1번 문항 (2022 중앙대학교 논술기출)

$0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ 에서 정의된 연속함수 $f(x)$는 다음을 만족한다.

㈎ $(f(x))^2\cos^2 x - 2f(x)(1+\sin x)\cos x + (1+\sin x)^2\cos^2 x = 0$

㈏ $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

이때 정적분 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \{f'(x)\cos x - f(x)\sin x\} e^{\sin x} dx$ 의 값을 구하시오.

2번 문항 (2022 중앙대학교 논술기출)

연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x f(t)\sin(x-t)dt = \ln(1+x^2)$$

을 만족한다. 이때 정적분 $\int_0^2 xf(x)dx$의 값을 구하시오.

3번 문항 (2022 중앙대학교 논술기출)

자연수 n에 대하여 I_n을

$$I_n = \int_0^{n\pi} \{ |\sin x| \cos^2 x + \sin^5(2x) \cos x \} dx$$

라 정의할 때, 극한 $\lim_{n \to \infty} \frac{I_n}{n}$의 값을 구하시오.

4번 문항 (2021 중앙대학교 논술기출)

- 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

- 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 각각 u, x에 대하여 미분가능하면, 합성함수 $y=f(g(x))$도 x에 대하여 미분가능하고, 그 도함수는 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$이다.

- x의 함수 y가 음함수 $f(x,\ y)=0$의 꼴로 주어졌을 때, y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분한 후 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

함수 $F(x)=\int_0^x \sin^2 t\,dt$에 대하여, 다음 정적분의 값을 구하시오. (단, 각 θ에 대하여 $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$가 성립한다.)

$$\int_0^{\pi} (2x-\sin(2x))e^{F(x)}\sin^2 x\,dx$$

5번 문항 (2021 한양대학교 모의논술)

[1] $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{x\cos^2 x + x^3 \cos x + \sin x\} dx$ 의 값을 구하시오.

[2] $f(x) = 2x\cos x - \sin x$ 일 때,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{2xf(x) - \cos 2x\} dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [2x\{2xf(x) - \cos 2x\} - f(x)] dx$$ 의 값을 구하시오.

6번 문항 (2021 경북대학교 논술기출)

(1) 연속함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$g(x)=g(x+2\pi)$$

를 만족시킬 때, 함수 $h(x)=\int_{x-2\pi}^{x} g(t)dt$가 상수함수임을 증명하시오.

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 도함수 $f'(x)$는 연속함수이다.
함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(x)=f'(x+2\pi)$
(나) $f(x)=\left(\int_0^{2\pi} f'(x-t)\cos t\,dt\right)^2-\cos x+\alpha$ (단, α는 상수)

(2) $\int_0^{2\pi} f'(t)\sin t\,dt$의 값을 구하시오.

(3) $f(0)=1$ 일 때, 상수 α의 값을 구하시오.

7번 문항 (2021 부산대 메디컬 논술기출)

함수 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)\ (x>2)$의 도함수를 구하고, 이를 이용하여 부정적분 $\int \sqrt{x^2-4}\,dx$를 구하시오.

8번 문항 (2021 중앙대학교 모의논술)

$0 < x < 1$에서 정의된 함수 $g(x) = \int_1^x \sin(\ln t)\, dt$에 대하여, $g(x)$가 극값을 가지는 점들의 집합을 A라고 하자. A의 원소들을 크기가 큰 순서대로 모두 나열한 수열을 $\{a_n\}$이라고 할 때,

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(g(a_n) - \frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오.

9번 문항 (2020 서울과학기술대학교 논술기출)

(가) 정적분과 부등식

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속일 때

$$f(x) \geq g(x) \text{ 이면 } \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

(나) 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족한다.

(1) 닫힌 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 연속이다.

(2) 열린 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 미분가능하다.

(3) 닫힌 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 $f'(x)$의 최댓값은 M이고, 최솟값은 m이다.

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x dx$

[1] 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx$$

[2] 다음 등식에서 $\boxed{A}$와 $\boxed{B}$에 들어갈 식을 각각 구하시오.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{f(\boxed{A}) - f(\boxed{B})\}\sin x dx$$

[3] 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)m \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx \leq \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)M$$

10번 문항 (2020 서울과학기술대학교 논술기출)

함수 $f(x)$가 구간 $[0,2a]$에서 연속일 때,

$$\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a \{f(x)+\boxed{A}\}dx$$

를 만족한다. $\boxed{A}$에 알맞은 식을 구하고, 위의 식을 이용하여 다음 정적분의 값을 구하시오.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{1+2020^{\sin x}}dx$$

+ plus (2023 학년도 광운대 기출)

다음 물음에 답하시오.

(1) 모든 실수에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 아래 등식이 성립함을 보이시오. (단, a는 실수)

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$

(2) 정적분 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2023} x}{\sin^{2023} x + \cos^{2023} x}dx$를 구하시오.

11번 문항 (2016 중앙대학교 논술기출)

연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)+f(\pi-x)=\left(e^{\frac{\pi}{2}-x}+e^{x-\frac{\pi}{2}}\right)\sin x$$

를 만족시킬 때, $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx$를 계산하는 과정을 논리적으로 제시하시오.

12번 문항 (2020 성균관대학교 논술기출)

<제시문1>
함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.
그러나 그 역은 성립하지 않는다.

<제시문2>
함수 $f(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속이고 함수 $F(x)$가 $f(x)$의 한 부정적분일 때
다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

<제시문3>
양의 정수 n에 대하여, 닫힌 구간 $[n\pi, (n+1)\pi]$에서 함수 $y=g(x)$는 다음을 만족한다.

$$g(x) = 2^n a_n \cos(x-n\pi)+\left(b_n+(-1)^n\right)\sin(x-n\pi) \quad (\text{단, } a_n \text{ 과 } b_n \text{은 실수})$$

함수 $y=g(x)$는 구간 (π, ∞)에서 미분가능하며, $\int_\pi^{2\pi} g(x)\,dx = -6$과 $\int_\pi^{\frac{5\pi}{2}} g(x)\,dx = -2$를 만족한다.

[1] <제시문3>의 함수 $y=g(x)$에 대하여, 상수 b_1의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[2] <제시문3>의 함수 $y=g(x)$에 대하여, 정적분 $\int_\pi^{100\pi} g(x)\,dx$의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[3] <제시문3>의 함수 $y=g(x)$에 대하여, 정적분 $\int_\pi^{\frac{199\pi}{2}} g(x)\,dx$의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

13번 문항 (2019 경북대학교 모의논술)

(가) 모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$와 상수 a에 대하여

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

가 성립한다.

(나) 미분가능한 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x)$$

이다.

닫힌구간 $[0,1]$에서 정의된 함수 $h(x) = -2x^3+3x^2$에 대하여, 함수 $h(x)$의 역함수를 $h^{-1}(u)$라 하자. 열린구간 $(0,1)$에서 함수 $f(x)$를

$$f(x) = \int_0^1 |x - h^{-1}(u)|du$$

와 같이 정의할 때, 다음 물음에 답하시오.

[1] $f\left(\frac{1}{2}\right)$을 구하시오.

[2] 역함수 $h^{-1}(u)$의 한 부정적분을 $F(u) = \int h^{-1}(u)du$라 할 때, 등식

$$f(x)+2F(h(x)) = axh(x)+bx+c$$

가 성립하는 실수 a, b, c에 대하여 $2a+b$의 값을 구하시오.

[3] $f'(x_0) = -\frac{13}{27}$일 때, 실수 x_0의 값을 구하시오.

14번 문항 (2019 경북대학교 논술기출)

[1] $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^9\theta \sin\theta \, d\theta$ 의 값을 구하시오.

[2] 임의의 실수 t에 대하여 함수 $h(t)$를

$$h(t)=\frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(\cos t\cos\theta+\sin t\sin\theta)^9(\cos\theta+\sin\theta)d\theta}{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos^6\theta\, d\theta}$$

라 하자. $h(t)=\dfrac{21}{80}$ 을 만족하는 실수 t에 대하여 $\cos t\sin t$의 값을 구하시오.

15번 문항 (2019 한양대학교 논술기출)

미분가능한 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다음 조건을 만족한다.

(ⅰ) $f(0)=3$, $f(\pi)=5$

(ⅱ) $0 \le x \le \pi$ 인 실수 x에 대하여 $g(x) \neq 0$ 이다.

(ⅲ) $f'(x)$와 $g'(x)$는 연속함수이다.

(ⅳ) $0 \le x \le \pi$ 인 실수 x에 대하여 $\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^4 = 4$ 이다.

적분값 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{3f(x)g'(x)-f'(x)g(x)}{\{f(x)\}^2 g(x)}dx$ 를 구하시오.

16번 문항 (2017 서울과학기술대학교 논술기출)

[1] 다음 정적분을 구하시오.

$$\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx$$

[2] 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\sum_{k=1}^{2017}\frac{8068}{2017^2+k^2}<\pi$$

[3] 실수 전체에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 성질을 만족한다.

(1) $f'(x)$는 연속함수이다.

(2) $f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

이 때, 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$\int_{0}^{\pi}\frac{xf'(x)}{1+\{f(x)\}^2}dx=\int_{0}^{\pi}\frac{(\pi-t)f'(t)}{1+\{f(t)\}^2}dt$$

[4] 위의 [3]의 조건을 만족하는 함수 $f(x)$가 $f(0)=-1$, $f(\pi)=1$인 증가함수 일 때, 다음 정적분을 구하시오.

$$\int_{0}^{\pi}\frac{xf'(x)}{1+\{f(x)\}^2}dx$$

17번 문항 (2022 광운대학교 논술기출)

함수 $f(x)$가 $0 \le x \le \pi$에서 정의된 연속함수일 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후에, x축의 방향으로 π만큼 평행이동한 그래프를 $y=g(x)$의 그래프라고 할 때, $\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi g(x)dx$임을 증명하시오.

(2) 정적분 $\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$의 값을 구하시오.

(3) 위의 결과를 이용하여 정적분 $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$의 값을 구하시오.

18번 문항 (2022 항공대학교 논술기출)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x^{2022})}{1+2022^x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x^{2022})dx$$

임을 보이시오.

19번 문항 (2023 광운대학교 논술기출)

모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$와 $h(x)$가 아래 조건을 만족할 때, 다음 물음에 답하시오.

(ⅰ) $f(x) = g(x) + h(x)$	(ⅱ) $g(-x) = g(x)$, $h(-x) = -h(x)$

(1) 함수 $g(x)$와 $h(x)$를 $f(x)$와 $f(-x)$를 이용하여 나타내고, 위 조건이 만족됨을 보이시오.

(2) (1)을 이용하여 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{(x+p)^2+1}\,dx = 0$이면 $p = 0$임을 보이시오. (단, p는 실수)

[2] 다음 물음에 답하시오.

(1) 모든 실수에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 아래 등식이 성립함을 보이시오. (단, a는 실수)

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$

(2) 정적분 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2023}x}{\sin^{2023}x + \cos^{2023}x}\,dx$를 구하시오.

20번 문항 (2022 시립대학교 논술기출)

다음 정적분의 값을 구하여라.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|3\sqrt{2}\sin^3 x - \cos x\right| dx$$

21번 문항 (2022 이화여자대학교 논술기출)

실수 A, B, C, D가 다음과 같이 주어질 때, 아래 물음에 답하시오.

$$A=\int_0^1 x^{2021}(1-x)^{2021}\,dx\,,\quad B=\int_0^1 x^{2022}(1-x)^{2022}\,dx$$
$$C=\int_0^1 x^{2022}(1-x)^{2021}\,dx\,,\quad D=\int_0^1 x^{2023}(1-x)^{2021}\,dx$$

(1) $B+D=C$임을 보이시오.

(2) $B=\dfrac{2022}{2023}D$임을 보이시오.

(3) $A-B-C=D$임을 보이고, $B=\dfrac{1011}{1045}A$임을 보이시오.

22번 문항 (2022 중앙대학교 모의논술)

다음 정적분의 값을 구하시오.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{(1-\sin x)^2}{\cos^3 x} dx$$

23번 문항 (2023 시립대학교 모의논술)

실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $\{f(1)\}^2+\{g(1)\}^2$ 의 값을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_0^x e^t f(t)dt=\frac{e^x\{f(x)-g(x)\}+1}{2}$

(2) $\displaystyle\int_0^x e^t g(t)dt=\frac{e^x\{f(x)+g(x)\}-1}{2}$

24번 문항 (2017 이화여자대학교 모의논술)

정수 $n \geq 0$에 대하여 아래와 같이 표현된 수열 $\{I_n\}$이 있다.

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

다음 물음에 답하시오.

(1) 정수 $n \geq 0$에 대하여 $I_{n+1} \leq I_n$이 성립함을 보이시오.

(2) 자연수 $n \geq 2$에 대하여 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$가 성립함을 보이시오.

(3) 자연수 n에 대하여 $\frac{2n}{2n+1} = \frac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1$이 성립함을 보이시오.

(4) 극한값 $\lim_{n \to \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$을 구하시오.

(5) 극한값 $\lim_{n \to \infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$을 구하시오.

25번 문항 (2016 중앙대학교 논술기출)

함수 $f(x)=(4x+p)\sin 2x$ (p는 실수)가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x \{f(t)\}^2 dt + \int_0^{-x} \{f(t)\}^2 dt = 0$$

을 만족시킬 때, p의 값과 $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \{f(x)\}^2 dx$ 를 계산하는 과정을 논리적으로 제시하시오.

26번 문항 (2020 중앙대학교 논술기출)

모든 자연수 k에 대하여 다음을 만족시키는 함수 $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$를 구하시오.

$$\int_0^{\pi}\left(k^2p(x)+4\right)\sin kx\,dx=0$$

27번 문항 (2020 중앙대학교 논술기출)

좌표평면 위의 점 $(t, 0)$과 곡선 $y=e^x$ 사이의 거리를 $l(t)$라 할 때, $\int_1^{1+e^2} \{l(t)\}^2 dt$를 구하시오.

28번 문항 (2017 중앙대학교 논술기출)

$F(x)=2x+\int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt$ 에 대하여 $\int_0^{2+\alpha} F^{-1}(x)\,dx$ 를 구하시오. (단, $\alpha=\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt$ 이다.)

29번 문항 (2019 한양대학교 논술기출)

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

<가> $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

예를 들어, $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)$이고 $\sin 2x=2\sin x\cos x$이다.

<나> $f(x)=\dfrac{x^2}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$ $(0\le x\le a)$ (단, $a>0$)

[1] 함수 $f(x)$가 일대일 함수임을 보이시오.

[2] $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(a\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(a\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(a\sin x)\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a\sin x)\,dx$ 임을 보이시오.

[3] 정적분 $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(a\sin x)\,dx$의 값을 구하시오.

30번 문항 (2021 중앙대학교 논술기출)

두 곡선 $y=x^4$과 $y=\dfrac{2}{x^2+1}$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

31번 문항 (2021 중앙대학교 논술기출)

닫힌구간 $[0, 20]$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음을 만족한다.

$$f(20-x)=\sqrt{-x^2+20x-2\{f(x)\}^2}$$

이 때, $\int_0^{10} xf(x)dx$ 의 값을 구하시오.

32번 문항 (2021 중앙대학교 논술기출)

함수 $F(x)=\int_0^x \sin^2 t\,dt$ 에 대하여 $\int_0^{\pi}(2x-\sin(2x))e^{F(x)}\sin^2 x\,dx$ 의 값을 구하시오.

(단, $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$)

33번 문항 (2021 중앙대학교 논술기출)

$\int_{-1}^{1}\dfrac{1+2e^{-x}}{1+e^x+e^{-x}}\,dx$ 의 값을 구하시오.

34번 문항 (2021 한양대학교 논술기출)

수열 $\{b_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여

$$b_n = \int_0^1 e^{-(n+2)x}(1+e^x)^n\,dx$$

을 만족시킨다. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}b_n$ 의 값을 구하시오.

35번 문항 (2020 서강대학교 논술기출)

$\int_0^1 2x^4\sqrt{1-x^4}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (1-x^4)^{\frac{3}{2}}dx$ 임을 보이시오.

36번 문항 (2021 서강대학교 논술기출)

$p'(0) = 5$ 를 만족하는 다항함수 $p(x)$ 에 대하여

$$\int_0^{\pi} \{p(x) + p''(x)\}\cos x\, dx = 3$$

이 성립할 때, $p'(\pi)$ 가 가질 수 있는 모든 값을 구하시오.

37번 문항 (2023 중앙대학교 논술기출)

주기가 2π 인 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x)+2f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=15\,\frac{|\sin x|}{2+\cos x}$$

를 만족시킬 때, $\int_0^{\pi} f(x)dx$ 의 값을 구하시오.

38번 문항 (2023 중앙대학교 논술기출)

다음 정적분의 값을 구하시오.

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{|x|}{1-\sin x}\,dx$$

39번 문항 (2020 한양대학교 모의논술)

자연수 n 에 대하여 $\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (-1)^k \int_{-1}^{2} x^k (1-x)^{n-k} dx$ 을 구하시오.

(단, ${}_nC_k$ 는 n 개에서 k개를 동시에 택하는 서로 다른 조합의 모든 가짓수이다.)

40번 문항

(가) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고 $f'(x)$, $g'(x)$가 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

이다.

(나) 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하고 미분가능할 때, $y=f^{-1}(x)$의 도함수는

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} \qquad (\text{단, } f'(y) \neq 0)$$

이다.

(다) 삼각함수의 덧셈정리

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}, \quad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

함수 $f(x)=(ax^2+bx)e^x$에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 정의된 함수

$$g(x) = \int_0^x \{f(t)-f^{-1}(t)\}dt$$

는 $x=1$에서 극솟값 $-\frac{1}{3}$을 갖는다. (단, a, b는 양수이고, $f^{-1}(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.)

[1] $\frac{b}{a}$의 값을 구하시오.

[2] 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선을 l_1, 곡선 $y=f^{-1}(x)$ 위의 점 $(1, f^{-1}(1))$에서의 접선을 l_2라 하자. 직선 l_1과 직선 l_2가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값을 구하시오.

[3] $f(\alpha)-g(\alpha)=4$를 만족시키는 양의 실수 α에 대하여 $2\alpha e^{\alpha-1}+3\int_1^\alpha f^{-1}(x)dx$의 값을 구하시오.

41번 문항 (2020 경북대학교 논술기출)

함수 $f(x)=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+c\sin 2x$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단, c는 상수이다.)
$c=0$ 일 때,

닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 에서 함수 $f(x)$는 연속인 역함수 f^{-1}를 갖는다. 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 함수

$$g(x)=\int_0^x \left(1-f^{-1}(s)\right)ds$$

의 최댓값을 M이라 하자.

(1). M의 값을 구하시오.

(2). 자연수 n에 대하여, x에 대한 방정식 $g(x)=\frac{M}{n}$ 의 근을 d_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} nd_n=\frac{bM}{a+\pi}$ 이다.
자연수 a, b의 값을 각각 구하시오.

42번 문항 (2019 부산대학교 논술기출)

(가) 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 미분가능하면 $f'(x)$의 도함수

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

를 함수 $f(x)$의 이계도함수라고 하며, 이것을 $f''(x)$로 나타낸다.

(나) 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt$$

이고, 이를 이용하면

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|+C \quad (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

가 성립한다.

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\int_0^x \sqrt{\{f(t)\}^2+1}\,dt$$

를 만족할 때, 다음 물음에 답하시오.

[1] $f(x)$와 $f''(x)$의 관계식을 구하고, $f(x)$를 구하시오.

[2] $\displaystyle\int_0^1 \left\{\frac{f(x)}{f'(x)}\right\}^2 dx$를 구하시오.

43번 문항 (2023 한양대학교 모의논술)

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

평면 위의 삼각형 ABC의 세 변의 길이의 비가 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=2:1:2$이다.

삼각형 ABC의 각 A의 크기를 θ라고 하자.

함수 $f(x)=\left(x-\frac{7}{8}\right)^3+\frac{1}{\theta}$에 대하여 다음 정적분의 값을 구하시오.

$$\int_0^{\theta} x\sin x\, f'(\cos x)\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$$

44번 문항 (2023 한양대학교 모의논술)

함수 $f(x)$(단, $x>0$)가 세 조건

(ⅰ) $f''(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, (ⅱ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{\sqrt{3}}} f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, (ⅲ) $\lim\limits_{x\to\pi} f'(x)=1$

을 만족시킬 때, 극한값 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{\sqrt{3}}}\displaystyle\int_x^{\sqrt{3}} f'(t)\,dt$을 구하시오.

(단, $\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}=0.97$, $\cos\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}=-0.24$, $\sin(\sqrt{3}\pi)=-0.75$, $\cos(\sqrt{3}\pi)=0.67$이다.)

45번 문항 (2019 시립대학교 논술기출)

다음을 계산하시오.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin x}-\sin x\right)dx$$

46번 문항 (2023 한양대학교 논술기출)

함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(1) $g(0)=0$

(2) $e^{-x}\int_0^x g'(t)dt = \int_0^x e^{-t}g'(t)dt - x\sin(2\pi x)$

제시문 <나>에서 주어진 함수 $g(x)$에 대하여, $\int_0^{2023} g(x)dx < 4046\pi e^{2023}$이 성립함을 보이시오.

47번 문항 (2022 서강대 모의논술)

적당한 다항함수 $g(x)$에 대하여 $f(x)=g(x)\left(\sin^2 x+2\sin x\right)$로 표현되며 $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=-3$을

만족하는 임의의 함수 $f(x)$에 대하여 정적분 $\int_0^{2\pi} x(2\pi-x)f''(x)\,dx$의 값을 구하시오.

48번 문항 (2023 가톨릭대 의대 논술기출)

(ㄱ) 함수 $f(t)$를 다음과 같이 정의한다.

$$f(t)=\int_0^t\left\{\frac{1}{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}-\frac{x^4}{(1+x^4)^{\frac{5}{4}}}\right\}dx$$

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(t)$에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$는 다음과 같다.

$$v(t)=3t^2\{f(t)+1\}$$

(ㄷ) 제시문 (ㄴ)의 점 P에 대하여 s는 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리이다.

제시문 (ㄷ)의 s에 대하여 s^4의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

1번 문항 해설

조건 (가)에서 주어진 식을 $(1+\sin x)^2$로 나누고 이차방정식을 풀어서 정리하면 $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}f(x)=1\pm sinx$이고 조건 (나)를 만족시키는 연속함수는 다음과 같다.

$\cos x f(x)=(1+\sin x)^2$ - $(*)$

$f'(x)\cos x-f(x)\sin x=(f(x)\cos x)'$을 고려하고 $(*)$을 쓰면

$(f(x)\cos x)'=\left((1+\sin x)^2\right)'=2(1+\sin x)\cos x$이므로

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\{f'(x)\cos x-f(x)\sin x\}e^{\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}2(1+\sin x)\cos x\, e^{\sin x}dx$이고 $\sin x=t$로 치환하면 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}2(1+t)e^t dt$이 되고 부분적분을 이용하여 값을 구하면 $\sqrt{e}$가 된다.

(별해 1)

조건 (가)에서 주어진 식을 $f(x)$에 대한 이차방정식으로 보고 풀어서 정리하면 $f(x)=\dfrac{(1+\sin x)(1\pm sinx)}{\cos x}$이다.

조건 (나)를 만족시키는 연속함수는 다음과 같다.

$\cos x f(x)=(1+\sin x)^2$ - $(*)$

$f'(x)\cos x-f(x)\sin x=(f(x)\cos x)'$을 고려하여 부분적분하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\{f'(x)\cos x-f(x)\sin x\}e^{\sin x}dx=\left[f(x)\cos x\, e^{\sin x}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}-\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(x)\cos^2 x\, e^{\sin x}dx$$

을 얻고 방정식 $(*)$을 이용하면

$$\left[(1+\sin x)^2e^{\sin x}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}-\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(x)\cos^2 x\, e^{\sin x}dx=\left(\frac{9}{4}\sqrt{e}-1\right)-\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\sin x)^2e^{\sin x}\cos x\,dx$$

이다. 여기서 $1+\sin x=t$로 치환하여 적분하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\sin x)^2e^{\sin x}\cos x\,dx=\int_1^{\frac{3}{2}}t^2e^{t-1}dt=\frac{5}{4}e^{\frac{1}{2}}-1$$

이다. 따라서 답은 $\sqrt{e}$이다.

(별해2)

조건 ㈎를 정리하면 이차방정식

$(f(x))^2(1-\sin x)-2f(x)\cos x+(1+\sin x)\cos^2 x=0$를 얻고, 이 방정식은 $(f(x)-\cos x)((1-\sin x)f(x)-(1+\sin x)\cos x)=0$으로 인수분해된다.

조건 ㈏에서 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 이므로 $f(x)=\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\cos x$ 이고, $f(0)=1$ 이다.

$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\{f'(x)\cos x-f(x)\sin x\}e^{\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\{\cos x f(x)\}'e^{\sin x}dx$ 이 고 ,

$\cos x f(x)=(1+\sin x)^2$ 이다. $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\{\cos x f(x)\}'e^{\sin x}dx$ 에서 $\sin x=t$ 로 치환하여 정리하면 다음 식을 얻는다.

$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\{\cos x f(x)\}'e^{\sin x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}2(1+t)e^t dt$ 이고, 부분적분을 이용하여 적분하면,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}}2(1+t)e^t dt &= 2\left\{\Big[(1+t)e^t\Big]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}e^t dt\right\}\\ &= 2\left\{\frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}-1-\Big[e^t\Big]_0^{\frac{1}{2}}\right\}\\ &= e^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

2번 문항 해설

삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 식을 정리하면,

$\int_0^x f(t)\sin(x-t)dt = \int_0^x f(t)(\sin x\cos t - \cos x\sin t)dt$ 이다.

$\int_0^x f(t)(\sin x\cos t - \cos x\sin t)dt = \sin x\int_0^x f(t)\cos t dt - \cos x\int_0^x f(t)\sin t dt = \ln(1+x^2)$

– ①의 양변을 x에 대하여 미분하면 다음 식을 얻는다.

$$\cos x\int_0^x f(t)\cos t dt + \sin x\int_0^x f(t)\sin t dt = \frac{2x}{1+x^2} \quad – ②$$

②× $\cos x$: $\cos^2 x\int_0^x f(t)\cos t dt + \cos x\sin x\int_0^x f(t)\sin t dt = \frac{2x}{1+x^2}\cos x$ – ③

①× $\sin x$: $\sin^2 x\int_0^x f(t)\cos t dt - \sin x\cos x\int_0^x f(t)\sin t dt = \ln(1+x^2) \times \sin x$ – ④

③과 ④를 더하면, $\int_0^x f(t)\cos t dt = \ln(1+x^2)\sin x + \frac{2x}{1+x^2}\cos x$ 를 얻는다.

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하여 정리하면, $f(x) = \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' + \ln(1+x^2)$

따라서, $\int_0^2 xf(x)dx = \int_0^2 \left\{x\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' + x\ln(1+x^2)\right\}dx$ 를 부분적분과 치환적분을 이용하여 값을 구하면 $\frac{3}{2}\ln 5 - \frac{2}{5}$ 이다.

3번 문항 해설

적분구간을 나누어 I_n을 표현해 보면,

$I_n=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\{|\sin x|\cos^2 x+\sin^5(2x)\cos x\}dx$ 이다.

$u=x-k\pi$로 치환하면

$$\begin{aligned}&\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\{|\sin x|\cos^2 x+\sin^5(2x)\cos x\}dx\\&=\int_0^{\pi}\{|\sin(u+k\pi)|\cos^2(u+k\pi)+\sin^5(2(u+k\pi))\cos(u+k\pi)\}du\\&=\int_0^{\pi}\{\sin u\cos^2 u+\sin^5(2u)(-1)^k\cos u\}du\end{aligned}$$

$t=\cos u$로 치환하면, $\int_0^{\pi}\sin u\cos^2 u\,du=\frac{2}{3}$ 이므로

$\frac{I_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{2}{3}+(-1)^k\int_0^{\pi}\sin^5(2u)\cos u\,du\right\}=\frac{2}{3}+\frac{1}{n}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\right\}\int_0^{\pi}\sin^5(2u)\cos u\,du$ 이다.

$0\le\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\le\frac{1}{n}$ (여기서 $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k$는 0 또는 1임을 이용하였다)이기 때문에

$\lim_{n\to\infty}\frac{I_n}{n}=\frac{2}{3}$ 이다.

4번 문항 해설

문제에 주어진 식 $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$과 부분적분을 이용하면

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}(2x-\sin(2x))e^{F(x)}\sin^2 x\,dx &= \left[(2x-\sin 2x)e^{F(x)}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(2-2\cos 2x)e^{F(x)}dx \\ &= 2\pi e^{F(\pi)} - \int_0^{\pi} e^{F(x)} 4\sin^2 x\,dx \\ &= 2\pi e^{F(\pi)} - \left[4e^{F(x)}\right]_0^{\pi} \\ &= 2\pi e^{F(\pi)} - 4e^{F(\pi)} + 4\end{aligned}$$

이다.

$$F(\pi) = \int_0^{\pi}\sin^2 x dx = \int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

이므로 $\displaystyle\int_0^{\pi}(2x-\sin(2x))e^{F(x)}\sin^2 x\,dx = 2\pi e^{F(\pi)} - 4e^{F(\pi)} + 4$

$$= (2\pi - 4)e^{\frac{\pi}{2}} + 4$$

이다.

5번 문항 해설

[1]

주어진 함수는 원점에 대칭인 함수이므로 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서의 정적분의 값은 0이다.

[2]

$2xf(x)-\cos2x = 4x^2\cos2x - 2x\sin x - \cos2x \quad \cdots \quad (1)$

$2x\{2xf(x)-\cos2x\} = 8x^3\cos2x - 4x^2\sin x - 4x\cos2x + \sin x \quad \cdots \quad (2)$

(1)의 함수는 y축에 대칭인 함수, (2)의 함수는 원점에 대칭인 함수임을 쉽게 알 수 있다.

그러므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{2xf(x)-\cos2x\}dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [2x\{2xf(x)-\cos2x\}-f(x)]dx$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \{2xf(x)-\cos2x\}dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \{4x^2\cos2x - 2x\sin x - \cos2x\}dx$$

이다. 한편,

$$2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 4x^2\cos2x\,dx = 2\left[2x^2\sin2x + 2x\cos2x - \sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -2\pi,$$

$$-2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin x\,dx = [4x\cos x - 4\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -4,$$

$$-2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos2x\,dx = 0$$

이므로 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{2xf(x)-\cos2x\}dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [2x\{2xf(x)-\cos2x\}-f(x)]dx = -2\pi+4$ 이다.

6번 문항 해설

정답 : (1) 해설참조 (2) π

(1) 구간 $[x-2\pi,\ x]$에 속하는 상수 c에 대하여

$$h(x)=\int_{x-2\pi}^{x} g(t)dt=\int_{c}^{x} g(t)dt+\int_{x-2\pi}^{c} g(t)dt$$

$$=\int_{c}^{x} g(t)dt-\int_{c}^{x-2\pi} g(t)dt$$이다. 이 등식의

양변을 x에 대하여 미분하면

$h'(x)=g(x)-g(x-2\pi)=0$이다.

따라서 함수 $h(x)$는 상수함수이다.

(2) 정적분 $\int_0^{2\pi} f'(x-t)\cos t\,dt$에서 $x-t=u$로

놓으면 $(-1)\dfrac{dt}{du}=1$이고,

$t=0$일 때, $u=x$, $t=2\pi$일 때, $u=x-2\pi$이므로

$$\int_0^{2\pi} f'(x-t)\cos t\,dt=-\int_x^{x-2\pi} f'(u)\cos(x-u)du$$

$$=\int_{x-2\pi}^{x} f'(u)(\cos x\cos u+\sin x\sin u)dy$$

$$=\int_0^{2\pi} f'(u)(\cos x\cos u+\sin x\sin u)du$$

$$=\cos x\int_0^{2\pi} f'(u)\cos u\,du+\sin x\int_0^{2\pi} f'(u)\sin u\,du$$

이다. 이때, 정적분

$\int_0^{2\pi} f'(u)\cos u\,du$, $\int_0^{2\pi} f'(u)\sin u\,du$는 상수이므로

각각 $A=\int_0^{2\pi} f'(u)\cos u\,du$, $B=\int_0^{2\pi} f'(u)\sin u\,du$라 두자. 그러면 조건 (ㄴ)으로부터 등식

$f(x)=(A\cos x+B\sin x)^2-\cos x+\alpha$를 얻을 수

있고, 이 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(A\cos x+B\sin x)(-A\sin x+B\cos x)+\sin x$

$=-2AB\sin^2 x+2(B^2-A^2)\sin x\cos x+2AB\cos^2 x+\sin x$

이 성립한다. 따라서 $B=\int_0^{2\pi} f'(t)\sin t\,dt$

$$=\int_0^{2\pi}\{-2AB\sin^3 t+2(B^2-A^2)\sin^2 t\cos t+2AB\sin t\cos^2 t+\sin^2 t\}dt$$

$$=-2AB\int_0^{2\pi}\sin^3 t\,dt+2(B^2-A^2)\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos t\,dt+2AB\int_0^{2\pi}\sin t\cos^2 t\,dt+\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt$$

치환적분법을 이용하면

$\int_0^{2\pi} \sin^3 t\, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos t\, dt = \int_0^{2\pi} \sin t \cos^2 t\, dt = 0$이다. 따라서

$B = \int_0^{2\pi} f'(t) \sin t\, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = \pi$

7번 문항 해설

$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)$ $(x>2)$를 미분하면

$$f'(x)=\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}}{x+\sqrt{x^2-4}}=\frac{\sqrt{x^2-4}+x}{(x+\sqrt{x^2-4})\sqrt{x^2-4}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$$

이다. 한편

$$\begin{aligned} I&=\int\sqrt{x^2-4}\,dx\\ &=\int(1\times\sqrt{x^2-4})dx=x\sqrt{x^2-4}-\int x\frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}dx\\ &=x\sqrt{x^2-4}-\int\frac{x^2-4+4}{\sqrt{x^2-4}}dx\\ &=x\sqrt{x^2-4}-I-\int\frac{4}{\sqrt{x^2-4}}dx \end{aligned}$$

이다. $\displaystyle\int\frac{4}{\sqrt{x^2-4}}dx$에서 $x=2\sec\theta$로 치환하면 $dx=2\sec\theta tan\theta\ d\theta$이므로

$$\begin{aligned} \int\frac{4}{\sqrt{x^2-4}}dx\ &=\ \int\frac{4}{2\sqrt{\sec^2\theta-1}}\times2\sec\theta tan\theta\ d\theta\\ &=4\int\sec\theta\ d\theta\\ &=4\int\frac{\sec\theta(\sec\theta+\tan\theta)}{\sec\theta+\tan\theta}d\theta\\ &=4\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C_1\ \ (\text{단, } C_1\text{은 적분 상수})\\ &=4\ln\left|\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right|+C_1 \end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$I=x\sqrt{x^2-4}-I-4\ln|x+\sqrt{x^2-4}|+C'\ \ (\text{단, } C'\text{는 적분 상수})$$

$$\therefore\ I=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-4}-4\ln|x+\sqrt{x^2-4}|)+C\ \ (\text{단, } C\text{는 적분 상수})$$

이다.

8번 문항 해설

정답 : $\dfrac{1}{2(e^{\pi}+1)}$

$s=\ln t$로 치환하면

$g(x)=\displaystyle\int_1^x \sin(\ln t)dt=\int_0^{\ln x}\sin s\cdot e^s ds$가 되고,

부분적분법을 이용하면

$\displaystyle\int_0^{\ln x} e^s \sin s\, ds=\left[-e^s\cos s\right]_0^{\ln x}-\int_0^{\ln x}(-e^s\cos s)ds=\left[-e^s\cos\right]_0^{\ln x}+\int_0^{\ln x}e^s\cos s\, ds$가 되며,

부분적분법을 한번 더 이용하면

$\displaystyle\int_0^{\ln x} e^s\sin s\, ds=\left[-e^s\cos s\right]_0^{\ln x}+\left[e^s\sin s\right]_0^{\ln x}-\int_0^{\ln x}e^s\sin s\, ds$가 되어

$\displaystyle\int_0^{\ln x} e^s\sin s\, ds=\frac{1}{2}\left[e^s\sin s-e^s\cos s\right]_0^{\ln x}\equiv\frac{x}{2}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+\frac{1}{2}$ 임을 알 수 있다.ㄴ

한편, $g(x)$가 극값을 가지는 점들은 $g'(x)=\sin(\ln x)=0$인 점들이므로

$\ln x=n\pi$ (단, n은 정수)이고,

문제의 조건 $0<x<1$으로부터 $g(x)$는 $x=e^{-n\pi}$ (단, n은 자연수)에서 극값을 가짐을 알 수 있다.

이때, $g(e^{-n\pi})=\dfrac{e^{-n\pi}}{2}(\sin(-n\pi)-\cos(-n\pi))+\dfrac{1}{2}=-e^{-n\pi}\cdot(-1)^n+\dfrac{1}{2}$이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(g(a_n)-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-e^{-\pi})^n=-\frac{1}{2}\frac{-e^{-\pi}}{1+e^{-\pi}}=\frac{1}{2(e^{\pi}+1)}$이다.

9번 문항 해설

[1] 제시문 (나)의 (4)에 의해

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx = \frac{1}{2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)(\sin x - \cos x)dx$$

그런데 $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)dx$$

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx$$

[2] 정적분의 성질에 의하여

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx$$

이다. 우변의 첫 번째 정적분에서는 $\frac{\pi}{4} - x = y$로 치환하고, 두 번째 정적분에서는 $x - \frac{\pi}{4} = y$로 치환하여 계산하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} f\left(\frac{\pi}{4} - y\right)\sin(-y)(-dy) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{\pi}{4} + y\right)\sin y\, dy$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{\pi}{4} - y\right)\sin y\, dy + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{\pi}{4} + y\right)\sin y\, dy$$

이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{f\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - f\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right\}\sin x\, dx$$

이다. 따라서 $\boxed{A} = \frac{\pi}{4} + x$, $\boxed{B} = \frac{\pi}{4} - x$ 이다.

[3] 문항 [1]과 [2]의 결과에 의하여

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{f\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - f\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right\}\sin x\, dx$$

이다. 평균값 정리에 의하여 $f\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2xf'(c)$

를 만족하는 $c \in \left(\frac{\pi}{4}-x,\ \frac{\pi}{4}+x\right) \subset \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$가 적어도 하나 존재한다. 또 제시문 (나)의 (3)에 의하여 $m \le f'(c) \le M$이다. 따라서 제시문 (가)에 의하여

$$\sqrt{2}\, m \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x\, dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x\, dx \le \sqrt{2}\, M \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x\, dx$$

이제 부분적분법을 이용하여 계산하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x\, dx = \left[-x \cos x + \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

위의 식을 이용하여 최종적인 결과를 얻는다.

$$\left(1-\frac{\pi}{4}\right) m \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x\, dx \le \left(1-\frac{\pi}{4}\right) M$$

10번 문항 해설

정적분의 성질에 의하여 다음이 성립한다.

$$\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^{2a} f(x)dx$$

위의 식에서 우변의 두 번째 식에서 $x-a=y$로 치환하면

$$\int_a^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(y+a)dy = \int_0^a f(x+a)dx$$

이다. 따라서 다음이 성립하다.

$$\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^{2a} f(x)dx = \int_0^a (f(x)+f(x+a))dx$$

이다. 따라서 $\boxed{A} = f(x+a)$이다.($\boxed{A} = f(2x-a)$도 가능하다.)

위의 등식에 의해

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{1+2020^{\sin x}}dx = \int_0^{\pi}\left(\frac{\cos^2 x}{1+2020^{\sin x}} + \frac{\cos^2(x+\pi)}{1+2020^{\sin(x+\pi)}}\right)dx$$

$$= \int_0^{\pi}\left(\frac{\cos^2 x}{1+2020^{\sin x}} + \frac{\cos^2 x}{1+2020^{-\sin x}}\right)dx$$

그런데 $\dfrac{1}{1+2020^{\sin x}} + \dfrac{1}{1+2020^{-\sin x}} = 1$이므로

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{1+2020^{\sin x}}dx = \int_0^{\pi}\left(\frac{\cos^2 x}{1+2020^{\sin x}} + \frac{\cos^2 x}{1+2020^{-\sin x}}\right)dx$$

$$= \int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2}$$

plus 해설

(1) $a-x=t$로 치환하면 $\int_0^a f(a-x)dx = \int_a^0 f(t)(-dt) = \int_0^a f(t)dt$,

$$\therefore \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$

(2) $f(x) = \dfrac{\cos^{2023}x}{\sin^{2023}x+\cos^{2023}x}$라 하면 $f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \dfrac{\sin^{2023}x}{\cos^{2023}x+\sin^{2023}x}$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2023}x}{\sin^{2023}x+\cos^{2023}x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2023}x}{\cos^{2023}x+\sin^{2023}x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{4}$$

11번 문항 해설

정답 : $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}$

주어진 적분식에 치환적분 $(x=\pi-t)$을 이용하면

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} f(\pi-t)dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (f(x)+f(\pi-x))dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(e^{\frac{\pi}{2}-x}+e^{x-\frac{\pi}{2}}\right)\sin x\,dx \ \cdots \ (*)$$ 을 얻는다.

$\frac{\pi}{2}-x=t$라 두면 적분식 $(*)$는 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(e^t+t^{-t})\cos t\,dt$가 된다.

제시문 (가)의 부분적분 공식의 보기와 유사한

방법을 적용해서 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(e^t+e^{-t})\cos t\,dt = \left[(e^t-e^{-t})\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}}(e^t-e^{-t})\sin t\,dt$

$$= \left[(e^t-e^{-t})\cos t+(e^t+e^{-t})\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}(e^t+e^{-t})\cos t\,dt$$

$$= \left[(e^t-e^{-t})\cos t+(e^t+e^{-t})\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - I$$

그러므로, $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(e^t+e^{-t})\cos t\,dt = \frac{1}{2}\times\left[(e^t-e^{-t})\cos t+(e^t+e^{-t})\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}$

12번 문항 해설

[1]

조건 $\int_{\pi}^{2\pi} g(x)\,dx = -6$으로부터,

$\int_{\pi}^{2\pi} g(x)\,dx = \int_{\pi}^{2\pi} \left(2a_1\cos(x-\pi)+(b_1-1)\sin(x-\pi)\right)dx = 2(b_1-1) = -6$을 얻게 된다.

따라서 $b_1 = -2$ 이다.

[2]

양의 정수 n에 대하여 닫힌 구간 $[n\pi, (n+1)\pi]$에서

$$g(x) = 2^n a_n\cos(x-n\pi)+\left(b_n+(-1)^n\right)\sin(x-n\pi)$$

이므로,

$$g'(x) = -2^n a_n\sin(x-n\pi)+\left(b_n+(-1)^n\right)\cos(x-n\pi)$$

을 얻는다. 따라서 $g'(n\pi) = b_n+(-1)^n$ 임을 알 수 있다.

한편, 2 이상인 정수 n에 대하여 닫힌 구간 $[(n-1)\pi, n\pi]$에서

$$g(x) = 2^{n-1}a_{n-1}\cos(x-(n-1)\pi)+\left(b_{n-1}+(-1)^{n-1}\right)\sin(x-(n-1)\pi)$$

이고, $g'(x) = -2^{n-1}a_{n-1}\sin(x-(n-1)\pi)+\left(b_{n-1}+(-1)^{n-1}\right)\cos(x-(n-1)\pi)$이 되어,

$g'(n\pi) = -\left(b_{n-1}+(-1)^{n-1}\right)$이 됨을 알 수 있다.

따라서, $b_n+(-1)^n = -\left(b_{n-1}+(-1)^{n-1}\right)$이 되고, $b_n = -b_{n-1}$이다. $b_1 = -2$로부터

$b_n = 2(-1)^n$ 임을 알 수 있다.

이제 정적분 $\int_{\pi}^{100\pi} g(x)\,dx$의 값은

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{100\pi} g(x)\,dx &= \sum_{n=1}^{99}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} g(x)\,dx \\ &= \sum_{n=1}^{99}\left[2^n a_n\sin(x-n\pi)-\left(b_n+(-1)^n\right)\cos(x-n\pi)\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} \\ &= \sum_{n=1}^{99} 2\left(b_n+(-1)^n\right) \\ &= 6\sum_{n=1}^{99}(-1)^n = -6\end{aligned}$$

[3]

닫힌 구간 $[n\pi, (n+1)\pi]$에서 $g(x) = 2^n a_n\cos(x-n\pi)+\left(b_n+(-1)^n\right)\sin(x-n\pi)$이고,

닫힌 구간 $[(n-1)\pi, n\pi]$에서

$g(x) = 2^{n-1}a_{n-1}\cos(x-(n-1)\pi)+\left(b_{n-1}+(-1)^{n-1}\right)\sin(x-(n-1)\pi)$이므로

$g(n\pi)=2^n a_n = -2^{n-1}a_{n-1}$ 이 된다. 따라서 $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)a_{n-1}$ 이 성립한다.

반면, 조건 $\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{2}} g(x)\,dx = -2$ 로부터 $\int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} g(x)\,dx = 4$ 를 얻게 되고

닫힌구간 $[2\pi, 3\pi]$ 에서 $g(x) = 2^2 a_2 \cos(x-2\pi)+(b_2+1)\sin(x-2\pi)$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} g(x)\,dx &= \int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} \left(4a_2\cos(x-2\pi)+(b_2+1)\sin(x-2\pi)\right)dx \\ &= \left[4a_2\sin(x-2\pi)-3\cos(x-2\pi)\right]_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} \\ &= 4a_2+3\end{aligned}$$

이 되어, $a_2 = \frac{1}{4}$ 가 된다. 이로부터 $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ 을 얻게 된다.

정적분 $\int_{\pi}^{\frac{199\pi}{2}} g(x)\,dx$ 의 값은 $\int_{\pi}^{100\pi} g(x)\,dx - \int_{\frac{199\pi}{2}}^{100\pi} g(x)\,dx$ 이다.

여기서 $\int_{\pi}^{100\pi} g(x)\,dx = -6$ 이고

$$\begin{aligned}\int_{\frac{199\pi}{2}}^{100\pi} g(x)\,dx &= \int_{\frac{199\pi}{2}}^{100\pi} \left(2^{99}a_{99}\cos(x-99\pi)+(b_{99}-1)\sin(x-99\pi)\right)dx \\ &= \left[2^{99}a_{99}\sin(x-99\pi)-(b_{99}-1)\cos(x-99\pi)\right]_{\frac{199\pi}{2}}^{100\pi} \\ &= -2^{99}a_{99}+(b_{99}-1)=1-3=-2\end{aligned}$$

가 된다. 따라서 $\int_{\pi}^{\frac{199\pi}{2}} g(x)\,dx = -6-(-2) = -4$ 이다.

13번 문항 해설

[1] $h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ 에서,

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-h^{-1}(u)\right)du+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(h^{-1}(u)-\frac{1}{2}\right)du$$

$$=-\int_0^{\frac{1}{2}}h^{-1}(u)du+\int_{\frac{1}{2}}^{1}h^{-1}(u)du$$

$$=\left(\int_0^{\frac{1}{2}}h(u)du-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}-\int_{\frac{1}{2}}^{1}h(u)du\right)$$

이다. 한편, $\int_0^{\frac{1}{2}}h(u)du=\left[-\frac{u^4}{2}+u^3\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{32}$, $\int_{\frac{1}{2}}^{1}h(u)du=\left[-\frac{u^4}{2}+u^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{13}{32}$ 이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{16}$ 이다.

[2] 제시문 (가)를 이용하면,

$$f(x)=\int_0^{h(x)}\left(x-h^{-1}(u)\right)du+\int_{h(x)}^{1}\left(h^{-1}(u)-x\right)du$$

$$=xh(x)-F(h(x))+F(0)+F(1)-F(h(x))-x(1-h(x))$$

$$=2xh(x)-x-2F(h(x))+F(0)+F(1)$$

이므로, $a=2$, $b=-1$, $c=F(0)+F(1)$ 이다. 따라서, $2a+b=3$ 이다.

[3] [2]의 등식을 x 에 대해 미분하면 제시문 (나)에 의해,

$f'(x)=2(h(x)+xh'(x))-1-2F'(h(x))h'(x)=2h(x)-1$

이므로, $f'(x_0)=2h(x_0)-1=-\frac{13}{27}$ 로부터 $h(x_0)=\frac{7}{27}$ 이다.

즉, $-2(x_0)^3+3(x_0)^2-\frac{7}{27}=-2\left(x_0-\frac{1}{3}\right)\left((x_0)^2-\frac{7}{6}x_0-\frac{7}{18}\right)=0$ 이다.

그런데, $0<x_0<1$ 이므로, $x_0=\frac{1}{3}$ 이다.

14번 문항 해설

[1] $f(\theta)=\cos^9\theta\sin\theta$ 라 두면 $f(-\theta)=\cos^9(-\theta)\sin(-\theta)=-\cos^9\theta\sin\theta=-f(\theta)$ 이므로

$f(\theta)$ 는 원점에 대하여 대칭인 함수이다. 따라서 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^9\theta\sin\theta\,d\theta=0$ 이다.

[2] $A=\int_{-\pi}^{\pi}(\cos t\cos\theta+\sin t\sin\theta)^9(\cos\theta+\sin\theta)d\theta$ 를 먼저 계산하자.

$$A=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^9(t-\theta)(\cos\theta+\sin\theta)d\theta$$

$\phi=t-\theta$ 로 치환하면

$$A=-\int_{t+\pi}^{t-\pi}\cos^9\phi(\cos(t-\phi)+\sin(t-\phi))d\phi$$

을 얻는다. $g(\phi)=\cos^9\phi(\cos(t-\phi)+\sin(t-\phi))$ 라 놓으면

$$A=\int_{t-\pi}^{-\pi}g(\phi)d\phi+\int_{-\pi}^{t+\pi}g(\phi)d\phi$$

으로 나타낼 수 있다. $g(\phi)=g(2\pi+\phi)$ 이므로

$$\int_{t-\pi}^{-\pi}g(\phi)d\phi=\int_{t-\pi}^{-\pi}g(\phi+2\pi)d\phi=\int_{t+\pi}^{\pi}g(\phi)d\phi$$

이다. 따라서

$$A=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^9\phi(\cos(t-\phi)+\sin(t-\phi))d\phi$$

이다. 제시문 (가) (삼각함수의 덧셈정리)와 [3-1]에 의하여

$$A=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{10}\phi\,d\phi(\cos t+\sin t)+\int_{-\pi}^{\pi}\cos^9\phi\sin\phi\,d\phi\,(\sin t-\cos t)$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{10}\phi\,d\phi(\cos t+\sin t)$$

이다. 부분적분을 두 번 적용하면 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{10}\phi\,d\phi=\frac{63}{80}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^6\phi\,d\phi$ 이다.

따라서 $h(t)=\frac{63}{80}(\cos t+\sin t)$ 이다.

$h(t)=\frac{21}{80}$ 을 만족하는 t 에 대하여 $\frac{21^2}{80^2}=h(t)^2=\frac{63^2}{80^2}(1+2\cos t\sin t)$ 이므로

$\cos t\sin t=-\frac{4}{9}$ 이다.

15번 문항 해설

$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^4=4$ 를 미분하면

$$2f(x)f'(x)-4\{g(x)\}^3g'(x)=0 \ \Rightarrow\ \frac{g'(x)}{f(x)}=\frac{f'(x)}{2\{g(x)\}^3}\cdots\cdots\cdots①$$

$$\int_0^{\pi}\frac{3f(x)g'(x)-f'(x)g(x)}{\{f(x)\}^2g(x)}dx=\int_0^{\pi}\left[\frac{3f(x)g'(x)}{\{f(x)\}^2g(x)}-\frac{f'(x)g(x)}{\{f(x)\}^2g(x)}\right]dx$$

$$=\int_0^{\pi}\left[\frac{3f(x)g'(x)}{\{f(x)\}^2g(x)}-\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}\right]dx$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{3f(x)g'(x)}{\{f(x)\}^2g(x)}dx-\int_0^{\pi}\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}dx$$

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}dx=\left[-\frac{1}{f(x)}\right]_0^{\pi}=-\left(\frac{1}{f(\pi)}-\frac{1}{f(0)}\right)=-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{15}$

(2) ①의 관계식에 의하여 다음 식을 얻는다.

$$\int_0^{\pi}\frac{3f(x)g'(x)}{\{f(x)\}^2g(x)}dx=\int_0^{\pi}\frac{\{g(x)\}^3}{f(x)}\frac{3g'(x)}{\{g(x)\}^4}dx=\frac{3}{2}\int_0^{\pi}\frac{2\{g(x)\}^3}{f(x)}\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^4}dx$$

따라서 적분값을 구하면,

$$\frac{3}{2}\int_0^{\pi}\frac{2\{g(x)\}^3}{f(x)}\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^4}dx=\frac{3}{2}\int_0^{\pi}\frac{f(x)f'(x)}{f(x)\left[\{f(x)\}^2-4\right]}dx$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\pi}\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2-4}dx$$

$$=\frac{3}{8}\int_0^{\pi}\left\{\frac{f'(x)}{f(x)-2}-\frac{f'(x)}{f(x)+2}\right\}dx$$

$$=\frac{3}{8}\left[\ln|f(x)-2|-\ln|f(x)+2|\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{3}{8}(\ln3-\ln7+\ln5)=\frac{3}{8}\ln\frac{15}{7}$$

(1)과 (2)로부터 구하는 적분값은 $-\dfrac{2}{15}+\dfrac{3}{8}\ln\dfrac{15}{7}$ 이다.

16번 문항 해설

[1]

$x=\tan\theta$ 로 치환하면, $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ 이고, $\dfrac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$ 이므로,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1d\theta=\frac{\pi}{4}$$

이다.

[2]

주어진 급수에서 분모와 분자를 2017^2 으로 나누면

$$\sum_{k=1}^{2017}\frac{8068}{2017^2+k^2}=4\sum_{k=1}^{2017}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{2017}\right)^2}\frac{1}{2017}$$

이 된다. 이제 곡선 $y=f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 를 생각하자. 구간 $[0,\ 1]$ 을 2017등분한 후, k 번째 구간에서 높이가 $f\left(\dfrac{k}{2017}\right)$인 직사각형을 생각하자. $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 이 구간 $[0,\ 1]$ 에서 감소함수이므로, 직사각형들의 넓이의 합은 곡선 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 과 구간 $[0,\ 1]$ 사이의 영역의 넓이보다 작다. 즉,

$$\sum_{k=1}^{2017}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{2017}\right)^2}\frac{1}{2017}<\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$$

가 성립한다. 이제 [2.1]번에서

$$\sum_{k=1}^{2017}\frac{8068}{2017^2+k^2}<4\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\pi$$

가 성립한다.

[3]

조건 (2)에 따라서 $f(\pi-x)=-f(x)$ 를 얻는다. 이 식의 양변을 x 로 미분하면 $-f'(\pi-x)=-f'(x)$ 이므로 $f'(\pi-x)=f'(x)$ 가 성립한다. 정적분 $\displaystyle\int_0^\pi \frac{xf'(x)}{1+\{f(x)\}^2}dx$ 에서 $x=\pi-t$ 로 치환하면

$$\int_0^\pi \frac{xf'(x)}{1+\{f(x)\}^2}dx=\int_\pi^0\frac{(\pi-t)f'(\pi-t)}{1+\{f(\pi-t)\}^2}(-dt)=\int_0^\pi\frac{(\pi-t)f'(t)}{1+\{f(t)\}^2}dt$$

이다.

[4]

[3]번의 풀이에서

$$\int_0^{\pi} \frac{xf'(x)}{1+\{f(x)\}^2}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{f'(x)}{1+\{f(x)\}^2}dx$$

이다. 여기서 $u=f(x)$로 치환하여

$$\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+u^2}du = \pi\int_0^{1} \frac{1}{1+u^2}du = \frac{\pi^2}{4}$$ 을 얻는다.

17번 문항 해설

[2] (1) $y=f(x) \rightarrow y=f(-x) \rightarrow y=f(\pi-x)$ 이므로 $g(x)=f(\pi-x)$

$\pi-x=t$로 치환하면

$$\int_0^{\pi} g(x)dx=\int_0^{\pi} f(\pi-x)dx=-\int_{\pi}^{0} f(t)dt=\int_0^{\pi} f(t)dt,\ \therefore\ \int_0^{\pi} f(x)dx=\int_0^{\pi} g(x)dx$$

(2) $\cos x=t$로 치환하면 $\dfrac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_1^{-1}\frac{-1}{1+t^2}dt=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+t^2}dt=2\int_0^{1}\frac{1}{1+t^2}dt$$

$t=\tan\theta$로 치환하면 $\dfrac{dt}{d\theta}=1+\tan^2\theta=1+t^2$이므로 $\displaystyle\int_0^{1}\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$

$$\therefore\ \int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}$$

(3) (1)의 결과를 이용한다.

$$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}dx=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx-\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi^2}{2}-I,\ \therefore\ I=\frac{\pi^2}{4}$$

18번 문항 해설

$x=-t$로 치환하면 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin(x^{2022})}{1+2022^{x}}dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t^{2022})}{1+2022^{-t}}dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2022^{t}\sin(t^{2022})}{2022^{t}+1}dt$

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x^{2022})}{1+2022^{x}}dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin(x^{2022})}{1+2022^{x}}dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x^{2022})}{1+2022^{x}}dx \\ &= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2022^{t}\sin(t^{2022})}{2022^{t}+1}dt + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x^{2022})}{1+2022^{x}}dx \\ &= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2022^{x}+1)\sin(x^{2022})}{1+2022^{x}}dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x^{2022})dx\end{aligned}$$

19번 문항 해설

[1]

(1) $g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, $h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

$$g(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=g(x),\ h(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-h(x)$$

(2) $f(x)=\dfrac{x}{(x+p)^2+1}$, $f(-x)=-\dfrac{x}{(x-p)^2+1}$, $f(x)=g(x)+h(x)$라 하면

$$g(x)=\frac{1}{2}\left\{\frac{x}{(x+p)^2+1}-\frac{x}{(x-p)^2+1}\right\}=\frac{-2px^2}{\{(x+p)^2+1\}\{(x-p)^2+1\}}$$

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=2\int_0^1 g(x)dx=-4p\int_0^1\frac{x^2}{\{(x+p)^2+1\}\{(x-p)^2+1\}}dx$$

이때 $0<x<1$에서 $\dfrac{x^2}{\{(x+p)^2+1\}\{(x-p)^2+1\}}>0$이므로

$$\int_0^1\frac{x^2}{\{(x+p)^2+1\}\{(x-p)^2+1\}}dx>0$$

이다. 따라서 $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)dx=0$이면 $p=0$이다.

[2]

(1) $a-x=t$로 치환하면 $\displaystyle\int_0^a f(a-x)dx=\int_a^0 f(t)(-dt)=\int_0^a f(t)dt$,

$$\therefore\ \int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$$

(2) $f(x)=\dfrac{\cos^{2023}x}{\sin^{2023}x+\cos^{2023}x}$라 하면 $f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\dfrac{\sin^{2023}x}{\cos^{2023}x+\sin^{2023}x}$

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2023}x}{\sin^{2023}x+\cos^{2023}x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2023}x}{\cos^{2023}x+\sin^{2023}x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ I=\frac{\pi}{4}$$

20번 문항 해설

$f(x)=3\sqrt{2}\sin^3 x-\cos x$라 하자. $-\frac{\pi}{2}\le x\le 0$일 때, $\sin x\le 0$, $\cos x\ge 0$이므로 $f(x)\le 0$이다. 닫힌구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 함수 $g(x)=3\sqrt{2}\sin^3 x$는 증가함수이고, 함수 $h(x)=\cos x$는 감소함수이다. $f(x)=g(x)-h(x)$는 연속인 증가함수이고, $f(0)=-1<0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\sqrt{2}>0$이므로 사잇값 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$은 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 유일한 해를 갖는다. 이 해를 a라 하자. $-\frac{\pi}{2}\le x\le a$이면 $f(x)\le 0$이고 $a\le x\le\frac{\pi}{2}$이면 $f(x)\ge 0$이다. 또한

$$3\sqrt{2}\sin^3 a=\cos a,\ 18\sin^6 a=\cos^2 a=1-\sin^2 a$$
$$18\sin^6 a+\sin^2 a-1=(3\sin^2 a-1)(6\sin^4 a+2\sin^2 a+1)=0$$

이므로 $3\sin^2 a=1$, $\sin a=\frac{1}{\sqrt{3}}$이고 $\cos a=\sqrt{1-\sin^2 a}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$이다.

$$\sin^3 x=\sin^2 x\sin x=(1-\cos^2 x)\sin x=\sin x-\cos^2 x\sin x$$

이므로

$$\int(3\sqrt{2}\sin^3 x-\cos x)dx=\int 3\sqrt{2}\sin x\,dx-\int 3\sqrt{2}\cos^2 x\sin x\,dx-\int\cos x\,dx$$
$$=-3\sqrt{2}\cos x+\sqrt{2}\cos^3 x-\sin x+C$$

이다. $F(x)=\sqrt{2}\cos^3 x-3\sqrt{2}\cos x-\sin x$라 하자. 이때 $F'(x)=f(x)$이고 $F\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$이며,

$$F(a)=\sqrt{2}\cos^3 a-3\sqrt{2}\cos a-\sin a=\sqrt{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}-3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{17\sqrt{3}}{9}$$

이다.

따라서 $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|3\sqrt{2}\sin^3 x-\cos x\right|dx=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{a}f(x)dx+\int_{a}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$$
$$=-F(a)+F\left(-\frac{\pi}{2}\right)+F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(a)=\frac{34\sqrt{3}}{9}$$

21번 문항 해설

(1)

정적분의 성질에 따라 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} B+D &= \int_0^1 \left(x^{2022}(1-x)^{2022} + x^{2023}(1-x)^{2021}\right) dx \\ &= \int_0^1 x^{2022}(1-x)^{2021}((1-x)+x)\, dx \\ &= \int_0^1 x^{2022}(1-x)^{2021}\, dx \\ &= C \end{aligned}$$

(2)

정적분 $B=\int_0^1 x^{2022}(1-x)^{2022}\,dx$에 x^{2022}을 적분하고 $(1-x)^{2022}$을 미분하여 부분 적분법을 적용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} B &= \left[\frac{x^{2023}}{2023}(1-x)^{2022}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{2023}}{2023} 2022(1-x)^{2021}(-1)\, dx \\ &= \frac{2022}{2023}\int_0^1 x^{2023}(1-x)^{2021} dx \\ &= \frac{2022}{2023} D \end{aligned}$$

(3)

정적분의 성질에 따라 정적분 $A-B-C$를 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} A-B-C &= \int_0^1 \left(x^{2021}(1-x)^{2021} - x^{2022}(1-x)^{2022} - x^{2022}(1-x)^{2021}\right) dx \\ &= \int_0^1 x^{2021}(1-x)^{2021}(1-x(1-x)-x)\, dx \\ &= \int_0^1 x^{2021}(1-x)^{2021}\,(1-x)^2 dx \\ &= \int_0^1 x^{2021}(1-x)^{2023}\, dx \end{aligned}$$

이제 $t=1-x$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-1$이고, $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^1 x^{2021}(1-x)^{2023}\,dx = \int_0^1 (1-t)^{2021} t^{2023}(-dt) = \int_0^1 t^{2023}\,(1-t)^{2021}\,dt = D$$

이다. 따라서 $A-B-C=D$이다.

문항 (2)의 $B=\frac{2022}{2023}D$에서 $D=\frac{2023}{2022}B$를 얻고, 문항 (1)의 $B+D=C$에 대입

하면

$$C = B + \frac{2023}{2022}B = \frac{4045}{2022}B$$

를 얻는다. 이제 $A - B - C = D$로부터

$$A = B + C + D = B + \frac{4045}{2022}B + \frac{2023}{2022}B = \frac{2 \cdot 4045}{2022}B$$

이며, 정리하면 $B = \frac{1011}{4045}A$를 얻는다.

22번 문항 해설

적분을 하는 함수의 분모와 분자에 $(1+\sin x)^2$을 곱한 후, 제시문의 삼각함수 공식을 적용하여 다음과 같이 식을 정리한다.

$$\frac{(1-\sin x)^2(1+\sin x)^2}{\cos^3 x(1+\sin x)^2}=\frac{\left(1-\sin^2 x\right)^2}{\cos^3 x(1+\sin x)^2}=\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$$

그리고 $u=\sin x$로 치환하여 적분을 계산한다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{(1-\sin x)^2}{\cos^3 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{du}{(1+u)^2}=-\frac{2}{3}-(-1)=\frac{1}{3}$$

23번 문항 해설

조건 (1)과 (2)에 $x=0$을 대입하여 정리하면 $f(0)=0$이고 $g(0)=1$이다. 부분적분법에 의해 $\int_0^x e^t f(t)dt = e^x f(x) - \int_0^x e^t f'(t)dt$이므로 조건(1)과 (2)에 의해

$$\int_0^x e^t f'(t)dt = \frac{e^x\{f(x)+g(x)\}-1}{2} = \int_0^x e^t g(t)dt$$

이다. 모든 실수 x에 대해 $\int_0^x e^t\{f'(t)-g(t)\}dt=0$이므로 정적분과 미분의 관계에 의해 $e^x\{f'(x)-g(x)\}=0$이다. 따라서 모든 실수 x에 대해 $f'(x)=g(x)$이다. 마찬가지로

$\int_0^x e^t g(t)dt = \{e^x g(x)-1\} - \int_0^x e^t g'(t)dt$이므로 모든 실수 x에 대해 $g'(x)=-f(x)$이다.

함수 $h(x)=\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$라 하면, $h(x)$는 모든 실수 x에 대하여 미분가능하고
$h'(x)=2f'(x)f(x)+2g'(x)g(x)=2g(x)f(x)-2f(x)g(x)=0$
이므로 $h(x)$는 상수함수이다. $f(0)=0$이고 $g(0)=1$이므로
$h(0)=\{f(0)\}^2+\{g(0)\}^2=1$
이다. 따라서 모든 실수 x에 대해
$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=h(x)=h(0)=1$
이고
$\{f(1)\}^2+\{g(1)\}^2=1$
이다.

24번 문항 해설

(1) 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 $0 \leq \sin x \leq 1$ 이기 때문에 $\sin^{n-1}x \leq sinx$ 이다. 그러므로

$$I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}x\,dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = I_n$$

이 성립한다.

(2)

1보다 큰 자연수 n에 대하여 부분적분법을 이용하면

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}x \cdot \sin x\,dx \\ &= \left[\sin^{n-1}x\,(-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\,(1-\sin^2 x)\,dx \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\,dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \\ &= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

이므로 $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ 이고 $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$ 이다.

(3)

(2)에 의하여 $\frac{2n}{2n+1} = \frac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}}$ 이 성립하고, (1)에 의하여 $I_{2n} \leq I_{2n-1}$ 이므로 $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$ 이 되고, 또 (1)에 의하여 $I_{2n+1} \leq I_{2n}$ 이므로 $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1$ 이다.

(4)

(3)에 의하여 $\frac{2n}{2n+1} = \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1$ 이 성립하므로 수열의 조임정리에 의하여

$$1 = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+1} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}=1$ 이다.

(5)

문항 (1)에 의하여 $I_{n+1} \le I_{n+1} \le I_n$이므로 $\frac{I_{n+2}}{I_n} \le \frac{I_{n+1}}{I_n} \le 1$이 성립하고, 문항(2)에 의하여 $\frac{n+1}{n+2}=\frac{I_{n+2}}{I_n}$이다. 그러므로 $\frac{n+1}{n+2}=\frac{I_{n+2}}{I_n} \le \frac{I_{n+1}}{I_n} \le 1$이 참이고 수열의 조임정리에 의하여

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} \le \lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n} \le 1$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}=1$ 이다.

25번 문항 해설

정답 : $\frac{\pi^3}{96}-\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{2}$

주어진 적분식에 미적분학의 기본 정리를 적용,

$\{f(x)\}^2-\{f(-x)\}^2=0$을 얻으므로 주어진 함수 $\{f(x)\}^2$은 y축에 대하여 대칭인 함수이다.

따라서 $(16x^2+8px+p^2)\sin^2 2x$가 짝함수이기 위해서는 $p=0$이어야 한다.

$f(x)=4x\sin 2x$이므로 반각의 공식 $\sin^2 x=\frac{1-\cos 4x}{2}$을 이용하고, 두 번의 부분적분을

통하여, $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}}16x^2\sin^2 2x=2\int_0^{\frac{\pi}{8}}16x^2\sin^2 2x\,dx$

$=16\int_0^{\frac{\pi}{8}}(x^2-x^2\cos 4x)dx=16\left\{\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{x^2}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{8}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}}x\sin 4x dx\right\}$

$=16\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{x^2}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{8}}+8\left[-\frac{x}{4}\cos 4x+\frac{1}{16}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{8}}$

$=16\cdot\frac{\pi^3}{3\cdot 8^3}-16\cdot\frac{\pi^2}{4\cdot 8^2}+\frac{1}{2}=\frac{\pi^3}{96}-\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{2}$을 얻는다.

26번 문항 해설

정답 : $p(x)=2x^2-2\pi x$

$$\int_0^\pi k^2 p(x)\sin kx\,dx = \Big[-kp(x)\cos kx\Big]_0^\pi + \int_0^\pi kp'(x)\cos kx\,dx$$

$$=k(-1)^{k+1}p(\pi)+kp(0)+\int_0^\pi kp'(x)\cos kx\,dx$$

$\displaystyle\int_0^\pi kp'(x)\cos kx\,dx = \Big[p'(x)\sin kx\Big]_0^\pi - \int_0^\pi p''(x)\sin kx\,dx = -\int_0^\pi \sin kx(6ax+2b)dx$ 이다.

또한 $\displaystyle\int_0^\pi \sin kx(6ax+2b)dx = \frac{(-1)^{k+1}}{k}(6a\pi+2b)+\frac{2b}{k}$ 이고,

$\displaystyle 4\int_0^\pi \sin kx\,dx = \frac{4}{k}\left(1-(-1)^k\right)$이므로 정리하면

$\displaystyle k(-1)^k p(\pi)-kp(0)+\frac{(-1)^{k+1}}{k}(6a\pi+2b)+\frac{2b}{k}+\frac{4}{k}\left((-1)^k-1\right)=0$이다. k가 짝수일 때,

$k^2(p(\pi)-p(0))-6a\pi=0$이므로 $a=0$, $b\pi^2+c\pi=0$이 나온다.

k가 홀수일 때, $k^2(p(\pi)+p(0))-(4b-8)=0$이므로 $b=2$, $b\pi^2+c\pi+2d=0$이고

위에서 구한 것과 같이 생각해보면 $a=0$, $b=2$, $c=-2\pi$, $d=0$이다.

따라서 $p(x)=2x^2-2\pi x$이다.

27번 문항 해설

정답 : $\frac{1}{3}e^6+\frac{3}{4}e^4+\frac{1}{2}e^2-\frac{19}{12}$

$y=e^x$ 위의 점 $(s,\ e^s)$의 접선과 수직을 이루며 $(s,\ e^s)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-e^s=-e^{-s}(x-s)$이고 이것이 $(t,\ 0)$을 지나므로 대입하면 $t=s+e^{2s}$인 관계를 얻는다.

점 $(t,\ 0)$와 곡선 $y=e^x$의 거리의 제곱은 $L^2(t)=(t-s)^2+(e^s)^2=e^{4s}+e^{2s}$이다.

$\frac{dt}{ds}=1+2e^{2s}$을 이용하고 함수 $t=s+e^{2s}$가 일대일대응임을 고려하면

$\int_1^{1+e^2}L^2(t)dt=\int_1^{1+e^2}(e^{4s}+e^{2s})dt=\int_0^1\{(e^{4s}+e^{2s})(1+2e^{2s})\}ds$이 되고,

계산하면 $\int_0^1\{(e^{4s}+e^{2s})(1+2e^{2s})\}ds=\frac{1}{3}e^6+\frac{3}{4}e^4+\frac{1}{2}e^2-\frac{19}{12}$이다.

[별해]

$y=e^x$ 위의 점 $(s,\ e^s)$의 접선과 수직을 이루며 $(s,\ e^s)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-e^s=-e^{-s}(x-s)$이고 이것이 $(t,\ 0)$을 지나므로 대입하면 $t=s+e^{2s}$인 관계를 얻는다.

t를 s의 함수로 보고 $t=f(s)=s+e^{2s}$라 하면 $f'(s)=1+2e^{2s}\geq 1$이므로 역함수

$s=f^{-1}(t)$을 정의할 수 있다. 점 $(t,\ 0)$와 곡선 $y=e^x$의 거리의 제곱은 다음과 같다.

$L^2(t)=(t-s)^2+(e^s)^2=e^{4s}+e^{2s}=e^{4f^{-1}(t)}+e^{2f^{-1}(t)}$

치환 $f^{-1}(t)=s$를 이용하면 정적분이

$\int_1^{1+e^2}L^2(t)dt=\int_1^{1+e^2}\left(e^{4f^{-1}(t)}+e^{2f^{-1}(t)}\right)dt=\int_0^1\{(e^{4s}+e^{2s})(1+2e^{2s})\}ds$이 되고, 계산하면

$\int_0^1\{(e^{4s}+e^{2s})(1+2e^{2s})\}ds=\frac{1}{3}e^6+\frac{3}{4}e^4+\frac{1}{2}e^2-\frac{19}{12}$이 된다.

28번 문항 해설

정답 : $1+\dfrac{1}{\pi}$

역함수의 정의를 고려하면 $\displaystyle\int_0^{2+\alpha} F^{-1}(x)dx = 2+\alpha - \int_0^1 F(x)dx$ 이다.

여기서 부분적분을 사용하면

$$\int_0^1 F(x)dx = \Big[xF(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 xF'(x)dx$$

$$= 2+\alpha - \int_0^1 \left\{2x + x\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\right\}dx \text{ 이다.}$$

또한 치환적분을 사용하면 $\displaystyle\int_0^1 \left\{2x + x\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\right\}dx = 1+\frac{1}{\pi}$ 이다. 따라서

$\displaystyle\int_0^{2+\alpha} F^{-1}(x)dx = 2+\alpha-(2+\alpha)+1+\frac{1}{\pi} = 1+\frac{1}{\pi}$ 이다.

[별해]

$\displaystyle\int_0^{2+\alpha} F^{-1}(x)dx$ 에서 $F^{-1}(x) = y$ 로 치환하자. 주어진 정보로부터

$F^{-1}(0) = 0,\ F^{-1}(2+\alpha) = 1$ 을 유도할 수 있다. 또한 $x = F(y)$ 에서

$\dfrac{dx}{dy} = F'(y)$ 이므로 주어진 정적분은

$\displaystyle\int_0^{2+\alpha} F^{-1}(x)dx = \int_0^1 yF'(y)dy$ 이 된다. $F'(y) = 2+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}y^2\right)$ 이므로

따라서 치환적분을 사용하면 $\displaystyle\int_0^1 yF'(y)dy = \int_0^1 2y + y\cos\left(\frac{\pi}{2}y^2\right)dy = 1+\frac{1}{\pi}$ 이다.

따라서 $\displaystyle\int_0^{2+\alpha} F^{-1}(x)dx = 1+\frac{1}{\pi}$ 이다.

29번 문항 해설

[1] $f'(x) = \dfrac{2x\left(x+\sqrt{a^2-x^2}\right) - x^2\left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)}{\left(x+\sqrt{a^2-x^2}\right)^2} = \dfrac{x\left(x\sqrt{a^2-x^2}+2a^2-x^2\right)}{\left(x+\sqrt{a^2-x^2}\right)^2\sqrt{a^2-x^2}}$

이고 모든 $0 \le x \le a$에 대하여 $x\sqrt{a^2-x^2}+2a^2-x^2 > 0$이므로 $f'(0)=0$이다.

따라서 임의의 $0 < x < a$에 대하여 $f'(x) > 0$이고 $f(x)$는 $[0,\ a]$에서 연속이므로,

함수 $f(x)$는 단조증가함수이고 일대일 함수이다.

[2]
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x f(a\sin x)\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(a\sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f(a\sin x)\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(a\sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\pi - t) f(a\sin(\pi - t))(-dt) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(a\sin x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - t) f(a\sin t)\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(a\sin x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi f(a\sin t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t f(a\sin t)\,dt \\ &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a\sin x)\,dx\end{aligned}$$

[3]

$$I = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a\sin x)\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2\sin^2 x}{a\sin x + a\cos x}\,dx = a\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

이고 다시 $t = \dfrac{\pi}{2} - x$로 치환하여 적분하면

$$\begin{aligned}I = a\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}\,dx &= a\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}(-dt) \\ &= a\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\cos t + \sin t}\,dt\end{aligned}$$

따라서 $2I = a\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t + \cos t}\,dt = a\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t + \cos t}\,dt$이고,

$$I=\frac{a\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin t+\cos t}\,dt=\frac{a\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}\,dt$$

$$=\frac{a\pi}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\sin\theta}\,d\theta=\frac{a\pi}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}\,d\theta$$

이다. 다시 $\cos\theta=x$로 치환하여 적분하면,

$$I=\frac{a\pi}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=\frac{a\pi}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{1-x^2}\,(-dx)=\frac{a\pi}{2\sqrt{2}}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{1-x^2}\,dx$$

한편 $\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)$이므로

$$I=\frac{a\pi}{4\sqrt{2}}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$=\frac{a\pi}{4\sqrt{2}}\left[\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{a\pi}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2})$$

이다.

(별해1)

[3] 2번의 결과로부터

$$\int_0^{\pi}xf(a\sin x)\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(a\sin x)\,dx=a\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\,dx$$

$$=\frac{a\pi}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\,dx=\frac{a\pi}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{\sin^2\left(t-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin t}\,dt$$

$$=\frac{a\pi}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)^2}{\sin t}\,dt$$

$$=\frac{a\pi}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1-2\sin t\cos t}{\sin t}\,dt$$

$$=\frac{a\pi}{2\sqrt{2}}\left\{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{\sin t}{1-\cos^2 t}\,dt-2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\cos t\,dt\right\}$$

$$= \frac{a\pi}{2\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\sin t}{1-\cos^2 t}\, dt$$

$$= \frac{a\pi}{4\sqrt{2}} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right) dx$$

$$= \frac{a\pi}{4\sqrt{2}} \left[\ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{a\pi}{\sqrt{2}} \ln(1+\sqrt{2})$$

(별해2)

[3] $f(a\sin x) = \dfrac{a^2 \sin^2 x}{a \sin x + \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 x}} = \dfrac{a \sin^2 x}{\sin x + |\cos x|}$ 이므로

$$\int_0^{\pi} x f(a\sin x)\, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a\sin x)\, dx = a\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}\, dx \quad \cdots\cdots \ (*)$$

$I = \displaystyle\int_0^{\pi} x f(a\sin x)\, dx$ 라 하고 $(*)$에서 $x = \dfrac{\pi}{2} - t$ 로 치환하여 적분하면

$$I = a\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)} (-dt) = a\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\cos t + \sin t}\, dt$$

이고

$$2I = a\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{\sin t + \cos t}\, dt + a\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\cos t + \sin t}\, dt$$

$$= a\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t + \cos t}\, dt = a\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}\, dt$$

이므로 $\displaystyle\int \csc x\, dx = \int \frac{\csc x(\csc x + \cot x)}{\csc x + \cot x}\, dx = -\ln(\cot x + \csc x) + C$ (C는 적분상수)임을 이용하면

$$I=\frac{a\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}\,dt=\frac{a\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\csc\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt$$

$$=-\frac{a\pi}{2\sqrt{2}}\left[\ln\left\{\cot\left(t+\frac{\pi}{4}\right)+\csc\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right\}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{a\pi}{2\sqrt{2}}\{\ln(-1+\sqrt{2})-\ln(1+\sqrt{2})\}$$

$$=\frac{a\pi}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}\right)=\frac{a\pi}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2})$$

이다.

30번 문항 해설

정답 : $\pi-\dfrac{2}{5}$

교점을 구하자. $x^4(1+x^2)=2$이고 $x^2=t$로 쓰면 $t^2(1+t)=2$이 되고 $t=1$이다.
주어진 영역의 넓이는 아래와 같다.

$$\int_{-1}^{1}\left\{\frac{2}{1+x^2}-x^4\right\}dx=2\int_{0}^{1}\left\{\frac{2}{1+x^2}-x^4\right\}dx$$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}$이고 $\displaystyle\int_0^1 x^4dx=\frac{1}{5}$이므로

정답은 $\pi-\dfrac{2}{5}$이다.

31번 문항 해설

정답 : $\dfrac{1000}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{3}\right)$

주어진 식을 제곱하여 $2f(x)^2+f(20-x)^2=-x^2+20x$ 를 얻는다.

위 식의 양변에 2를 곱하여 $4f(x)^2+2f(20-x)^2=-2x^2+40x$ 를 얻는다.

그리고 첫 번째 식에 x대신 $20-x$를 대입하여

$2f(20-x)^2+f(x)^2=-(20-x)^2+20(20-x)=-x^2+20x$

를 얻는다. 위의 식에서 아래의 식을 빼면

$$3f(x)^2=-x^2+20x=100-(x-10)^2$$

를 얻을 수 있는데, 따라서

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{100-(x-10)^2}$$

이다. 적분에 이 식을 대입한 후 $u=\dfrac{x-10}{10}$으로 치환하여 적분을 계산한다.

$$\int_0^{10}xf(x)dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{10}x\sqrt{100-(x-10)^2}\,dx=\frac{1000}{\sqrt{3}}\int_{-1}^{0}(u+1)\sqrt{1-u^2}\,du$$

$$=\frac{1000}{\sqrt{3}}\left(\int_{-1}^{0}\sqrt{1-u^2}\,du+\int_{-1}^{0}u\sqrt{1-u^2}\,du\right)=\frac{1000}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)$$

32번 문항 해설

정답 : $(2\pi-4)e^{\frac{\pi}{2}}+4$

부분적분을 하고 $\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$을 이용.

$\left[(2x-\sin 2x)e^{F(x)}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(2-2\cos 2x)dx=2\pi e^{F(x)}-\int_0^{\pi}e^{F(x)}4\sin^2 x\,dx$

$=2\pi e^{F(x)}-\left[4e^{F(x)}\right]_0^{\pi}=2\pi e^{F(x)}-4e^{F(x)}+4$이다.

$F(x)=\int_0^x \sin^2 t\,dt=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x$ 이므로

$F(\pi)=\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$이고 정리하면 $(2\pi-4)e^{\frac{\pi}{2}}+4$이다.

33번 문항 해설

정답 : 2

적분함수를 $\dfrac{1+2e^{-x}}{1+e^{x}+e^{-x}}=1-\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{1+e^{x}+e^{-x}}$로 분해한 후,

부정적분하여 $x-\ln\left(1+e^{x}+e^{-x}\right)+C$ 를 얻는다.

정적분을 계산하여 정답 2를 얻는다.

*별해가 많은 문제이므로 다양한 풀이를 생각해봅시다.

34번 문항 해설

정답 : 2

이항정리에 의하여

$$b_n = \int_0^1 e^{-(n+2)x} \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k e^{(n-k)x} dx$$
$$= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \int_0^1 e^{-(k+2)x} dx \ (t = e^{-x} \text{으로 치환})$$
$$= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \int_{e^{-1}}^1 t^{k+1} dt = \int_{e^{-1}}^1 t(t+1)^n dt$$

한편, 부분적분법에 의하여

$$\int_{e^{-1}}^1 t(t+1)^n dt = \left[\frac{t(t+1)^{n+1}}{n+1}\right]_{e^{-1}}^1 - \frac{1}{n+1}\int_{e^{-1}}^1 (t+1)^{n+1} dt$$
$$= \frac{2^{n+1} - e^{-1}(1+e^{-1})^{n+1}}{n+1} - \frac{2^{n+2} - (1+e^{-1})^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

따라서

$$\frac{n}{2^n} b_n = \frac{2n}{n+1} - \frac{e^{-1}(1+e^{-1})n}{n+1}\left(\frac{1+e^{-1}}{2}\right)^n - \frac{4n}{(n+1)(n+2)} + \frac{(1+e^{-1})^2 n}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{1+e^{-1}}{2}\right)^n$$
$$\cdots (*)$$

$\frac{1+e^{-1}}{2} \in (0,\ 1)$이므로, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+e^{-1}}{2}\right)^n = 0$ 그러므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}b_n = 2$

[별해]

$$\frac{1}{n+1}\frac{d}{dx}(1+e^{-x})^{n+1} = -e^{-x}(1+e^{-x})^n$$

$b_n = \int_0^1 e^{-x}\cdot e^{-x}(1+e^{-x})^n dx$라 쓰고

부분적분법을 사용하면

$$b_n = \left[-\frac{1}{n+1}e^{-x}(1+e^{-x})^{n+1}\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 e^{-x}(1+e^{-x})^{n+1} dx$$
$$= \left[-\frac{1}{n+1}e^{-x}(1+e^{-x})^{n+1}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{(n+1)(n+2)}(1+e^{-x})^{n+2}\right]_0^1$$

으로부터 $(*)$를 얻는다.

35번 문항 해설

$f(x)=x$ 그리고 $g'(x)=2x^3\sqrt{1-x^4}$ 라 놓으면 $f'(x)=1$이고 $g(x)=-\frac{1}{3}(1-x^4)^{\frac{3}{2}}$ 이다.

부분적분법에 의해

$$\int_0^1 2x^4\sqrt{1-x^4}\,dx=\left[-\frac{1}{3}x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1-\int_0^1\left\{-\frac{1}{3}(1-x^4)^{\frac{3}{2}}\right\}dx$$

$=\frac{1}{3}\int_0^1(1-x^4)^{\frac{3}{2}}dx$ 이다.

36번 문항 해설

정답 : -8

$$\int_0^{\pi} p(x)\cos x\,dx = \Big[p(x)\sin x\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} p'(x)\sin x\,dx = -\int_0^{\pi} p'(x)\sin x\,dx$$

그리고

$$\int_0^{\pi} p''(x)\cos x\,dx = \Big[p'(x)\cos x\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} p'(x)(-\sin x)dx$$ 이다.

그러므로

$$3 = \int_0^{\pi} [p(x)+p''(x)]\cos x\,dx$$

$= -p'(\pi)-p'(0) = -p'(\pi)-5$이 성립한다.

따라서 $p'(\pi)=-8$이고 $p'(\pi)$가 갖는 유일한 값은 -8이다.

37번 문항 해설

정답 : $11\ln 3 - 12\ln 2$

편의상 $g(x) = 15 \cdot \dfrac{|\sin x|}{2+\cos x}$ 라 하자. 주어진 식

$f(x) = g(x) - 2f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$를 반복해서 적용하면

$$f(x) = g(x) - 2f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = g(x) - 2g\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + 4f(x+\pi)$$

$$= g(x) - 2g\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + 4g(x+\pi) - 8f\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= g(x) - 2g\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + 4g(x+\pi) - 8g\left(x+\frac{3\pi}{2}\right) + 16f(x+2\pi)$$

를 얻는다. 그런데 $f(x)$의 주기가 2π이므로,

$$f(x) = -\frac{1}{15}\left\{g(x) - 2g\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + 4g(x+\pi) - 8g\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)\right\}$$

이다. 따라서

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = -\frac{1}{15}\left\{\int_0^{\pi} g(x)dx - 2\int_0^{\pi} g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx + 4\int_0^{\pi} g(x+\pi)dx - 8\int_0^{\pi} g\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)dx\right\}$$

이다. 우변의 첫 번째 적분은 $u = 2+\cos x$로 치환하여 값을 구하고

$$\int_0^{\pi} g(x)dx = 15\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2+\cos x}dx = -15\int_3^1 \frac{1}{u}du = 15\ln 3$$

를 얻고, 두 번째 적분은 구간을 나눈 다음

$u = 2+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$로 치환하여 값을 구한다.

$$\int_0^{\pi} g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx = 15\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{2+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}dx - 15\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{2+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}dx$$

$= 30\ln 2$ 같은 방식으로

$$\int_0^{\pi} g(x+\pi)dx = 15\ln 3,\quad \int_0^{\pi} g\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)dx = 30(\ln 3 - \ln 2)$$

따라서

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = -\ln 3 + 4\ln 2 - 4\ln 3 + 16(\ln 3 - \ln 2)$$

$= 11\ln 3 - 12\ln 2$ 이다.

38번 문항 해설

정답 : $\frac{\pi}{2}-\ln 2$

다음과 같이 정적분의 적분 구간 나눈 후, 첫 번째 적분에 대하여 $u=-x$로 치환하여 식을 정리한다.

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{|x|}{1-\sin x}dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{-x}{1-\sin x}dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1-\sin x}dx$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{u}{1+\sin u}du + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1-\sin x}dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\sin x}+\frac{x}{1-\sin x}dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2x}{1-\sin^2 x}dx$$

그리고 삼각함수의 관계식

$\sin^2 x+\cos^2 x=1,\ \sec x=\frac{1}{\cos x},\ (\tan x)'=\sec^2 x$

과 부분적분을 적용하여

$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{|x|}{1-\sin x}dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\sec^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}\tan\frac{\pi}{4}-2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$ 을 얻는다.

마지막으로 치환적분 $(u=\cos x)$으로 정적분

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{1}{u}du = \ln 1-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\ln 2}{2}$$

를 계산하여 답 $\frac{\pi}{2}-\ln 2$를 구한다.

39번 문항 해설

적분의 성질에 의하여 다음 등식이 성립한다.

$$\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(-1)^k \int_{-1}^{2} x^k(1-x)^{n-k}dx = \int_{-1}^{2}\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(-1)^k x^k(1-x)^{n-k}dx$$

$$= \int_{-1}^{2}\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(-x)^k(1-x)^{n-k}dx \cdots (1)$$

이항정리에 의하여 $\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(-x)^k(1-x)^{n-k} = (-x+(1-x))^n = (1-2x)^n$ 이다.

따라서 (1)식은 $\int_{-1}^{2}(1-2x)^n dx \cdots (2)$ 이다. 여기서 $1-2x=t$로 치환하면

(2)식은 다음과 같다.

$$\int_{-1}^{2}(1-2x)^n dx = \int_{3}^{-3} t^n\left(-\frac{1}{2}\right)dt = \frac{1}{2}\int_{-3}^{3} t^n dt = \frac{3^{n+1}-(-3)^{n+1}}{2n+2} = \begin{cases} 0 & n\text{ 홀수} \\ \dfrac{3^{n+1}}{n+1} & n\text{은 짝수} \end{cases}$$

즉, $\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(-1)^k \int_{-1}^{2} x^k(1-x)^{n-k}dx = \begin{cases} 0 & n\text{ 홀수} \\ \dfrac{3^{n+1}}{n+1} & n\text{은 짝수} \end{cases}$

[별해]

$(1-2x)^n = (1-x-x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(-x)^k(1-x)^{n-k}$ 이므로

$\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k(-1)^k \int_{-1}^{2} x^k(1-x)^{n-k}dx = \int_{-1}^{2}(1-2x)^n dx$ 이다.

위의 적분에서 $1-2x=u$로 치환하면, $\int_{-1}^{2}(1-2x)^n dx = \begin{cases} 0 & n\text{ 홀수} \\ \dfrac{3^{n+1}}{n+1} & n\text{은 짝수} \end{cases}$ 이다.

40번 문항 해설

[1]

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 극솟값을 가지므로

$$g'(1)=f(1)-f^{-1}(1)=0 \text{ 즉, } f(1)=1$$

이다. 그러므로

$$(a+b)e=1$$

이다. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 $f(0)=0$, $f(1)=1$이므로 정적분과 넓이의 관계에 의하여

$$\int_0^1 \{f(x)+f^{-1}(x)\}dx=1$$

이다. 또 조건으로부터 $g(1)=-\frac{1}{3}$이므로

$$g(1)=\int_0^1 \{f(x)-f^{-1}(x)dx\}=-\frac{1}{3}$$

이다. 따라서 $\int_0^1 \{f(x)\}dx=\frac{1}{3}$이다. 한편 부분적분법을 이용하면

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 (ax^2+bx)e^x\,dx=ae+b-2a$$

이므로

$$ae+b-2a=\frac{1}{3}$$

이다. 그러므로 $a=\frac{1}{3e}$, $b=\frac{2}{3e}$이다. 따라서 $\frac{b}{a}=2$이다.

[2]

함수 $f(x)=\frac{1}{3e}(x^2+2x)e^x$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선 l_1의 기울기는 $f'(1)=\frac{7}{3}$이다. 또 역함수의 미분법에 의하여 곡선 $y=f^{-x}$ 위의 점 $(1, f^{-1}(1))$에서의 접선 l_2의 기울기는 $\frac{3}{7}$이다. 직선 l_1의 기울기를 $\tan\theta_1$, 직선 l_2의 기울기를 $\tan\theta_2$라 하면 $\tan\theta_1=\frac{7}{3}$, $\tan\theta_2=\frac{3}{7}$이고 $\theta=\theta_1-\theta_2$이므로

$$\tan\theta=\tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{20}{21}$$

이다.

[3]

함수 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 $h(x)$는 증가함수이고 $h(1)=\frac{4}{3}$이므로

$f(\alpha)-g(\alpha)=4$인 α는 $\alpha>1$이다. 한편 문제의 조건으로부터

$$4=f(\alpha)-g(\alpha)=f(\alpha)-g(1)-\int_1^{\alpha}f(x)\,dx+\int_1^{\alpha}f^{-1}(x)\,dx$$

이므로

$$\int_1^{\alpha}f^{-1}(x)\,dx=\frac{10}{3}-f(\alpha)+\frac{1}{3e}\alpha^2e^{\alpha}$$

이다. 그러므로

$$2\alpha e^{\alpha-1}+3\int_1^{\alpha}f^{-1}(x)\,dx=10$$

이다.

41번 문항 해설

정답 : (1) $2\sqrt{2}$ (2) $a=b=4$

(1) $f(x)=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$의 역함수 $f^{-1}(x)$는

닫힌구간 $[0,\ 2]$에서

$-\frac{\pi}{4}\le f^{-1}(x)\le 0,\ 1\le 1-f^{-1}(x)\le 1+\frac{\pi}{4}$이다.

따라서 함수 $g(x)$의 피적분함수는 양수의 값을 가지므로 $g(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 증가한다.

그러므로 $g(2)=M$이다. 역함수의 성질에 의하여

$$\int_0^2 f^{-1}(s)ds=-\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(x)dx=-\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx=2-2\sqrt{2}$$

이다. 따라서 $M=g(2)=2-\int_0^2 f^{-1}(s)ds=2\sqrt{2}$

(2) 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 증가하고,

$g(2)=M$이므로 자연수 n에 대하여 방정식

$g(x)=\frac{M}{n}$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 하나의 실근 d_n

을 갖는다. $g(0)=0$이고, 함수 $g(x)$는 닫힌구간

$[0,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 2)$에서

미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{M}{n}=g(d_n)=d_n\left(\frac{g(d_n)-g(0)}{d_n}\right)=d_n g'(c_n),\ 0<c_n<d_n\le 2$$

인 c_n이 존재한다. $1\le 1-f^{-1}(c_n)=g'(c_n)$이고 $d_n=\frac{M}{ng'(c_n)}\le\frac{M}{n}$이므로 $\lim_{n\to\infty}d_n=0$이다.

$f^{-1}(x)$는 연속이고 $f^{-1}(0)=-\frac{\pi}{4}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}nd_n=\lim_{n\to\infty}\frac{M}{1-f^{-1}(c_n)}=\frac{M}{1-f^{-1}(0)}=\frac{4M}{4+\pi}$$

따라서 $a=b=4$이다.

42번 문항 해설

[1]

$f'(x)=\sqrt{\{f(x)\}^2+1}$ 이고, $\{f'(x)\}^2=\{f(x)\}^2+1$ 이다. $\left(\{f(x)\}^2+1>0\right)$

$f'(x)$를 미분하면

$$f''(x)=\frac{2f(x)f'(x)}{2\sqrt{\{f(x)\}^2+1}}=\frac{f(x)\sqrt{\{f(x)\}^2+1}}{\sqrt{\{f(x)\}^2+1}}=f(x)$$

따라서 $f''(x)=f(x)$이다.

이 식의 양변에 $f'(x)$를 더하면

$$f''(x)+f'(x)=f(x)+f'(x)$$

이고, $f(x)+f'(x)=f(x)+\sqrt{\{f(x)\}^2+1}>0$ 이므로 양변을 $f(x)+f'(x)$로 나누면

$$\frac{f'(x)+f''(x)}{f(x)+f'(x)}=1$$

이다. 양변을 부정적분하면

$$\int\frac{f'(x)+f''(x)}{f(x)+f'(x)}dx=\int 1dx$$

따라서

$$\ln\{f(x)+f'(x)\}=x+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

이다. 여기서

$$f(0)=\int_0^0\sqrt{\{f(t)\}^2+1}\,dt=0,\quad f'(0)=\sqrt{\{f(0)\}^2+1}=1$$

이므로 $\ln\{f(0)+f'(0)\}=\ln 1=C=0$이 성립한다. 그러므로

$$\ln\{f(x)+f'(x)\}=x$$

이다. 따라서 $f(x)+f'(x)=e^x$ 이다.

한편 $f'(x)=\sqrt{\{f(x)\}^2+1}$ 이므로 위 식에 대입하면

$$f(x)+\sqrt{\{f(x)\}^2+1}=e^x$$

$$\sqrt{\{f(x)\}^2+1}=e^x-f(x)$$

이다. 양변을 제곱하면

$$\{f(x)\}^2+1=e^{2x}-2e^xf(x)+\{f(x)\}^2$$

$$\therefore\ f(x)=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

[2]

$f'(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 이므로 $\dfrac{f(x)}{f'(x)}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 이다.

$$\int_0^1\left\{\frac{f(x)}{f'(x)}\right\}^2dx=\int_0^1\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2dx=\int_0^1\frac{(e^x+e^{-x})^2-4}{(e^x+e^{-x})^2}dx$$

$$= \int_0^1 \left\{ 1 - \frac{4}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} \right\} dx = 1 - \int_0^1 \frac{4}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} dx$$

이다. 여기서

$$\int_0^1 \frac{4}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} dx = \int_0^1 \frac{4}{\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)^2} dx = \int_0^1 \frac{4}{\left(\frac{e^{2x}+1}{e^x}\right)^2} dx = \int_0^1 \frac{4e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2} dx$$

이다. $t = e^{2x} + 1$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 2e^{2x}$,

$x = 0$ 일 때 $t = 2$ 이고 $x = 1$ 일 때 $t = e^2 + 1$ 이므로

$$\int_0^1 \frac{4e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2} dx = \int_2^{e^2+1} \frac{2}{t^2} dt = 2\left[-\frac{1}{t}\right]_2^{e^2+1} = -\frac{2}{e^2+1} + 1$$

이다. 따라서

$$\int_0^1 \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2 dx = 1 - \int_0^1 \frac{4}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} dx = 1 - \left(-\frac{2}{e^2+1} + 1\right) = \frac{2}{e^2+1}$$

42번 문항 해설

$(xf(\cos x))' = f(\cos x) - x\sin x f'(\cos x)$이므로

값을 구하고자 하는 식의 첫 번째 항에 부분적분법을 적용하면,

$$\int_0^\theta x\sin x f'(\cos x)dx = [x(-f(\cos x))]_0^\theta + \int_0^\theta f(\cos x)dx$$

두 번째 항에 치환 $x = \frac{\pi}{2} - t$을 적용하면,

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_\theta^0 f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)\cdot(-1)dt = \int_0^\theta f(\cos t)dt$$

이다. 따라서, 구하고자 하는 값은

$$[x(-f(\cos x))]_0^\theta = -\theta f(\cos\theta)$$

세 변의 비가 $2:1:2$인 이등변 삼각형 ABC에 코사인법칙을 적용하면

$\cos\theta = \frac{2^2+2^2-1^2}{2\cdot2\cdot2} = \frac{7}{8}$이다.

따라서 구하고자 하는 값은 $-\theta f(\cos\theta) = -\theta f\left(\frac{7}{8}\right) = -\theta\cdot\frac{1}{\theta} = -1$이다.

44번 문항 해설

$$\int_x^{\sqrt{3}x} f'(t)\,dt = [f'(t)t]_x^{\sqrt{3}x} - \int_x^{\sqrt{3}x} f''(t)\,t\,dt$$

$$= [f'(t)t]_x^{\sqrt{3}x} - \int_x^{\sqrt{3}x} \sin t\,dt = [f'(t)t]_x^{\sqrt{3}x} + [\cos t]_x^{\sqrt{3}x}$$

$$= f'(\sqrt{3}x)\sqrt{3}x - f'(x)x + \cos(\sqrt{3}x) - \cos x$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{\sqrt{3}}} \int_x^{\sqrt{3}x} f'(t)\,dt = \lim_{x\to\frac{\pi}{\sqrt{3}}} \{f'(\sqrt{3}x)\sqrt{3}x - f'(x)x + \cos(\sqrt{3}x) - \cos x\}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{\sqrt{3}}} f'(\sqrt{3}x) \lim_{x\to\frac{\pi}{\sqrt{3}}} \sqrt{3}x - \lim_{x\to\frac{\pi}{\sqrt{3}}} f'(x) \lim_{x\to\frac{\pi}{\sqrt{3}}} x + \cos\pi - \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\pi - 1 - \cos\frac{\pi}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\pi - 0.76$$

45번 문항 해설

먼저, $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx$를 계산하자. $\frac{1}{\sin x}$를 $\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}$로 변형한 후, 제시문 (나)에 의해

$$\frac{1}{1-\cos^2 x} = \frac{-1}{(\cos x - 1)(\cos x + 1)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos x - 1} - \frac{1}{\cos x + 1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x}\right)$$

이 되므로, $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{1-\cos x} + \frac{\sin x}{1+\cos x}\right) dx$를 얻는다. 제시문 (다)에 주어진 치환적분을 이용하여 적분값을 계산하면

$$\left[\frac{1}{2}\ln|1-\cos x| - \frac{1}{2}\ln|1+\cos x|\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right] = \frac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2}) = \ln(\sqrt{2}+1)$$

이다. 한편 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = [-\cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 구하는 적분의 값은 $\ln(\sqrt{2}+1) - \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

(별해)

(1)

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}} dx = \left[\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\ln\left(\tan\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2}) = \ln(\sqrt{2}+1)$$

(2) $$\int \frac{1}{\sin x} ds = \int \csc x\, dx = \int \csc x \frac{\csc x + \cot x}{\csc x + \cot x} dx = -\int \frac{-\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x + \cot x} dx$$

$$= -\ln|\cot x + \csc x| + C = \ln\left|\frac{1}{\cot x + \csc x}\right| + C = \ln\left|\frac{\sin x}{1+\cos x}\right| + C$$

이므로

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx = \left[\ln\frac{\sin x}{1+\cos x}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \ln(\sqrt{2}+1)$$

이다.

46번 문항 해설

양변을 x에 대해 미분하면

$$-e^{-x}\int_0^x g'(t)dt + e^{-x}g'(x) = e^{-x}g'(x) - \sin(2\pi x) - 2\pi x\cos(2\pi x)$$

$g(0)=0$이고, $g(x)-g(0)=e^{x}\{\sin(2\pi x)+2\pi x\cos(2\pi x)\}$

$g(x)=e^{x}\{\sin(2\pi x)+2\pi x\cos(2\pi x)\}$

모든 양의 실수 x에 대해 $\sin(2\pi x)\le 1$, $\cos(2\pi x)\le 1$이므로

$\sin(2\pi x)+2\pi x\cos(2\pi x)\le 1+2\pi x$이다.

그러므로 $g(x)=e^{x}\{\sin(2\pi x)+2\pi x\cos(2\pi x)\}\le e^{x}(1+2\pi x)$이다.

$$\begin{aligned}\int_0^{2023} g(x)dx \le \int_0^{2023} e^{x}(1+2\pi x)dx &= \int_0^{2023} e^{x}dx + 2\pi\int_0^{2023} xe^{x}dx \\ &= \left[e^{x}\right]_0^{2023} + 2\pi\left(\left[xe^{x}\right]_0^{2023} - \int_0^{2023} e^{x}dx\right) \\ &= 4046\pi e^{2023} + (1-2\pi)(e^{2023}-1)\end{aligned}$$

$(1-2\pi)(e^{2023}-1)<0$이므로

$$\int_0^{2023} g(x)dx \le 4046\pi e^{2023} + (1-2\pi)(e^{2023}-1) < 4046\pi e^{2023}$$

47번 문항 해설

$u=x(2\pi-x)$, $v'=f''$ 이라 놓고 제시문 [나]의 부분적분을 사용하면

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} x(2\pi-x)f''(x)\,dx &= [x(2\pi-x)f'(x)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}(2\pi-2x)f'(x)\,dx \\ &= -\int_0^{2\pi}(2\pi-2x)f'(x)\,dx\end{aligned}$$

이다. 다시 한번 부분적분을 하고 $f(0)=f(2\pi)=0$ 을 사용하면

$$-\int_0^{2\pi}(2\pi-2x)f'(x)\,dx = -[(2\pi-2x)f(x)]_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = -2\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 6$$

이다. 그러므로 $\displaystyle\int_0^{2\pi} x(2\pi-x)f''(x)\,dx = 6$ 이다.

48번 문항 해설

$F(x)=x$, $G(x)=\dfrac{1}{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}$ 라 하면 $F'(x)=1$, $G'(x)=-\dfrac{x^3}{(1+x^4)^{\frac{5}{4}}}$ 이다.

부분적분법에 의해

$$\int_0^t \frac{1}{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}\,dx=\int_0^t F'(x)G(x)\,dx=\Big[F(x)G(x)\Big]_0^t-\int_0^t F(x)G'(x)\,dx$$

$$=\left[\frac{x}{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}\right]_0^t+\int_0^t\frac{x^4}{(1+x^4)^{\frac{5}{4}}}\,dx \qquad (\cdots$$

80점)

따라서, 제시문 (ㄱ)의 함수는 다음과 같다.

$$f(t)=\int_0^t\frac{1}{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}\,dx-\int_0^t\frac{x^4}{(1+x^4)^{\frac{5}{4}}}\,dx$$

$$=\left[\frac{x}{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}\right]_0^t+\int_0^t\frac{x^4}{(1+x^4)^{\frac{5}{4}}}\,dx-\int_0^t\frac{x^4}{(1+x^4)^{\frac{5}{4}}}\,dx=\frac{t}{(1+t^4)^{\frac{1}{4}}}$$

($\cdots$40점)

$f(t)$가 $[0,1]$에서 $f(t)\geq 0$이므로 제시문 (ㄷ)의 s는

$$s=\int_0^1|v(t)|\,dt=\int_0^1 v(t)\,dt=\int_0^1\frac{3t^3}{(1+t^4)^{\frac{1}{4}}}\,dt+\int_0^1 3t^2\,dt=\int_0^1\frac{3t^3}{(1+t^4)^{\frac{1}{4}}}\,dt+1$$

위의 적분에서 $u=1+t^4$로 치환하면 치환적분법에 의해서

$$\int_0^1\frac{3t^3}{(1+t^4)^{\frac{1}{4}}}\,dt=\frac{3}{4}\int_1^2 u^{-\frac{1}{4}}\,du=\left[u^{\frac{3}{4}}\right]_1^2=2^{\frac{3}{4}}-1$$

이므로

$$s=\int_0^1\frac{3t^3}{(1+t^4)^{\frac{1}{4}}}\,dt+1=2^{\frac{3}{4}}.$$

따라서 $s^4=8$이다.