제 2 교시

수학 영역

1. 다음 조건을 만족시키는 10 이하의 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는? [4점]

> $\dfrac{24^b}{12^a}$는 16의 배수이다.
> $2^4 \times \boxed{}$

① 50 ② 52 ③ 54 ④ 56 ⑤ 58

답: 2번(9번 난이도)

$$\frac{24^b}{12^a} = \frac{(2^3\times 3)^b}{(2^2\times 3)^a} = 2^{3b-2a}\cdot 3^{b-a} \cdots b > a$$

i) $b = a$

$2^b = 2^4 \times \boxed{} \Rightarrow$ 16의 배수.

$b = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \longrightarrow$ 7개

ii) $b \neq a$

$b=2 \longrightarrow a=1$
$b=3 \longrightarrow a=1, 2$
$b=4 \longrightarrow a=1, 2, 3$
$b=5 \longrightarrow a=1, 2, 3, 4$
$\vdots$
$b=10 \longrightarrow a=1, 2, 3, 4 \cdots 9$

$\longrightarrow$ 45개

$\therefore$ 52개

2. 세 양수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a^4 = b^6 = c^3 = k$

(나) $(\log_2 a) \times (\log_2 b) \times (\log_2 c) = 3$

$\log_2 abc$의 값은? [4점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

답: 2번(9번 난이도)

(나) : $3 = \left(\frac{1}{4} \cdot \log_2 k\right) \times \left(\frac{1}{6} \log_2 k\right) \times \left(\frac{1}{3} \log_2 k\right)$

$(\log_2 k)^3 = 216 \longrightarrow \therefore \log_2 k = 6$

$\log_2 abc = \frac{1}{4} \cdot 6 + \frac{1}{6} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 6$

$= \frac{9}{2}$

3. 두 자연수 a, b가 다음 조건을 만족시킨다.

> 두 점 $(0,0)$, $\left(\frac{1}{3}, \log_2 a\right)$을 지나는 직선을 l,
>
> 두 점 $(0,-1)$, $\left(\frac{1}{4}, \log_2 b\right)$을 지나는 직선을 m이라 하면
>
> l과 m은 서로 평행하다.

$a+b$의 최솟값은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

답: 5번(9번 난이도)

l의 기울기 : $3\log_2 a$

m의 기울기 : $4\log_2 2b$

같다

$\therefore a^3 = 16b^4$

$a^{\frac{3}{4}} = 2b$

$\therefore a=16 \quad b=4$

4. 두 양수 a, b가 다음 조건을 만족시킨다.

> 실수 x에 대하여 두 집합
>
> $$\{x \mid \log_4(\log_2 x) \le \log_2 a\},\ \{x \mid b < x \le 4b\}$$
>
> 은 서로 같다.

$a \times b$의 값은? [4점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

답: 1번(10번 난이도)

$\log_2 x \le a^2 \cdots$ ㄱ

$b = 1$ ($\because$ 로그의 진수 > 0)

ㄱ 등호성립 at $x = 4b = 4$

$\longrightarrow a = \sqrt{2}$

$\therefore ab = \sqrt{2}$

5. 자연수 k에 대하여 좌표평면 위의 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_4(k-x)$의 교점을 A라 하자. 점 A의 x좌표는 2이상이고 y좌표는 4이하가 되도록 하는 k의 개수는? [4점]

① 265 ② 267 ③ 269 ④ 271 ⑤ 273

답: 2번(11번 난이도)

$k \le 272$

$(2,1) \le \log_4(k-x) \le (16,4)$

$k \ge 6$

$\therefore 6 \le k \le 272$

$\therefore$ 267개

6. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = n^2 + n$
>
> (나) $\sum_{k=1}^{n}(a_k + 2b_k) = 2n^2 + 3n$

b_{16}의 값은? [4점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

답: 4 번(10번 난이도)

(나)-(가)

$= \sum_{k=1}^{n} 3b_k = n^2 + 2n \cdots$ ㄱ

$\frac{(\text{ㄱ에 } n=16) - (\text{ㄱ에 } n=15)}{3} = b_{16}$

$b_{16} = 11$

7. 공차가 자연수이고 $a_4 = -18$인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, 가능한 모든 a_6의 값의 합은? [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \neq 0$이다.
(나) $\sum_{k=1}^{m} a_k = 0$이도록 하는 자연수 m이 존재한다.

① 44 ② 46 ③ 48 ④ 50 ⑤ 52

답: 4 번(12번 난이도)

(가) : $d \neq$ 18의 약수

(나) : $a_{4이상} = 18$

가능한 d : 4, 12, 36

$a_6 = 54, 6, -10$

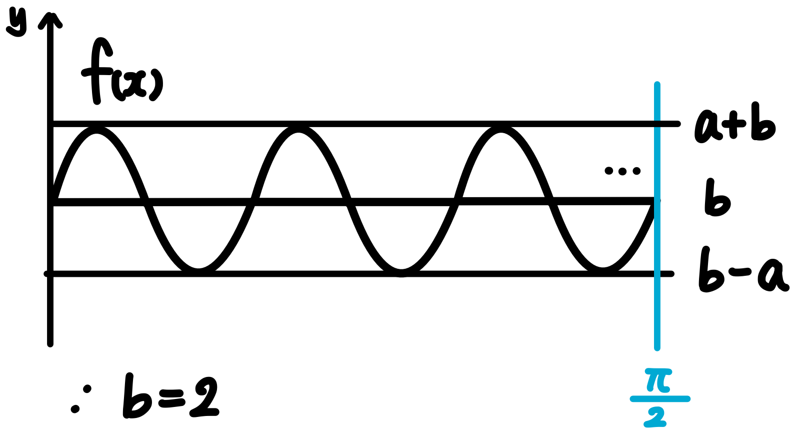
8. 두 양수 a, b에 대하여 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 정의된 함수 $f(x) = a\sin 12x + b$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a \times b$의 값은? [4점]

주기 : $\frac{\pi}{6}$

(가) 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = 2$의 교점의 개수는 홀수인 자연수이다. (나) 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = 7$의 교점의 개수는 10보다 작은 자연수이다.

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

답: 2번(11번 난이도)



$\therefore$ b=2
a=5

9. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수의 값은? [4점]

$f'(1)g(1) + f(1)g'(1)$

(가) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2g(x)-4}{x-1}=2$

(나) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-g(x)+2}{x-1}=3$

① -36 ② -32 ③ -28 ④ -24 ⑤ -20

답: 2번(10번 난이도)

(가) : $f(1)=2g(1)+4$
$f'(1)=2g'(1)+2$

(나) : $f(1)=g(1)-2$
$f'(1)=g'(1)+3$

$\therefore g'(1)=1$ $f'(1)=4$
$g(1)=-6$ $f(1)=-8$

$\therefore -32$

10. $f(0)=0$인 다항함수 $f(x)$와 양의 상수 k가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)+k$의 값은? [4점]

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3-f(x)}{x}=3$

(나) $\lim_{x \to t} \frac{f(x)+k}{(x-t)f'(x)}$가 1이 아닌 수로 수렴하도록 하는 실수 t가 존재한다.

① 50 ② 54 ③ 58 ④ 62 ⑤ 66

답: 2번(12번 난이도)

(가) : $f(x)=x^3-3x \longrightarrow f(4)=52$

(나) : $f(t)=-k$ / $f'(t)=0$

↓

$t=1$

↓

$k=2$