x > 2$가 $x > a$에 포함되려면 오른쪽 그림에서
$a \le 2$

255) ④

$1 < |x-a| \le 3$에서

$-3 \le x-a < -1$ 또는 $1 < x-a \le 3$

$\therefore\ a-3 \le x < a-1$ 또는 $a+1 < x \le a+3$

a가 정수이므로 주어진 부등식의 정수해는

$a-3,\ a-2,\ a+2,\ a+3$

즉 $(a-3)+(a-2)+(a+2)+(a+3)=8$이므로

$4a=8 \qquad \therefore\ a=2$

256) ①

$||x-1|-2|<2$에서

$-2<|x-1|-2<2, \quad 0<|x-1|<4$

$-4<x-1<4,\ x-1 \ne 0$

$\therefore\ -3<x<1$또는 $1<x<5$

따라서 정수 x는 $-2,\ -1,\ 0,\ 2,\ 3,\ 4$의 6개 이다.

257) ④

$|2x-3|+1>a$에서 $|2x-3|>a-1$

이 부등식의 해가 모든 실수이려면

$a-1<0 \qquad \therefore\ a<1$

258) ④

부등식 $\left|\frac{1}{3}x+2\right|+k \le 0$에서 $\left|\frac{1}{3}x+2\right| \le -k$

$\left|\frac{1}{3}x+2\right| \ge 0$이므로 부등식의 해가 존재하려면

$-k \ge 0 \qquad \therefore\ k \le 0$

259) $-2 \le x \le 2$

$ax^2+(b-m)x+c-n \ge 0$에서 $ax^2+bx+c \ge mx+n$

즉, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$과 만나거나 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로 주어진 그림에서 $-2 \le x \le 2$

260) $a \le x \le b$ 또는 $c \le x \le d$

$f(x)g(x) \ge 0$에서 $f(x) \ge 0,\ g(x) \ge 0$ 또는 $f(x) \le 0,\ g(x) \le 0$

(ⅰ) $f(x) \ge 0,\ g(x) \ge 0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

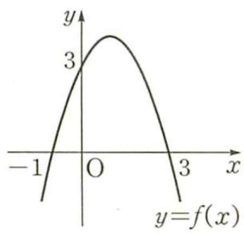
$a \le x \le b$

(ⅱ) $f(x) \le 0,\ g(x) \le 0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$c \le x \le d$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(x)g(x) \ge 0$의 해는 $a \le x \le b$ 또는 $c \le x \le d$

261) $-1<x<3$



이차방정식 $-x^2+2x+3=0$에서

$x^2-2x-3=0$

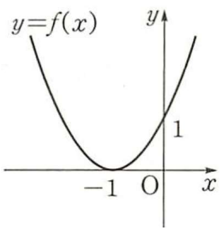
$(x+1)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$

$f(x)=-x^2+2x+3$이라 하면

$y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 이차부등식 $f(x)>0$의 해는 $-1<x<3$

262) 모든 실수



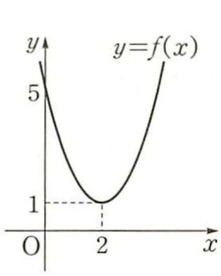
$f(x)=x^2+2x+1$이라 하면

$f(x)=(x+1)^2$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 부등식

$f(x) \ge 0$의 해는 모든 실수이다.

263) 해는 없다.



$f(x)=x^2-4x+5$라 하면

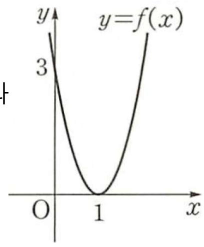
$f(x)=(x-2)^2+1$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 부등식

$f(x)<0$의 해는 없다.

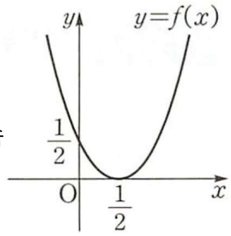
264) $x \ne 1$인 모든 실수

$f(x)=3x^2-6x+3$이라 하면
$f(x)=3(x-1)^2$
따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 $f(x)>0$의 해는
$x \neq 1$인 모든 실수



265) $x=\frac{1}{2}$

$f(x)=2x^2-2x+\frac{1}{2}$이라 하면
$f(x)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$
따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 부등식
$f(x) \leq 0$의 해는 $x=\frac{1}{2}$이다.



266) $-1-\sqrt{2} \leq x \leq -1+\sqrt{2}$

$x^2+2x-1 \leq 0$에서 $(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2}) \leq 0$
$-1-\sqrt{2} \leq x \leq -1+\sqrt{2}$

267) $x \neq 4$인 모든 실수

$x^2-8x+16=(x-4)^2 \geq 0$
따라서 $x^2-8x+16>0$의 해는 $x \neq 4$인 모든 실수이다.

268) 해는 없다.

$x^2-2x+4=(x-1)^2+3 \geq 3$
따라서 $x^2-2x+4<0$의 해는 없다.

269) 풀이참조

(1) $(x+1)(x-4)<0$
(2) $(x+2)(x-4)>0$
(3) $(x+2)(x-3) \leq 0$
(4) $(x-1)(x-3) \geq 0$

270) $-\frac{4}{3}$

$ax^2+bx+c>0$의 해가 $2<x<4$이므로 $a<0$
해가 $2<x<4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x-2)(x-4)<0 \quad \therefore x^2-6x+8<0$
양변에 a를 곱하면 $ax^2-6ax+8a>0$
이 부등식이 $ax^2+bx+c>0$과 같으므로
$b=-6a,\ c=8a \quad \therefore \frac{c}{b}=\frac{8a}{-6a}=-\frac{4}{3}$

271) $-3<x<3$

(ⅰ) $x \geq 0$일 때, $x^2-2x-3<0$
$(x+1)(x-3)<0 \quad \therefore -1<x<3$
그런데 $x \geq 0$이므로 $0 \leq x<3$
(ⅱ) $x<0$일 때, $x^2+2x-3<0$
$(x-1)(x+3)<0 \quad \therefore -3<x<1$
그런데 $x<0$이므로 $-3<x<0$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $-3<x<3$

272) $x \leq -2$ 또는 $x \geq 2$

$|x^2-1| \geq 3$에서 $x^2-1 \geq 3$ 또는 $x^2-1 \leq -3$
(ⅰ) $x^2-1 \geq 3$에서 $x^2-4 \geq 0$
$(x+2)(x-2) \geq 0 \quad \therefore x \leq -2$ 또는 $x \geq 2$
(ⅱ) $x^2-1 \leq -3$에서 $x^2 \leq -2$
그런데 $x^2 \geq 0$이므로 해는 없다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 $x \leq -2$ 또는 $x \geq 2$

273) $-2<x \leq 2$ 또는 $3 \leq x<4$

$5x-3 \leq x^2+3$에서
$x^2-5x+6 \geq 0$, $(x-2)(x-3) \geq 0$

$\therefore x \le 2$ 또는 $x \ge 3$ …… ㉠
$x^2+3<2x+11$에서
$x^2-2x-8<0$, $(x+2)(x-4)<0$
$\therefore -2<x<4$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면
$-2<x\le 2$ 또는 $3\le x<4$

274) ②

$(m-1)x^2+2(m-1)x+3>0$ …… ㉠
(ⅰ) $m=1$일 때, $0\cdot x^2+0\cdot x+3=3>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.
$\therefore m=1$
(ⅱ) $m\ne 1$일 때, ㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면,
$m-1>0$에서 $m>1$ …… ㉡
이차방정식 $(m-1)x^2+2(m-1)x+3=0$의 판별식을 D
$\frac{D}{4}=(m-1)^2-3(m-1)<0$
$m^2-5m+4<0$, $(m-1)(m-4)<0$
$\therefore\ 1<m<4$ …… ㉢
㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면 $1<m<4$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $1\le m<4$

275) ④

이차부등식 $x^2+2(n+2)x-4(n+2)<0$의 해가 존재하지 않으려면 이차방정식 $x^2+2(n+2)x-4(n+2)=0$의 판별식을 D라 할 때,
$\frac{D}{4}=(n+2)^2+4(n+2)\le 0$
$n^2+8n+12\le 0$, $(n+2)(n+6)\le 0$
$\therefore\ -6\le n\le -2$
따라서 정수 n은 $-6, -5, -4, -3, -2$의 5개다.

276) ⑤

이차부등식 $x^2-(k-8)x+k\le 0$이 단 한 개의 실근을 가지므로 이차방정식 $x^2-(k-8)x+k=0$의 판별식을 D라 하면
$D=\{-(k-8)\}^2-4k=0$
$k^2-20k+64=0$, $(k-4)(k-16)=0$
$\therefore k=4$ 또는 $k=16$
따라서 모든 실수 k의 합은 20이다.

277) 3

부등식 $-x^2+6x-a<0$을 만족시키지 않는 x의 값이 오직 하나뿐이면 부등식 $-x^2+6x-a\ge 0$,
즉 $x^2-6x+a\le 0$이 단 한 개의 실근을 가져야 한다.

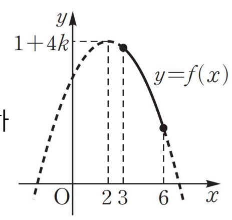
이차방정식 $x^2-6x+a=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-3)^2-a=0$ $\quad\therefore a=9$
따라서 $x^2-6x+9=(x-3)^2\le 0$을 만족시키는 x의 값은 3이므로 $k=3$

278) ③

(ⅰ) $a>0$ 일때
이차함수 $y=ax^2+2ax-5$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.
(ⅱ) $a=0$ 일때
$0\cdot x^2+0\cdot x-5=-5<0$ 이므로 부등식을 만족시키는 x는 존재하지 않는다.
(ⅲ) $a<0$ 일때
부등식의 해가 존재하려면 이차방정식 $ax^2+2ax-5=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4}=a^2+5a>0$, $\quad a(a+5)>0$
$\therefore\ a<-5$ 또는 $a>0$
그런데 $a<0$ 이므로 $a<-5$
이상에서 a의 값의 범위는 $a<-5$ 또는 $a>0$
따라서 a의 값이 아닌 것은 ③ 이다.

279) $k\ge\frac{15}{4}$

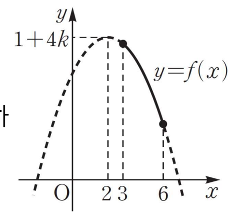
$f(x)=-x^2+4x-3+4k$로 놓으면
$f(x)=-(x-2)^2+1+4k$
$3\le x\le 6$에서 $f(x)\ge 0$이 항상 성립하려면 오른쪽 그림에서 $f(6)\ge 0$



$-16+1+4k \ge 0 \qquad \therefore\ k \ge \dfrac{15}{4}$

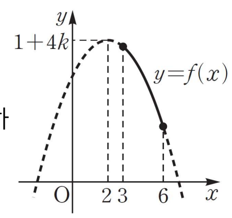
280) $k \ge \dfrac{15}{4}$

$f(x)=-x^2+4x-3+4k$로 놓으면
$f(x)=-(x-2)^2+1+4k$
$3 \le x \le 6$에서 $f(x) \ge 0$이 항상 성립하려면 오른쪽 그림에서 $f(6) \ge 0$
$-16+1+4k \ge 0 \qquad \therefore\ k \ge \dfrac{15}{4}$



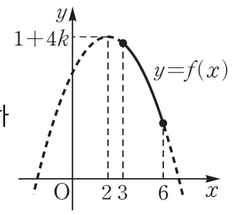
281) $k \ge \dfrac{15}{4}$

$f(x)=-x^2+4x-3+4k$로 놓으면
$f(x)=-(x-2)^2+1+4k$
$3 \le x \le 6$에서 $f(x) \ge 0$이 항상 성립하려면 오른쪽 그림에서 $f(6) \ge 0$
-$-16+1+4k \ge 0 \qquad \therefore\ k \ge \dfrac{15}{4}$



282) $k > \dfrac{15}{4}$

$f(x)=-x^2+4x-3+4k$로 놓으면
$f(x)=-(x-2)^2+1+4k$
$3 \le x \le 6$에서 $f(x) \ge 0$이 항상 성립하려면 오른쪽 그림에서 $f(6) > 0$
-$-16+1+4k > 0 \qquad \therefore\ k > \dfrac{15}{4}$



283) $a \le -2$

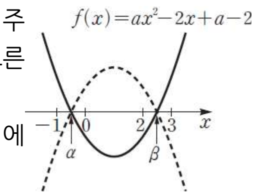
$f(x)=x^2-4x+a-3$으로 놓으면
$-1 < x < 3$에서 $f(x) < 0$이 항상 성립하려면 오른쪽 그림에서 $f(-1) \le 0$이어야 한다.
$f(-1) \le 0$에서
$1+4+a-3 \le 0 \qquad \therefore\ a \le -2$

284) $3 \le k < 5$

$f(x)=x^2-2kx+9$로 놓으면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 1보다 크므로
(ⅰ) $\dfrac{D}{4}=(-k)^2-1\cdot 9 \ge 0$에서 $k^2-9 \ge 0$
$(k+3)(k-3) \ge 0 \qquad \therefore\ k \le -3$ 또는 $k \ge 3$
(ⅱ) $f(1)=1-2k+9>0$에서
$-2k+10>0 \qquad \therefore\ k<5$
(ⅲ) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=k$
$k>1$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 k의 값의 범위는 $3 \le k < 5$

285) $\dfrac{4}{5} < a < \dfrac{6}{5}$

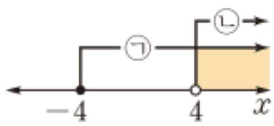
$f(x)=ax^2-2x+a-2$로 놓으면 주어진 조건을 만족하는 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(x)=0$의 한 근이 -1과 0사이에 있을 조건은 $f(-1)\cdot f(0)<0$에서
$(a+2+a-2)(a-2)<0, \qquad 2a(a-2)<0$
$\therefore 0<a<2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
$f(x)=0$의 다른 한 근이 2와 3사이에 있을 조건은
$f(2)\cdot f(3)<0$에서
$(4a-4+a-2)(9a-6+a-2)<0, \quad 2(5a-6)(5a-4)<0$
$\therefore \dfrac{4}{5}<a<\dfrac{6}{5} \qquad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡ 의 공통 범위를 구하면 $\dfrac{4}{5}<a<\dfrac{6}{5}$

286) ④

$2x-3 \le 3x+1$에서 $-x \le 4$
$\therefore x \ge -4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
$3x+1<5x-7$에서 $-2x<-8$
$\therefore x>4 \qquad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
$x>4$

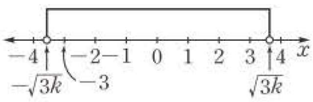


287) ③

ㄱ. $a>0$일 때 주어진 부등식의 양변을 a로 나누면
$x^2-4x+6\le 0$
이때 $x^2-4x+6=(x-2)^2+2\ge 2$이므로 부등식의 해는 없다.
ㄴ. $a=0$이면 주어진 부등식은 $0\le 0$
이 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 부등식의 해는 모든 실수이다.
ㄷ. $a<0$일 때 주어진 부등식의 양변을 a로 나누면
$x^2-4x+6\ge 0$
이때 $x^2-4x+6=(x-2)^2+2\ge 2$이므로 부등식의 해는 모든 실수이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

288) ④

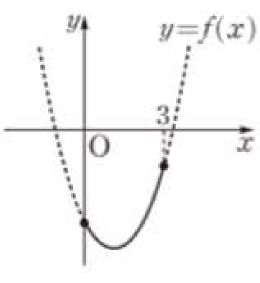
$x^2-3k<0$에서
$(x+\sqrt{3k})(x-\sqrt{3k})<0$
$\therefore\ -\sqrt{3k}<x<\sqrt{3k}$



이때 $-\sqrt{3k}<x<\sqrt{3k}$를 만족시키는 정수 x가 7개이므로 오른쪽 그림에서
$3<\sqrt{3k}\le 4$
$9<3k\le 16$ $\quad\therefore\ 3<k\le \dfrac{16}{3}$
따라서 자연수 k는 $4,\ 5$이므로 그 합은 $4+5=9$

289) 4

$x^2-ax\le -a^2+9$에서 $x^2-ax+a^2-9\le 0$
$f(x)=x^2-ax+a^2-9$라 하면 $0\le x\le 3$에서 $f(x)\le 0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같아야 한다.



$f(0)\le 0$에서
$a^2-9\le 0,\quad \therefore -3\le a\le 3$
$f(3)\le 0$에서 $9-3a+a^2-9\le 0$
$a^2-3a\le 0\quad \therefore 0\le a\le 3$
공통부분을 구하면, $0\le a\le 3$

290) $-2<x<5$

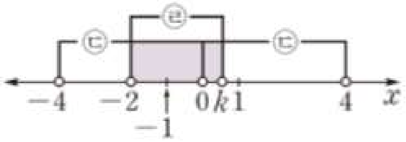
$y=2x^2-2x-3$의 그래프에서 $y=x^2+x+7$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는
$2x^2-2x-3<x^2+x+7$ 의 해이므로
$x^2-3x-10<0$ $\qquad\therefore -2<x<5$

291) 풀이참조

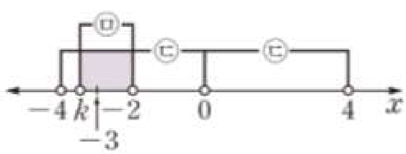
$x^2=|x|^2$이므로 주어진 부등식은 $|x|^2-5|x|+6\le 0$
$(|x|-2)(|x|-3)\le 0$ $\qquad\therefore 2\le |x|\le 3$
$|x|\ge 2$에서 $x\le -2$ 또는 $x\ge 2$ ⋯ ㄱ
$|x|\le 3$에서 $-3\le x\le 3$ ⋯ ㄴ
ㄱ,ㄴ의 공통부분을 구하면
$-3\le x\le -2$ 또는 $2\le x\le 3$

292) 1

$x^2-4|x|<0$에서
$x\ge 0$일 때, $x^2-4x<0\ \therefore 0<x<4$ ⋯⋯ ㄱ
$x<0$일 때, $x^2+4x<0\ \therefore -4<x<0$ ⋯⋯ ㄴ
ㄱ,ㄴ에서 $x^2-4|x|<0$의
해는 $-4<x<0$ 또는 $0<x<4$ ⋯⋯ ㄷ
$x^2+(2-k)x-2k<0$에서 $(x+2)(x-k)<0$
(i) $k>-2$일 때
$(x+2)(x-k)<0$에서 $-2<x<k$ ⋯⋯ ㄹ
ㄷ, ㄹ을 동시에 만족시키는 정수 x가 오직 한 개라면 그림에서



$-1<k\le 1$
(ii)$k<-2$일 때
$(x+2)(x-k)<0$에서 $k<x<-2$ ⋯⋯ ㅁ
ㄷ, ㅁ을 동시에 만족시키는 정수 x가 오직 한 개이려면 그림에서



$k<-3$
(i),(ii)에서 $k<-3$ 또는 $-1<k\le 1$
따라서 k의 최댓값은 1이다.

293) ②

O$(0,\ 0)$, P$(a,\ b)$, Q$(1,\ 3)$이라 하면

$$\sqrt{a^2+b^2}=\overline{\mathrm{OP}},\ \sqrt{(a-1)^2+(b-3)^2}=\overline{\mathrm{PQ}}$$

$$\therefore\ \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-1)^2+(b-3)^2}=\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{PQ}}$$

$$\geq \overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{10}$이다.

294) 20

O$(0,\ 0)$, P$(x,\ y)$, Q$(2,\ -4)$라 하면

$$\sqrt{x^2+y^2}=\overline{\mathrm{OP}},\ \sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2}=\overline{\mathrm{PQ}}$$

$$\therefore\ \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2}=\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{PQ}}$$

$$\geq \overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{2^2+(-4)^2}=\sqrt{20}$$

따라서 $m=\sqrt{20}$이므로 $m^2=20$

295) ③

P$(a,\ 0)$이라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$$(a-2)^2+(-2)^2=(a+1)^2+(-1)^2$$

$$a^2-4a+8=a^2+2a+2 \quad \therefore\ a=1$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(1,\ 0)$$

또 Q$(0,\ b)$라 하면 $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{BQ}}$에서 $\overline{\mathrm{AQ}}^2=\overline{\mathrm{BQ}}^2$이므로

$$(-2)^2+(b-2)^2=1^2+(b-1)^2$$

$$b^2-4b+8=b^2-2b+2 \quad \therefore\ b=3$$

$$\therefore\ \mathrm{Q}(0,\ 3)$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$$

296) $(0,\ -2)$

구하는 점을 P$(0,\ a)$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$

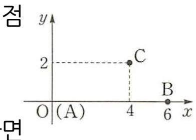
$$4^2+(a-1)^2=(-3)^2+(a-2)^2$$

$$a^2-2a+17=a^2-4a+13$$

$$\therefore\ a=-2$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(0,\ -2)$이다.

297) ②



오른쪽 그림과 같이 대리점 A가 원점, 대리점 B가 x축 위에 오도록 좌표평면을 정하면

A$(0,\ 0)$, B$(6,\ 0)$, C$(4,\ 2)$

물류 창고를 지으려는 지점을 P$(a,\ b)$라 하면

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$에서 $\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$이므로

$$a^2+b^2=(6-a)^2+b^2$$

$$12a=36 \qquad \therefore\ a=3$$

또 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PC}}$에서 $\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2$이므로

$$3^2+b^2=(4-3)^2+(2-b)^2$$

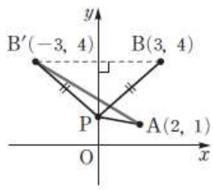
$$4b=-4 \quad \therefore\ b=-1$$

따라서 P$(3,\ -1)$이므로 구하는 거리는

$$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}\ (\mathrm{km})$$

298) ②

점 B$(3,\ 4)$와 y축에 대하여 대칭인 점을 B′이라 하면 B′$(-3,\ 4)$



$\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{B'P}}$이므로

$$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}$$

$$\geq \overline{\mathrm{AB'}}$$

$$=\sqrt{(2+3)^2+(1-4)^2}=\sqrt{34}$$

299) D$(2,\ 8)$

D$(a,\ b)$라 하면 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치

$$\frac{-1+8}{2}=\frac{5+a}{2},\ \frac{4+4}{2}=\frac{0+b}{2}$$

$$\therefore\ a=2,\ b=8$$

따라서 꼭짓점 D의 좌표는 $(2,\ 8)$이다.

300) C$(14,\ 0)$, D$(18,\ 8)$

C$(x_1,\ y_1)$, D$(x_2,\ y_2)$라 하면 두 대각선 AC, BD의 교점은 $\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{BD}}$ 각각의 중점과 일치한다.

$\overline{\mathrm{AC}}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{2+x_1}{2},\ \frac{4+y_1}{2}\right)$이므로

$$\frac{2+x_1}{2}=8,\ \frac{4+y_1}{2}=2 \qquad \therefore\ x_1=14,\ y_1=0$$

$$\therefore\ \mathrm{C}(14,\ 0)$$

또 $\overline{BD}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-2+x_2}{2},\ \frac{-4+y_2}{2}\right)$이므로

$\frac{-2+x_2}{2}=8,\ \frac{-4+y_2}{2}=2$ $\quad\therefore\ x^2=18,\ y_2=8$

$\therefore\ D(18,\ 8)$

301) ③

점 C의 좌표는 $(c,\ 0)$이므로

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2+\overline{AC}^2&=(a+c)^2+b^2+(a-c)^2+b^2\\&=2a^2+2b^2+2c^2\\&=2\boxed{(a^2+b^2+c^2)}\\&=2\left(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2\right)\end{aligned}$$

302) $\frac{2\sqrt{7}}{3}$

$\overline{BM}=\overline{CM}$ 이므로 중선 정리에 의하여

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

$8^2+(2\sqrt{6})^2=2(\overline{AM}^2+4^2)$

$44=\overline{AM}^2+16,\ \overline{AM}^2=28$

$\therefore \overline{AM}=2\sqrt{7}\quad(\because \overline{AM}>0)$

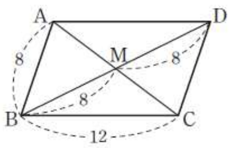
한편, 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overline{GM}=\frac{1}{3}\overline{AM}$

$=\frac{1}{3}\times 2\sqrt{7}=\frac{2\sqrt{7}}{3}$

303) $4\sqrt{10}$

평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분 오른쪽 그림과 같이 두 대각선의 교점을 M이라 하면 삼각형 ABD에서 중선정리에 의하여



$\overline{AB}^2+\overline{AD}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

$8^2+12^2=2(\overline{AM}^2+8^2)$

$104=\overline{AM}^2+64,\ \overline{AM}^2=40$

$\therefore \overline{AM}=2\sqrt{10}\ (\because \overline{AM}>0)$

$\therefore \overline{AC}=2\overline{AM}=4\sqrt{10}$

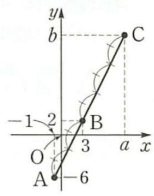
304) $5:2$로 내분하는 점

$\overline{AP}=|3-(-2)|=5,\ \overline{PB}=|5-3|=2$

따라서 $\overline{AP}:\overline{PB}=5:2$이므로 점 P는 $\overline{AB}$를 $5:2$로 내분하는 점이다.

305) ④

$3\overline{AB}=2\overline{BC}$에서 점 C는 $\overline{AB}$를 $5:3$으로 외분하는 점이므로



$a=\frac{5\cdot3-3\cdot(-1)}{5-3}=9$

$b=\frac{5\cdot2-3\cdot(-6)}{5-3}=14$

$\therefore\ a+b=23$

<다른풀이>

$3\overline{AB}=2\overline{BC}$에서 점 B는 $\overline{AC}$를 $2:3$으로 내분하는 점

$\frac{2a+3\cdot(-1)}{2+3}=3,\ \frac{2b+3\cdot(-6)}{2+3}=2$

따라서 $a=9,\ b=14$이므로

$a+b=23$

306) ⑤

$a>0$이므로 직선 AB 위의 세 점은 A, B, C의 순서로 놓여있다. $3\overline{AB}=2\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=2:3$이므로 점 C는 선분 AB를 $5:3$으로 외분하는 점이다. 따라서 점 C의 좌표

$$\left(\frac{5\times5-3\times(-1)}{5-3},\ \frac{5\times2-3\times0}{5-3}\right)=(14,\ 5)$$

이므로 $a=14,\ b=5$ $\quad\therefore a+b=19$

307) $D\left(\frac{5}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

$\overline{AD}$는 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$

$\overline{AB}=\sqrt{(-4-1)^2+(-7-5)^2}=13,$

$\overline{AC}=\sqrt{(5-1)^2+(2-5)^2}=5$이므로

$\overline{BD}:\overline{DC}=13:5$

따라서 점 D는 $\overline{BC}$를 $13:5$로 내분하는 점이다.

$\frac{13\cdot5+5\cdot(-4)}{13+5}=\frac{5}{2},\ \frac{13\cdot2+5\cdot(-7)}{13+5}=-\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{D}\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

308) 풀이참조

$\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$, $\mathrm{C}(x_3, y_3)$의 무게중심을 G라고 하면 G의 좌표는

$$\mathrm{G}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

또한, 세 점 D, E, F는 세 선분 AB , BC, CA의 중점

$$\mathrm{D}\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right), \mathrm{E}\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

$$\mathrm{F}\left(\frac{x_3+x_1}{2}, \frac{y_3+y_1}{2}\right)$$

따라서 삼각형 DEF의 무게중심을 $\mathrm{G}'(x, y)$라고 하면

$$x=\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_2+x_3}{2}+\frac{x_3+x_1}{2}}{3}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y=\frac{\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{y_2+y_3}{2}+\frac{y_3+y_1}{2}}{3}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

즉, $\mathrm{G}'\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

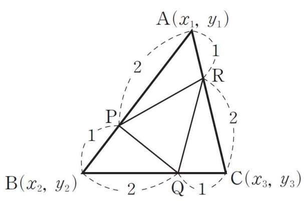
따라서 두 삼각형의 무게중심 G, G′의 좌표는 일치

309) 풀이참조

삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표를 각
각 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$이라 하자.
삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right) \cdots\cdots ㉠$$

세 변 AB, BC, CA를 $2:1$로 내분하는 점 P, Q, R은



$$P\left(\frac{2x_2+x_1}{2+1}, \frac{2y_2+y_1}{2+1}\right)$$

$$Q\left(\frac{2x_3+x_2}{2+1}, \frac{2y_3+y_2}{2+1}\right)$$

$$R\left(\frac{2x_1+x_3}{2+1}, \frac{2y_1+y_3}{2+1}\right)$$

이므로 삼각형 PQR의 무게중심 G′의 x좌표는

$$\frac{\frac{2x_2+x_1}{3}+\frac{2x_3+x_2}{3}+\frac{2x_1+x_3}{3}}{3}=\frac{3x_1+3x_2+3x_3}{9}$$

$$=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

이와 같은 방법으로 무게중심 G′의 y좌표를 구하면

$$\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

$$\therefore\ G'\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right) \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 두 점 G와 G′의 좌표는 서로 일치한다.

310) ①

$\mathrm{P}(a, b)$라 하면 점 P는 직선 $2x-y-4=0$위의 점이므로

$2a-b-4=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\mathrm{Q}(x, y)$라 하면 점 Q는 $\overline{\mathrm{AP}}$를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$x=\frac{1\cdot a+2\cdot 2}{1+2}=\frac{a+4}{3}$, $y=\frac{1\cdot b+2\cdot 4}{1+2}=\frac{b+8}{3}$

$\therefore\ a=3x-4,\ b=3y-8$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $2(3x-4)-(3y-8)-4=0$

$\therefore\ 6x-3y-4=0$

311) -11

점 B의 좌표를 (a, b), 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 점 P(x, y)는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$$x=\frac{2\cdot a+1\cdot 3}{2+1}=\frac{2a+3}{3},$$

$$y=\frac{2\cdot b+1\cdot 1}{2+1}=\frac{2b+1}{3}$$

$$\therefore\ a=\frac{3x-3}{2},\ b=\frac{3y-1}{2} \cdots\cdots ㉠$$

그런데 점 B(a, b)가 직선 $2x+y-5=0$ 위의 점이므로

$$2a+b-5=0 \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$2\cdot\frac{3x-3}{2}+\frac{3y-1}{2}-5=0$$

$$\therefore\ 6x+3y-17=0$$

따라서 $p=6,\ q=-17$이므로

$$p+q=-11$$

312) $2x+y-7=0$

P$(x,\ y)$라 하면

$\overline{\mathrm{PA}}^2=(\mathrm{x}-1)^2+(\mathrm{y}-1)^2$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{PB}}^2=(\mathrm{x}-3)^2+(\mathrm{y}-2)^2$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면 $\overline{\mathrm{PA}}^2-\overline{\mathrm{PB}}^2=4\mathrm{x}+2\mathrm{y}-11$

$\overline{\mathrm{PA}}^2-\overline{\mathrm{PB}}^2=3$이므로 $4x+2y-11=3$

$\therefore\ 2x+y-7=0$

313) $\mathrm{C}(2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$

$\mathrm{C}(\mathrm{x},\ \mathrm{y})$라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$이므로

$(-1-1)^2+(-2-2)^2=(x+1)^2+(y+2)^2$

$x^2+2x+y^2+4y=15$ ……㉠

또 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CA}}$ 에서 $\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{CA}}^2$이므로

$(-1-1)^2+(-2-2)^2=(x-1)^2+(y-2)^2$

$x^2-2x+y^2-4y=15$ ……㉡

㉠−㉡을 하면 $4x+8y=0$ $\therefore\ x=-2y$

이것을 ㉠에 대입하면

$4y^2-4y+y^2+4y=15$, $y^2=3$

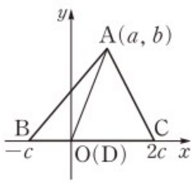
$\therefore\ y=\pm\sqrt{3},\ x=\mp2\sqrt{3}$ (복호동순)

그런데 점 C가 제4사분면 위의 점이므로

$\mathrm{C}(2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$

314) 풀이참조

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 점 D를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 D는 원점이다.



이때, △ABC의 세 꼭짓점의 좌표를 각각 $\mathrm{A}(\mathrm{a,b}),\ \mathrm{B}(-\mathrm{c},\ 0),\ \mathrm{C}(2\mathrm{c},\ 0)$

이라 하면

$2\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2\{(\mathrm{a}+\mathrm{c})^2+\mathrm{b}^2\}+\{(\mathrm{a}-2\mathrm{c})^2+\mathrm{b}^2\}$

$=3a^2+3b^2+6c^2$

$=3(a^2+b^2+2c^2)$

$\overline{\mathrm{AD}}^2+2\overline{\mathrm{AC}}^2=(\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2)+2\mathrm{c}^2$

$=a^2+b^2+2c^2$

$\therefore\ 2\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=3(\overline{\mathrm{AD}}^2+2\overline{\mathrm{BD}}^2)$

315) $\frac{1}{3}<a<\frac{5}{7}$

$\overline{\mathrm{AB}}$를 $a:(1-a)$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{a\cdot6+(1-a)\cdot(-3)}{a+1-a},\ \frac{a\cdot(-2)+(1-a)\cdot5}{a+1-a}\right)$

$\therefore\ (9a-3,\ -7a+5)$

이 점이 제1사분면 위에 있으므로 $9a-a>0,\ -7a+5>0$

$\therefore\ \frac{1}{3}<a<\frac{5}{7}$

316) $(-3,\ 6),\ (1,\ 2)$

$\overline{\mathrm{AB}}=3\overline{\mathrm{BC}}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=3:1$ …… ㉠

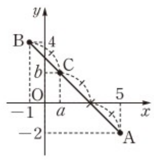
㉠을 만족시키는 점C의 좌표를 $(a,\ b)$라 하자.

ⅰ) $a>0$ 일 때

점 C는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:1$로 내분하는 점

$a=\frac{2\cdot(-1)+1\cdot5}{2+1}=1$

$b=\frac{2\cdot4+1\cdot(-2)}{2+1}=2$

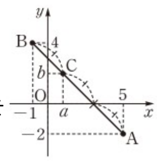


ⅱ) $a<0$일 때

점 C는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $4:1$로 외분하는 점

$a=\frac{4\cdot(-1)-1\cdot5}{4-1}=-3$

$b=\frac{4\cdot4-1\cdot(-2)}{4-1}=6$



ⅰ), ⅱ)에서 구하는 점 C의 좌표는 $(-3,\ 6),\ (1,\ 2)$이다.

<다른풀이>

$a<0$에서 점B는 $\overline{\mathrm{AC}}$를 $3:1$로 내분하는 점이므로

$\frac{3a+5}{3+1}=-1,\ \frac{3b-2}{3+1}=4$

$3a+5=-4,\ 3b-2=16$

$\therefore\ a=-3,\ b=6$

317) (3,2)

세 점 D,E,F의 좌표는 각각

$\mathrm{D}\left(\frac{2\cdot(-2)+1\cdot4}{2+1},\ \frac{2\cdot1+1\cdot10}{2+1}\right)$, 즉 $\mathrm{D}(0,4)$

$\mathrm{E}\left(\frac{2\cdot7+1\cdot(-2)}{2+1},\ \frac{2\cdot(-5)+1\cdot1}{2+1}\right)$, 즉 $\mathrm{E}(4,-3)$

$\mathrm{F}\left(\frac{2\cdot4+1\cdot7}{2+1},\ \frac{2\cdot10+1\cdot(-5)}{2+1}\right)$, 즉 $\mathrm{F}(5,5)$

따라서 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는
$\left(\frac{0+4+5}{3}, \frac{4-3+5}{3}\right)$, 즉 $(3,2)$

다른 풀이 삼각형 DEF의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는
$\left(\frac{4-2+7}{3}, \frac{10+1-5}{3}\right)$, 즉, $(3,2)$

318) $y=2x+6$

$\frac{x}{-3}+\frac{y}{6}=1 \qquad \therefore y=2x+6$

319) $\frac{x}{8}+\frac{y}{4}=1$

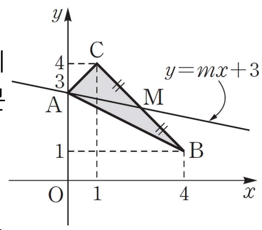
y절편을 $a(a\neq 0)$라 하면 x절편은 $2a$이므로 직선 l의 방정식은
$\frac{x}{2a}+\frac{y}{a}=1$
이 직선이 점 $(2,\ 3)$을 지나므로
$\frac{2}{2a}+\frac{3}{a}=1$, $\frac{4}{a}=1 \qquad \therefore\ a=4$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$\frac{x}{8}+\frac{y}{4}=1$

320) $x=-9$

321) ⑤

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AC와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로
$\frac{11-k}{5-1}=\frac{11-7}{5-k}$, 즉 $\frac{11-k}{4}=\frac{4}{5-k}$
$(11-k)(5-k)=16$, $k^2-16k+39=0$
$(k-3)(k-13)=0 \qquad \therefore\ k=3$ 또는 $k=13$
따라서 구하는 k의 값의 합은 $3+13=16$

322) $-\frac{1}{5}$



오른쪽 그림과 같이 직선 $y=mx+3$은 점 $\mathrm{A}(0,\ 3)$을 지나고, 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하므로 변 BC의 중점
$\mathrm{M}\left(\frac{1+4}{2}, \frac{4+1}{2}\right)$, 즉 $\mathrm{M}\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$
를 지나야 한다. 점 M의 좌표를 $y=mx+3$에 대입
$$\frac{5}{2}=\frac{5}{2}m+3 \qquad \therefore m=-\frac{1}{5}$$

323) 1

두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 각 직사각형의 대각선의 교점을 지나야 한다.

두 직사각형의 대각선의 교점의 좌표는 각각
$$\left(\frac{-1-3}{2}, \frac{-1-2}{2}\right), \left(\frac{1+3}{2}, \frac{1+4}{2}\right)$$
$$\therefore \left(-2,\ -\frac{3}{2}\right), \left(2,\ \frac{5}{2}\right)$$
따라서 두 점 $\left(-2,\ -\frac{3}{2}\right)$, $\left(2,\ \frac{5}{2}\right)$를 지나는 직선의 기울기는
$$\frac{\frac{5}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)}{2-(-2)}=1$$

324) ⑤

두 점 $\mathrm{A}(1,3)$, $\mathrm{B}(-3,5)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{5-3}{-3-1}=-\frac{1}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}$를 수직이등분하는 직선의 기울기는 2이다.
또, $\overline{\mathrm{AB}}$의 수직이등분선은 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점 $(-1,4)$를 지나므로 수직이등분하는 직선의 방정식은
$$y-4=2(x+1) \qquad \therefore y=2x+6$$

325) ④

$x+2y=0$ …… ㉠

$x-y+3=0$ …… ㉡

$ax+y+a+1=0$ …… ㉢

이라 하면 직선 ㄱ과 ㄴ은 평행하지 않다.

(ⅰ) 두 직선 ㉡, ㉢ 이 평행한 경우

$\frac{a}{1}=\frac{1}{-1}\neq\frac{a+1}{3}$ $\quad\therefore a=-1$

(ⅱ) 두 직선 ㉠, ㉢ 이 평행한 경우

$\frac{1}{a}=\frac{2}{1}\neq\frac{0}{a+1}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

(ⅲ) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

㉠, ㉡ 를 연립하여 풀면 $x=-2, y=1$이므로 직선 ㄷ이 점 $(-2, 1)$을 지나야 한다.

즉, $-2a+1+a+1=0,\ \therefore a=2$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ) 에서 모든 상수 a의 값의 합은

$-1+\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$

326) $\frac{9}{2}$

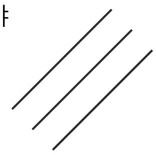
$ax+y+5=0$에서 $y=-ax-5$

$2x+by-4=0$에서 $y=-\frac{2}{b}x+\frac{4}{b}$

$x+2y+3=0$에서 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

서로 다른 세 직선이 좌표평면을 네 부분으로 나누려면 세 직선이 서로 평행해야 한다.

즉, 세 직선의 기울기가 같고 y절편이 달라야 하므로



$-a=-\frac{2}{b}=-\frac{1}{2},\ \frac{4}{b}\neq-5,\ \frac{4}{b}\neq-\frac{3}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{2}, b=4$이므로 $a+b=\frac{9}{2}$

[참고] 세 직선의 위치 관계

(1) 세 직선이 한 점에서 만날 때

⇨ 세 직선이 좌표평면을 여섯 부분으로 나눈다.

(2) 세 직선 중 두 직선이 평행할 때

⇨ 세 직선이 좌표평면을 여섯 부분으로 나눈다.

(3) 세 직선이 모두 평행할 때

⇨ 세 직선이 좌표평면을 네 부분으로 나눈다.

(4) 세 직선으로 삼각형이 만들어질 때

⇨ 세 직선이 좌표평면을 일곱 부분으로 나눈다.

327) $(2,\ -3)$

주어진 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$x+2y+4=0,\ 3x-y-9=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=2,\ y=-3$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(2,\ -3)$

328) $\left(\frac{1}{5},\ \frac{3}{5}\right)$

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(2x+y-1)+k(x-2y+1)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 성립하므로

$2x+y-1=0,\ x-2y+1=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=\frac{1}{5},\ y=\frac{3}{5}$

$\therefore\left(\frac{1}{5},\ \frac{3}{5}\right)$

329) $4x-5y=0$

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$3x-2y+3+k(x-3y-3)=0$ (k는 실수)

으로 놓으면 이 직선이 원점을 지나므로

$3-3k=0 \quad \therefore k=1$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$(3x-2y+3)+(x-3y-3)=0 \quad \therefore 4x-5y=0$

330) 2

$|5-3|=2$

331) 8

$|7-(-1)|=8$

332) $2\sqrt{10}$

점 $(2,\ -4)$와 직선 $y=\frac{1}{3}x+2$,

즉 $x-3y+6=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1\cdot 2-3\cdot(-4)+6|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{20}{\sqrt{10}}=2\sqrt{10}$

333) $3\sqrt{2}$

직선 $y=x-3$위의 점 $(0,\ -3)$과 직선 $x-y+3=0$사이의 거리와 같으므로

$\frac{|3+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

334) ④

$\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면

$\frac{|x+2y-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|2x+y+1|}{\sqrt{2^2+1^2}}$

$|x+2y-1|=|2x+y+1|$, $\quad x+2y-1=\pm(2x+y+1)$

$\therefore\ x-y+2=0$ 또는 $x+y=0$

따라서 원점을 지나는 점 P의 자취의 방정식은

$x+y=0$

<다른풀이>

점 P의 자취는 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선이다.

두 직선 $x+2y-1=0,\ 2x+y+1=0$의 교점의 좌표는 $(-1,\ 1)$

따라서 원점과 점 $(-1,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=-x$, 즉 $x+y=0$

335) ②

두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 점을 P(x, y)라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$\frac{|3x-4y+9|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|4x+3y+12|}{\sqrt{4^2+3^2}}$

$|3x-4y+9|=|4x+3y+12|$

$3x-4y+9=\pm(4x+3y+12)$

$\therefore\ x+7y+3=0$ 또는 $7x-y+21=0$

따라서 주어진 두 직선이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식은 ㄱ, ㄷ이다.

336) 13

점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 E,

점 D에서 y축에 내린 수선의 발을 F

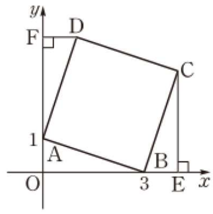
$\triangle\mathrm{AOB}\equiv\triangle\mathrm{BEC}\equiv\triangle\mathrm{DFA}$ (RHA합동)

이므로 $\mathrm{C}(4,3),\mathrm{D}(1,4)$

따라서 직선 CD의 방정식은

$y-3=\frac{4-3}{1-4}(x-4)$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{13}{3}$

이므로 구하는 x절편은 13이다.



337) $\frac{x}{8}+\frac{y}{4}=1$

y절편을 $a(a\neq 0)$라 하면 x절편은 $2a$이므로 직선 l은

$\frac{x}{2a}+\frac{y}{a}=1$

이 직선이 점 $(2,\ 3)$을 지나므로

$\frac{2}{2a}+\frac{3}{a}=1$, $\frac{4}{a}=1 \qquad \therefore\ a=4$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $\frac{x}{8}+\frac{y}{4}=1$

338) ①

직선 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$의 x절편이 2이므로 $\mathrm{P}(2,\ 0)$

직선 $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=2$, 즉 $\frac{x}{6}-\frac{y}{8}=1$의 y절편이 -8이므로 $\mathrm{Q}(0,\ -8)$

따라서 직선 PQ의 방정식은 $\frac{x}{2}-\frac{y}{8}=1$

339) ④

세 점 A, B, C가 삼각형을 이루지 않으려면 세 점이 한 직선 위에 있어야 한다.

즉 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{3}{a-4}=\frac{a+3}{6}$, $(a-4)(a+3)=18$

$a^2-a-30=0$, $(a+5)(A-6)=0$

$\therefore\ a=6\ \ (\because\ a>0)$

340) ②

직선 l이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점을 지나야 한다. $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{8+0}{2},\ \frac{-6+2}{2}\right)$, 즉 $(4,\ -2)$

따라서 직선 l은 두 점 $(1,\ 4)$, $(4,\ -2)$를 지나므로

직선 l은

$y-4=\frac{-2-4}{4-1}(x-1)\qquad \therefore\ y=-2x+6$

341) ③

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(2x+y+3)k-(x-2y+4)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 성립하려면

$2x+y+3=0,\ x-2y+4=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=-2,\ y=1$

따라서 점 $\mathrm{P}(-2,\ 1)$이므로 점 P와 원점 사이의 거리는

$\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$

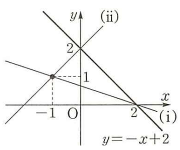
342) $-\frac{1}{3}<m<1$

$mx-y+m+1=0$에서

$(x+1)m-(y-1)=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 1)$을 지난다.

오른쪽 그림에서



(ⅰ) 직선 ㉠이 점 $(2,\ 0)$을 지날 때,

$3m+1=0 \quad \therefore\ m=-\frac{1}{3}$

(ⅱ) 직선 ㉠이 점 $(0,\ 2)$를 지날 때,

$m-1=0 \quad \therefore\ m=1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 m의 값의 범위는

$-\frac{1}{3}<m<1$

343) $\mathrm{C}(-7,\ 1)$

직선 $y=mx+3m+2$가 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하려면 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점을 지나야 한다.

$\mathrm{C}(a,\ b)$라 하면 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+a}{2},\ \frac{3+b}{2}\right)$이므로

$\frac{3+b}{2}=m\cdot\frac{1+a}{2}+3m+2 \qquad \therefore (7+a)m+1-b=0$

이 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$7+a=0,\ 1-b=0 \qquad \therefore a=-7,\ b=1$

따라서 점 C의 좌표는 $(-7,\ 1)$이다.

344) -3

$mx+y-m+2=0$에서

$m(x-1)+(y+2)=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ -2)$를 지난다.

$\mathrm{A}(1,\ -2)$이므로 직선 ㉠이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 직선 ㉠은 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점 $(2,\ 1)$을 지나야 한다.

즉, $m+3=0$이므로 $\qquad \therefore\ m=-3$

345) $4\sqrt{5}$

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$x-3y+7+k(3x-2y-1)=0$ (k는 실수) $\qquad \cdots\cdots ㉠$

으로 놓으면 이 직선이 점 $(6,-4)$를 지나므로

$6+12+7+k(18+8-1)=0$

$25+25k=0 \qquad \therefore\ k=-1$

$k=-1$을 ㉠에 대입하면

$x-3y+7-(3x-2y-1)=0$

$\therefore\ -2x-y+8=0$

따라서 $\mathrm{A}(4,0),\ \mathrm{B}(0,8)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(0-4)^2+(8-0)^2}=4\sqrt{5}$

346) 7

직선 $3x+ay+1=0$이 점 $(1,\ -2)$를 지나므로

$3\cdot1-2a+1=0 \qquad \therefore a=2$

직선 $bx+cy-8=0$도 점 $(1,\ -2)$를 지나므로

$b-2c-8=0 \qquad \therefore b-2c=8 \qquad \cdots\cdots ㉠$

두 직선 $3x+ay+1=0,\ bx+cy-8=0$이 수직이므로

$3b+2c=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b=2,\ c=-3$

$\therefore a+b-c=2+2-(-3)=7$

347) $\frac{4}{3}$, 2

두 직선 $4x-3y+2=0$, $2x-y+1=0$이 한 점에서 만나므로 직선 $ax-y+5=0$이 위의 두 직선 중 하나와 평행해야 한다.

$\frac{4}{a}=\frac{-3}{-1}\neq\frac{2}{5}$에서 $\quad a=\frac{4}{3}$

$\frac{2}{a}=\frac{-1}{-1}\neq\frac{1}{5}$에서 $\quad a=2$

348) $\frac{5}{2}$

주어진 세 직선이 좌표평면을 4개의 영역으로 나누려면 오른쪽 그림과 같이 세 직선이 모두 평행해야 한다.

두 직선 $ax+y+1=0$, $2x+y+5=1$이 평행하려면

$\frac{a}{2}=\frac{1}{1}\neq\frac{1}{5}$ $\quad\therefore\ a=2$

두 직선 $x+by+3=0$, $2x+y+5=1$이 평행하려면

$\frac{1}{2}=\frac{b}{1}\neq\frac{3}{5}$ $\quad\therefore\ b=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+b=\frac{5}{2}$

349) $2x+y+3=0$

직선 $x-2y+4=0$의 x절편은 -4, y절편은 2이므로

$\mathrm{A}(-4,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 2)$

$\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표는 $(-2,\ 1)$

또 직선 $x-2y+4=0$의 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로 구하는 직선의 기울기는 -2이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-1=-2(x+2)\ \therefore\ 2x+y+3=0$

350) ①

$\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표는 $\left(3,\ \frac{a+b}{2}\right)$

직선 $x-3y=0$이 이 점을 지나므로

$3-3\cdot\frac{a+b}{2}=0 \qquad \therefore a+b=2 \qquad \cdots\cdots$㉠

또 직선 $x-3y=0$의 기울기가 $\frac{1}{3}$이므로

직선 AB의 기울기는

$\frac{a-b}{1-5}=-3 \qquad \therefore\ a-b=12 \qquad \cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=7$, $b=-5$

$\therefore\ ab=-35$

351) ③

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-2-2)^2+(-1-7)^2}=4\sqrt{5}$

직선 AB의 방정식

$y-7=\frac{-1-7}{-2-2}(x-2) \qquad \therefore\ 2x-y+3=0$

점 C와 직선 AB 사이의 거리는

$\frac{|8+3+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{14}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ \triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{5}\cdot\frac{14}{\sqrt{5}}=28$

352) (1) $\frac{5\sqrt{13}}{13}$ (2) 5

(1) 직선 AC의 방정식은 $y-3=\frac{1-3}{-1-2}(x-2)$

$\therefore\ y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$, 즉 $2x-3y+5=0$

따라서 점 B와 직선 $2x-3y+5=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2\cdot1-3\cdot4+5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{|-5|}{\sqrt{13}}=\frac{5\sqrt{13}}{13}$

(2) $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(2+1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{13}$이므로

$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{5\sqrt{13}}{13}=\frac{5}{2}$

$\therefore\ \square\mathrm{ABCD}=2\triangle\mathrm{ABC}=5$

353) ⑤

두 점 $\mathrm{A}(2,\ 5)$, $\mathrm{B}(0,\ -2)$ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(0-2)^2+(-2-5)^2}=\sqrt{53}$

직선 AB의 방정식은 $\quad y+2=\frac{-2-5}{0-2}(x-0)$

$\therefore\ 7x-2y-4=0$

점 C $(\mathrm{a},\ 0)$과 직선 AB 사이의 거리를 h라 하면

$h=\dfrac{|7a-4|}{\sqrt{7^2+(-2)^2}}=\dfrac{|7a-4|}{\sqrt{53}}$

$\triangle$ABC 의 넓이가 12이므로

$\triangle \mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{53}\cdot\dfrac{|7a-4|}{\sqrt{53}}=12$

$|7a-4|=24,\quad 7a-4=\pm 24$

$\therefore\ a=4$ 또는 $a=-\dfrac{20}{7}$

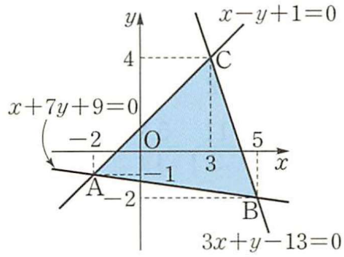
따라서 정수 a의 값은 4이다.

354) 20

두 직선 $x-y+1=0$, $x+7y+9=0$의 교점의 좌표는 $(-2,\ -1)$

두 직선 $x+7y+9=0$, $3x+y-13=0$의 교점의 좌표는 $(5,\ -2)$

두 직선 $x-y+1=0$, $3x+y-13=0$의 교점의 좌표는 $(3,\ 4)$



A$(-2,\ -1)$, B$(5,\ -2)$, C$(3,\ 4)$로 놓으면

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(3+2)^2+(4+1)^2}=5\sqrt{2}$

점 B와 직선 $x-y+1=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|5+2+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$

$\therefore\ \triangle \mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot 5\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}=20$

355) $(6,\ 0)$, 7

$x^2+y^2-12x-13=0$에서 $(x-6)^2+y^2=49$

따라서 중심의 좌표는 $(6,\ 0)$, 반지름의 길이는 7이다.

356) $\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$, $\sqrt{2}$

$2x^2+2y^2+6x-2y+1=0$에서

$2(x^2+3x)+2(y^2-y)+1=0$,

$2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+2\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=4$

$\therefore\ \left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=2$

따라서 중심의 좌표는 $\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$

357) $5+\sqrt{2}$

원의 중심 $(a,\ b)$는 직선 $y=2x-1$위에 있으므로 $b=2a-1$

구하는 원의 방정식을

$(x-a)^2+(y-2a+1)^2=r^2$

으로 놓으면 이 원이 두 점 $(1,\ 2)$, $(3,\ 2)$를 지나므로

$(1-a)^2+(2-2a+1)^2=r^2$에서

$5a^2-14a+10=r^2$ ……㉠

$(3-a)^2+(2-2a+1)^2=r^2$에서

$5a^2-18a+18=r^2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ r^2=2$

$\therefore\ a=2,\ b=3,\ r=\sqrt{2}\ (\because\ r>0)$

$\therefore\ a+b+r=5+\sqrt{2}$

358) ③

원의 중심의 좌표를 $(0,\ b)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$x^2+(y-b)^2=r^2$

이 원이 두 점 $(-4,\ 1)$, $(3,\ 0)$을 지나므로

$16+(1-b)^2=r^2,\ 9+b^2=r^2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $b=4,\ r^2=25$

따라서 주어진 원의 방정식은 $x^2+(y-4)^2=25$

ㄱ. $4^2+(7-4)^2=25$이므로 주어진 원은 $(4,\ 7)$을 지난다.

ㄷ. 원의 반지름의 길이가 5이므로 둘레의 길이는 10π이다. 이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

<다른풀이>

원의 중심을 A$(0,\ \mathrm{b})$라 하고 B$(-4,\ 1)$, C$(3,\ 0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$이므로

$\sqrt{(-4)^2+(1-b)^2}=\sqrt{3^2+(-b)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $b=4$

따라서 원의 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-4)^2+(1-4)^2}=5$

359) $\sqrt{10}$

원의 중심의 좌표를 $(a,\ a-2)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-a+2)^2=r^2$
이 원이 두 점 $(0,\ -4)$, $(4,\ 0)$을 지나므로
$a^2+(-a-2)^2=r^2$, $(4-a)^2+(-a+2)^2=r^2$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $r^2=10$
따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$ 이다.

360) $x^2+y^2+6x+2y=0$

구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 하고 세 점의 좌표를 각각 대입하면
$C=0$, $16+4-4A+2B+C=0$, $4+4-2A+2B+C=0$
위의 세 식을 연립하여 풀면 $A=6$, $B=2$, $C=0$
따라서 구하는 원의 방정식은 $x^2+y^2+6x+2y=0$

361) $(x-3)^2+(y-1)^2=1$

362) $(x-2)^2+(y+3)^2=4$

363) $(x-3)^2+(y+2)^2=4$

중심의 좌표가 $(3,\ -2)$이고 반지름의 길이가 2인 원
$(x-3)^2+(y+2)^2=4$

364) ③

$x^2+y^2-2x+4y=0$에서
$(x-1)^2+(y+2)^2=5$
따라서 중심의 좌표가 $(1,\ -2)$이고, x축에 접하는 원의 반지름의 길이는
$|-2|=2$

365) $(x-4)^2+(y+1)^2=16$

y축에 접하므로 반지름의 길이는 중심의 x좌표의 절댓값인 4이다.
$\therefore (x-4)^2+(y+1)^2=16$

366) (1) $(x+2)^2+(y+2)^2=4$ (2) π

(1) x축, y축에 동시에 접하므로 반지름의 길이는 2이다.
$\therefore (x+2)^2+(y+2)^2=4$

(2) 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원이 제 4사분면에서 x축, y축에 동시에 접하므로 중심의 좌표는 $(r,\ -r)$이다.
이때 중심 $(r,\ -r)$가 직선 $x-y-2=0$위에 있으므로
$r+r-2=0$ $\therefore\ r=1$
따라서 구하는 원의 넓이는 π이다.

367) ④

점 $(2,\ 1)$을 지나고 x축, y축에 동시에 접하려면 원의 중심이 제 1사분면위에 있어야 하므로 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 $(r,\ r)$이다.
따라서 구하는 원의 방정식을
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$
으로 놓으면 이 원이 점 $(2,\ 1)$을 지나므로
$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$, $r^2-6r+5=0$
$(r-1)(r-5)=0$ $\therefore\ r=1$ 또는 $r=5$
따라서 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(1,\ 1)$, $(5,\ 5)$이므로 두 원의 중심거리는
$\sqrt{(5-1)^2+(5-1)^2}=4\sqrt{2}$

368) ②

$x^2+y^2+2kx-5k^2-6k-4=0$에서
$(x+k)^2+y^2=6k^2+6k+4$
이 원의 반지름의 길이가 2이하이려면
$6k^2+6k+4\le 4$, $k^2+k\le 0$
$k(k+1)\le 0$ $\therefore\ -1\le k\le 0$

369) ①

$x^2+y^2+2x-2y-7=0$에서
$(x+1)^2(y-1)^2=9$
점 $\mathrm{A}(-3,\ -5)$와 원의 중심 $(-1,\ 1)$사이의 거리는
$\sqrt{(-1+3)^2+(1+5)^2}=2\sqrt{10}$
이때 원의 반지름의 길이가 3이므로
$M=2\sqrt{10}+3,\quad m=2\sqrt{10}-3$
$\therefore\ Mm=(2\sqrt{10}+3)(2\sqrt{10}-3)$
$=31$

370) ④

$x^2+y^2-8x-6y+23=0$에서 $(x-4)^2+(y-3)^2=2$
원점에서 원의 중심 $(4,\ 3)$에 이르는 거리는 $\sqrt{4^2+3^2}=5$이므로 원점 O에서 원에 이르는 거리의 최댓값 $M=5+\sqrt{2}$, 최솟값 $m=5-\sqrt{2}$이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 차는
$5+\sqrt{2}-(5-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

371) ③

점 $(4,\ 2)$에서 원의 중심 $(0,\ 0)$에 이르는 거리는
$\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$
이고, 원의 반지름의 길이는 r이므로 점 $(4,\ 2)$에서 원에 이르는 거리의 최댓값은 $2\sqrt{5}+r$이다.
따라서 $2\sqrt{5}+r=3+2\sqrt{5}$이므로 $r=3$

372) 9

$x^2+y^2-2x+4y-11=0$에서 $(x-1)^2+(y+2)^2=16$
원의 중심 $(1,\ -2)$와 직선 $3x-4y+14=0$ 사이의 거리
$\dfrac{|3+8+14|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=5$
원의 반지름의 길이가 4이므로
$M=5+4=9,\ m=5-4=1\qquad \therefore Mm=9$

373) $x^2+y^2+22x-16y+16=0$

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을
$x^2+y^2-8x+2y-5+k(x^2+y^2+2x-4y+2)=0\ \ (k\neq-1)$
이라 하면 이 원이 점 $(1,\ 3)$을 지나므로 $3+2k=0$
$\therefore\ k=-\dfrac{3}{2}$
따라서 구하는 원의 방정식은 $x^2+y^2+22x-16y+16=0$

374) ①

$x^2+y^2=1$에서 $x^2+y^2-1=0$
$(x-1)^2+(y-1)^2=1$에서 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$
두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$(x^2+y^2-1)+k(x^2+y^2-2x-2y+1)=0$
(단, $k\neq-1$) …… ㉠
이 원이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로
$(1+1-1)+k(1+1-2-2+1)=0$
$1-k=0\qquad \therefore\ k=1$
$k=1$을 ㉠에 대입하면
$(x^2+y^2-1)+(x^2+y^2-2x-2y+1)=0$
$\therefore\ x^2+y^2-x-y=0$
따라서 $A=-1,\ B=-1,\ C=0$ 이므로
$A+B+C=-2$

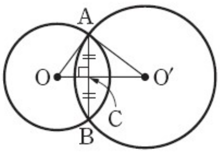
375) $6x-10y-13=0$

$(x+2)^2+y^2=7$에서 $x^2+y^2+4x-3=0$
$(x-1)^2+(y+5)^2=16$에서 $x^2+y^2-2x+10y+10=0$
따라서 구하는 공통인 현의 방정식은
$x^2+y^2+4x-3-(x^2+y^2-2x+10y+10)=0$
$\therefore\ 6x-10y-13=0$

376) $2\sqrt{5}$

오른쪽 그림과 같이 두 원
$x^2+y^2=9,\ x^2+y^2+4x+3y+1=0$
의 중심을 각각 O, O′, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{\mathrm{OO'}}$과

$\overline{AB}$의 교점을 C라 하자.
두 원의 공통현의 방정식은



$x^2+y^2-9-(x^2+y^2+4x+3y+1)=0$

$\therefore\ 4x+3y+10=0$

원 $x^2+y^2=9$의 중심 $O(0,\ 0)$에서 공통현까지의 거리는

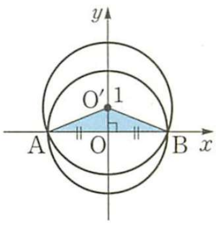
$\overline{OC}=\dfrac{|10|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{10}{5}=2$

직각삼각형 AOC에서 $\overline{OA}=3$, $\overline{OC}=2$이므로

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OC}^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AC}=2\sqrt{5}$

377) $\sqrt{3}$



$x^2+(y-1)^2=4$에서

$x^2+y^2-2y-3=0$

이므로 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-3-(x^2+y^2-2y-3)=0$

$\therefore\ y=0$

원 O의 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$이므로

$\overline{AO}=\sqrt{3}$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AO}=2\sqrt{3}$

$\therefore \triangle O'AB=\dfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{OO'}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 1=\sqrt{3}$

378) 만나지 않는다.

원의 중심 $(3,\ -2)$와 직선 $3x-y-1=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|9+2-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$이므로 원 O와 직선 l은 만나지 않는다.

379) 2

$x-2y+1=0$에서 $x=2y-1$

이것을 $x^2+y^2+4x-3y-6=0$에 대입하면

$(2y-1)^2+y^2+4(2y-1)-3y-6=0$

$\therefore\ 5y^2+y-9=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot5\cdot(-9)=181>0$

따라서 교점의 개수는 2이다.

380) $k<-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 또는 $k>\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$y=k(x-3)$을 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$x^2+k^2(x-3)^2=1,\qquad (1+k^2)x^2-6k^2x+9k^2-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 만나지 않으므로

$\dfrac{D}{4}=(-3k^2)^2-(1+k^2)(9k^2-1)<0$

$-8k^2+1<0,\qquad k^2>\dfrac{1}{8}$

$\therefore k<-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 또는 $k>\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

<다른풀이>

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $kx-y-3k=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-3k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\dfrac{|-3k|}{\sqrt{k^2+1}}$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\dfrac{|3k|}{\sqrt{k^2+1}}>1,\qquad |3k|>\sqrt{k^2+1}$

양변을 제곱하면 $9k^2>k^2+1,\qquad k^2>\dfrac{1}{8}$

$\therefore k<-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 또는 $k>\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

381) ②

$y=mx+1$을 $x^2+y^2-2x=0$에 대입하면

$x^2+(mx+1)^2-2x=0$

$\therefore (1+m^2)x^2+2(m-1)x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(m-1)^2-(1+m^2)>0$

$m^2-2m+1-1-m^2>0,\ -2m>0$

$\therefore m<0$

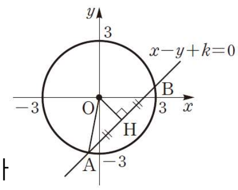
382) (1) ② (2) 8

(1) 오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 교점을 A, B, 원의 중심 $O(0,\ 0)$에서 직선 $x-y+k=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OA}=3,\ \overline{AH}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=2\sqrt{2}$

$\therefore\ \overline{OH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH}^2}$

$=\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}=1$



원점과 직선 $x-y+k=0$사이의 거리가 1이므로

$\dfrac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1,\ |k|=\sqrt{2}$

그런데 $k>0$이므로 $k=\sqrt{2}$

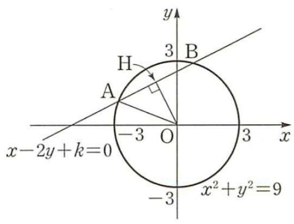
(2) $x^2+y^2-4x+10y+9=0$이 y축과 만나므로 $x=0$을 대입하면

$y^2+10y+9=0,\ (y+1)(y+9)=0$

$\therefore y=-1$ 또는 $y=-9$

따라서 주어진 원과 y축과의 교점이 $(0,\ -1),\ (0,\ -9)$이므로 선분의 길이는 8이다

383) ⑤



오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하고 원의 중심 O에서 직선 $x-2y+k=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\cdot 4=2$

직각삼각형 OAH에서

$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$ ……㉠

또 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$과 직선 $x-2y+k=0$ 사이의 거리는

$\overline{OH}=\dfrac{|k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5},\quad |k|=5$

$\therefore\ k=5\ (\because k>0)$

384) $-4,\ 4$

직선의 기울기는 $\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

원 $x^2+y^2=4$의 반지름의 길이는 2이므로

접선의 방정식은

$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x\pm 2\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}$

$\therefore y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x\pm\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

따라서 구하는 직선의 x절편은 $-4,\ 4$이다.

385) 풀이참조

(1) $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}x+3$ (2) $y=2$ 또는 $12x-5y-26=0$

(3) $y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{5}{3}$와 $x=1$

(1) $y=mx+3$

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=mx+3$, 즉 $mx-y+3=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $2\sqrt{2}$와 같아야 하므로

$\dfrac{|3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2},\ \dfrac{9}{m^2+1}=8,$

$9=8(m^2+1),\ 8m^2=1$

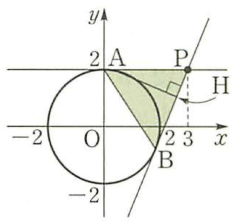
$\therefore\ m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}x+3$

(2) 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y-2=m(x-3)$

$\therefore\ mx-y-3m+2=0$



원과 직선이 접하려면

$\dfrac{|-3m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$

$|-3m+2|=2\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $5m^2-12m=0$

$m(5m-12)=0\quad\therefore\ m=0$ 또는 $m=\dfrac{12}{5}$

즉 접선의 방정식은

$y=2$ 또는 $12x-5y-26=0$

(3) $y=m(x-1)+3$

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=mx-m+3$, 즉 $mx-y-m+3=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 1와 같아야 하므로

$\dfrac{|-m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1,\ \dfrac{m^2-6m+9}{m^2+1}=1,$

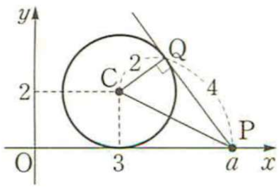
계산하면, $m=\dfrac{4}{3}$ => $y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{5}{3}$

그러나 여기서 무엇인가 잘못되었다는 것을 알아야 한다. 원 밖의 한 점에서 접선을 그으면 2개가 나와야 한다. 나머지 직선은 $x=1$이다. 이 직선은 식으로는 구할 수 없다. 왜냐하면 처음 우리가 $(1,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식을 $y=m(x-1)+3$로 세웠기 때문이다. 이 방정식에서는 $m=0$이라고 할지라도 x는 사라지지만 y는 사라지지 않는다. 따라서 $x=1$이라는 식은 나올 수가 없다.

그러므로 처음 문제를 풀 때, 그림을 그려서 $x=1$이라는 접선을 발견하고 풀기 시작해야한다. 그러지 못했다하더라

도 마지막에 $m=\frac{4}{3}$가 나왔을 때, 접선 1개가 빠졌다는 것을 인식해야한다. 그 후, 그림을 그려서 구하려고 해야한다. 따라서 정답은 $y=\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$와 $x=1$이다.

386) (1) 7 (2) $\therefore r=2\sqrt{5}$



(1) $x^2+y^2-6x-4y+9=0$,
$(x-3)^2+(y-2)^2=4$
원의 중심을 C라 하면 C$(3,\ 2)$이므로
$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(\mathrm{a}-3)^2+(-2)^2}$
$=\sqrt{a^2-6a+13}$
접점을 Q라 하면 직각삼각형 CPQ에서
$\overline{\mathrm{CP}}^2=\overline{\mathrm{CQ}}^2+\overline{\mathrm{PQ}}^2$
$a^2-6a+13=2^2+4^2$
$a^2-6a-7=0,\quad (a+1)(a-7)=0$
$\therefore a=7\ (\because\ a>0)$

(2) 원의 중심을 C, 두 접선과 원과의 교점을 각각 P, Q라 하면 사각형 APCQ는 정사각형이다. 따라서 삼각형 CAP에서 $\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{CP}}^2+\overline{\mathrm{AP}}^2$ 이므로
$(4-2)^2+(5+1)^2=r^2+r^2,\quad 2r^2=40$
$r^2=20\quad \therefore r=2\sqrt{5}\ (\because r>0)$

〈다른풀이〉
(1) Q$(3,\ 0)$ 이라 하면 $\overline{\mathrm{PQ}}=4$이므로
$|a-3|=4,\quad a-3=\pm4\quad \therefore a=7\ (\because\ a>0)$

387) (1) $3x-y=10$ (2) -7

388) $x+\sqrt{3}y=4$

389) ④

P(a, b)라 하고, 선분 AP의 중점을 Q(x, y)라 하면
$x=\frac{2+a}{2},\ y=\frac{4+b}{2}$
$a=2(x-1),\ b=2(y-2)$ …… ㉠
점 P(a, b)가 원 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$위의 점이므로
$a^2+b^2-4a-2b+1=0$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$4(x-1)^2+4(y-2)^2-8(x-1)-4(y-2)+1=0$
$x^2+y^2-4x-5y+\frac{37}{4}=0$
$\therefore\ (x-2)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=1$
따라서 점 Q의 자취는 중심의 좌표가 $\left(2,\ \frac{5}{2}\right)$, 반지름의 길이가 1인 원이므로 구하는 자취의 길이는
$2\pi\cdot1=2\pi$

390) 5

P$(\alpha,\ \beta)$, G(x, y)라 하면
$x=\frac{4+2+\alpha}{3},\ y=\frac{0+3+\beta}{3}$
$\therefore\ \alpha=3x-6,\ \beta=3y-3$ …… ㉠
점 P$(\alpha,\ \beta)$가 원 $x^2+y^2=36$위의 점이므로
$\alpha^2+\beta^2=36$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $(3x-6)^2+(3y-3)^2=36$
$\therefore\ (x-2)^2+(y-1)^2=4$
따라서 $a=2,\ b=1,\ r=2$이므로 $a+b+r=5$

391) $x^2+y^2-y-1=0$

원 위의 점을 P$(a,\ b)$, 선분 AP의 중점을 M$(x,\ y)$라 하면
$x=\frac{-1+a}{2},\ y=\frac{3+b}{2}$
$\therefore a=2x+1,\ b=2y-3$ …… ㉠
이때 점 P$(a,\ b)$가 원 $x^2+y^2-2x+4y=0$위의 점이므로
$a^2+b^2-2a+4b=0$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$(2x+1)^2+(2y-3)^2-2(2x+1)+4(2y-3)=0$
$\therefore x^2+y^2-y-1=0$

392) $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}$

P(x, y)라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=3:1$이므로
$\overline{\mathrm{AP}}=3\overline{\mathrm{BP}},\quad \overline{\mathrm{AP}}^2=9\overline{\mathrm{BP}}^2$

$(x+3)^2+y^2=9\{(x-1)^2+y^2\}$

$x^2+y^2-3x=0$ $\qquad\therefore\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}$

393) ④

주어진 조건을 만족시키는 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=1:2$ 이므로

$2\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}},\qquad 4\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$

$4\{(x-3)^2+(y+1)^2\}=\{(x+3)^2+(y-5)^2\}$

$x^2+y^2-10x+6y+2=0$

$\therefore\ (x-5)^2+(y+3)^2=32$

따라서 원의 반지름의 길이는 $4\sqrt{2}$ 이다.

394) ④

①$x^2+y^2+x+y-1=0$에서 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$

②$x^2+y^2+2x+y+1=0$에서 $(x+1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

③$x^2+y^2+2x+2y+1=0$에서 $(x+1)^2+(y+1)^2=1$

④$x^2+y^2+4x-2y+5=0$에서 $(x+2)^2+(y-1)^2=0$

⑤$x^2+y^2+4x+4y+4=0$레서 $(x+2)^2+(y+2)^2=4$

따라서 원의 방정식이 아닌 것은 ④ 이다.

[참고]

방정식 $(x+2)^2+(y-1)^2=0$은 점 $(-2,1)$을 나타낸다.

395) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$

$x+3y-10=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$7x+y-30=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

$2x+y-5=0$ $\cdots\cdots$ ㉢

두 직선㉠, ㉡의 교점의 좌표는 $(4,\ 2)$, 두 직선 ㉡, ㉢의 교점의 좌표는

$(5,\ -5)$, 두 직선 ㉠, ㉢의 교점의 좌표는 $(1,\ 3)$이다.

구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 하면 외접원이 세 점 $(4,\ 2)$, $(5,\ -5)$, $(1,\ 3)$을 지나므로

$4A+2B+C=0,\ 5A-5B+C=0,\ A+3B+C=0$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$A=-2,\ B=4,\ C=-20$

따라서 구하는 원의 방정식은

$x^2+y^2-2x+4y-20=0$

396) $(x+5)^2+(y+4)^2=16$

원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 넓이다 16π

$\pi r^2=16\pi\qquad\therefore r=4\,(\because r>0)$

이 원이 점 $(-5,0)$에서 x축에 접하고, 중심이 제 3사분면 위에 있으므로 원의 중심의 좌표는 $(-5,\ -4)$이다.

다라서 구하는 원의 방정식은 $(x+5)^2+(y+4)^2=16$

397) ④

원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$이라 하면 이 원이 점 $(4,\ 2)$를 지나므로

$(4-a)^2+(2-b)^2=a^2$

$\therefore\ b^2-8a-4b+20=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

또 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$(2-a)^2+(0-b)^2=a^2$

$b^2-4a+4=0\qquad\therefore\ a=\frac{1}{4}b^2+1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$b^2+4b-12=0,\qquad (b+6)(b-2)=0$

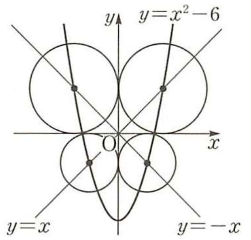
$\therefore\ b=-6$ 또는 $b=2$

이것을 ㉡에 대입하면 $a=10$ 또는 $a=2$

따라서 두 원의 반지름의 길이의 합은 $10+2=12$

398) ③

x축과 y축에 동시에 접하는 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$ 위에 있다.



따라서 주어진 원의 중심은 곡선 $y=x^2-6$과 직선 $y=x$ 또는 $y=-x$의 교점이다.

(i) $x^2-6=x$에서 $x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=3$

(ii) $x^2-6=-x$에서 $x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0\,x=-3$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에서 $m=4$

또 네 원의 중심의 좌표는 각각

$(-3,\ 3),\ (-2,\ -2),\ (2,\ -2),\ (3,\ 3)$

이고, 반지름의 길이는 각각 $3,\ 2,\ 2,\ 3$이다.

따라서 네 원의 넓이의 합은

$\pi\cdot 3^2+\pi\cdot 2^2+\pi\cdot 2^2+\pi\cdot 3^2=26\pi$

이므로 $n=26$

$\therefore\ m+n=30$

399) $r=\sqrt{5}-1$

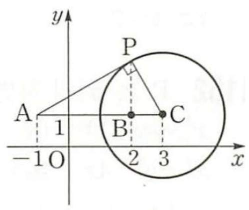
점 $\mathrm{A}(3,4)$와 원 $x^2+y^2=r^2$의 중심 $(0,0)$ 사이의 거리는
$\sqrt{3^2+4^2}=5$
이때 원의 반지름의 길이는 r이고 선분 AP의 길이의 최댓값이 $4+\sqrt{5}$이므로
$5+r=4+\sqrt{5}\qquad \therefore r=\sqrt{5}-1$

400) 2π

$\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$에서
$x^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(y-1)^2+(x-1)^2+(y-2)^2$
$x^2+y^2-4x-4y+6=0$
$\therefore (x-2)^2+(y-2)^2=2$
따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(2,\ 2)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원이므로
구하는 넓이는 $\pi\cdot(\sqrt{2})^2=2\pi$

401) $2\sqrt{3}$

$\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=2:1$이므로
$\overline{\mathrm{AP}}=2\overline{\mathrm{BP}},\ \overline{\mathrm{AP}}^2=4\overline{\mathrm{BP}}^2$
$(x+1)^2+(y-1)^2=4\{(x-2)^2+(y-1)^2\}$
$x^2+y^2-6x-2y+6=0$
$\therefore (x-3)^2+(y-1)^2=4$
따라서 점 P는 중심의 좌표가 $(3,\ 1)$, 반지름의 길이가 2인 원 위를 움직인다. $\angle\mathrm{PAB}$의 크기가 최대가 되는 것은 오른쪽 그림과 같이 직선 AP가 원에 접할 때 이므로 원의 중심을 C라 하면 직각삼각형 PAC에서



$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$

402) ④

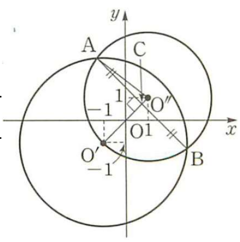
$x^2+(y+a)^2=4$에서 $\qquad x^2+y^2+2ay+a^2-4=0$
$(x+1)^2+y^2=9$에서 $\qquad x^2+y^2+2x-8=0$
따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$$x^2+y^2+2ay+a^2-4-(x^2+y^2+2x-8)=0$$
$$\therefore\ 2x-2ay-a^2-4=0$$
이 직선이 직선 $2x+y=1$과 수직이므로
$$2\cdot2+(-2a)\cdot1=0\qquad \therefore a=2$$

403) 2

원 $x^2+y^2+3ax+2y+a=0$이 원 $x^2+y^2+6x-2y+6=0$의 둘레를 이등분하려면 두 원의 공통인 현이 원 $x^2+y^2+6x-2y+6=0$의 지름이어야 한다.
두 원의 공통인 현의 방정식은
$$x^2+y^2+3ax+2y+a-(x^2+y^2+6x-2y+6)=0$$
$$\therefore\ (3a-6)x+4y+a-6=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$
$x^2+y^2+6x-2y+6=0$에서
$$(x+3)^2+(y-1)^2=4 \qquad \cdots\cdots ㉡$$
직선 ㉠이 원 ㉡의 중심 $(-3,\ 1)$을 지나야 하므로
$$-3(3a-6)+4+a-6=0$$
$$8a=16\qquad \therefore a=2$$

404) ④

오른쪽 그림과 같이 두 원
$x^2+y^2+2x+2y-k=0$,
$x^2+y^2-2x-2y-6=0$의 중심을 각각 O',O''이라 하고, 두 원의 교점을 $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$,
$\overline{\mathrm{O'O''}}$과 $\overline{\mathrm{AB}}$의 교점을 C라 하자.



$x^2+y^2-2x-2y-6=0$에서
$$(x-1)^2+(y-1)^2=8$$
$$\therefore \overline{\mathrm{O''A}}=2\sqrt{2},\ \mathrm{O''}(1,\ 1)$$
$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{6}$이므로 $\qquad \overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{6}$
직각삼각형 $\mathrm{O''AC}$에서
$$\overline{\mathrm{O''C}}=\sqrt{\overline{\mathrm{O''A}}^2-\overline{\mathrm{AC}}^2}$$
$$=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{2}\qquad \cdots\cdots ㉠$$
한편 두 원의 공통인 현의 방정식은
$$x^2+y^2+2x+2y-k-(x^2+y^2-2x-2y-6)=0$$
$$\therefore\ 4x+4y-k+6=0$$
$$\therefore\ \overline{\mathrm{O''C}}=\frac{|4+4-k+6|}{\sqrt{4^2+4^2}}=\frac{|14-k|}{4\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots ㉡$$
㉠, ㉡에서 $\dfrac{|14-k|}{4\sqrt{2}}=\sqrt{2},\quad |14-k|=8$
$$14-k=\pm8$$
$$\therefore\ k=6\ \text{또는}\ k=22$$
따라서 모든 실수 k의 값의 합은 28이다.

405) $\frac{13}{2}\pi$

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2-4x-6y+8+k(x^2+y^2-2x)=0\ (k\neq-1)$ ……㉠

이라 하면 이 원이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$3+k=0 \qquad \therefore k=-3$

$k=-3$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+y^2-x+3y-4=0$

$\therefore \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\frac{13}{2}\pi$이다.

406) 6

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2+2x-4+k(x^2+y^2+ax-4y+4)=0\ (k\neq-1)$

……㉠

이라 하면 이 원이 원점을 지나므로

$-4+4k=0 \qquad \therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$2x^2+2y^2+(2+a)x-4y=0$

$\therefore \left(x+\frac{2+a}{4}\right)^2+(y-1)^2=\frac{a^2+4a+20}{16}$

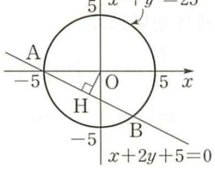
원의 넓이가 5π이므로

$\frac{a^2+4a+20}{16}=5,\ a^2+4a-60=0$

$(a+10)(a-6)=0 \qquad \therefore a=6\ (\because a>0)$

407) 20π

주어진 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하면 두 점 A, B를 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 원은 $\overline{\mathrm{AB}}$를 지름으로 한다.



원의 중심 O에서 직선 $x+2y+5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{|5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$

직각삼각형 OAH에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2}$

$=\sqrt{5^2-(\sqrt{5})^2}=2\sqrt{5}$

따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi\cdot(2\sqrt{5})^2=20\pi$

408) $\sqrt{11}$

$x^2+y^2-8y=0$에서 $x^2+(y-4)^2=16$

오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+(y-4)^2=16$과 직선 $y=mx-8$의 두 교점 P, Q와 원의 중심 C$(0,\ 4)$를 세 꼭짓점으로 하는 삼각형 CPQ를 좌표평면 위에 나타내면 $\overline{\mathrm{CP}}$, $\overline{\mathrm{CQ}}$는 원의 반지름이므로

$\overline{\mathrm{CP}}=\overline{\mathrm{CQ}}=4$

따라서 삼각형 CPQ가 정삼각형이려면 $\overline{\mathrm{PQ}}=4$이어야 한다.

원의 중심 C에서 $\overline{\mathrm{PQ}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{PH}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}=2$

직각삼각형 CPH에서

$\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$ … ㉠

또 점 C$(0,\ 4)$와 직선 $mx-y-8=0$ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{|-4-8|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{12}{\sqrt{m^2+1}}$ … ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{12}{\sqrt{m^2+1}}=2\sqrt{3}$, $6=\sqrt{3m^2+3}$

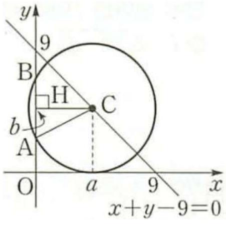
양변을 제곱하면

$36=3m^2+3,\ m^2=11$

$\therefore m=\sqrt{11}\ (\because m>0)$

409) ①

원 C가 x축에 접하므로 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2\ (a>0,\ b>0)$라 하자.



오른쪽 그림과 같이 원 C와 y축의 두 교점을 A, B라 하고, 원의 중심 C에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\cdot 6=3$

직각삼각형 ACH에서

$b^2=a^2+9$ ……㉠

또 점 C$(a,\ b)$가 직선 $x+y-9=0$ 위에 있으므로

$a+b-9=0$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=5$
따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 5이다.

410) ⑤

$x=-3y-k$를 $(x-1)^2+(y+3)^2=10$에 대입하면

$(-3y-k-1)^2+(y+3)^2=10$

$10y^2+6(k+2)y+k^2+2k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 접하므로

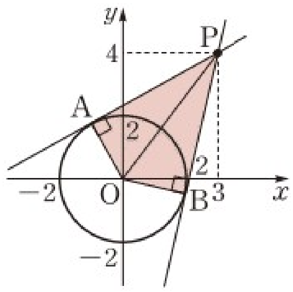
$\frac{D}{4}=9(k+2)^2-10(k^2+2k)=0$

$k^2-16k-36=0,\quad (k+2)(k-18)=0$

$\therefore k=18\ (\because k>0)$

411) ②

원의 중심이 $O(0,\ 0)$이므로



$\overline{OP}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

직각삼각형 OPA에서

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OA}^2}$

$=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$

이때

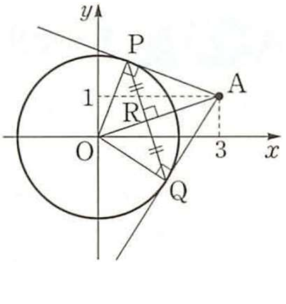
$\triangle OPA\equiv\triangle OPB$(RHS 합동)

$\square AOBP=2\triangle OPA$

$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{21}=2\sqrt{21}$

412) $\frac{4\sqrt{15}}{5}$

원의 중심이 $O(0,\ 0)$이고 반지름의 길이가 2이므로



$\overline{OP}=2,\ \overline{OA}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

직각삼각형 OAP에서

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OP}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{10})^2-2^2}=\sqrt{6}$

선분 OA와 선분 PQ의 교점을 R라 하면 $\overline{OA}\perp\overline{PQ}$

$\frac{1}{2}\overline{AP}\cdot\overline{OP}=\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{PR}\quad\leftarrow\triangle OAP$의 넓이

$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot2=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\overline{PR}\qquad\therefore\overline{PR}=\frac{2\sqrt{15}}{5}$

$\therefore\overline{PQ}=2\overline{PR}=\frac{4\sqrt{15}}{5}$

413) 2

두 점 $(0,\ -3)$, $(4,\ 1)$을 지름의 양 끝으로 하는 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{4}{2},\ \frac{-3+1}{2}\right)$, 즉 $(2,\ -1)$

반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{4^2+(1+3)^2}}{2}=2\sqrt{2}$

원의 중심 $(2,\ -1)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2+1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|3+k|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|3+k|}{\sqrt{2}}>2\sqrt{2},\qquad |3+k|>4$

$3+k<-4$ 또는 $3+k>4$

$\therefore k<-7$ 또는 $k>1$

따라서 구하는 자연수 k의 최솟값은 2이다.

414) 20

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $4x-3y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|k|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|k|}{5}$

원의 반지름의 길이가 5이므로 점과 직선 사이의 거리의 최댓값이 9이려면 $\frac{|k|}{5}+5=9$

$|k|=20\quad\therefore k=20(\because k>0)$

415) ②

원점 O와 직선 $y=-x-4$, 즉 $x+y+4=0$ 사이의 거리

$\frac{|4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 정삼각형 ABC의 넓이가 최소일 때의 높이는

$2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$

넓이가 최대일 때의 높이는

$2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

따라서 정삼각형 ABC의 넓이의 최솟값과 최댓값의 비

$(\sqrt{2})^2 : (3\sqrt{2})^2$, 즉 $1:9$

416) 20

직선 $y=3x-2$에 평행한 직선의 기울기는 3이고, 원 $x^2+y^2=10$의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이므로
접선의 방정식은 $y=3x\pm\sqrt{10}\cdot\sqrt{3^2+1}$

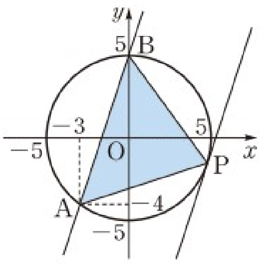
$\therefore y=3x\pm10$

따라서 접선이 y축과 만나는 점의 좌표가 각각 $(0,\ 10)$, $(0,\ -10)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=20$

417) 15

삼각형 ABP의 넓이가 최대일 때는 오른쪽 그림과 같이 점 P에서의 접선이 직선 AB와 평행할 때이다. 직선 AB의 기울기는



$\dfrac{5-(-4)}{0-(-3)}=3$

이므로 기울기가 3인 접선의 방정식은 $y=3x\pm5\sqrt{3^2+1}$

$\therefore y=3x\pm5\sqrt{10}$

위 그림에서 점 P를 지나는 접선의 방정식은 $y=3x-5\sqrt{10}$이고 점 $\mathrm{B}(0,\ 5)$와 직선 $3x-y-5\sqrt{10}=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-5-5\sqrt{10}|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{5+5\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}+5$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3^2+(5+4)^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$이므로 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\cdot3\sqrt{10}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}+5\right)=\dfrac{15}{2}+\dfrac{15}{2}\sqrt{10}$

따라서 $a=\dfrac{15}{2}$, $b=\dfrac{15}{2}$이므로 $a+b=15$

418) -8

원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$ax+by=20 \qquad \therefore y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{20}{b}$

$-\dfrac{a}{b}=2$이므로 $\qquad a=-2b \qquad$ ……㉠

한편 점 $(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=20$ 위에 있으므로

$a^2+b^2=20 \qquad$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=-2$ 또는 $a=-4,\ b=2$

$\therefore ab=-8$

419) ⑤

원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $\mathrm{P}(3,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

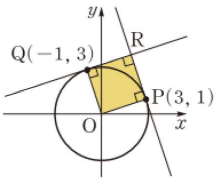
$3x+y=10 \qquad$ ……㉠

원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $\mathrm{Q}(-1,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$-x+3y=10 \qquad$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $3\cdot(-1)+1\cdot3=0$이므로 두 접선은 수직이다.

따라서 오른쪽 그림에서 사각형 OPRQ는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{10}$을 한 변의 길이를 하는 정사각형이므로 구하는 넓이는



$\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}=10$

420) ②

$x^2+y^2-4x+2y-5=0$에서

$(x-2)^2+(y+1)^2=10$

원의 중심 $(2,\ -1)$와 점 $(5,\ 0)$을 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{0+1}{5-2}=\dfrac{1}{3}$

따라서 점 $(5,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{3}$이므로 접선의 방정식은

$y=\dfrac{1}{3}(x-5) \qquad \therefore y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{5}{3}$

이 직선이 점 $(a,\ 9)$를 지나므로

$9=-3a+15 \qquad \therefore a=2$

421) ③

$\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은 $ax+by=4$

$\therefore\ \mathrm{Q}\left(\dfrac{4}{a},\ 0\right),\ R\left(0,\ \dfrac{4}{b}\right)$

$\overline{\mathrm{QR}}=8$ 이므로

$\dfrac{16}{a^2}+\dfrac{16}{b^2}=64,\quad \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=4$

$\therefore\ a^2+b^2=4a^2b^2 \qquad$ …… ㉠

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=4$위의 점이므로
$a^2+b^2=4$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면 $a^2b^2=1$
$\therefore\ ab=1\ (\because\ a>0,\ b>0)$

422) $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

직선 l이 원 O'의 넓이를 이등분하므로 직선 l은 원 O'의 중심 $(-2,\ 0)$을 지난다.
직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은
$$y=m(x+2)\quad \therefore mx-y+2m=0$$
원 O와 직선 l이 접하려면
$$\frac{|2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1,\quad |2m|=\sqrt{m^2+1}$$
$$3m^2=1\quad \therefore m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$
따라서 구하는 직선 l의 방정식은
$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3},\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

423) 풀이참조

(1) $x-3y-20=0$
(2) $5x-2y+12=0$
(3) $3x-2y+18=0$

(1) $(x-4)-3(y+3)-7=0$
$\therefore\ x-3y-20=0$

(2) $5(x+1)-2(y-3)+1=0$
$\therefore\ 5x-2y-12=0$

(3) 주어진 직선을 x축의 방향으로 -6만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 원래의 직선과 일치하므로 구하는 직선의 방정식은
$3(x+6)-2(y-2)-4=0$ $\quad\therefore\ 3x-2y+18=0$

424) (1) $x^2+y^2+x-2y-23=0$ (2) -2

(1) $(x+1)^2+(y-3)^2-(x+1)+4(y-3)-20=0$
$\therefore\ x^2+y^2+x-2y-23=0$
(2) $x^2+y^2-2x-2y+a=0$에서
$(x-1)^2+(y-1)^2=2-a$
주어진 평행이동에 의하여 이 원이 옮겨지는 원의 방정식은
$(x+1-1)^2+(y-3-1)^2=2-a$
$\therefore x^2+(y-4)^2=2-a$
따라서 중심의 좌표가 $(0,\ 4)$, 반지름의 길이가 2이므로
$b=0,\ \sqrt{2-a}=2$ $\quad\therefore\ a=-2,\ b=0$
$\therefore\ a+b=-2$

425) 풀이참조

x축 : $2x-(-y)+1=0$ $\quad\therefore\ 2x+y+1=0$
y축 : $2(-x)-y+1=0$ $\quad\therefore\ 2x+y-1=0$
원점 : $2(-x)-(-y)+1=0$ $\quad\therefore\ 2x-y-1=0$
직선 $y=x$: $2y-x+1=0$ $\quad\therefore\ x-2y-1=0$
직선 $y=-x$: $2(-y)-(-x)+1=0$ $\quad\therefore\ x-2y+1=0$

426) 풀이참조

x축 : $(x-2)^2+(-y-1)^2=1$ $\quad\therefore\ (x-2)^2+(y+1)^2=1$
y축 : $(-x-2)^2+(y-1)^2=1$ $\quad\therefore\ (x+2)^2+(y-1)^2=1$
원점 : $(-x-2)^2+(-y-1)^2=1$ $\quad\therefore\ (x+2)^2+(y+1)^2=1$
직선 $y=x$: $(y-2)^2+(x-1)^2=1$ $\therefore\ (x-1)^2+(y-2)^2=1$
직선$y=-x$:$(-y-2)^2+(-x-1)^2=1$
$\therefore\ (x+1)^2+(y+2)^2=1$

427) 풀이참조

x축 : $-y=(x-1)^2-1$ $\quad\therefore\ y=-(x-1)^2+1$
y축 : $y=(-x-1)^2-1$ $\quad\therefore\ y=(x+1)^2-1$
원점 : $-y=(-x-1)^2-1$ $\quad\therefore\ y=-(x+1)^2+1$
직선 $y=x$: $x=(y-1)^2-1$ $\quad\therefore\ x=(y-1)^2-1$
직선 $y=-x$: $-x=(-y-1)^2-1$ $\quad\therefore\ x=-(y+1)^2+1$

428) ③

ㄱ. $x^2+y^2-2x=0$에서 $(x-1)^2+y^2=1$
따라서 반지름의 길이가 같으므로 평행이동하여 겹쳐진다.
ㄴ. $x^2+y^2-2x-2y+1=0$에서 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$
따라서 반지름의 길이가 같으므로 평행이동하여 겹쳐진다.
ㄷ. $x^2+y^2+4x-2y+2=0$에서 $(x+2)^2+(y-1)^2=3$
따라서 반지름의 길이가 다르므로 평행이동하여 겹쳐지지 않는다.
이상에서 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

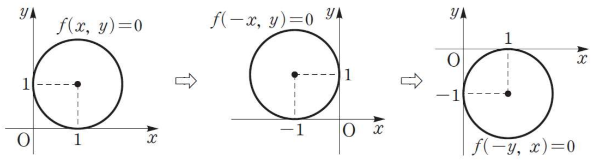
429) ①

도형 $f(-y,\ x)=0$은 도형 $f(x,\ y)=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로 $f(-y,\ x)=0$이 나타내는 도형은 ①이다.

<다른풀이>
주어진 대칭이동은 도형의 방정식에 x 대신 $-y$, y 대신 x를 대입한 것이다.
(ⅰ) $y=x$에 x 대신 $-y$, y 대신 x를 대입하면
$x=-y \quad \therefore\ y=-x$ …… ㉠
(ⅱ) $x=1$에 x 대신 $-y$를 대입하면
$-y=1 \quad \therefore\ y=-1$ …… ㉡
(ⅲ) $y=0$에 y 대신 x를 대입하면 $x=0$ …… ㉢
이상에서 세 직선 ㉠, ㉡, ㉢으로 이루어진 도형은 ①이다.

430) ①

$f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동하면
$f(-x,\ y)=0$
이것을 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면
$f(-y,\ x)=0$



따라서 $f(-y,\ x)=0$이 나타내는 도형은 ①이다.

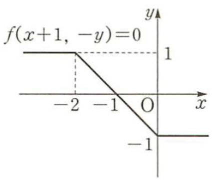
[참고] 원의 중심이 이동한 점의 좌표를 생각한다.

$$(1,\ 1) \xrightarrow[\text{대칭이동}]{y\text{축에 대하여}} (-1,\ 1) \xrightarrow[\text{대칭이동}]{y=x\text{에 대하여}} (1,\ -1)$$

431) ⑤

<참고> 보기의 방정식이 나타내는 도형을 그려 본다.

ㄱ. 방정식 $f(x+1,\ -y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



ㄴ. 방정식 $f(x-1,\ -y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 [그림 2]와 같다.

ㄷ. 방정식 $f(1-x,\ y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 [그림 2]와 같다.

이상에서 [그림 2]와 같은 도형을 나타내는 방정식인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

432) ③

주어진 도형은 네 직선
$x=1,\ x=3,\ y=1,\ y=2$ …… ㉠
로 둘러싸인 도형이다.
㉠에 x 대신 $y+1$, y 대신 $-x$를 각각 대입하면
$y+1=1,\ y+1=3,\ -x=1,\ -x=2$
$\therefore\ x=-1,\ x=-2,\ y=0,\ y=2$
따라서 $f(y+1,\ -x)=0$이 나타내는 도형은 ③이다.

<참고> 도형 $f(y+1,\ -x)=0$은 도형 $f(x,\ y)=0$을
(ⅰ) 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동
(ⅱ) y축에 대하여 대칭이동
(ⅲ) y축의 방향으로 -1만큼 평행이동
한 것과 같다.

433) 2

포물선 $y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$의
꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 2)$
포물선 $y=-x^2+6x-11=-(x-3)^2-2$의 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ -2)$
두 포물선이 점 $(\alpha,\ \beta)$에 대하여 대칭이므로 두 포물선의

꼭짓점도 점 $(\alpha,\ \beta)$에 대하여 대칭이다.
따라서 두 꼭짓점을 이은 선분의 중점의 좌표가 $(\alpha,\ \beta)$이므로

$$\alpha=\frac{1+3}{2}=2,\ \beta=\frac{2-2}{2}=0 \qquad \therefore\ \alpha+\beta=2$$

434) $\frac{5}{2}$

두 점 $(2,\ -3)$, $(-4,\ 5)$를 이은 선분의 중점의 좌표

$\left(\frac{2-4}{2},\ \frac{-3+5}{2}\right)$, 즉 $(-1,\ 1)$

이 점이 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$1=-a+b$ …… ㉠

또 두 점 $(2,\ -3)$, $(-4,\ 5)$를 지나는 직선이 직선 $y=ax+b$와 수직이므로

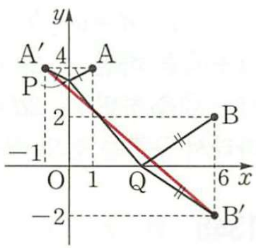
$\frac{5-(-3)}{-4-2}\cdot a=-1 \qquad \therefore\ a=\frac{3}{4}$

$a=\frac{3}{4}$를 ㉠에 대입하면 $b=\frac{7}{4}$

$\therefore\ a+b=\frac{5}{2}$

435) (1) $\sqrt{85}$ (2) $\sqrt{58}$

(1) 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A$'$, 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B$'$이라 하면



$\mathrm{A'}(-1,\ 4)$, $\mathrm{B'}(6,\ -2)$

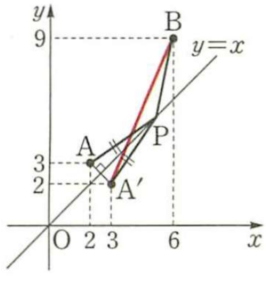
$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$

$=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB'}}$

$\geq \overline{\mathrm{A'B'}}$

$=\sqrt{(6+1)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{85}$

(2) 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A$'$이라 하면



$\mathrm{A'}(3,\ 2)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}$

$\geq \overline{\mathrm{A'B}}$

$=\sqrt{(6-3)^2+(9-2)^2}$

$=\sqrt{58}$

436) ②

점 $\mathrm{A}(4,2)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 점을 A$'$이라 하면 점 A$'$의 좌표는
$\mathrm{A'}(4+a, 2-6)$, 즉 $\mathrm{A'}(4+a,\ -4)$
한편 $\overline{\mathrm{OA'}}=2\overline{\mathrm{OA}}$에서 $\overline{\mathrm{OA'}}^2=4\overline{\mathrm{OA}}^2$이므로
$(4+a)^2+(-4)^2=4(4^2+2^2)$
$a^2+8a-48=0,\qquad (a+12)(a-4)=0$
$\therefore a=4\ (\because a>0)$

437) $2\sqrt{3}$

도형을 평행이동해도 그 모양은 변하지 않으므로 △OAB는 정삼각형이다. 정삼각형 OAB의 한 변의 길이는
$\overline{\mathrm{OA}}=2$
$\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OA}}=2$
$\therefore |a|=2\cos60^\circ=1,\ |b|=2\sin60^\circ=\sqrt{3}$
$ab>0, \mathrm{A}(2,0)$이므로 $a=1, b=\sqrt{3}$
$\mathrm{B'}(3, 2\sqrt{3})$ 이므로 $1+m=3,\ \sqrt{3}+n=2\sqrt{3}$
$\therefore m=2, n=\sqrt{3}$
$\therefore mn=2\sqrt{3}$

438) ③

$x^2+y^2-10x+4y+4=0$에서
$(x-5)^2+(y+2)^2=25$
이 원을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은
$(x-a-5)^2+(y-b+2)^2=25$
이 원이 원 $x^2+y^2=c$와 일치하므로
$-a-5=0, -b+2=0, c=25$
따라서 $a=-5, b=2, c=25$ 이므로
$a+b+c=22$

<다른풀이>
원 $x^2+y^2-10x+4y+4=0$에서
$(x-5)^2+(y+2)^2=25$
이므로 중심의 좌표는 $(5,-2)$이다.
따라서 중심 $(5,-2)$가 중심 $(0,0)$으로 옮겨졌으므로
$a=0-5=-5,\ b=0-(-2)=2$
원은 평행이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로
$c=25$
$\therefore a+b+c=22$

439) $(1,0)$

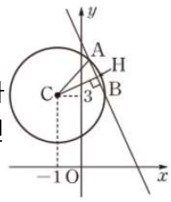
포물선 $y=-2x^2+8x-3$, 즉 $y=-2(x-2)^2+5$를 평행 이동한 포물선의 방정식은
$y-a=-2(x-a-4-2)^2+5$
$\therefore y=-2(x-a-6)^2+5+a$
이 포물선의 꼭짓점$(a+6, 5+a)$가 x축 위에 있으므로
$5+a=0$, $\therefore a=-5$
따라서 꼭짓점의 좌표는 $(1,0)$

440) $5\sqrt{2}$

$x^2+y^2-4x+6y+4=0$에서
$(x-2)^2+(y+3)^2=9$
이 원을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원의 방정식은
$(x-m-2)^2+(y-n+3)^2=9$
이 원이 원 $x^2+y^2=9$와 일치하려면
$-m-2=0$, $-n+3=0$
$\therefore m=-2$, $n=3$
원 $x^2+y^2-6x-8y+24=0$, 즉 $(x-3)^2+(y-4)^2=1$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 원의 방정식은
$(x+2-3)^2+(y-3-4)^2=1$
$\therefore (x-1)^2+(y-7)^2=1$
따라서 원의 중심 $(1,7)$과 원점 사이의 거리는
$\sqrt{1^2+7^2}=5\sqrt{2}$

441) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

평행이동한 원의 방정식은
$(x+1)^2+(y-3)^2=4$
오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 $\mathrm{C}(-1,3)$이라 하고, 점 C에서 직선 $2x+y-5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{CH}=\frac{|-2+3-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$
직각삼각형 CAH에서
$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CA}}^2-\overline{\mathrm{CH}}^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$
$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

442) -1

점 $\mathrm{P}_1(-2,3)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점
P_2의 좌표는 $\mathrm{P}_2(2,-3)$,
$\mathrm{P}_2(2,-3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점
P_3의 좌표는 $\mathrm{P}_3(-3,2)$,
$\mathrm{P}_2(2,-3)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점
P_4의 좌표는 $\mathrm{P}_4(3,-2)$
$\mathrm{P}_4(3,-2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한
점 P_5의 좌표는 $\mathrm{P}_5(-2,3)$
즉 점 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4, \mathrm{P}_5, \cdots$ 는 4개의 점 $(-2,3), (2,-3), (-3,2), (3,-2)$의 순서로 반복된다.
이때 $2018=4\cdot504+2$ 이므로 점 P_{2018}의 좌표는 점 P_2의 좌표인 $(2,-3)$과 같다.
따라서 $a=2$, $b=-3$ 이므로
$a+b=-1$

443) $2\sqrt{5}-4$

$x^2+y^2-4x+2y+1=0$에서 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$
이 원을 원점에 대하여 대칭이동한 원 O'의 방정식은
$(-x-2)^2+(-y+1)^2=4$
$\therefore$ $(x+2)^2+(y-1)^2=4$
$\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값은 두 원의 중심 $(2,-1), (-2,1)$을 이은 선분의 길이에서 두 원의 반지름의 길이의 합을 뺀 것이므로 구하는 최솟값은
$\sqrt{(-2-2)^2+(1+1)^2}-4=2\sqrt{5}-4$

444) ⑤

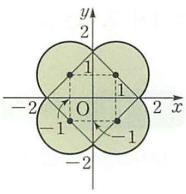
직선 $3x+4y+a=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선은
$-3x-4y+a=0$ $\therefore$ $3x+4y-a=0$ …… ㉠
직선 ㉠이 원 $(x-4)^2+(y+1)^2=4$ 에 접하므로 원의 중심 $(4,-1)$과 직선 ㉠사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 2와 같다.
즉, $\frac{|12-4-a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$, $|8-a|=10$, $8-a=\pm10$
$\therefore$ $a=-2$ 또는 $a=18$
따라서 모든 a의 값의 합은 $-2+18=16$

445) -16

$x^2+y^2+2x-6y=0$에서 $(x+1)^2+(y-3)^2=10$
이 원을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(-x+1)^2+(y-3)^2=10$
$\therefore\ (x-1)^2+(y-3)^2=10$
이 원이 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$과 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심 $(1,3)$과 직선 $x-y+k=0$사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{10}$보다 작아야 하므로
$\dfrac{|1-3+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}<\sqrt{10},\quad |-2+k|<2\sqrt{5}$
$-2\sqrt{5}<-2+k<2\sqrt{5}$
$\therefore\ 2-2\sqrt{5}<k<2+2\sqrt{5}$
따라서 $a=2-2\sqrt{5},\ b=2+2\sqrt{5}$이므로
$ab=-16$

446) $4\pi+8$

원 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 각각
$(x+1)^2+(y-1)^2=2$,
$(x-1)^2+(y+1)^2=2$,
$(x-1)^2+(y-1)^2=2$
따라서 구하는 넓이는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$2\cdot\pi\cdot(\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2=4\pi+8$

447) $(x-3)^2+y^2=1$

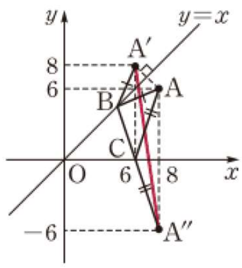
원 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$의 중심 $(1,\ 2)$를 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 두 점 $(1,\ 2),\ (a,\ b)$를 이은
선분의 중점의 좌표는
$\left(\dfrac{1+a}{2},\ \dfrac{2+b}{2}\right)$
이 점이 직선 $y=x-1$ 위의 점이므로
$\dfrac{2+b}{2}=\dfrac{1+a}{2}-1 \qquad \therefore\ a-b=3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
또 두 점 $(1,\ 2),\ (a,\ b)$를 지나는 직선이 직선 $y=x-1$과 수직이므로
$\dfrac{b-2}{a-1}=-1$
$\therefore\ a+b=3 \qquad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=0$
원은 대칭이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 구하는 도형은 중심의
좌표가 $(3,\ 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원이다.
$\therefore\ (x-3)^2+y^2=1$

448) ①

$\mathrm{C}(a,\ b)$라 하면 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{2+a}{2},\ \dfrac{1+b}{2}\right)$
이 점이 직선 $y=2x+1$ 위의 점이므로
$\dfrac{1+b}{2}=2\cdot\dfrac{2+a}{2}+1 \qquad \therefore\ 2a-b=-5 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
또 직선 BC가 직선 $y=2x+1$과 수직이므로
$\dfrac{b-1}{a-2}=-\dfrac{1}{2} \qquad \therefore\ a+2b=4 \qquad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\dfrac{6}{5},\ b=\dfrac{13}{5}$
$\therefore\ \mathrm{C}\left(-\dfrac{6}{5},\ \dfrac{13}{5}\right)$
$\overline{\mathrm{AB}}=2-(-1)=3$이고 점 C와 직선 AB 사이의 거리가
$\dfrac{13}{5}-1=\dfrac{8}{5}$ 이므로
$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot\dfrac{8}{5}=\dfrac{12}{5}$

449) $10\sqrt{2}$

점 $\mathrm{A}(8,6)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A', x축에 대하여 대칭이동한 점을 A''이라 하면



$\mathrm{A}'(6,8),\ A''(8,-6)$
$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{A'B}},\ \overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{CA''}}$ 이므로
$\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA}}$
$\overline{\mathrm{A'B}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA''}}\geq\overline{A'A''}$
따라서 $\triangle\mathrm{ABC}$의 둘레의 길이의 최솟값은
$\overline{\mathrm{A'A''}}=\sqrt{(8-6)^2+(-6-8)^2}=10\sqrt{2}$