13. 두 상수 a, $b(b>0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x+3}+b & (x \le a) \\ 2^{-x+5}+3b & (x>a) \end{cases}$$

라 하자. 다음 조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값이 $4b+8$일 때, $a+b$의 값은? (단, $k>b$) [4점]

$b<t<k$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 1이다.

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$\lvert f(k)\rvert+\lvert g(k)\rvert=0$을 만족시키는 실수 k의 개수는 2이다.

$4f(1)+2g(1)=-1$일 때, $f(4)$의 값은? [4점]

① 46 ② 49 ③ 52 ④ 55 ⑤ 58

$f(k)=g(k)=0$, 실수 k는 2개.

$l: y=f'(t)(x-t)+f(t)$

$= f'(t)x+\underbrace{f(t)-tf'(t)}_{=g(t)}$

$\Rightarrow f(k)=g(k)=f(k)-kf'(k)=0$

$\Rightarrow k=0$ and $f(k)=f(0)=0$

or

$f(k)=f'(k)=0 \Rightarrow f$는 3차식 이므로 이를 만족하는 k는 1개뿐이며 $k\neq 0$이다.

즉, $f(x)=x(x-k)^2$, $g(t)=f(t)-tf'(t)$ 이므로

$4f(1)+2g(1)=4f(1)+2f(1)-2f'(1)$

$=6f(1)-2f'(1)$

$=6(k-1)^2-2\{(k-1)^2+2(1-k)\}$

$=4(k-1)^2+4(k-1)=-1$

$\Rightarrow 4(k-1)^2+4(k-1)+1=(2k-2+1)^2=(2k-1)^2=0$

$\Rightarrow k=\frac{1}{2}$, $f(4)=4\cdot(4-k)^2=4\cdot 3.5^2=\boxed{49}$

15. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{3} & (a_n\text{이 3의 배수인 경우})\\[2ex] \dfrac{a_n^{\ 2}+5}{3} & (a_n\text{이 3의 배수가 아닌 경우})\end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_4+a_5=5$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

$\overline{2}$ $\overline{3}$ [4점]

① 63 ② 66 ③ 69 ④ 72 ⑤ 75

a_n의 첫째항이 자연수, 즉 양수이므로,

$a_2=\dfrac{a_1^2+5}{3}\geq 2>0$ 또는 $a_2=\dfrac{a_1}{3}>0$

이에 이 과정을 a_3, $a_4\cdots$에 대해 반복해도 모두 양수가 된다.

즉, $a_n>0$이다.

이 때, $a_4+a_5=5$라면,

$a_4=3k$ (k는 자연수) 라고 한다면,

$4k>5$이므로 모순이 된다.

즉, $a_4=3k\pm1$ (k는 0 또는 자연수) 인데,

이 때 $a_5=\dfrac{a_4^2+5}{3}$이므로 $a_4=2$, $a_5=3$.

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5

$54\to18$, $7\to18$, $18\to6$, $6\to2$

$\cancel{3\sqrt{13}}\to\sqrt{13}$, $\cancel{\ \ }\to\sqrt{13}$, $\sqrt{13}\to6$

$2\to3$, $9\to3$, $3\to1$, $1\to2$

2 3

합 72.

단답형

16. 방정식

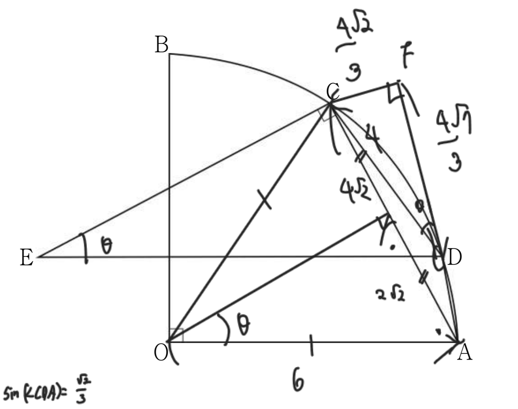
$$\log_2(x-3)=1-\log_2(x-4)$$

를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)=(x-1)(x^3+x^2+5)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

21. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 6이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위에 점 C를 $\overline{AC}=4\sqrt{2}$가 되도록 잡는다. 호 AC 위의 한 점 D에 대하여 점 D를 지나고 선분 OA에 평행한 직선과 점 C를 지나고 선분 AC에 수직인 직선이 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 CED의 외접원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$일 때, $\overline{AD}=p+q\sqrt{7}$을 만족시키는 두 유리수 p, q에 대하여 $9\times|p\times q|$의 값을 구하시오. (단, 점 D는 점 A도 아니고 점 C도 아니다.) [4점]

$\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{3}$
$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}$



$2R=\frac{4\sqrt{2}}{\sin(\angle CDA)} \Rightarrow \sin(\angle CDA)=\frac{\sqrt{2}}{3}$

이 때, $\overline{CD}=6\sqrt{2}\sin\theta=6\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}=4$.

$\angle CFD=\frac{\pi}{2}$, $\overline{CF}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$, $\overline{FD}=\frac{4\sqrt{7}}{3}$,

$\overline{CA}=4\sqrt{2}$, $\angle CFA=\frac{\pi}{2}$, $\overline{CF}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$,

$\overline{AF}=4\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{16}{3}$

$\overline{AD}=\overline{AF}-\overline{DF}=\frac{16}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{7}$,

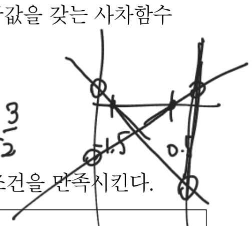
$p=\frac{16}{3}$, $q=-\frac{4}{3}$

$9\times|p\times q|=|9pq|=|9\cdot\frac{16}{3}\cdot\frac{4}{3}|$
$=64$

22. 최고차항의 계수가 4이고 서로 다른 세 극값을 갖는 사차함수 $f(x)$와 두 함수 $g(x)$,

$$h(x)=\begin{cases}4x+2 & (x<a)\\ -2x-3 & (x\geq a)\end{cases}$$

$-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{2}$



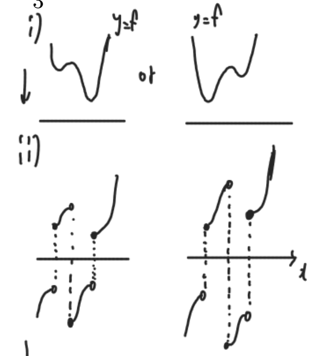
가 있다. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> i) ii)
> $0\leq|g(x)|=f(x)$, $\lim_{t\to0+}\frac{g(x+t)-g(x)}{t}=|f'(x)|\geq0$
> 이다.
> iii)
> (나) 함수 $g(x)h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

iv)

$g(0)=\frac{40}{3}$일 때, $g(1)\times h(3)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]

i) ii)



iii) g는 3개 불연속, 이 점을 $x=p_1$, p_2, p_3 라 하면

$h(p_i)=0$ 또는, $\frac{\lim_{x\to p_i+}h(x)}{\lim_{x\to p_i-}h(x)}=-1$ $(i=1,2,3)$

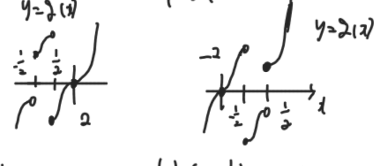
그러나, $p_i\neq a$ 이면 $\frac{\lim_{x\to p_i+}h(x)}{\lim_{x\to p_i-}h(x)}=1\neq-1$ 이므로

p_i중 하나 a, $4a+2=2a+3 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$ 이다.

또, $h(p_i)=0$ 이면 $p_i=-\frac{1}{2}$ 이므로

$h(p_i)=0$을 만족하는 p_i는 1개 다.

즉, 그래프에서 국소 극값은 0이 되어야 한다. 이 때 $x=k$라 하자.



$f'(x)=16(x^2-\frac{1}{4})(x-k)=(16x^2-4)(x-k)$
$=16x^3-16kx^2-4x+4k$

iv)
$g(0)=\frac{40}{3}$

$f(0)=|g(0)|=\frac{40}{3}$.

$f(x)=4x^4-\frac{16}{3}kx^3-2x^2+4kx+\frac{40}{3}$

$f(k)=-\frac{4}{3}k^4+2k^2+\frac{40}{3}=0$.

$k=\pm2$

$g(0)=\frac{40}{3}$, $k=2$

$\therefore f(x)=4x^4-\frac{32}{3}x^3-2x^2+8x+\frac{40}{3}$,

$g(1)=-f(1)=4-2+8+\frac{40}{3}-\frac{32}{3}$
$=-(10+\frac{8}{3})$

$h(3)=-2\cdot3-3=-9$

$\Rightarrow h(3)\times g(1)=-9\times-(10+\frac{8}{3})$
$=90+24=114$

> **※ 확인 사항**
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

27. 함수 $f(x)=x^3+x+1$의 역함수를 $g(x)$라 하자.
매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=g(t)+t, \quad y=g(t)-t$$

에서 $t=3$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $-\dfrac{1}{5}$ ② $-\dfrac{3}{10}$ ③ $-\dfrac{2}{5}$ ④ $-\dfrac{1}{2}$ ⑤ $-\dfrac{3}{5}$

28. 두 상수 $a(a>0)$, b에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$a \tan\frac{b}{2} - 1 = 0$

$$f(x)=a\sin x-\cos x, \quad g(x)=e^{2x-b}-1$$

이라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\tan b$의 값은? [4점]

(가) $f(k)=g(k)=0$을 만족시키는 실수 k가 열린구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$에 존재한다.

$\rightarrow e^{2k-b}-1=0$ 이 때 $k=\frac{b}{2}$ 이고 $\tan\frac{b}{2}=\frac{1}{a}$

(나) 열린구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 방정식 $\{f(x)g(x)\}'=2f(x)$의 모든 해의 합은 $\dfrac{\pi}{4}$이다.

① $\dfrac{5}{2}$ ② 3 ③ $\dfrac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\dfrac{9}{2}$

$f'g+fg'=2f$

$\Rightarrow (a\cos x+\sin x)(e^{2x-b}-1) + f(x)(2e^{2x-b}) = 2f(x)$

$\Rightarrow (e^{2x-b}-1)\{a\cos x+\sin x+2f(x)\}=0$

$x=\frac{b}{2}$ 이거나,

$a\cos x+\sin x+2a\sin x-2\cos x=0$ 일 때 $x=\alpha$ 인 α.

$\Rightarrow (2-a)c\alpha=(2a+1)s\alpha$ 이므로

$\tan\alpha=\dfrac{2-a}{2a+1}$

$\tan\dfrac{b}{2}=\dfrac{1}{a}$ $\quad \tan\dfrac{\pi}{4}=1$ 이므로

이 때, $\alpha+\frac{b}{2}=\frac{\pi}{4}$ 이고

$1=\tan\left(\alpha+\frac{b}{2}\right)=\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{2-a}{2a+1}}{1-\frac{1}{a}\cdot\frac{2-a}{2a+1}}=\dfrac{2a+1+2a-a^2}{a(2a+1)-(2-a)}$

$\Rightarrow 3a^2-2a-3=0$

$a=\dfrac{1\pm\sqrt{1+9}}{3}$, $a>0$ $\left(\because \tan\frac{b}{2}=\frac{1}{a},\ 0<b<\frac{\pi}{2}\right)$

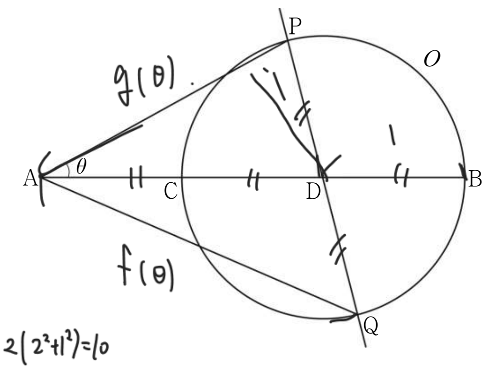
$a=\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$, $\dfrac{1}{a}=\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}=\tan\dfrac{b}{2}$,

$\Rightarrow \tan b=\dfrac{2\tan\frac{b}{2}}{1-\tan^2\frac{b}{2}}=\dfrac{\frac{2}{3}(\sqrt{10}-1)}{1-\frac{11-2\sqrt{10}}{9}}=\dfrac{\frac{2}{3}\cancel{(\sqrt{10}-1)}\times 9}{\frac{2\cancel{(\sqrt{10}-1)}}{9}\times 9}=3$

단답형

29. 그림과 같이 길이가 3인 선분 AB를 삼등분하는 점 중 A와 가까운 점을 C, B와 가까운 점을 D라 하고, 선분 BC를 지름으로 하는 원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P를 $\angle \mathrm{BAP}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{6}\right)$가 되도록 잡고, 두 점 P, D를 지나는 직선이 원 O와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 선분 AQ의 길이를 $f(\theta)$라 할 때, $\cos\theta_0=\frac{7}{8}$인 θ_0에 대하여 $f'(\theta_0)=k$이다. k^2의 값을 구하시오. (단, $\angle \mathrm{APD}<\frac{\pi}{2}$이고 $0<\theta_0<\frac{\pi}{6}$이다.) [4점]

$\sqrt{3}$ $1\sim 3$



$\{f(\theta)\}^2+\{g(\theta)\}^2=2(2^2+1^2)=10$

$1^2=\{g(\theta)\}^2+4-2\cdot 2\cos\theta\cdot g(\theta)$

$\Rightarrow \{g(\theta)\}^2-4\cos\theta\, g(\theta)+3=0$

$g(\theta)=2\cos\theta\pm\sqrt{4\cos^2\theta-3}$, $g(\theta)\geq\sqrt{3}$

$2ff'+2gg'=0$, $g'=-\frac{ff'}{g}$

$g(\theta_0)=\frac{7}{4}\pm\sqrt{4\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{7}{8}-3}$

$=\frac{7}{4}\pm\frac{1}{4}\Rightarrow 2$ $(\because g(\theta)\geq\sqrt{3})$

$f(\theta_0)=\sqrt{6}$, $f'(\theta_0)=k$, $g'=-\frac{ff'}{g}$

$2gg'-4\cos\theta\, g'+4\sin\theta\, g(\theta)=0$

$\theta=\theta_0$이면,

$2\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{6}k}{-2}+4\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}k+4\cdot\frac{\sqrt{15}}{8}\cdot 2=0$

$\Rightarrow -2\sqrt{6}k+\frac{7}{4}\sqrt{6}=-\sqrt{15}.$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{4}k=\sqrt{15}$, $k=4\sqrt{2.5}$, $k^2=16\cdot 2.5=40$

30. 수열 $\{a_n\}$은 공비가 0이 아닌 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases} a_n & (|a_n|<\alpha) \\ -\frac{5}{a_n} & (|a_n|\geq\alpha)\end{cases}\quad(\alpha\text{는 양의 상수})$$

라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 자연수 p가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=4$ i)
>
> (나) $\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n}{b_n}$의 값이 최소가 되도록 하는 자연수 m은 p이고, ii)
>
> $\sum_{n=1}^{p}b_n=51$, $\sum_{n=p+1}^{\infty}b_n=\frac{1}{64}$이다. iii) iv)

$32\times(a_3+p)$의 값을 구하시오. [4점]

$5\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$a_n=ar^n$, $a_n=4(1-r)r^{n-1}$

i) $\frac{a}{1-r}=4$, $a=\frac{4(1-r)}{r}$, $-1<r<1$

ii) $-1<r<1$ 이고 $\frac{a_n}{b_n}=1$ or $-\frac{5}{a_n}\leq 0$ 이므로

$|a_{k+1}|<\alpha\leq|a_k|$인 k에 대하여,

$b_n=\begin{cases}-\frac{5}{a_n} & (1\leq n\leq k)\\ a_n & (n\geq k)\end{cases}$

이 때, 이 식을 만족하는 $k=p$이고,

$\sum_{n=1}^{p}b_n=-\frac{5}{4}\sum_{n=1}^{p}\frac{r^{1-n}}{1-r}=-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{1-r}\cdot(1-r^{1-p})\cdot\frac{r}{r-1}=51$

$\sum_{n=p}^{\infty}b_n=\sum_{n=p+1}^{\infty}4(1-r)r^{n-1}=4(1-r)\cdot r^p\cdot\frac{1}{1-r}=\frac{1}{64}$, $r^p=2^{-8}$

$\frac{5}{4}\cdot\frac{r}{(r-1)^2}(1-r\cdot r^{-p})=51.$ $r=-\frac{1}{4}$, $p=4$ 성립.

$a_n=5\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$a_3=5\cdot\frac{1}{16}$, $p=4$, $32(a_3+p)=10+32\cdot 4=138$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

27. 점 F를 초점으로 하는 포물선 $y^2 = 4x$가 있다.
다음 조건을 만족시키는 포물선 $y^2 = 4x$ 위의 서로 다른 세 점 P, Q, R에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{QF}} + \overline{\mathrm{RF}}$의 값은? [3점]

> 점 P와 직선 $y = x - 2$ 사이의 거리를 k라 할 때,
> 이 직선으로부터의 거리가 k가 되도록 하는 포물선 $y^2 = 4x$
> 위의 점 중 P가 아닌 점은 Q, R뿐이다.

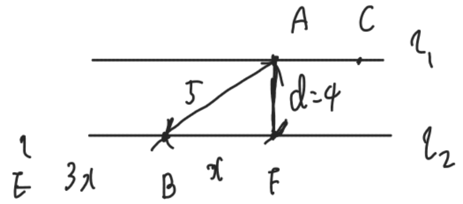
① 17　② $\frac{35}{2}$　③ 18　④ $\frac{37}{2}$　⑤ 19

28. 서로 평행한 두 직선 l_1, l_2가 있다.
직선 l_1 위의 점 A에 대하여 점 A와 직선 l_2 사이의 거리는 d이다.
직선 l_2 위의 점 B에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 5$이고, 직선 l_1 위의 점 C, 직선 l_2 위의 점 D에 대하여 $|4\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{CD}}|$의 최솟값은 $\cancel{12}$ 4이다.
$|4\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{CD}}|$의 값이 최소일 때의 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$의 크기를 k라 할 때, $d \times k$의 값은? (단, d는 $d \leq 5$인 상수이다.) [4점]

① $16\sqrt{7}$　② $32\sqrt{2}$　③ 48
④ $16\sqrt{10}$　⑤ $16\sqrt{11}$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE}$

BE 1 : 4 비율.



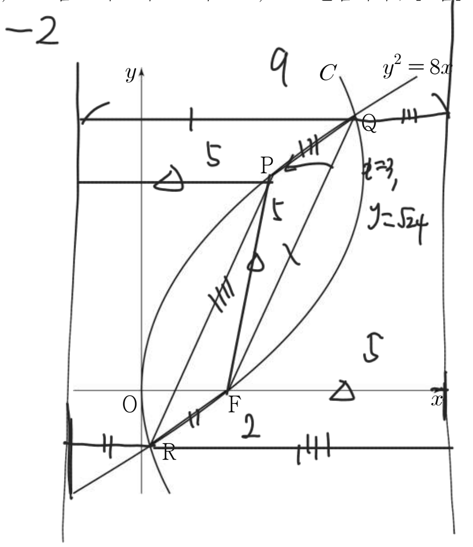
$x=3$.　$\overline{EF} = 4x = 12$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE} = \sqrt{12^2+4^2} = 4\sqrt{10} = k$

$d=4$.　$kd = 16\sqrt{10}$

단답형

29. 그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$와 이 포물선 위의 제1사분면에 있는 점 P가 있다. 점 P를 초점으로 하고 준선이 $x=k$인 포물선 중 점 F를 지나는 포물선을 C라 하자. 포물선 $y^2=8x$와 포물선 C가 만나는 두 점을 Q, R이라 할 때, 사각형 PRFQ의 둘레의 길이는 18이다. 삼각형 OFP의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오.
(단, k는 점 P의 x좌표보다 크고, O는 원점이다.) [4점]



$P_y = S$

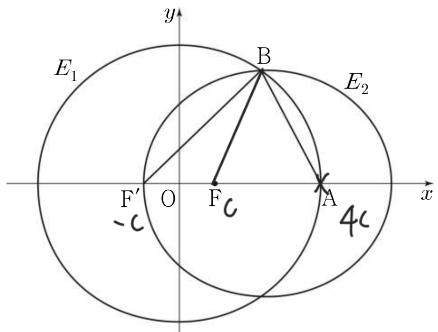
$\|$

$\sqrt{24}$

$k=7$

$S^2 = 24$

30. 그림과 같이 두 초점이 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)$ $(c>0)$인 타원 E_1이 있다. 타원 E_1의 꼭짓점 중 x좌표가 양수인 점을 A라 하고, 두 점 A, F를 초점으로 하고 점 F$'$을 지나는 타원을 E_2라 하자. 두 타원 E_1, E_2의 교점 중 y좌표가 양수인 점 B에 대하여 $\overline{\mathrm{BF'}}-\overline{\mathrm{BA}}=\frac{1}{5}\overline{\mathrm{AF'}}$이 성립한다. 타원 E_2의 단축의 길이가 $4\sqrt{3}$일 때, $30\times c^2$의 값을 구하시오. [4점]



$BF + BF' = 2a$

$BF + AB = BF + BF' + (AB - BF')$

$= 2a - \frac{AF'}{5} = 2a - \frac{a+c}{5} = a+3c = 7c$

$\Rightarrow \frac{4a}{5} = \frac{16}{5}c, \quad a : c = 4 : 1$

초점: $3c$, 장축: $7c$, 단축: $\sqrt{40}\,c$ $= \sqrt{48}$

$c = \sqrt{1.2}$,

$30c^2 = 30 \cdot 1.2 = 36.$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.