제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2\sqrt{2}} \times 3^{\sqrt{2}-1}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2\sqrt{2}} = 3^{-\sqrt{2}}$.

$\therefore \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2\sqrt{2}} \cdot 3^{\sqrt{2}-1} = 3^{(-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-1)}$.

$= 3^{-1} = \frac{1}{3}$.

2. 함수 $f(x)=x^3+4x-2$ 에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-3}{h}$ 의 값은? [2점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

$f(1) = 1+4-2 = 3$.

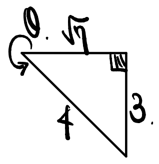
$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$

$= 2f'(1) = 2\cdot(3x^2+4)\Big|_{x=1}$

$= 14$

3. $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 인 θ 에 대하여 $\cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$ 일 때, $\sin\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{5}{6}$ ② $-\frac{4}{5}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $-\frac{2}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$



$\sin\theta = -\frac{3}{4}$.

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x<1) \\ 3x-a & (x\ge 1)\end{cases}$$

에 대하여 $\lim_{x\to 1-}f(x) - \lim_{x\to 1+}f(x) = 2$ 일 때, $f(1)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{x\to 1-} f(x) = 1+a$. $\lim_{x\to 1+} f(x) = 3-a$. $= f(1) = 1$.

$\therefore \lim_{x\to 1-} f(x) - \lim_{x\to 1+} f(x) = (1+a)-(3-a)$.

$= 2a-2 = 2$. $a=2$.

5. 공비가 0이 아닌 실수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$\frac{a_4}{a_3}=4\times\frac{a_3}{a_6},\quad a_5=a_1+3$$

을 만족시킬 때, a_9의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

$a_n=ar^{n-1}$. $r\neq0$.

$\frac{a_4}{a_3}=r$. $\frac{a_3}{a_6}=\frac{1}{r^3}$ $a\neq0$.

$r=4\cdot\frac{1}{r^3}$. $r^4=4$.

$a_5=ar^4=4a$. $4a=a+3$. $a=1$.

$\therefore a_9=16a=16$.

6. 곡선 $y=x^4+x^2-2$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{44}{15}$ ② 3 ③ $\frac{46}{15}$ ④ $\frac{47}{15}$ ⑤ $\frac{16}{5}$

$x^4+x^2-2=(x^2-1)(x^2+2)=0$. $x=-1, 1$.

$\therefore S=\int_{-1}^{1}|(x^4+x^2-2)-0|dx=\int_{-1}^{1}-(x^4+x^2-2)dx$.

$\int_{-1}^{1}(x^4+x^2-2)dx=2\int_0^1(x^4+x^2-2)dx$

$=2\left(\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3-2x\right)\Big|_0^1$

$=2\cdot\frac{3+5-30}{15}=-\frac{44}{15}$

$=\frac{44}{15}$

7. 1보다 큰 두 실수 a, b에 대하여

$$\log_{2b}a=\log_{ab}2=\frac{1}{4}$$

일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$\log_{2b}a=\frac{1}{4}$. $2b=a^4$.

$\log_{ab}2=\frac{1}{4}$. $ab=16$. $=\frac{a^5}{2}$.

$\therefore a=2$. $b=8$. $a+b=10$.

*. *. *. *.
*.

8. $x \geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$x^3+x+6 \geq 2x^2+k$$

가 성립하도록 하는 자연수 k의 개수는? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$x^3-2x^2+x+6 \geq k.$

$f(x)=x^3-2x^2+x+6.$ $f(0)=6.$ ✓

$= x(x-1)^2+6.$ f 그래프 바로 그려도 good.

$f'(x)=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)=0.$

$\therefore f.$ $x=\frac{1}{3}$에서 극대. $x=1$에서 극소.

$f(1)=1-2+1+6=6.$ ✓ $x\geq 0$에서 f 최소 6.

$\therefore k \leq 6.$ $k=1,2,3,4,5,6.$ 6개.

9. 수열 $\{a_n\}$이 $1 \leq n \leq 5$인 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n+a_{10-n}=10, \quad a_n \times a_{10-n}=n^2(-1)^{n-1}$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{9}(a_n)^2$의 값은? [4점]

① 435 ② 440 ③ 445 ④ 450 ⑤ 455

$(a_n)^2+(a_{10-n})^2=(a_n+a_{10-n})^2-2\cdot a_n\cdot a_{10-n}.$

$=10^2-2n^2(-1)^{n-1}.$ $n=1,2,3,4.$

$a_5=5.$

$\therefore \sum_{n=1}^{9}(a_n)^2=(a_5)^2+\sum_{i=1}^{4}\{(a_i)^2+(a_{10-i})^2\}$

$=25+\sum_{i=1}^{4}\{100-2i^2(-1)^{i-1}\}$

$=25+400-2\cdot(1-4+9-16)=445.$

10. 상수 a와 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax+a+\int_0^x f(t)dt$$

를 만족시킬 때, $f(a)$의 값은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$f(0)=a.$ ✓

$f'(x)=x^2+a+f(x).$ $f'(0)=a+f(0)=2a.$ ✓

차수 $n-1.$ $n-1.$

$\therefore f(x)=-x^2+2ax+a.=-x^2-2x-1.=-(x+1)^2.$

$f'(x)=-2x+2a.$

$=(x^2+a)+(-x^2+2ax+a)=2ax+2a.$ $\therefore a=-1.$ ✓

$f(a)=f(-1)=0.$

11. 두 함수

$$f(x)=x^2-(2a^2+2a)x,$$

$$g(x)=\begin{cases} 2x & (x\le a) \\ 2x+a & (x>a)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은? [4점]

① -2 ② $-\frac{3}{2}$ ③ -1 ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ 0

i) $x=a$에서 g가 연속. i $2a=2a+a$. $a=0$.

ii) $x=a$에서 g가 불연속 ; $a\neq 0$.

$\therefore f(a)=a^2-(2a^2+2a)\cdot a=0$.

$a\neq 0$. $a-2a^2-2a=-2a^2-a=0$. $a=-\frac{1}{2}$

$\therefore a=0, -\frac{1}{2}$. 합 $-\frac{1}{2}$.

12. $0\le x\le \frac{\pi}{9}$일 때, 방정식

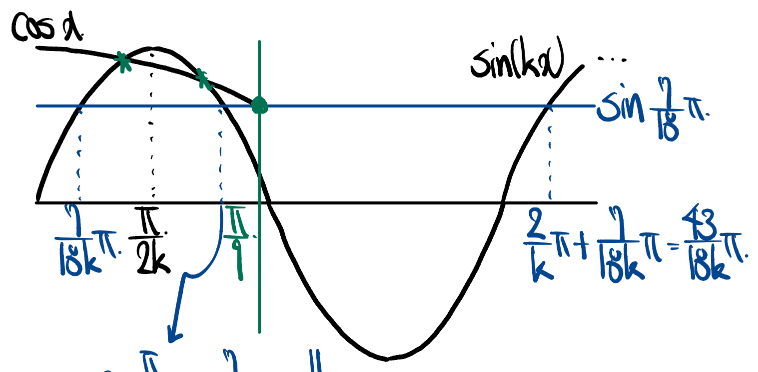
$$\cos x=\sin(kx)$$

의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 양수 k의 값의 집합은 $\{k\,|\,\alpha\le k<\beta\}$이다. $\beta-\alpha$의 값은? [4점]

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

$\cos\frac{\pi}{9}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{9}\right)=\sin\frac{7}{18}\pi$. v.

$\sin(kx)$. 주기 $\frac{2}{k}\pi$



$2\cdot\frac{\pi}{2k}-\frac{7}{18k}\pi=\frac{11}{18k}\pi$

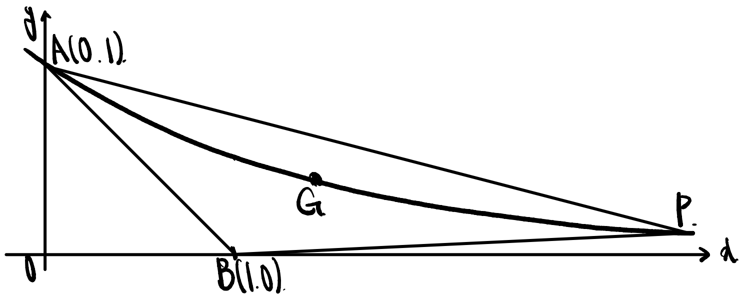
$\therefore \frac{11}{18k}\pi\le\frac{\pi}{9}<\frac{43}{18k}\pi$. $\frac{11}{2}\le k<\frac{43}{2}$.

$\therefore \alpha=\frac{11}{2}$. $\beta=\frac{43}{2}$.

$\beta-\alpha=\frac{43-11}{2}=16$.

13. 두 점 A(0, 1), B(1, 0)과 곡선 $y=2^{-x}\ (x>0)$ 위의 점 P에 대하여 삼각형 ABP의 무게중심 G가 곡선 $y=2^{-x}$ 위의 점일 때, 두 점 P와 G의 y좌표의 차는? [4점]

① $\sqrt{5}-2$ ② $2-\sqrt{3}$ ③ $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{3-\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{1+\sqrt{3}}{8}$



sol 1> $P(p,\ 2^{-p})$. $p>0$.

삼각형 ABP의 무게중심 $G\left(\frac{p+1}{3},\ \frac{2^{-p}+1}{3}\right)$이 $y=2^{-x}$ 위.

$\therefore\ 2^{-\frac{p+1}{3}} = \frac{2^{-p}+1}{3}$.

$2^{-\frac{p+1}{3}} = t\ \ (0<t<2^{-\frac{1}{3}})$로 치환.

$2^{-(p+1)} = t^3$. $2^{-p} = 2t^3 < t$. 확인.

$t = \frac{2t^3+1}{3}$. $2t^3-3t+1 = (t-1)(2t^2+2t-1) = 0$

$\therefore\ t = \frac{-1+\sqrt{1+2}}{2} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. $t^3 = \frac{3t-1}{2} = \frac{3\sqrt{3}-5}{2}\ \boxed{<}\ \frac{1}{2}$. ok.

$3\sqrt{3}-5\ \boxed{<}\ 1$.

$3\sqrt{3}\ \boxed{<}\ 6$.

$\therefore$ (y좌표 차) $= |t-2t^3| = t-2t^3$

$= (1-2t)-(2t^3-3t+1) = 1-2t$.

$= 2-\sqrt{3}$.

sol 2> 선분 AB의 중점 $M\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

선분 PM의 2:1 내분점 G.

k, $2k$

$M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ $G(\alpha,\ 2^{-\alpha})$ $P(3\alpha-1,\ 2^{-(3\alpha-1)})$ $\alpha>\frac{1}{3}$.

$\therefore\ \frac{1+2^{-(3\alpha-1)}}{3} = 2^{-\alpha}$. $2^{-\alpha}=t\ \ (0<t<2^{-\frac{1}{3}})$로 치환 …

14. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 위치는 두 정수 a, b에 대하여 각각

$$x_{\mathrm{P}}(t)=t^3-t^2,\quad x_{\mathrm{Q}}(t)=at^3+bt^2$$

이다. 두 점 P, Q는 출발한 후 시각 $t=t_1\ (t_1>0)$에서만 만나고, 점 Q는 시각 $t=t_1$에서만 운동 방향을 바꿀 때, $a+b$의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$x_P(t_1)=x_Q(t_1)$. $t_1^3-t_1^2 = at_1^3+bt_1^2$.

$t_1>0$. $t_1-1 = at_1+b$.
- $a=1$. 만나지 않거나 $(b\neq-1)$ / $t>0$인 모든 t에 대하여 $x_P=x_Q$ $(b=-1)$. X.
- $a\neq1$. $t_1 = \frac{b+1}{1-a}$.

$v_Q(t_1) = 3at_1^2+2bt_1=0$.

$a=0$, 운동방향 변화 X. $\therefore\ a\neq0$.

$t_1 = -\frac{2b}{3a}$ $(\because\ t_1>0)$ $ab<0$.

$\therefore\ \frac{b+1}{1-a} = -\frac{2b}{3a}$. $ab+3a+2b=0$.

sol 1> $ab+3a+2b+6 = a(b+3)+2(b+3)$

$=(a+2)(b+3)=6$.

$a+2=6$, $b+3=1$; $a=4$, $b=-2$. $ab<0$. ok.

$a+2=3$, $b+3=2$; $a=1$. X.

$a+2=2$. $a=0$. X.

$a+2=1$, $b+3=6$; $a=-1$, $b=3$. $ab<0$. ok.

$a+2<0$, $b+3<0$. $a<-2$, $b<-3$. $ab>6>0$. X

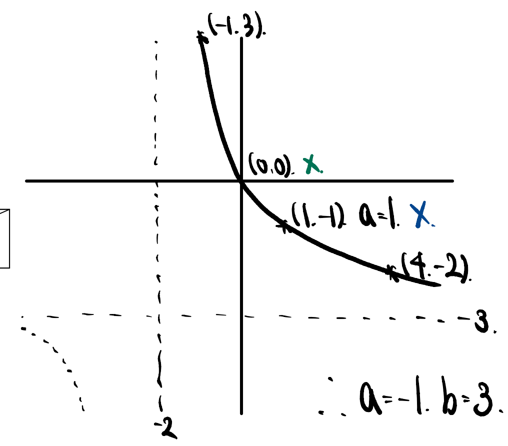
$\therefore\ a=4,\ b=-2$ or $a=-1,\ b=3$.

$a+b=2$.

sol 2> $b(a+2)+3a=0$.

$b = -\frac{3a}{a+2} = \frac{6}{a+2}-3$.

$ab<0$. 제2사분면, 제4사분면 정수점



$\therefore\ a=-1,\ b=3$ or $a=4,\ b=-2$.

15. $a_1>0$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_1\times a_n+8 & (a_n\le 0)\\ a_n-2a_1 & (a_n>0)\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3>0$이고 $a_5+2a_4=8$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{11}{3}$ ③ 4 ④ $\frac{13}{3}$ ⑤ $\frac{14}{3}$

sol 1> $a_1>0$

$a_2=a_1-2a_1=-a_1<0$

$a_3=a_1\times a_2+8=8-a_1^2>0 \quad 0<a_1<2\sqrt{2}$

$a_4=a_3-2a_1=-a_1^2-2a_1+8$

i) $a_4>0$; $-a_1^2-2a_1+8>0 \quad 0<a_1<2$ V

$a_5=a_4-2a_1$

$a_5+2a_4=3a_4-2a_1$

$=-3a_1^2-8a_1+24=8$

$3a_1^2+8a_1-16=0 \quad a_1=\cancel{-4},\ \frac{4}{3}$

ii) $a_4\le 0$; $2\le a_1<2\sqrt{2}$

$a_5=a_1\times a_4+8$

$a_5+2a_4=a_4\times(a_1+2)+8$

$=(-a_1^2-2a_1+8)(a_1+2)+\cancel{8}=\cancel{8}$

$a_1=\cancel{-4},\cancel{-2},\ 2$

$\therefore a_1=\frac{4}{3},\ 2 \qquad$ 합 $\frac{10}{3}$

sol 2>

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{a_{n+1}-8}{a_1} & (a_n\le 0,\ a_{n+1}\le 8)\ *\\ a_{n+1}+2a_1 & (a_n>0,\ a_{n+1}>-2a_1)\ *\end{cases}$$

$a_3>0 \quad a_4=a_3-2a_1$

$$a_5=\begin{cases}a_1\times a_4+8 & (a_4\le 0,\ a_3\le 2a_1)\\ a_4-2a_1 & (a_4>0,\ a_3>2a_1)\end{cases}$$

i) $a_5+2a_4=(a_1\times a_4+\cancel{8})+2a_4=\cancel{8} \quad \cancel{a_1=-2}$ or $a_4=0$

$a_4=0$

$a_3=2a_1$ $=4\le 8$ ok

$a_3=2a_1 \to a_2=2-\frac{8}{a_1}$ $=-2>-4$ ok

$a_2=2-\frac{8}{a_1} \to a_1\le 0$ X

$a_2=2-\frac{8}{a_1} \to a_1=2-\frac{8}{a_1}+2a_1$

$a_1^2+2a_1-8=0 \quad a_1=\cancel{-4},\ 2$ V

$a_3=2a_1 \to a_2=4a_1$

$a_2=4a_1 \to a_1\le 0$ X $\left(a_1^2=4-\frac{8}{a_1}\quad a_1\notin\mathbb{R}\ldots\right)$

$a_2=4a_1 \to a_1=6a_1$ X

ii) $a_5+2a_4=(a_4-2a_1)+2a_4=8 \quad a_4=\frac{2a_1+8}{3}$

$a_3=a_4+2a_1=\frac{8(a_1+1)}{3}>0$ $=\frac{56}{9}\le 8$ ok

$a_2=\frac{a_3-8}{a_1}=\frac{8}{3}-\frac{16}{3a_1}$ $=-\frac{4}{3}>-\frac{8}{3}$ ok

$a_2=\frac{8}{3}-\frac{16}{3a_1} \to a_1\le 0$ X

$a_2=\frac{8}{3}-\frac{16}{3a_1} \to a_1=\frac{8}{3}-\frac{16}{3a_1}+2a_1$

$3a_1^2+8a_1-16=0 \quad a_1=\cancel{-4},\ \frac{4}{3}$ V

$a_2=\frac{14a_1+8}{3}$

$a_2=\frac{14a_1+8}{3} \to a_1\le 0$ X

$a_2=\frac{14a_1+8}{3} \to a_1=\frac{20a_1+8}{3} \quad a_1=-\frac{8}{17}<0$ X

$\therefore a_1=2,\ \frac{4}{3}$

15. $a_1 > 0$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_1 \times a_n + 8 & (a_n \le 0) \\ a_n - 2a_1 & (a_n > 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3 > 0$이고 $a_5 + 2a_4 = 8$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{11}{3}$ ③ 4 ④ $\frac{13}{3}$ ⑤ $\frac{14}{3}$

단답형

16. $\int_1^4 (x^2 + 10x)dx$의 값을 구하시오. [3점] 96.

$\int_1^4 (x^2+10x)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + 5x^2\right)\Big|_1^4$

$= \frac{64-1}{3} + 5\cdot(16-1)$

$= 96$.

17. 부등식 $25^{x^2} \le 5^{10-x}$을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오. [3점] 5.

$25^{x^2} = 5^{2x^2} \le 5^{10-x}$.

$2x^2 \le 10 - x$.

$2x^2 + x - 10 = (2x+5)(x-2) \le 0$. $-\frac{5}{2} \le x \le 2$.

$\therefore x = -2, -1, 0, 1, 2$. 5개.

18. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_n = n^3 - n^2 - 19$일 때, $a_{10} - a_1$의 값을 구하시오. [3점] 271.

sol 1> $a_1 = S_1$
$= 1-1-19$
$= -19.$

$a_{10} = S_{10} - S_9$
$= (10^3 - 10^2 - 19) - (9^3 - 9^2 - 19)$
$= 252.$

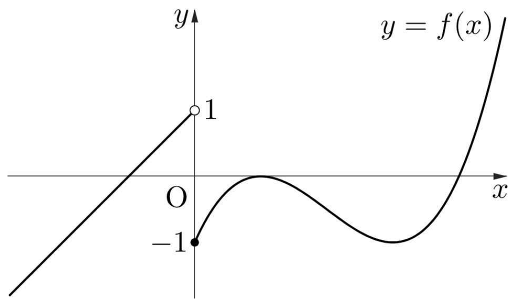
$\therefore a_{10} - a_1 = 252 - (-19)$
$= 271.$

sol 2> $a_n = S_n - S_{n-1}$
$= (n^3 - n^2 - 19) - \{(n-1)^3 - (n-1)^2 - 19\}$
$= (3n^2 - 3n + 1) - (2n - 1)$
$= 3n^2 - 5n + 2. \quad (n \geq 2)$ $\quad \therefore a_{10} = 252.$

19. 함수

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x<0) \\ \frac{1}{4}(x-1)^2(x-4) & (x \geq 0) \end{cases}$$

에 대하여 $\lim_{x \to a} f(f(x))$의 값이 존재하지 않도록 하는 실수 a의 개수를 구하시오. [3점]



$f.$ $x = 0$에서만 극한값 존재 X.

$\therefore x = 0.$ & $f(x) = 0.$ $x = 0, -1, 1, 4$에서 극한값 확인.

$x = 0$에서. 극한값 존재
$x \to 0-.$ $f(x) \to 1-.$ $f(f(x)) \to 0-.$
$x \to 0+.$ $f(x) \to -1+.$ $f(f(x)) \to 0+.$

$x = -1$에서. 극한값 존재 X
$x \to -1-.$ $f(x) \to 0-.$ $f(f(x)) \to 1-.$
$x \to -1+.$ $f(x) \to 0+.$ $f(f(x)) \to -1+.$

$x = 1$에서. 극한값 존재
$x \to 1-.$ $f(x) \to 0-.$ $f(f(x)) \to 1-.$
$x \to 1+.$ $f(x) \to 0-.$ $f(f(x)) \to 1-.$
여기서 판단하고 걸러도 good.

$x = 4$에서. 극한값 존재 X
$x \to 4-.$ $f(x) \to 0-.$ $f(f(x)) \to 1-.$
$x \to 4+.$ $f(x) \to 0+.$ $f(f(x)) \to -1+.$

$\therefore a = -1, 4.$ 2개

20. 최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$의 두 부정적분 $F(x)$, $G(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$F(x)G(x) = (x^2-1)^2(x^2-4)$$

를 만족시킬 때, $\{f(0)\}^2 + |F(0) - G(0)|$의 값을 구하시오. 13 [4점]

sol 1> $f(x) = 3x^2 + ax + b.$ $\quad a. b.$ 상수 $\quad = 3x^2 - 3.$

$F(x) = x^3 + \frac{1}{2}ax^2 + bx + C_1.$
$G(x) = x^3 + \frac{1}{2}ax^2 + bx + C_2$ $\quad C_1. C_2.$ 적분상수

$F(x)G(x) = (x^3 + \cancel{\frac{1}{2}ax^2} + bx + C_1)(x^3 + \cancel{\frac{1}{2}ax^2} + bx + C_2)$
$= (x^4 - 2x^2 + 1)(x^2 - 4) = x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 4$

5차항. $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = a = 0.$ ✓

4차항. $2b = -6.$ $b = -3.$ ✓

3차항. $C_1 + C_2 = 0.$
상수항. $C_1 C_2 = -4$ $\quad \therefore C_1 = 2. C_2 = -2$ or $C_1 = -2. C_2 = 2.$

$\therefore \{f(0)\}^2 + |F(0) - G(0)| = 9 + 4$
$= 13.$

sol 2> $F'(x) = 0. \Leftrightarrow G'(x) = 0. \Leftrightarrow f(x) = 0.$

$(x^2-1)^2(x^2-4) = \{(x+1)^2(x-2)\}\{(x-1)^2(x+2)\}$

두 함수
$y = (x+1)^2(x-2).$ $\quad y = (x-1)^2(x+2).$
각각 $x = -1. 1$에서 극값. ✓

$\therefore f(x) = 3(x+1)(x-1).$

$F(x) = (x+1)^2(x-2).$ $\quad G(x) = (x-1)^2(x+2).$

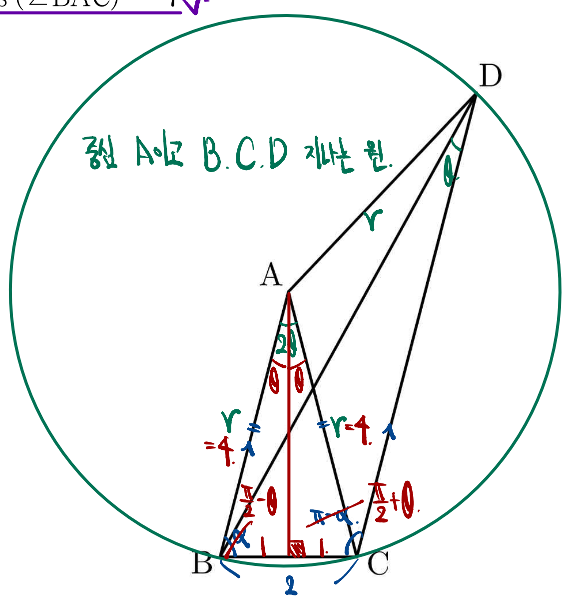
또는 $F(x) = (x-1)^2(x+2).$ $\quad G(x) = (x+1)^2(x-2)$

$\{f(0)\}^2 + |F(0) - G(0)| = 9 + 4$
$= 13.$

21. 그림과 같이

$\overline{AB}=\overline{AC}$, $\overline{BC}=2$, $\angle BAC=2\angle BDC$

이고 두 선분 AB와 CD가 평행한 사각형 ABCD에 대하여 $\frac{\sin(\angle BDC)}{\cos(\angle BAC)}=\frac{2}{7}$일 때, $\overline{BD}^2$의 값을 구하시오. [4점] 60.



반지름 r.

A에서 BC에 수선의 발 내려도 good

△BDC에서 사인법칙 $\frac{2}{\sin\theta}=2r$. $\sin\theta=\frac{1}{r}$

△BAC에서 코사인법칙 $\cos 2\theta=\frac{r^2+r^2-4}{2\cdot r\cdot r}=1-\frac{2}{r^2}$

$\therefore \frac{\frac{1}{r}}{1-\frac{2}{r^2}}=\frac{r}{r^2-2}=\frac{2}{7}$ ($r>0$)

$r\ne\sqrt{2}$.

$2r^2-7r-4=(2r+1)(r-4)=0$. $r=4$

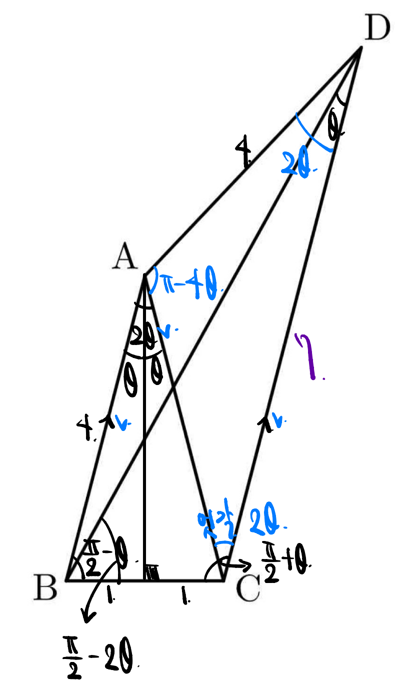
$r=\sqrt{2}$; B.A.D 일직선 위, 사각형 X.

$\therefore \sin\theta=\frac{1}{4}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

sol 1> △BCD에서 사인법칙 $\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=\frac{\overline{BD}}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}$.

$\overline{BD}^2=(2\cdot4\cdot\frac{\sqrt{15}}{4})^2=60$.

sol 2>



△BCD에서 사인법칙.

$\frac{\overline{CD}}{\sin(\frac{\pi}{2}-2\theta)}=\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}$. $\overline{CD}=\overline{BC}\cdot\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}$ $=7$

코사인법칙

$\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2-2\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CD}\cdot\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)$

$=4+49-2\cdot2\cdot7\cdot(-\frac{1}{4})=60$.

22. $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge0$이고 $f(0)=1$, $f'(0)>-1$인 삼차함수 $f(x)$가 있다. 함수

$$g(x)=\begin{cases}2-f(x) & (f(x)\le -x+1)\\ f(x) & (f(x)>-x+1)\end{cases}$$

가 $x=k\,(k\ne0)$에서만 미분가능하지 않을 때, $g(k)$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 91.

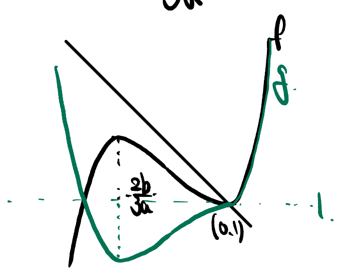
$x=0$에서 g 미분가능.
- $x=0$ 근처에서 $f(x)-(-x+1)$ 부호 변화. ; $\{f(x)\}'|_{x=0}=\{2-f(x)\}'|_{x=0}$. $f'(0)=0$.
- 부호 변화 X. ; $f'(0)=-1$ X.

$\therefore f(x)=ax^3+bx^2+1$. $a\ne0$.

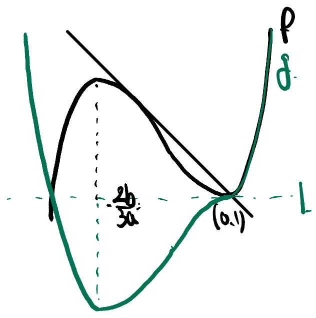
$a<0$; 적당히 큰 양수 x에 대하여 $f(x)<0$. X. $\therefore a>0$.

$f'(x)=3ax^2+2bx=0$. $x=0,\ -\frac{2b}{3a}$.

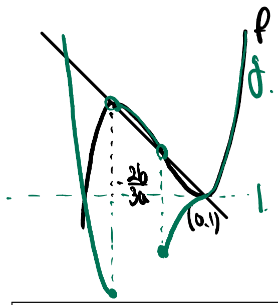
$b>0$. $-\frac{2b}{3a}<0$; $x=0$에서 극소.



$y=f(x)$. $y=-x+1$. $x\ne0$에서 만나지 않을 때.
g 미분가능. X.



$y=f(x)$. $y=-x+1$ 접할 때
g 미분가능. X.



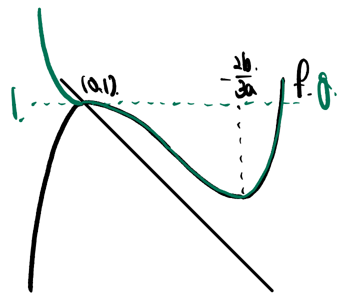
$y=f(x)$. $y=-x+1$ 세 점에서 만날 때
g. 두 점에서 미분X. X.

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

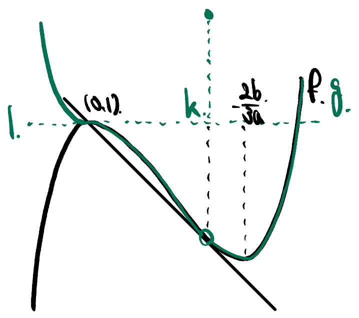
○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

b<0. $-\frac{2b}{3a}>0$; $x=0$에서 극대



$x\neq0$에서 교점 X.

g. 미분가능. X.

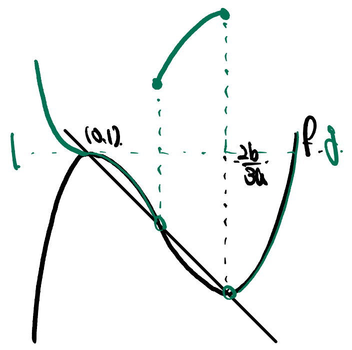


접할 때.

g. 한 점에서만 미분X. ok.

세 근의 합. $-\frac{b}{a}=0+k+k$.

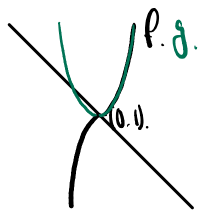
$k=-\frac{b}{2a}$



교점 3개

g. 두 점에서 미분X.

b=0 ; $f(x)=ax^3+1$.



g. 미분가능. X.

$\therefore f(x)=ax^3+bx^2+1=x^2(ax+b)+1=ax\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+(-x+1)$.

일차항. $a\cdot\left(\frac{b}{2a}\right)^2-1=\frac{b^2}{4a}-1=0.\quad a=\frac{b^2}{4}$.

극소. $f\left(-\frac{2b}{3a}\right)=\left(-\frac{2b}{3a}\right)^2\cdot\left\{a\cdot\left(-\frac{2b}{3a}\right)+b\right\}+1$

$=\frac{64}{27b}+1.$ $x\geq0$에서의 최소.

$\geq0.\quad b\leq-\frac{64}{27}$

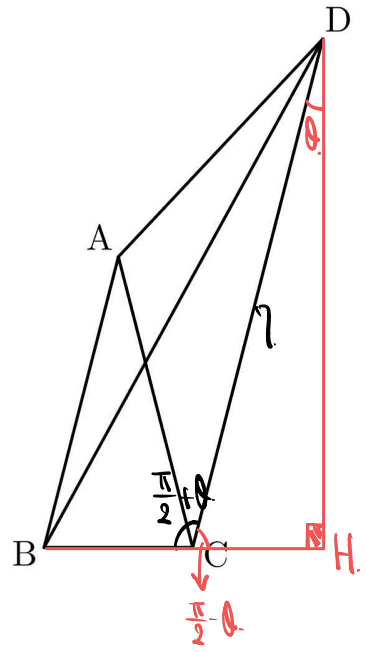
$\therefore g(k)=g\left(-\frac{b}{2a}\right)$

$=2-f\left(-\frac{b}{2a}\right)=2-\left[\left(-\frac{2}{b}\right)^3\left\{\frac{b^2}{4}\cdot\left(-\frac{2}{b}\right)+b\right\}+1\right]$

$=1-\frac{2}{b}\leq1-2\cdot\left(-\frac{27}{64}\right)=\frac{59}{32}$.

$p=32\quad q=59.\quad p+q=91.$

21. sol 2-1> 점 D에서 직선 BC에 내린 수선의 발 H.

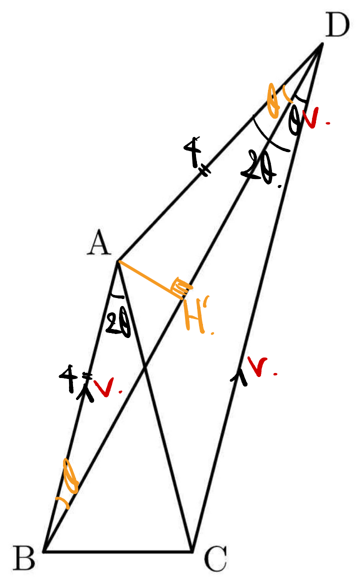


$\overline{CH}=7\cdot\sin\theta=\frac{7}{4}\qquad\overline{DH}=7\cdot\cos\theta=\frac{7}{4}\sqrt{15}$.

$\therefore\overline{BD}^2=\left(2+\frac{7}{4}\right)^2+\left(\frac{7}{4}\sqrt{15}\right)^2$

$=\frac{15}{16}(15+49)=60.$

21. sol 2-2> 점 A에서 선분 BD에 내린 수선의 발 H'.



엇각도 ok.

$\overline{BD}=2\cdot\overline{BH'}$

$=2\cdot4\cos\theta=2\cdot4\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}$

$=2\sqrt{15}$.

풀이 제공해주신 감귤 님 감사합니다.

*

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0+} \frac{e^{x^2}-1}{2x^2}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

$x^2 = t \to 0+$

$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{x^2}-1}{2x^2} = \lim_{t\to 0+} \frac{e^t-1}{2t}$

$= \frac{1}{2}$

24. $\int_2^3 \frac{x}{x^2-3}\,dx$ 의 값은? [3점]

① $\ln 2$ ② $\frac{1}{2}\ln 5$ ③ $\frac{1}{2}\ln 6$ ④ $\frac{1}{2}\ln 7$ ⑤ $\frac{3}{2}\ln 2$

$\int_2^3 \frac{x}{x^2-3}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-3|\Big|_2^3$

$2<x<3$인 모든 실수 x에 대하여 $x^2-3>0$.

$= \frac{1}{2}\ln(x^2-3)\Big|_2^3$

$= \frac{1}{2}(\ln 6 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 6$

25. 등비수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2^{n-1}\times a_n)=\frac{4}{5}\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1-1$$

을 만족시킬 때, a_3의 값은? [3점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{2}{9}$ ④ $\frac{5}{18}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

$a_n = ar^{n-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴 $-1<r<1$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a}{1-r}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(2^{n-1}\times a_n)$이 수렴. $-\frac{1}{2}<r<\frac{1}{2}$ $\sum_{n=1}^{\infty}(2^{n-1}\times a_n) = \frac{a}{1-2r}$

$\frac{a}{1-2r} = \frac{4}{5}\times\frac{a}{1-r}$ $a\cdot 5(1-r) = 4a\cdot(1-2r)$

$\therefore a=0$ or $5-5r=4-8r$. $r=-\frac{1}{3} \in \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ok.

$a=0$; $0=0-1$ X.

$r=-\frac{1}{3}$; $\frac{3}{5}a = a-1$ $a=\frac{5}{2}$

$\therefore a_n = \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ $a_3 = \frac{5}{18}$

26. $x>1$에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{1}{\ln x}$의 역함수를 $g(x)$라 하면 방정식 $f(x)=g(x)$는 오직 하나의 실근 α를 갖는다. $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-g(x)}{x-\alpha}$의 값을 α로 나타낸 것은? [3점]

① $-\alpha+\ln\alpha$ ② $-\alpha$ ③ 0
④ α ⑤ $\alpha-\ln\alpha$

$f'(x) = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$ f는 $x>1$에서 감소

$y=f(x)$. $y=g(x)$. 교점 $y=x$ 위

$f(\alpha)=g(\alpha)=\alpha$. $\frac{1}{\ln\alpha}=\alpha$. $\alpha\ln\alpha=1$.

$g'(\alpha) = \frac{1}{f'(f(\alpha))} = \frac{1}{f'(\alpha)}$

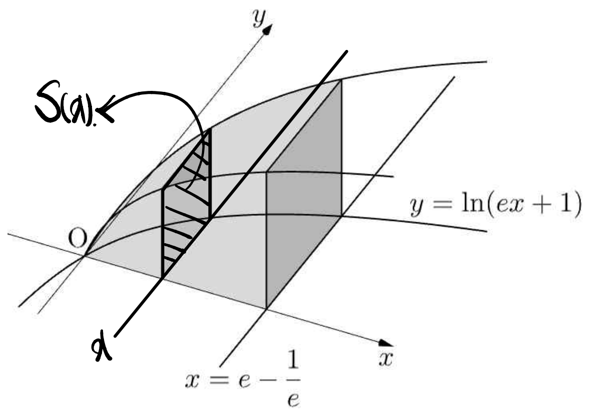
$\therefore \lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-g(x)}{x-\alpha} = f'(\alpha)-g'(\alpha)$

$= f'(\alpha) - \frac{1}{f'(\alpha)}$

$= -\frac{1\cdot\alpha}{\alpha(\ln\alpha)^2} + \{+\alpha(\ln\alpha)^2\}$

$= -\alpha+\ln\alpha$

27. 그림과 같이 곡선 $y=\ln(ex+1)$과 x축 및 직선 $x=e-\frac{1}{e}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\frac{e}{2}-\frac{1}{e}$　② $e-\frac{1}{2e}$　③ $e-\frac{1}{e}$　④ $2e-\frac{1}{e}$　⑤ $2\left(e-\frac{1}{e}\right)$

$S(x)=\{\ln(ex+1)\}^2$

$\therefore V=\int_0^{e-\frac{1}{e}} S(x)dx = \int_0^{e-\frac{1}{e}} \underset{v'}{1}\cdot\{\ln(\underset{u}{ex}+1)\}^2 dx$

$=\left(x+\frac{1}{e}\right)\{\ln(ex+1)\}^2\Big|_0^{e-\frac{1}{e}} - \int_0^{e-\frac{1}{e}} \underbrace{\left(\cancel{x+\frac{1}{e}}\right)\cdot\left\{2\ln(ex+1)\cdot\frac{e}{\cancel{ex+1}}\right\}}_{=2\ln(ex+1)}dx$

$=\{(e\cdot 2^2)-(\frac{1}{e}\cdot 0^2)\} - 2\cdot\{(x+\frac{1}{e})\ln(ex+1)-(x+\frac{1}{e})\}\Big|_0^{e-\frac{1}{e}}$

$=\cancel{(4e)}-2\cdot[\{\cancel{(e\cdot 2)}-(\underline{e}-\cancel{\frac{1}{e}+\frac{1}{e}})\}-\{(\frac{1}{e}\cdot 0)-\underline{\frac{1}{e}}\}]$

$=2\left(e-\frac{1}{e}\right)$

V.

28. 함수 $f(x)=\frac{x^2}{x^2-2x+2}$에 대하여 두 실수 m, M이 다음 조건을 만족시킬 때, m의 최댓값과 M의 최솟값의 합은? [4점]

> $x>y$인 임의의 두 실수 x, y에 대하여
> $$\underbrace{m(x-y)<f(x)-f(y)}_{(*)}\underbrace{<M(x-y)}_{(**)}$$
> 가 성립한다.

① $\frac{3}{2}$　② $\frac{7}{4}$　③ 2　④ $\frac{9}{4}$　⑤ $\frac{5}{2}$

sol 1>

$(*)$. $f(y)-my<f(x)-mx$; $f(x)-mx$. 증가함수.

$\therefore$ 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)-m\geq 0$. $f'(x)\geq m$.

$(**)$. $f(x)-Mx<f(y)-My$. ; $f(x)-Mx$. 감소함수.

$\therefore$ 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq M$

$f'(x)=\frac{2x(x^2-2x+2)-x^2(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}$

$=-\frac{2x(x-2)}{(x^2-2x+2)^2}$.　$x=1$ 대칭.　$=-\frac{2\{(x-1)^2-1\}}{\{(x-1)^2+1\}^2}$

$f(x)-1=\frac{2(x-1)}{x^2-2x+2}$이 점 $(1,0)$에 대하여 대칭으로

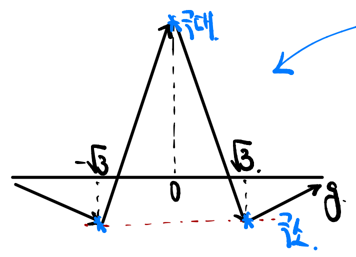
대칭성 파악해도 good.

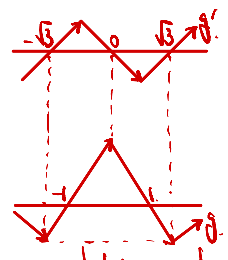
$g(x):=f'(x+1)=-\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

$g'(x)=-\frac{4x\cdot(x^2+1)^2-2(x^2-1)\cdot\{2\cdot 2x\cdot(x^2+1)\}}{(x^2+1)^4}$

$=\frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}=0$.　$x=-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$

$x<-\sqrt{3}$. $g'<0$. → $x=-\sqrt{3}$. 극소.
$-\sqrt{3}<x<0$. $g'>0$. → $x=0$. 극대
$0<x<\sqrt{3}$. $g'<0$. → $x=\sqrt{3}$. 극소.
$x>\sqrt{3}$. $g'>0$.





이렇게도 good

$\therefore \underset{g(x)}{\overset{f'(x)}{}}$. $x=\pm\sqrt{3}$에서 극소 & 최소 $g(\sqrt{3})=-\frac{2(3-1)}{(3+1)^2}=-\frac{1}{4}$.　($1\pm\sqrt{3}$)

$x=0$에서 극대 & 최대 $g(0)=-\frac{-2}{1^2}=2$.　(1)

$m\leq-\frac{1}{4}$　$M\geq 2$.

$\therefore$ (m 최대)+(M 최소)$=\frac{7}{4}$

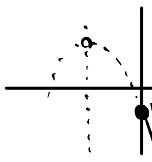
sol 1-1> $g(x)=-\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}\ge m$. $mx^4+2(m+1)x^2+m-2\le0$.

$m=0$; $2x^2-2\le0$. $x<-1$ or $x>1$에서 성립 X.

$m<0$; $x^2=t\,(t\ge0)$로 치환. $mt^2+2(m+1)t+m-2\le0$.

축. $t=-\frac{2(m+1)}{2m}=-\frac{m+1}{m}$.

$m<-1$.



$m-2<-3$. 성립

$-1<m<0$ $mt^2+2(m+1)t+m-2=0$의 판별식 D

$D/4=(m+1)^2-m(m-2)$

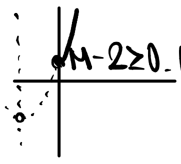
$=4m+1\le0$. $m\le-\frac{1}{4}$.

$g(x)=-\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}\le M$. $Mx^4+2(M+1)x^2+M-2\ge0$.

$M=0$; $2x^2-2\ge0$. $-1<x<1$에서 성립 X.

$M>0$; $x^2=t\,(t\ge0)$로 치환. $Mt^2+2(M+1)t+M-2\ge0$.

축 $t=-\frac{M+1}{M}<0$.



$M-2\ge0$. $M\ge2$.

$\therefore m\le-\frac{1}{4}$ $M\ge2$.

sol 2> $x-y>0$. $\therefore m<\frac{f(x)-f(y)}{x-y}<M$.

f''이 존재. f에 직선인 구간 X.

$x_1\ne x_2$. $a, b\in\mathbb{R}$.

(1) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge f'(a)$.

$\Rightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>f'(a)$ & $\lim_{\substack{x_1\to a\\ x_2\to a}}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(a)$ … Ⓐ.

(2) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le f'(b)$.

$\Rightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<f'(b)$ & $\lim_{\substack{x_1\to b\\ x_2\to b}}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(b)$

(상세해설 참고.)

By √(& Ⓐ.

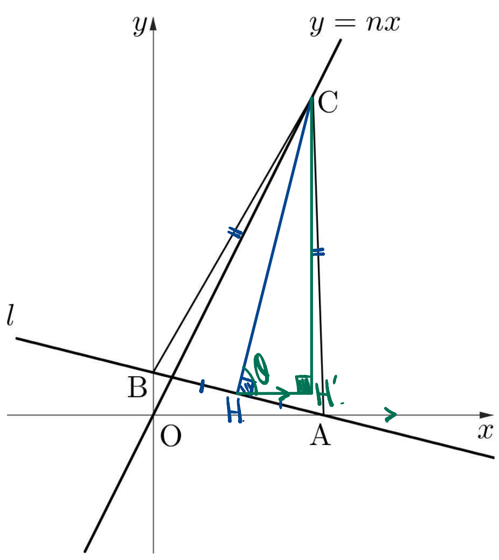
$-\frac{1}{4}\le f'(x)\le2 \Rightarrow -\frac{1}{4}<$(평균변화율)$<2$.

$\therefore m\le-\frac{1}{4}$ $M\ge2$.

단답형

29. 그림과 같이 직선 $l : y=-\dfrac{1}{n+2}x+n^2$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$가 되도록 직선 $y=nx$ 위에 점 C를 잡는다. 점 C와 직선 l 사이의 거리를 a_n이라 할 때, $100\times\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{n^4}-\dfrac{1}{4}n\right)$의 값을 구하시오.

100. [4점]



sol 1> $A(n^2(n+2), 0)$. $B(0, n^2)$. $\therefore H\left(\dfrac{n^2(n+2)}{2}, \dfrac{n^2}{2}\right)$

직선 CH. $y=(n+2)\left\{x-\dfrac{n^2(n+2)}{2}\right\}+\dfrac{n^2}{2}=(n+2)x-\dfrac{n^2(n+2)^2}{2}+\dfrac{n^2}{2}$.

C ; $nx=(n+2)x-\dfrac{n^2(n+2)^2}{2}+\dfrac{n^2}{2}$.

$\therefore x=\dfrac{n^2(n+2)^2}{4}-\dfrac{n^2}{4}$.

$a_n=\overline{CH}=\overline{HH'}\cdot\sec\theta$.

$=\left\{\dfrac{n^2(n+2)^2}{4}-\dfrac{n^2}{4}-\dfrac{n^2(n+2)}{2}\right\}\cdot\sqrt{(n+2)^2+1}$

$=\dfrac{1}{4}n^2\{(n+2)^2-1-2(n+2)\}\sqrt{(n+2)^2+1}$

$=\dfrac{1}{4}n^2(n^2+2n-1)\sqrt{(n+2)^2+1}$

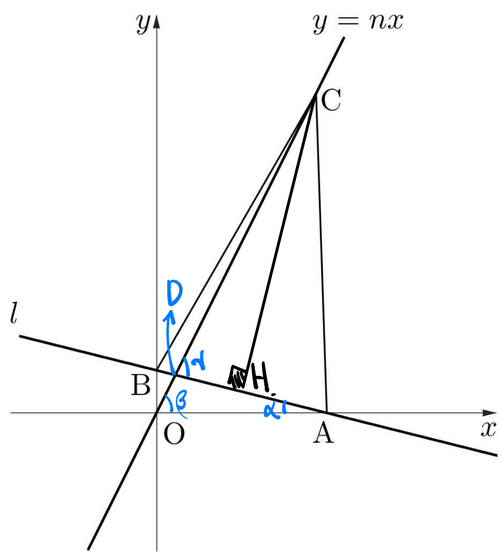
$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{n^4}-\dfrac{1}{4}n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{(n^2+2n-1)\sqrt{(n+2)^2+1}-n^3}{4n^3}\right\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2+2n-1)^2(n^2+4n+5)-n^6}{4n^3\{(n^2+2n-1)\sqrt{(n+2)^2+1}+n^3\}}$ ⊛

$=\dfrac{1}{4\cdot 2}$ (⊛의 5차항)

$=\dfrac{1}{8}(2\cdot 2+4)=1$

$\therefore 100\times\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{n^4}-\dfrac{1}{4}n\right)=100$



sol 2> D ; $nx=-\dfrac{1}{n+2}x+n^2$. $\{n(n+2)+1\}x=n^2(n+2)$.

$\therefore x=\dfrac{n^2(n+2)}{(n+1)^2}$.

$H\left(\dfrac{n^2(n+2)}{2}, \dfrac{n^2}{2}\right)$

$a_n=\overline{DH}\cdot\tan\alpha=\left\{\dfrac{n^2(n+2)}{2}-\dfrac{n^2(n+2)}{(n+1)^2}\right\}\sec\alpha\cdot\tan(\alpha+\beta)$.

$\tan\alpha=\dfrac{1}{n+2}$. $\sec\alpha=\sqrt{1+\dfrac{1}{(n+2)^2}}=\dfrac{\sqrt{(n+2)^2+1}}{n+2}$.

$\tan\beta=n$.

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\dfrac{1}{n+2}+n}{1-\dfrac{1}{n+2}\cdot n}=\dfrac{(n+1)^2}{2}$.

$=n^2(n+2)\left\{\dfrac{(n+1)^2}{4}-\dfrac{1}{2}\right\}\cdot\dfrac{\sqrt{(n+2)^2+1}}{n+2}$.

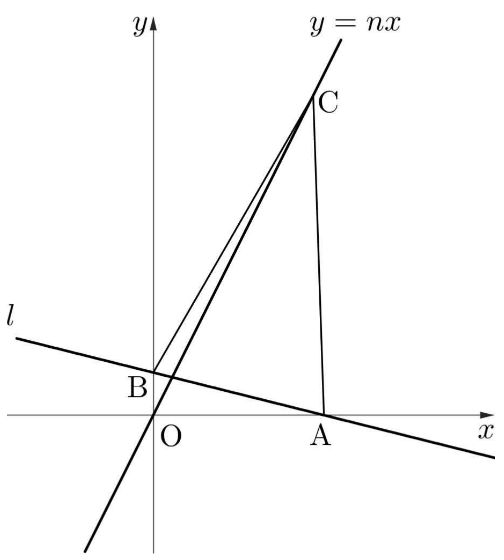
$=\dfrac{1}{4}n^2(n^2+2n-1)\sqrt{(n+2)^2+1}$.

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

단답형

29. 그림과 같이 직선 $l : y = -\frac{1}{n+2}x + n^2$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}}$가 되도록 직선 $y = nx$ 위에 점 C를 잡는다. 점 C와 직선 l 사이의 거리를 a_n이라 할 때, $100 \times \lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_n}{n^4} - \frac{1}{4}n \right)$의 값을 구하시오. [4점]



30. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_0^{8\pi} f(x)dx$의 최댓값을 구하시오. [4점] 16.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\{f(x)\}^2 = \lvert 9\sin^6 x \cos x \rvert$ 이다. (나) $0 < x_1 < 8\pi$, $0 < x_2 < 8\pi$이고 $f(x_1)f(x_2) < 0$인 두 실수 x_1, x_2가 존재한다. V.

$g(x) := \sqrt{|9\sin^6 x \cos x|} = |3\sin^3 x|\sqrt{|\cos x|}$.

정수 n. $g\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$.

$g(\pi - x) = |3\sin^3(\pi - x)|\sqrt{|\cos(\pi - x)|}$.

$= |3\sin^3 x|\sqrt{|-\cos x|}$

$= |3\sin^3 x|\sqrt{|\cos x|} = g(x)$; $x = \frac{\pi}{2}$ 대칭. V.

$g(x+\pi) = |3\sin^3(x+\pi)|\sqrt{|\cos(x+\pi)|}$

$= |-3\sin^3 x|\sqrt{|-\cos x|} = g(x)$. V.

$\therefore$ 정수 n. $\int_{\frac{n\pi}{2}}^{\frac{n+1}{2}\pi} g(x)dx = $ (상수)

최소 1개 최소 1개

$f(x) = g(x)$ or $-g(x)$.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3|\sin^3 x|\sqrt{|\cos x|}\,dx = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - 1)\sqrt{\cos x}\cdot(-\sin x)dx$ $\cos x = t$.

$= 3\int_1^0 (t^2 - 1)\sqrt{t}\,dt = 3\int_0^1 (\sqrt{t} - t^2\sqrt{t})dt$.

$= 3\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}}\right)\Big|_0^1 = \frac{8}{7} = S$.

$\therefore \int_0^{8\pi} f(x)dx$ 최대. $15\cdot S + (-1)\cdot S = 14S = 16$.

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.