1. 넓이공식

다음 넓이공식들은 유명하다.

이차함수에서 $\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$, 삼차함수에서 $\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$
사차함수에서 중근 두 개인 경우 $\frac{|a|}{30}(\beta-\alpha)^5$, 삼중근의 경우 $\frac{|a|}{20}(\beta-\alpha)^5$

이를 일반적인 함수 $a(x-\alpha)^m(x-\beta)^n$에 대해 일반화하면

$$|a|\times\frac{m!\times n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

로 나타낼 수 있지만 보통 여기까지 사용할 일은 거의 없으니 위 네 공식을 암기하면 좋다.

이러한 넓이공식은 대놓고 넓이를 구하는 상황에서 이용하면 계산을 줄일 수 있지만, 사실은 일반적인 정적분 상황에서도 적절한 식 조작을 통해 이를 활용해볼 수 있는 여지가 있다.

바로 예시로 확인해보자.

10. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$는

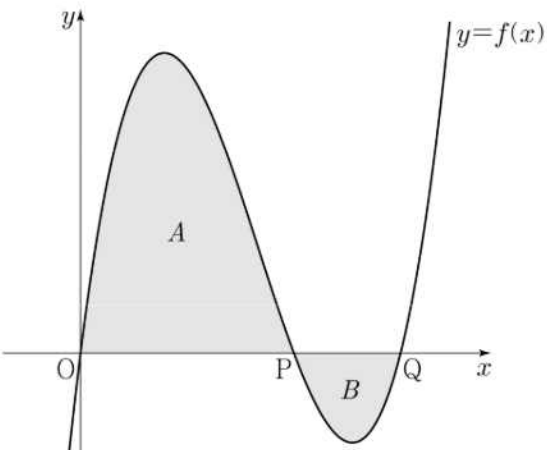
$$f(x)=kx(x-2)(x-3)$$

이다. 곡선 $y=f(x)$와 x축이 원점 O와 두 점 P, Q$(\overline{\mathrm{OP}}<\overline{\mathrm{OQ}})$에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 선분 OP로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 영역을 B라 하자.

$$(A\text{의 넓이})-(B\text{의 넓이})=3$$

일 때, k의 값은? [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$



24학년도 06월 모의고사 10번 문항이다.

결국 구해야 할 것은 $\int_0^3 kx(x-2)(x-3)dx=3$인 k값을 찾는 것이다.

여기서 넓이공식을 활용하면 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\int_0^3 kx(x-2)(x-3)dx = \int_0^3 kx(x-3)^2+kx(x-3)dx = \frac{27}{4}k-\frac{9}{2}k=\frac{9}{4}k=3$$

이상에서 $k=\frac{4}{3}$를 얻는다.

참고로, 넓이공식을 사용할 때에는 항상 부호에 주의하여야 한다는 점에 주의하자.

22. 최고차항의 계수가 4이고 서로 다른 세 극값을 갖는 사차함수 $f(x)$와 두 함수 $g(x)$,

$$h(x)=\begin{cases} 4x+2 & (x<a) \\ -2x-3 & (x \geq a) \end{cases}$$

가 있다. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여

$$|g(x)|=f(x),\ \lim_{t\to 0+}\frac{g(x+t)-g(x)}{t}=|f'(x)|$$

이다.

(나) 함수 $g(x)h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$g(0)=\dfrac{40}{3}$일 때, $g(1)\times h(3)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

[4점]

올해 5월 모의고사 22번 문항이다.

이 문항의 마지막 계산을 요약하면 다음과 같다.

최고차항 계수가 4인 사차함수 $f(x)$에 대해

$f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$이고 $f(k)=f'(k)=0$인 양수 k가 존재한다.

$f(0)=\dfrac{40}{3}$일 때, k의 값은?

$f'(x)=16\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x-k)$로 놓고 전개하여 적분하는 것이 일반적이겠지만, 넓이공식을 활용하면 다음과 같은 풀이도 가능하다.

$\displaystyle\int_0^k 16\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-k)=-\frac{40}{3}$에서,

$$\int_0^k 16\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-k)dx=\int_0^k(16x^2-4)(x-k)dx=\int_0^k 16x^2(x-k)-4(x-k)dx$$

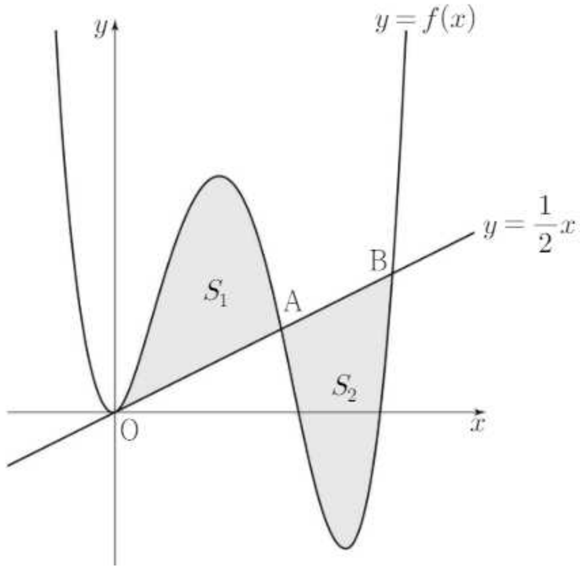
$=-\dfrac{4}{3}k^4+2k^2=-\dfrac{40}{3}$.

적절히 방정식을 풀면 $k=2$를 얻는다.

역시나 부호에 유의하도록 하자.

12. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 원점 O에서 접하고
x좌표가 양수인 두 점 A, B($\overline{\mathrm{OA}}<\overline{\mathrm{OB}}$)에서 만난다.
곡선 $y=f(x)$와 선분 OA로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_1,
곡선 $y=f(x)$와 선분 AB로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_2라 하자.
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{5}$ 이고 $S_1=S_2$일 때, $f(1)$의 값은? [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{17}{2}$



올해 5월 모의고사 12번 문항이다.

계산을 요약하자면 $\int_0^k x^2(x-k+2)(x-k)dx=0$인 실수 k를 찾으면 된다.

역시 다음과 같이 넓이공식을 활용하여 풀 수 있다.

$$\int_0^k x^2(x-k+2)(x-k)dx = \int_0^k x^2(x-k)^2+2x^2(x-k)dx = \frac{k^5}{30}-\frac{k^4}{6}=0.$$

이상에서 $k=5$.

※ 이 문제는 극점의 위치에 대한 비율관계로도 해결할 수 있다.