2025

수 II

Ch① 함수의 극한과 연속

TH①. 교점의 개수의 연속과 불연속 (추론)

2024년 7월 교육청모의고사

2025 Trend

1. 두 정수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2ax+\dfrac{a^2}{4}+b^2 & (x \le 0) \\ x^3-3x^2+5 & (x>0) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 개수가 2가 되도록 하는 두 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

2024년 수능

2025 Trend

2. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3-6x+1 & (x \le 2) \\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$$

를 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값은? [4점]

① 51　② 52　③ 53　④ 54　⑤ 55

TH②. 단순 계산

2024년 5월 교육청모의고사

2025 Trend

3. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)=\left(-\frac{1}{2}x+3\right)g(x)-x^3+2x^2$$

을 만족시킨다. 상수 $k\ (k\neq 0)$에 대하여

$$\lim_{x\to 2}\frac{g(x-1)}{f(x)-g(x)}\times\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}=k$$일 때,

k의 값을 구하시오.

TH③. 연속성

2024년 7월 교육청모의고사

4. 두 자연수 a, b $(a<b<8)$에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}|x+3|-1 & (x<a)\\ x-10 & (a\leq x<b)\\ |x-9|-1 & (x\geq b)\end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$와 양수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)f(x+k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (나) $f(k)<0$

$f(a)\times f(b)\times f(k)$ 의 값을 구하시오.

5. 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 1-|x| & (x(x-3)\neq 0) \\ 0 & (x(x-3)=0) \end{cases}$$

이고 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다. $g(0)=5$이고 함수 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속 일 때, $g(6)$의 값은?

① 245 ② 247 ③ 249
④ 251 ⑤ 253

2025학년도 경찰대학교

6. 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수

$$h(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{g(x)} & (x\neq 2) \\ 3 & (x=2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty} h(x)=3$이고 $\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{h(x)}=\infty$이다.

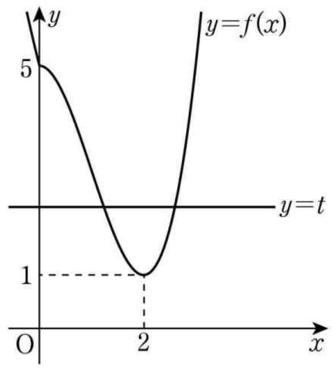
(나) 방정식 $h(x)=12$가 오직 하나의 실근을 가진다

$h(0)$의 값은?

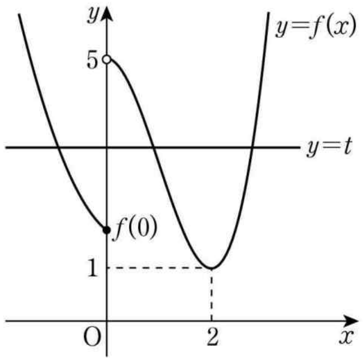
① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$
④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

1. [정답] ③

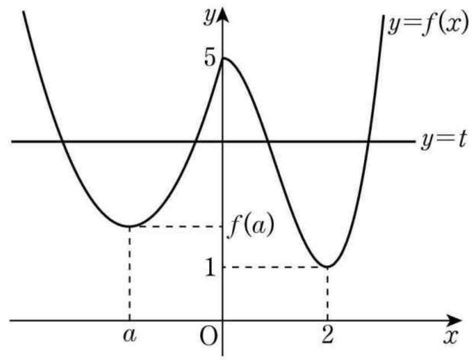
[해설]
$x>0$에서 $f(x)=x^3-3x^2+5$이므로
$\lim_{x\to 0+} f(x)=5$이고 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$이다.
$f'(2)=0$이고 $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$의 극솟값은 $f(2)=1$이다.
$x\le 0$에서 $f(x)=x^2-2ax+\frac{a^2}{4}+b^2=(x-a)^2-\frac{3}{4}a^2+b^2$이고
$f(0)=\frac{a^2}{4}+b^2$
(i) $a\ge 0$인 경우
① $f(0)=5$인 경우



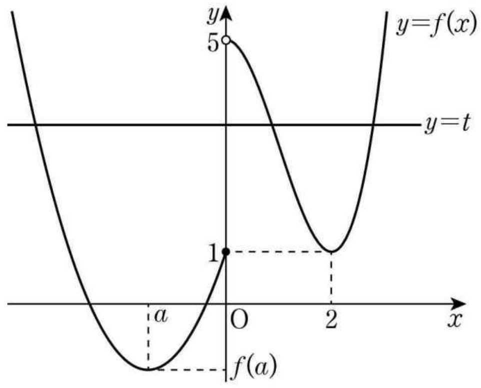
함수 $g(t)$는 $t=1$에서만 불연속이므로 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 개수는 1이다.
② $f(0)\neq 5$인 경우



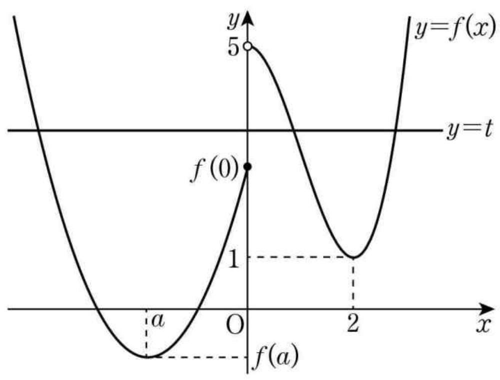
함수 $g(t)$는 $t=1$, $t=5$, $t=f(0)$에서 불연속이다. 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 개수가 2가 되려면
$f(0)=\frac{a^2}{4}+b^2=1$이다.
$\frac{a^2}{4}=0$, $b^2=1$ 또는 $\frac{a^2}{4}=1$, $b^2=0$
을 만족시키는 두 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(2, 0)$
(ii) $a<0$인 경우
① $f(0)=5$인 경우



함수 $g(t)$는 $t=1$, $t=5$, $t=f(a)$에서 불연속이다. 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 개수가 2가 되려면
$f(a)=-\frac{3}{4}a^2+b^2=1$, $f(0)=\frac{a^2}{4}+b^2=5$이다.
$a^2=4$, $b^2=4$를 만족시키는 두 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(-2, 2)$, $(-2, -2)$
② $f(0)=1$인 경우



$f(a)<1<5$이고 함수 $g(t)$는 $t=f(a)$, $t=1$, $t=5$에서 불연속이므로 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 개수가 3이다.
③ $f(0)\neq 1$이고 $f(0)\neq 5$인 경우



$g(t)$는 $t=1$, $t=5$, $t=f(0)$에서 불연속이므로 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 개수는 3 이상이다.
(i), (ii)에서 구하는 두 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는
$(0, 1)$, $(0, -1)$, $(2, 0)$, $(-2, 2)$, $(-2, -2)$로 5

2. ①
a, b는 자연수이고,
함수 $f(x)=\begin{cases} 2x^3-6x+1 & (x\le 2) \\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2) \end{cases}$
이다.
함수 $h(x)=2x^3-6x+1$이라 하면
$h'(x)=6x^2-6$
방정식 $h'(x)=0$에서 $x=\pm 1$
$x\le 2$에서 함수 $y=h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5

이다. 함수 $y=a(x-2)(x-b)+9$의 그래프는 점 $(2, 9)$, 점 $(b, 9)$를 지난다.
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 $g(t)$이고, $g(k)+\lim\limits_{t \to k-} g(t)+\lim\limits_{t \to k+} g(t)=9$인 실수 k의 개수는 1이다.

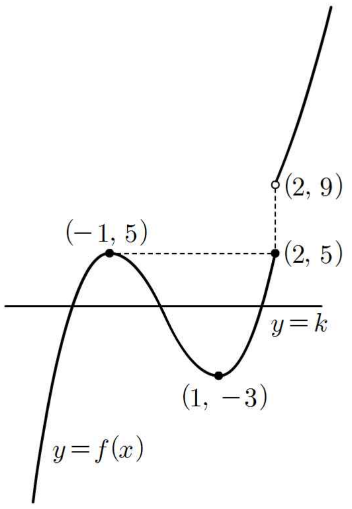
(ⅰ) $b=1$일 때
함수 $y=a(x-2)(x-b)+9$에서

$$y=a(x-2)(x-1)+9$$

이다. 함수 $y=a(x-2)(x-1)+9$의 그래프는 두 점 $(1, 9)$, $(2, 9)$를 지난다.
$-3<k<5$인 모든 실수 k에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 3이다.
따라서 $-3<k<5$인 모든 실수 k에 대하여

$$g(k)=\lim_{t \to k-} g(t)=\lim_{t \to k+} g(t)=3$$

이다. 따라서 $g(k)+\lim\limits_{t \to k-} g(t)+\lim\limits_{t \to k+} g(t)=9$인 실수 k의 개수는 무수히 많다.



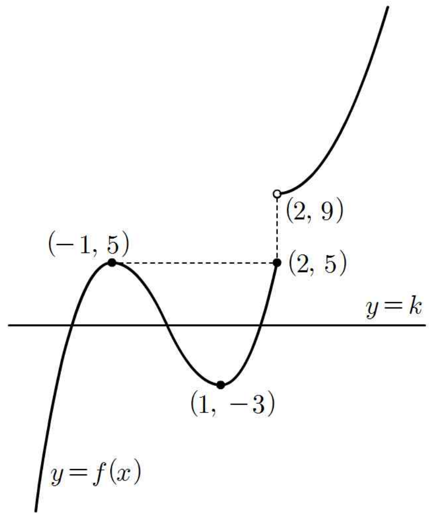
(ⅱ) $b=2$일 때
함수 $y=a(x-2)(x-b)+9$에서

$$y=a(x-2)^2+9$$

이다. 함수 $y=a(x-2)^2+9$의 그래프의 꼭짓점은 $(2, 9)$이다.
$-3<k<5$인 모든 실수 k에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 3이다.
따라서 $-3<k<5$인 모든 실수 k에 대하여

$$g(k)=\lim_{t \to k-} g(t)=\lim_{t \to k+} g(t)=3$$

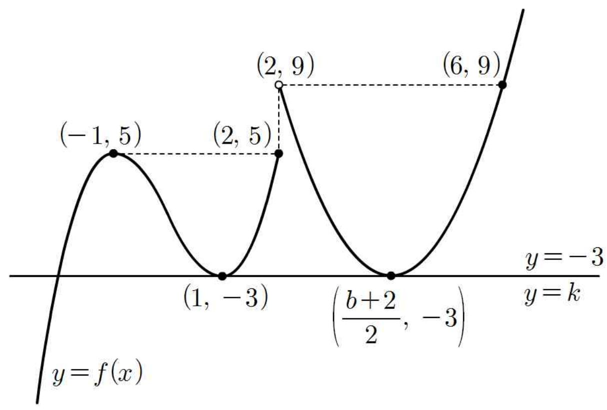
이다. 따라서 $g(k)+\lim\limits_{t \to k-} g(t)+\lim\limits_{t \to k+} g(t)=9$인 실수 k의 개수는 무수히 많다.



(ⅲ) $b \geq 3$일 때
함수 $y=a(x-2)(x-b)+9$의 그래프의 꼭짓점은 $\left(\dfrac{b+2}{2}, f\left(\dfrac{b+2}{2}\right)\right)$이다.
$f\left(\dfrac{b+2}{2}\right)=-3$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수는 $k<-3$에서 1, $k=-3$에서 3이고, $-3<k<5$에서 5이므로

$$g(-3)=3,\quad \lim_{t \to -3-} g(t)=1,\quad \lim_{t \to -3+} g(t)=5$$

이다.



$f\left(\dfrac{b+2}{2}\right)\neq -3$인 자연수 b에 대하여 같은 방법으로 하면 $g(k)+\lim\limits_{t \to k-} g(t)+\lim\limits_{t \to k+} g(t)=9$인 실수 k의 개수가 1인 경우는 존재하지 않는다.
이상에서 $g(k)+\lim\limits_{t \to k-} g(t)+\lim\limits_{t \to k+} g(t)=9$인 k의 개수가 1이면

$$b \geq 3,\ f\left(\frac{b+2}{2}\right)=-3$$

이다.

$f\left(\dfrac{b+2}{2}\right)=-3$에서

$$a\left(\frac{b}{2}-1\right)\left(1-\frac{b}{2}\right)+9=-3,\qquad a\left(\frac{b}{2}-1\right)^2=12$$

$\therefore\ a(b-2)^2=48$

48을 두 자연수 m, n에 대하여 $m\times n^2$ 꼴로 나타내면
3×4^2 또는 12×2^2 또는 48×1^2
$b \geq 3$이므로 $b-2 \geq 1$이다.
(1) $48=3\times 4^2$일 때 $a=3$, $b=6$
(2) $48=12\times 2^2$일 때 $a=12$, $b=4$
(3) $48=48\times 1^2$일 때 $a=48$, $b=3$
이상에서 $a+b$의 최댓값은 $a=48$, $b=3$일 때 51이다.

3. 정답 25

$\lim_{x \to \infty}\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}$가 극한값을 가지므로 $f(x)$가 n차식이면 $g(x)$는 $2n$차식, 조건식의 양변의 최고차항이 같아야 하므로 $f(x)=ax^n$, $g(x)=bx^{2n}$이라할 때, 좌변은 ax^{n+1}, $-\frac{1}{2}\times bx^{2n+1}$이 같아야 하지만, $n+1\neq 2n+1$이므로 $-\frac{b}{2}x^{2n+1}-x^3=0$이 되어야 우변은 최고차항이 2차 항이 되고 좌변과 차수가 같아질 수 있다.

$f(x)=ax+b$라 할 때,

$ax^2+bx=\left(-\frac{1}{2}x+3\right)g(x)-x^3+2x^2$,

$\left(-\frac{1}{2}x+3\right)g(x)=x^3+(a-2)x^2+bx$에서

우변의 상수항이 0이고 좌변의 3차 항 계수를 맞춰 $g(x)$를 추론하면

$g(x)=-2x^2+cx$라 할 수 있다.

$\left(-\frac{1}{2}x+3\right)(-2x^2+cx)=x^3+(a-2)x^2+bx$

$x^3+\left(-6-\frac{c}{2}\right)x^2+3cx=x^3+(a-2)x^2+bx$

이차항을 비교하면 $-6-\frac{c}{2}=a-2$, $a=-4-\frac{c}{2}$

일차항을 비교하면, $3cx=bx$, $b=3c$

$\lim_{x\to 2}\frac{g(x-1)}{f(x)-g(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{f(x)-g(x)}\times\lim_{x\to 2}\frac{g(x-1)}{x-2}$ 에서

$\lim_{x\to 2}\frac{g(x-1)}{x-2}$의 극한값이 존재하므로 $g(1)=0$

$g(1)=-2+c=0$에서 $c=2$ 그러므로 $b=6$, $a=-5$

$f(x)=-5x+6$, $g(x)=-2x^2+2x=-2x(x-1)$

$\lim_{x\to 2}\frac{-2(x-1)(x-2)}{-5x+6+2x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{-2(x-1)(x-2)}{2x^2-7x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{-2(x-1)(x-2)}{(x-2)(2x-3)}$

$=\frac{-2}{1}=-2$, $\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-5x+6)^2}{-2x^2+2x}=\frac{25}{-2}$

$\therefore\ k=-2\times\left(\frac{25}{-2}\right)=25$

4. [정답] 96

[해설]

함수 $f(x)$는 $x=a$와 $x=b$에서만 불연속이고, 함수 $f(x+k)$는 $x=a-k$와 $x=b-k$에서만 불연속이므로

함수 $f(x)f(x+k)$가 $x=a$, $x=b$, $x=a-k$, $x=b-k$에서 연속이면 함수 $f(x)f(x+k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$a-k<a$, $b-k<b$이므로 두 수 a와 $b-k$에 대하여 다음과 같은 경우가 존재한다.

(ⅰ) $a\neq b-k$ $(k\neq b-a)$인 경우

① $x=a-k$에서 함수 $f(x)f(x+k)$의 연속성

$\lim_{x\to(a-k)+}f(x)f(x+k)$

$=\lim_{x\to(a-k)+}f(x)\times\lim_{x\to(a-k)+}f(x+k)$

$=f(a-k)\times(a-10)$

$\lim_{x\to(a-k)-}f(x)f(x+k)$

$=\lim_{x\to(a-k)-}f(x)\times\lim_{x\to(a-k)-}f(x+k)$

$=f(a-k)\times(a+2)$

$f(a-k)f(a-k+k)=f(a-k)\times(a-10)$

함수 $f(x)f(x+k)$가 $x=a-k$에서 연속이므로

$f(a-k)\times(a-10)=f(a-k)\times(a+2)$

$f(a-k)=0$

② $x=a$에서 함수 $f(x)f(x+k)$의 연속성

$\lim_{x\to a+}f(x)f(x+k)=(a-10)f(a+k)$

$\lim_{x\to a-}f(x)f(x+k)=(a+2)f(a+k)$

$f(a)f(a+k)=(a-10)f(a+k)$

함수 $f(x)f(x+k)$가 $x=a$에서 연속이므로

$(a-10)f(a+k)=(a+2)f(a+k)$

$f(a+k)=0$

③ $x=b-k$에서 함수 $f(x)f(x+k)$의 연속성

$\lim_{x\to(b-k)+}f(x)f(x+k)$

$=f(b-k)\times(-b+8)$

$\lim_{x\to(b-k)-}f(x)f(x+k)=f(b-k)\times(b-10)$

$f(b-k)f(b-k+k)=f(b-k)\times(-b+8)$

함수 $f(x)f(x+k)$가 $x=b-k$에서 연속이므로

$f(b-k)\times(-b+8)=f(b-k)\times(b-10)$

$f(b-k)=0$

④ $x=b$에서 함수 $f(x)f(x+k)$의 연속성

$\lim_{x\to b+}f(x)f(x+k)=(-b+8)f(b+k)$

$\lim_{x\to b-}f(x)f(x+k)=(b-10)f(b+k)$

$f(b)f(b+k)=(-b+8)f(b+k)$

함수 $f(x)f(x+k)$가 $x=b$에서 연속이므로

$(-b+8)f(b+k)=(b-10)f(b+k)$

$f(b+k)=0$

①~ ④에 의하여

$f(a-k)=f(a+k)=f(b-k)=f(b+k)=0$

$a+k=b-k\left(k=\frac{b-a}{2}\right)$이면

$a+k=b-k=\frac{a+b}{2}$

$a<\frac{a+b}{2}<b<8$이므로

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\left(\frac{a+b}{2}\right)-10<0$

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a+k)=f(b-k)=0$을 만족시키지 않는다.

$a+k\neq b-k$이므로 네 수 $a-k$, $a+k$, $b-k$, $b+k$는 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 네 실근이다.

방정식 $f(x)=0$의 모든 실근은 -4, -2, 8, 10이므로=

$\{a-k, a+k, b-k, b+k\}=\{-4, -2, 8, 10\}$

$0<a+k<b+k$이므로

$a+k=8$, $b+k=10$

$a-k<b-k$이므로

$a-k=-4,\ b-k=-2$

두 식 $a-k=-4,\ a+k=8$을 연립하면

$a=2,\ k=6$

$b+k=b+6=10,\ b=4$

$a<b<k$이므로

$f(k)>0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a=b-k(k=b-a)$인 경우

① $x=a-k$에서 함수 $f(x)f(x+k)$의 연속성

(ⅰ)의 ①에 의하여 $f(a-k)=0$

$a-k=2a-b$이므로 $f(2a-b)=0$

② $x=b$에서 함수 $f(x)f(x+k)$의 연속성

(ⅰ)의 ④에 의하여 $f(b+k)=0$

$b+k=2b-a$이므로 $f(2b-a)=0$

③ $x=a(=b-k)$에서 함수 $f(x)f(x+k)$의 연속성

$$\lim_{x\to a+} f(x)f(x+k)=\lim_{x\to a+} f(x)f(x+b-a)$$

$$=(a-10)(-b+8)\lim_{x\to a-} f(x)f(x+k)$$

$$=\lim_{x\to a-} f(x)f(x+b-a)=(a+2)(b-10)$$

$f(a)f(a+k)=f(a)f(b)=(a-10)(-b+8)$

함수 $f(x)f(x+k)$가

$x=a=b-k$에서 연속이므로

$(a-10)(-b+8)=(a+2)(b-10)$

$a(b-9)-4b+30=0$

$$a=4+\frac{6}{b-9}$$

$a<b<8$이므로 이를 만족시키는 두 자연수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ 7),\ (2,\ 6)$이다.

$a=1,\ b=7$이면 $f(2a-b)=f(-5)=1$이므로

$f(2a-b)=0$을 만족시키지 않는다.

$a=2,\ b=6$이면

$f(2a-b)=f(-2)=0$,

$f(2b-a)=f(10)=0$을 만족시킨다.

$k=6-2=4$

$a<k<b$이므로

$f(k)=f(4)=4-10=-6$

$f(k)<0$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

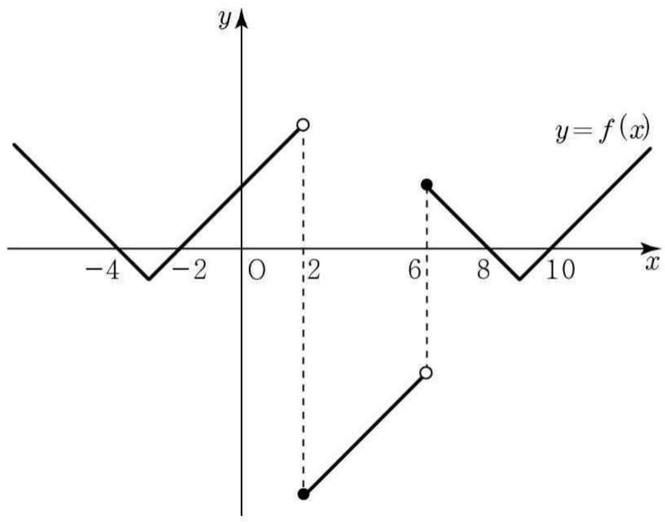
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a=2,\ b=6,\ k=4$이고 함수 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases} |x+3|-1 & (x<2) \\ x-10 & (2\le x<6) \\ |x-9|-1 & (x\ge 6) \end{cases}$$

따라서

$$f(a)\times f(b)\times f(k)=f(2)\times f(6)\times f(4)$$
$$=(-8)\times 2\times(-6)=96$$

[참고] 함수 $y=f(x)$의 그래프



5. [정답] ①

[해설]

함수 $f(x)$는 $x=0,\ x=3$에서만 불연속이고 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 합성함수 $g(f(x))$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0,\ x=3$에서 연속이어야 한다.

$$f(x)=\begin{cases} 1+x & (x<0) \\ 0 & (x=0) \\ 1-x & (0<x<3) \\ 0 & (x=3) \\ 1-x & (x>3) \end{cases}$$

이고 $g(x)=x^3+ax^2+bx+5$라 하면

(ⅰ) $x=0$일 때

$$\lim_{x\to 0-} g(f(x))=\lim_{x\to 0+} g(f(x))=g(f(0))$$

이때 $g(f(0))=g(0)=5$이고,

$$\lim_{x\to 0-} g(f(x))=\lim_{x\to 0-}\{(x+1)^3+a(x+1)^2+b(x+1)+5\}$$
$$=1+a+b+5=a+b+6$$

$$\lim_{x\to 0+} g(f(x))=\lim_{x\to 0+}\{(1-x)^3+a(1-x)^2+b(1-x)+5\}$$
$$=1+a+b+5=a+b+6$$

이므로 $a+b+6=5,\quad a+b=-1$ ⋯⋯ ㉠

(ⅱ) $x=3$일 때

$$\lim_{x\to 3-} g(f(x))=\lim_{x\to 3+} g(f(x))=g(f(3))$$

이때 $g(f(3))=g(0)=5$이고,

$$\lim_{x\to 3-} g(f(x))=\lim_{x\to 3-}\{(1-x)^3+a(1-x)^2+b(1-x)+5\}$$
$$=-8+4a-2b+5=4a-2b-3$$

$$\lim_{x\to 3+} g(f(x))=\lim_{x\to 3+}\{(1-x)^3+a(1-x)^2+b(1-x)+5\}$$
$$=-8+4a-2b+5=4a-2b-3$$

이므로 $4a-2b-3=5,\quad 2a-b=4$ ⋯⋯ ㉡

(ⅰ), (ⅱ)에서 ㉠, ㉡을 연립하면 $a=1,\ b=-2$

즉 $g(x)=x^3+x^2-2x+5$이므로

$$g(6)=6^3+6^2-2\times 6+5$$
$$=216+36-12+5$$
$$=245$$

[다른 풀이]

함수 $f(x)$는 $x=0,\ x=3$에서만 불연속이고 함수 $g(x)$는 실수

전체의 집합에서 연속이므로 합성함수 $g(f(x))$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0$, $x=3$에서 연속이어야 한다.

(i) $x=0$일 때

$$g(f(0))=g(0)=5,\ \lim_{x\to 0} g(f(x))=g(1) \text{ 이므로}$$

$$g(0)=g(1)=5$$

(ii) $x=3$일 때

$$g(f(3))=g(0)=5,\ \lim_{x\to 3} g(f(x))=g(-2) \text{ 이므로}$$

$$g(0)=g(-2)=5$$

(i), (ii)에서 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$는

$$g(x)=x(x-1)(x+2)+5$$

$$\therefore\ g(6)=6\times5\times8+5=245$$

6. [정답] ③

[해설]

함수 $h(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{g(x)} & (x\neq 2)\\ 3 & (x=2)\end{cases}$이고, $\lim_{x\to\infty} h(x)=3$이므로 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$의 최고차항의 계수의 비는 3 : 1이다.

함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x\neq 2$인 모든 실수 x에 대하여

$$g(x)\neq 0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

삼차함수 $y=g(x)$의 그래프는 x축과 적어도 한 점에서 만나므로 ㉠에 의하여

$$g(2)=0$$

함수 $h(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 2} h(x)=h(2),\qquad \lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=3$$

$x\to 2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

$$\lim_{x\to 2} f(x)=0 \qquad \therefore\ f(2)=0$$

$\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{h(x)}=\infty$, 즉 $\lim_{x\to 1}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\infty$ 이므로 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다. 자연수 n에 대하여

$$\lim_{x\to 1-}\frac{1}{(x-1)^{2n-1}}=-\infty,\ \lim_{x\to 1+}\frac{1}{(x-1)^{2n-1}}=\infty$$

이고,

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^{2n}}=\infty$$

이므로 $f(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 갖는다.

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{3(x-1)^2(x-2)}{(x-2)(x^2+ax+b)} & (x\neq 2)\\ 3 & (x=2)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{3(x-1)^2}{x^2+ax+b} & (x\neq 2)\\ 3 & (x=2)\end{cases}$$

$\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}=3$, 즉 $\lim_{x\to 2} h(x)=3$에서

$$\lim_{x\to 2} h(x)=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-1)^2}{x^2+ax+b}$$

$$=\frac{3}{2a+b+4}$$

$\dfrac{3}{2a+b+4}=3$이므로 $\quad 2a+b+4=1,\quad b=-2a-3$

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{3(x-1)^2}{x^2+ax-2a-3} & (x\neq 2)\\ 3 & (x=2)\end{cases}$$

방정식 $h(x)=12$는 오직 한 실근을 갖는다. $h(2)=3$이므로 방정식의 한 실근은 2가 아니다. $h(x)=12$에서

$$\frac{3(x-1)^2}{x^2+ax-2a-3}=12$$

$$3x^2+2(2a+1)x-8a-13=0$$

방정식 $3x^2+2(2a+1)x-8a-13=0$은 $x\neq 2$인 오직 한 실근을 가지므로 중근을 갖는다.

판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=(2a+1)^2+3(8a+13)=0$$

$$a=-5 \text{ 또는 } a=-2$$

㉠에 의하여 $x\neq 2$인 모든 실수 x에 대하여

$$x^2+ax+b\neq 0, \text{ 즉 } x^2+ax-2a-3\neq 0$$

이므로 방정식 $x^2+ax-2a-3=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=a^2-4(-2a-3)<0,\qquad -6<a<-2$$

$$\therefore\ a=-5$$

따라서 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{3(x-1)^2}{x^2-5x+7} & (x\neq 2)\\ 3 & (x=2)\end{cases}$$

이므로 $h(0)=\dfrac{3}{7}$ 이다.

Ch② 미분

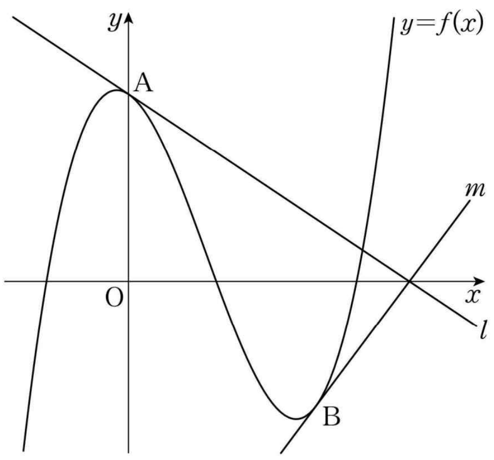
TH①. 3점

2024년 3월 교육청모의고사

1. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)=x^3-\dfrac{5}{2}x^2+ax+2$이다.

곡선 $y=f(x)$

위의 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$, $\mathrm{B}(2,\ f(2))$에서의 접선을 각각 l, m이라 하자. 두 직선 l, m이 만나는 점이 x축 위에 있을 때, $60\times|f(2)|$의 값을 구하시오.



TH②. 4점

2024년 5월 교육청모의고사

2. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$\lvert f(k)\rvert+\lvert g(k)\rvert=0$을 만족시키는 실수 k의 개수는 2이다.

$4f(1)+2g(1)=-1$일 때, $f(4)$의 값은?2.

① 46 ② 49 ③ 52
④ 55 ⑤ 58

3. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-1}{x-a}=3$$

을 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 y절편이 4일 때, $f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

2025학년도 6월 평가원모의고사

4. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(a)\le 0$인 실수 a의 최댓값은 2이다.
(나) 집합 $\{x \mid f(x)=k\}$의 원소의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k의 최솟값은 $\frac{8}{3}$이다.

$f(0)=0,\ f'(1)=0$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

5. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}-2(x+1)^2+4 & (x\le 0)\\ a(x-5) & (x>0)\end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 $f(k)=g(k)$를 만족시키는 서로 다른 모든 실수 k의 값이 -2, 0, 2일 때, $g(2a)$의 값은?

① 14　② 18　③ 22
④ 26　⑤ 30

2024년 7월 교육청모의고사

6. 두 함수 $f(x)=x^3-12x$, $g(x)=a(x-2)+2\,(a\neq 0)$에 대하여 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases}f(x) & (f(x)\ge g(x))\\ g(x) & (f(x)<g(x))\end{cases}$$

이다. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 실수 a의 값의 범위는 $m<a<M$이다.

> 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 실수 k가 존재한다.

$10\times(M-m)$의 값을 구하시오.

7. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=f'(2)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 있다. 양수 p와 함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq x) \\ f(x-p)+3p & (f(x)< x) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f(0)$의 값은?

① $4-3\sqrt{6}$ ② $2-2\sqrt{6}$ ③ $3-2\sqrt{6}$
④ $3-\sqrt{6}$ ⑤ $4-\sqrt{6}$

2025학년도 사관학교

8. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=|f(x)|$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(8)$의 값을 구하시오.

(가) 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.
(나) 함수 $g(x)$는 $x=5$에서 미분가능하고, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(5,\ g(5))$에서의 접선은 곡선 $y=g(x)$와 점 $(0,\ g(0))$에서 접한다.

9. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=|f(x)|-f'(x)$$

라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다음을 만족시킨다.

> (가) $g(0)=f(0)=1$
> (나) 방정식 $|f(x)|=3$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.
> (다) 함수 $g(x)$가 $x=k$에서 미분 불가능한 실수 k의 개수는 3이다.

$g(1)$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1
④ 4 ⑤ 7

10. 함수 $f(x)$를 $f(x)=(x+1)^2(x-1)^2$이라 하자.
$-1\le x\le 1$인 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)\le f'(t)(x-t)+f(t)$$

를 만족시키도록 하는 실수 t의 최댓값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

TH③. 새로운 변수로 표현된 함수 [4점]

2025년 사관학교

2025 Trend

11. 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(3-x)=f(3+x)$이다.
> (나) 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1,\ t+1]$에서의 함수 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 할 때, $-1\leq t\leq 1$인 모든 실수 t에 대하여 $g(t)=g(1)$이다.

$f(2)=0$일 때, $f(5)$의 값은?

① 36 ② 37 ③ 38
④ 39 ⑤ 40

2025년 사관학교

2025 Trend

12. $-6\leq t\leq 2$인 실수 t와 함수 $f(x)=2x(2-x)$에 대하여 x에 대한 방정식

$$\{f(x)-t\}\{f(x-1)-t\}=0$$

의 실근 중에서 집합 $\{x|0\leq x\leq 3\}$에 속하는 가장 큰 값과 가장 작은 값의 차를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 $t=a$에서 불연속이다. $\lim\limits_{t\to a-}g(t)+\lim\limits_{t\to a+}g(t)$의 값은? (단, a는 $-6<a<2$인 상수이다.)

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

2024년 3월 교육청모의고사 (22번)

2025 Trend

13. 함수

$$f(x)=\left|x^3-3x+8\right|$$

과 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t,\,t+2]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $g(t)$는 $t=\alpha$와 $t=\beta$에서만 미분가능하지 않다. $\alpha\beta=m+n\sqrt{6}$일 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 정수이다.)

2024년 5월 교육청모의고사 (22번)

2025 Trend

14.. 최고차항의 계수가 4이고 서로 다른 세 극값을 갖는 사차 함수 $f(x)$와 두 함수 $g(x)$, $h(x)=\begin{cases} 4x+2 & (x<a) \\ -2x-3 & (x\geq a)\end{cases}$가 있다. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여

$$\left|g(x)\right|=f(x),\ \lim_{t\to 0+}\frac{g(x+t)-g(x)}{t}=\left|f'(x)\right| \text{ 이다.}$$

(나) 함수 $g(x)h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$g(0)=\dfrac{40}{3}$일 때, $g(1)\times h(3)$의 값을 구하시오.(단, a는 상수이다.)

1. [정답] 80

[해설]

$f(0)=2,\ f(2)=2a$

$f'(x)=3x^2-5x+a$에서 $f'(0)=a,\ f'(2)=a+2$

직선 l의 방정식은 $y=f'(0)x+f(0)$

$y=ax+2$ …… ㉠

직선 m의 방정식은 $y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$y=(a+2)x-4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 두 직선 $l,\ m$이 만나는 점의 좌표는 $(3,\ 3a+2)$이고 이 점이 x축 위에 있으므로 $3a+2=0$

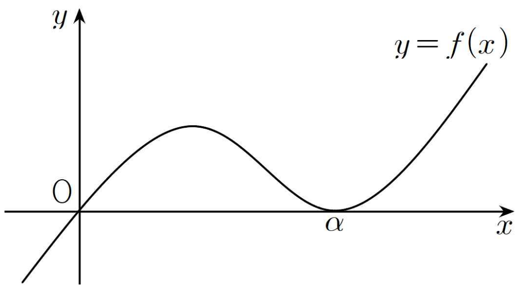
$a=-\dfrac{2}{3}$이므로 $f(2)=2\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{4}{3}$

따라서 $60\times|f(2)|=60\times\left|-\dfrac{4}{3}\right|=80$

2. **정답** ②

$|f(k)|+|g(k)|=0$은 $f(k)=0$이고 $g(k)=0$

함숫값과 접선의 y절편이 모두 0인 점이 2점이 존재해야하는 그래프는 아래 그림과 같다.



$f(x)=x(x-\alpha)^2=x^3-2\alpha x^2+\alpha^2 x,\ f'(x)=3x^2-4\alpha x+\alpha^2$

$(t,\ f(t))$에서의 접선

$y=(3t^2-4\alpha t+\alpha^2)(x-t)+t^3-2\alpha t^2+\alpha^2 t$에서

$g(t)=-3t^3+4\alpha t^2-\alpha^2 t+t^3-2\alpha t^2+\alpha^2 t=-2t^3+2\alpha t^2$

$4f(1)+2g(1)=-1$이므로

$4(1-2\alpha+\alpha^2)+2(-2+2\alpha)=-1,\ 4\alpha^2-4\alpha+1=0,\ \alpha=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \ f(x)=x\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2,\ f(4)=4\times\left(4-\dfrac{1}{2}\right)^2=4\times\dfrac{49}{4}=49$

3. [정답] ⑤

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 공통범위 11 [4.00점]

[해설]

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3+px^2+qx\ \ (p,\ q\text{는 상수})$$

라 하면 $f'(x)=3x^2+2px+q$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-1}{x-a}=3$에서 $x\to a$일 때 (분모) → 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) → 0이다.

즉 $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)-1\}=0$에서 $f(a)=1$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=3$에서 $f'(a)=3$

즉 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$에서 $y=3(x-a)+1$

이 직선의 y절편이 4이므로

$-3a+1=4,\quad a=-1$

즉 $f(-1)=1$에서 $-1+p-q=1,\quad p-q=2$

$f'(-1)=3$에서 $3-2p+q=3,\quad -2p+q=0$

두 식을 연립하여 풀면 $p=-2,\ q=-4$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2-4x$이므로

$$f(1)=1^3-2\times1^2-4\times1$$
$$=-5$$

4. [정답] 15

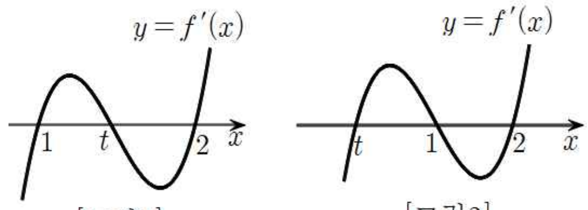
[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 공통범위 21 [4.00점]

[해설]

조건 (나)에서 집합 $\{x|f(x)=k\}$의 원소의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k의 값이 존재하므로 사차함수 $f(x)$는 극값을 3개 가진다.

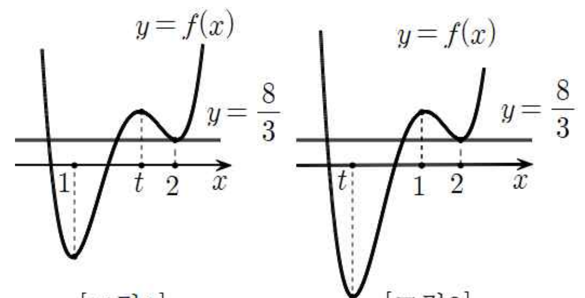
조건 (가)에서 $f'(a)\leq 0$인 실수 a의 최댓값이 2이므로 $f'(2)=0$이다.

$f'(1)=0$이므로 방정식 $f'(x)=0$의 다른 한 근을 t라 하면 함수 $y=f'(x)$의 개형은 다음 그림과 같다.



[그림1] [그림2]

이때 $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 개형은 다음과 같다.



[그림1] [그림2]

따라서 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{8}{3}$이 접하므로 방정식

$f(x)=\dfrac{8}{3}$을 만족하는 다른 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-2)^2+\frac{8}{3}\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

$f(0)=0$이므로 ㉠에 대입하면

$$4\alpha\beta+\frac{8}{3}=0\qquad\therefore\ \alpha\beta=-\frac{2}{3}\qquad\cdots\cdots\ ㉡$$

$$f'(x)=(x-\beta)(x-2)^2+(x-\alpha)(x-2)^2+2(x-\alpha)(x-\beta)(x-2)$$

$f'(1)=0$이므로

$$f'(1)=1-\beta+1-\alpha-2(1-\alpha-\beta+\alpha\beta)$$

$$=\alpha+\beta-2\alpha\beta$$
$$=\alpha+\beta+\frac{4}{3}=0$$
$$\therefore\ \alpha+\beta=-\frac{4}{3} \qquad \cdots\cdots ㉢$$
$$\therefore\ f(3)=(3-\alpha)(3-\beta)+\frac{8}{3}$$
$$=9-3(\alpha+\beta)+\alpha\beta+\frac{8}{3}$$
$$=9-3\times\left(-\frac{4}{3}\right)-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}\ (\because\ ㉡,㉢)$$
$$=15$$

5. [정답] ④

[해설]

$f(-2)=g(-2)=2$, $f(0)=g(0)=2$이므로

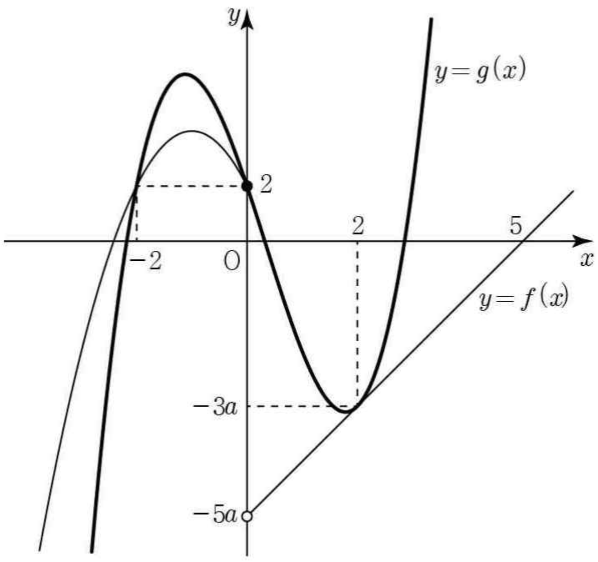
삼차방정식 $g(x)=2$의 서로 다른 세 실근을 -2, 0, t라 하면

$g(x)-2=x(x+2)(x-t)$

$g(x)=x(x+2)(x-t)+2$

$\quad =x^3+(2-t)x^2-2tx+2$

$f(k)=g(k)$를 만족시키는 양수 k의 값은 2뿐이므로, 이를 만족시키는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$x>0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$에서의 접선과 일치한다.

$f(2)=g(2)$이고 $f'(2)=g'(2)$

$f(2)=a(2-5)=-3a$

$g(2)=8+4(2-t)-4t+2=18-8t$

$-3a=18-8t \qquad \cdots\cdots ㉠$

$f'(2)=g'(2)$이므로

$f'(x)=a(x>0)$에서

$f'(2)=a$

$g'(x)=3x^2+2(2-t)x-2t$에서

$g'(2)=20-6t$

$a=20-6t \qquad \cdots\cdots ㉡$

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면 $a=2$, $t=3$

$g(x)=x^3-x^2-6x+2$

따라서 $g(2a)=g(4)=26$

6. [정답] 35

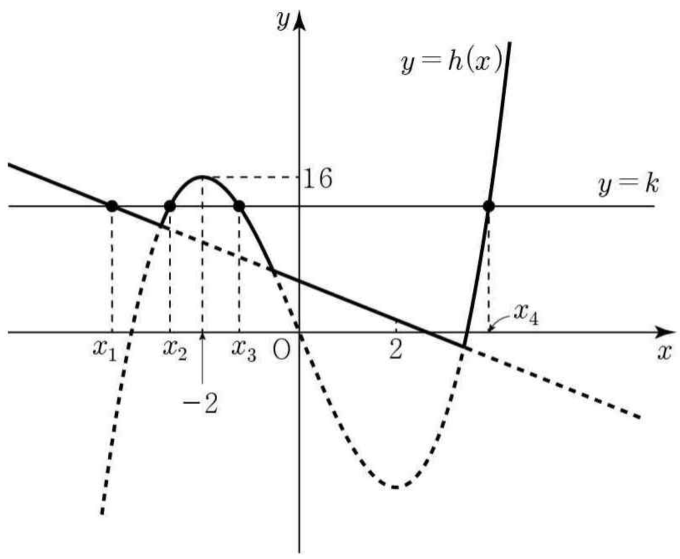
[해설]

직선 $y=k$가 곡선 $y=f(x)$, 직선 $y=g(x)$와 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값은 각각 3, 1이므로

함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가

서로 다른 네 점에서 만나는 경우는 직선 $y=k$와 곡선 $y=f(x)$는 서로 다른 세 점에서 만나고 직선 $y=k$와 직선 $y=g(x)$는 한 점에서 만나며 이 네 점이 모두 서로 다른 경우이다.

함수 $h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq g(x)) \\ g(x) & (f(x)< g(x)) \end{cases}$이므로 직선 $y=k$와 직선 $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표를 x_1이라 하면 $f(x_1)<g(x_1)$직선 $y=k$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 서로 다른 세 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 x_2, x_3, x_4라 하면 $f(x_2)>g(x_2)$, $f(x_3)>g(x_3)$, $f(x_4)>g(x_4)$이를 만족시키는 함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



직선 $y=g(x)$가 점 $(2,\ 2)$를 지나고 $x_1<x_2$, $f(x_1)<g(x_1)=k$인 실수 x_1이 존재하므로 직선 $y=g(x)$의 기울기는 음수이다.

$y=g(x)=a(x-2)+2$에서 $a<0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$f'(x)=3x^2-12=3(x-2)(x+2)$

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값을 갖고 $x=-2$에서 함수 $f(x)$의 함숫값은 함수 $g(x)$의 함숫값보다 크다.

$f(-2)>g(-2)$

$16>-4a+2$

$a>-\frac{7}{2} \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에 의하여 $-\frac{7}{2}<a<0$

$m=-\frac{7}{2}$, $M=0$

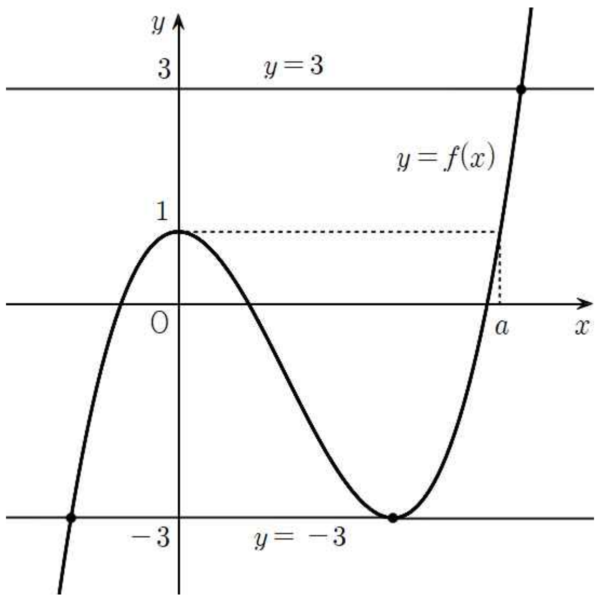
따라서 $10\times(M-m)=10\times\left\{0-\left(-\frac{7}{2}\right)\right\}=35$

7. [정답] ③

8. [정답] 118

9. [정답] ④

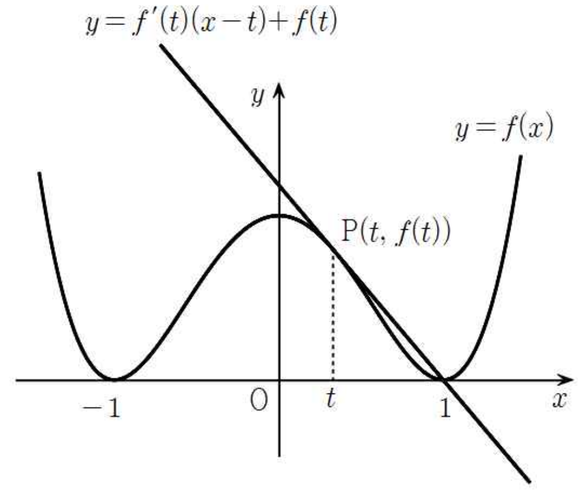
[해설]
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수
$g(x)=|f(x)|-f'(x)$이다.
양변에 $x=0$을 대입하면
$$g(0)=|f(0)|-f'(0)$$
$g(0)=f(0)=1$이므로 $f'(0)=0$
방정식 $|f(x)|=3$의 서로 다른 실근의 개수는 3이므로 $f(x)=-3$, $f(x)=3$인 실수 x의 개수는 각각 1, 2 또는 2, 1이다.
즉, 삼차함수 $f(x)$의 한 극값은 -3 또는 3이다.
$f(0)=1$, $f'(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값 1을 갖는다.
함수 $f'(x)$는 미분가능한 함수이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 세 점에서 미분가능하지 않으므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 세 점에서 미분가능하지 않다.
함수 $|f(x)|$가 $x=k$에서 미분가능하지 않으면
$$f(k)=0,\ f'(k)\neq 0$$
즉, 곡선 $y=f(x)$는 x축과 세 점에서 만난다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=1$의 교점 중에서 점 $(0,1)$이 아닌 교점의 x좌표를 a라 하면
$$f(x)=x^2(x-a)+1$$
$$f'(x)=2x(x-a)+x^2=x(3x-2a)$$
방정식 $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{2a}{3}$
$f\left(\dfrac{2a}{3}\right)=-3$이므로
$$\left(\frac{2a}{3}\right)^2\times\left(-\frac{a}{3}\right)+1=-3,\quad a=3$$
$$\therefore\ f(x)=x^2(x-3)+1,\ f'(x)=3x(x-2)$$
따라서
$$g(1)=|f(1)|-f'(1)=4$$

10. [정답] ②

[해설]
사차함수
$$f(x)=(x+1)^2(x-1)^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$
위의 점 $\mathrm{P}(t, f(t))$에서의 접선의 방정식
$$y=f'(t)(x-t)+f(t) \quad \cdots\cdots ㉡$$
에 대하여 $-1\leq x\leq 1$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\leq f'(t)(x-t)+f(t)$가 성립하므로 주어진 구간에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 P에서의 접선에 접하거나 아래 그림처럼 접선의 방정식 아래에 놓여야 한다.



접점 P의 x좌표 t의 값이 최대인 경우는 ㉡의 접선의 방정식이 점 $(1,0)$을 지나는 경우이다. 따라서 점 P와 $(1,0)$을 지나는 직선의 기울기와 점 P에서의 접선의 기울기가 같아야 하므로
㉠에서 양변을 x에 대하여 미분하면
$$f'(x)=4x(x+1)(x-1)=4x^3-4x$$
이므로
$$\frac{f(t)}{t-1}=f'(t),\qquad f(t)=(t-1)f'(t)$$
$$t^4-2t^2+1=(t-1)(4t^3-4t)$$
$$3t^4-4t^3-2t^2+4t-1=0,\qquad (t-1)^2(t+1)(3t-1)=0$$
$$t=1 \text{ 또는 } t=-1 \text{ 또는 } t=\frac{1}{3}$$
그런데 점 P는 열린구간 $(-1,1)$에 있으므로 구하는 실수 t의 최댓값은 $\dfrac{1}{3}$이다.

11. [정답] ④

12. [정답] ③

13. [정답] 2

[해설]
$h(x)=x^3-3x+8$이라 하면 $f(x)=|h(x)|$
$h'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$
$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
$h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

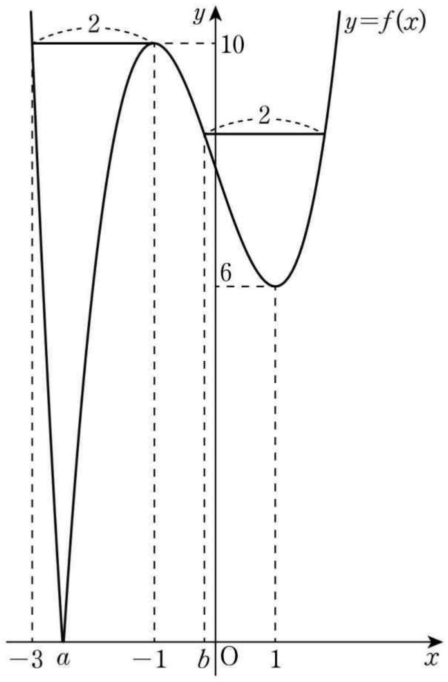
극댓값은 $h(-1)=10$이고 극솟값은 $h(1)=6$이다. $y=h(x)$의 극솟값이 양수이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 x축과 한 점에서 만난다.
즉 방정식 $h(x)=0$은 한 개의 실근 $x=a$를 갖고,
$f(x)=\begin{cases}-h(x) & (x<a)\\ h(x) & (x\geq a)\end{cases}$이다.
방정식 $f(t)=f(t+2)$의 해를 구하자.
$a-2<t<a$일 때, $-t^3+3t-8=(t+2)^3-3(t+2)+8$

$t^3+3t^2+3t+9=(t+3)(t^2+3)=0$에서 $t=-3$

$t\le a-2$ 또는 $t\ge a$일 때,

$t^3-3t+8=(t+2)^3-3(t+2)+8$, $3t^2+6t+1=0$에서

$t=\dfrac{-3\pm\sqrt{6}}{3}$이다. $\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}=b$라 하면 $b>-1$



$t<-3$일 때, 닫힌구간 $[t,\ t+2]$에서의 $f(x)$의 최댓값이 $f(t)$이므로 $g(t)=f(t)$이다.

$-3\le t\le -1$일 때, 닫힌구간 $[t,\ t+2]$에서의 $f(x)$의 최댓값이 $f(-1)=10$이므로 $g(t)=10$이다.

$-1<t\le b$일 때, 닫힌구간 $[t,\ t+2]$에서의 $f(x)$의 최댓값이 $f(t)$이므로 $g(t)=f(t)$이다.

$b<t$일 때, 닫힌구간 $[t,\ t+2]$에서의 $f(x)$의 최댓값이 $f(t+2)$이므로 $g(t)=f(t+2)$이다.

즉 함수 $g(t)$는 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases} -t^3+3t-8 & (t<-3) \\ 10 & (-3\le t\le -1) \\ t^3-3t+8 & (-1<t\le b) \\ t^3+6t^2+9t+10 & (b<t) \end{cases}$$

$$\lim_{t\to -3-} g(t)=10=g(-3)=\lim_{t\to -3+} g(t)$$

$$\lim_{t\to -1-} g(t)=10=g(-1)=\lim_{t\to -1+} g(t)$$

$$\lim_{t\to b-} g(t)=g(b)=\lim_{t\to b+} g(t)$$

이므로 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$$\lim_{t\to -3-}\frac{g(t)-g(-3)}{t-(-3)}=\lim_{t\to -3-}\frac{(t+3)(-t^2+3t-6)}{t+3}$$
$$=\lim_{t\to -3-}(-t^2+3t-6)=-24$$

$$\lim_{t\to -3+}\frac{g(t)-g(-3)}{t-(-3)}=0$$

이므로 $g(t)$는 $t=-3$에서 미분가능하지 않다.

$$\lim_{t\to -1-}\frac{g(t)-g(-1)}{t-(-1)}=0$$

$$\lim_{t\to -1+}\frac{g(t)-g(-1)}{t-(-1)}=\lim_{t\to -1+}\frac{(t+1)(t^2-t-2)}{t+1}$$
$$=\lim_{t\to -1+}(t^2-t-2)=0$$

이므로 $g(t)$는 $t=-1$에서 미분가능하다.

$$\lim_{t\to b-}\frac{g(t)-g(b)}{t-b}=\lim_{t\to b-}\frac{(t-b)(t^2+bt+b^2-3)}{t-b}$$
$$=\lim_{t\to b-}(t^2+bt+b^2-3)=3b^2-3$$

$$\lim_{t\to b+}\frac{g(t)-g(b)}{t-b}=\lim_{t\to b+}\frac{(t-b)\{t^2+(6+b)t+b^2+6b+9\}}{t-b}$$
$$=\lim_{t\to b+}\{t^2+(6+b)t+b^2+6b+9\}$$
$$=3b^2+12b+9$$

$b>-1$이므로 $3b^2-3\ne 3b^2+12b+9$

즉 $g(t)$는 $t=b$에서 미분가능하지 않다.

그러므로 $\alpha=-3$, $\beta=\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}$이고 $\alpha\beta=3-\sqrt{6}$

따라서 $m=3$, $n=-1$이므로 $m+n=2$

14. **정답** 114

$|g(x)|=f(x)$이므로 $g(x)=f(x)$ 또는 $-f(x)$, 그리고 $f(x)\ge 0$

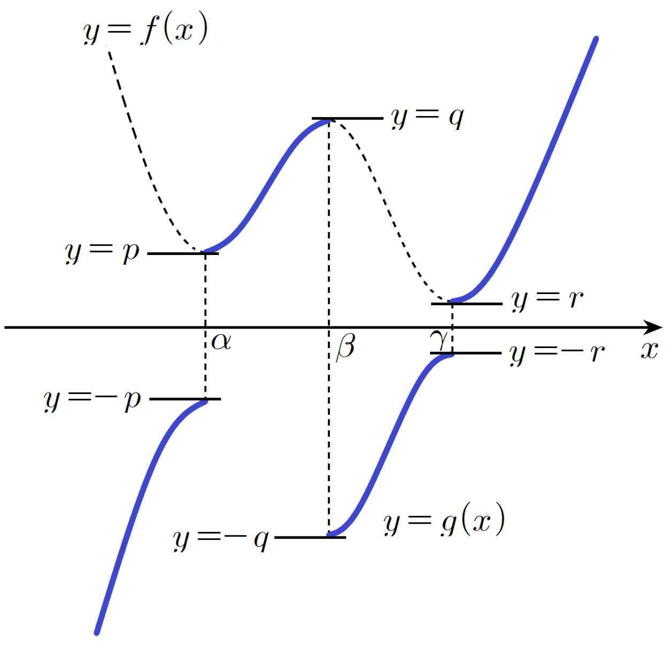
$\displaystyle\lim_{t\to 0+}\frac{g(x+t)-g(x)}{t}=|f'(x)|$ 이므로 $g'(x)=|f'(x)|$,

$g'(x)\ge 0$

$y=g(x)$는 증가함수이다.

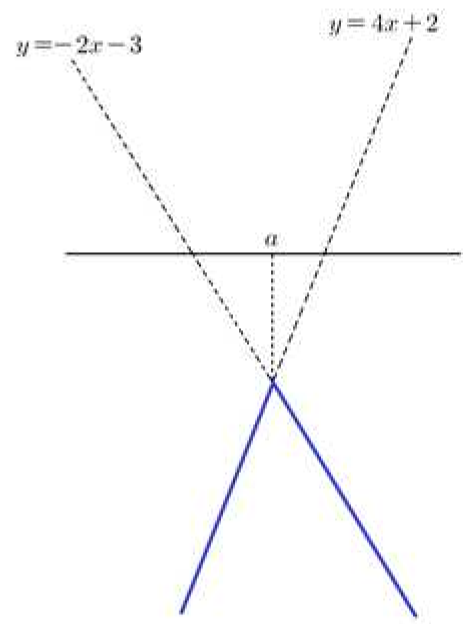
$y=g(x)$는 증가함수이어야 하고, $g(x)=\pm f(x)$이므로

$y=f(x)\ge 0$이므로 x축 위에 그려지고, $g(x)$는 감소구간을 가질 수 없으므로 아래 그림과 같이 $f(x)$를 선택해야 한다.



위의 그림과 같이 세 점에서 α, β, γ에서 불연속이 된다.

$h(x)=\begin{cases} 4x+2 & (x<a) \\ -2x-3 & (x\ge a) \end{cases}$의 그래프가 아래 그림과 같이 연속일 때,



$y=g(x)h(x)$에서 $x=\alpha,\ \beta,\ \gamma$에서 연속이기 위해

$h(\alpha)=0$이거나

$ph(\alpha)=-ph(\alpha),\ qh(\beta)=-qh(\beta),\ rh(\gamma)=-rh(\gamma)$

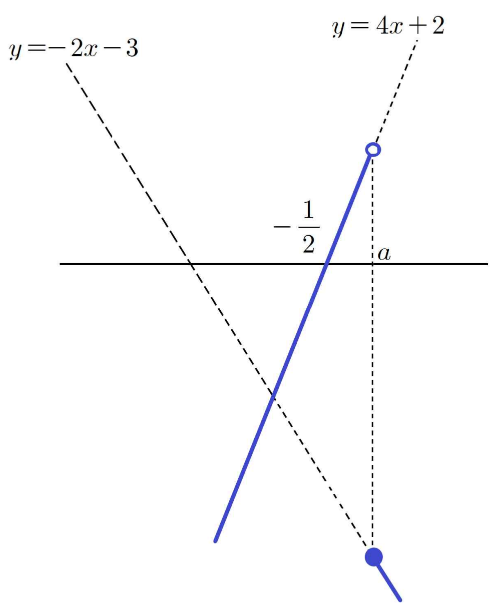
이어야 한다. 세 점에서 모두 위의 조건을 만족할 수 없으므로

$y=h(x)$가 연속일 수 없다.

(i) $a<-\dfrac{3}{2}$일 때,

$a=\dfrac{1}{2}$이므로 $a<-\dfrac{3}{2}$일 수 없다.

(ii) $a>-\dfrac{1}{2}$일 때,



$y=g(x)$의 세 점에서 가 연속이 되기 위해

$ph(\alpha)=-ph(\alpha),\ qh(\beta)=-qh(\beta),\ rh(\gamma)=-rh(\gamma)$이 성립하기

위해 $h(x)$의 값이 하나의 함수일 때, 같아 질수 없다. 그러므로

$x=a$일 때, $k(4a+2)=-k(-2a-3)$을 만족하는 값이 존재한다.

$4a+2=2a+3,\ a=\dfrac{1}{2}$일 때, $y=g(x)h(x)$는 연속이 된다.

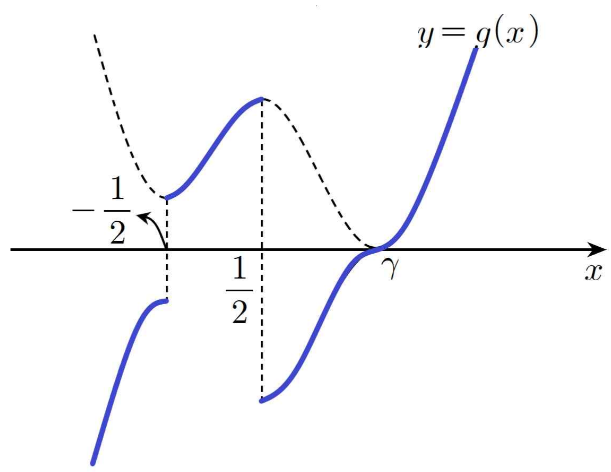
그리고 $h(x)=0$이 되는 점 $x=-\dfrac{1}{2}$일 때, $y=g(x)h(x)$가

연속이다.

연속이 가능한 점들의 대소 관계에 따라

$\alpha=-\dfrac{1}{2}$이고 $\beta=\dfrac{1}{2}$이면, $x=\gamma$에서 $y=g(x)$가 연속이어야

하므로 $g(\gamma)=0$이어야 한다.



위의 그림에 따라 $f'(x)=16\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x-\gamma)$라 할 때,

$f'(x)=16\left(x^2-\dfrac{1}{4}\right)(x-\gamma)=16x^3-16\gamma x^2-4x+4\gamma$

$f(x)=4x^4-\dfrac{16}{3}\gamma x^3-2x^2+4\gamma x+C$

$g(0)=\dfrac{40}{3}$이므로 $C=\dfrac{40}{3}$,

$f(x)=4x^4-\dfrac{16}{3}\gamma x^3-2x^2+4\gamma x+\dfrac{40}{3}$

$f(\gamma)=0$이므로 $4\gamma^4-\dfrac{16}{3}\gamma^4-2\gamma^2+4\gamma^2+\dfrac{40}{3}=0$

$-\dfrac{4}{3}\gamma^4+2\gamma^2+\dfrac{40}{3}=0,\ 2\gamma^4-3\gamma^2-20=0,\ (2\gamma^2+5)(\gamma^2-4)=0$

$\gamma^2=4$이고 $\gamma>\dfrac{1}{2}$이므로 $\gamma=2$

$\therefore\ f(x)=4x^4-\dfrac{32}{3}x^3-2x^2+8x+\dfrac{40}{3}$,

$f(1)=4-\dfrac{32}{3}-2+8+\dfrac{40}{3}=\dfrac{38}{3},\ g(1)=-\dfrac{38}{3}$,

$h(3)=-2\times3-3=-9$

$\therefore\ g(1)\times h(3)=\left(-\dfrac{38}{3}\right)\times(-9)=114$

Ch③ 적분

TH①. 넓이 [3,4점]

2025학년도 경찰대학교

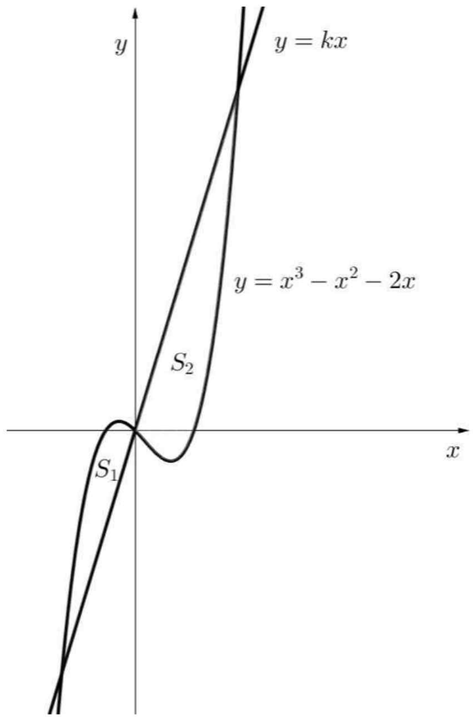
2025 Trend

1. 함수 $f(x)=x^3+6x^2+13x+8$의 역함수를 $g(x)$라고 하자. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 직선 $y=-x+8$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 36 ② 40 ③ 44
④ 48 ⑤ 52

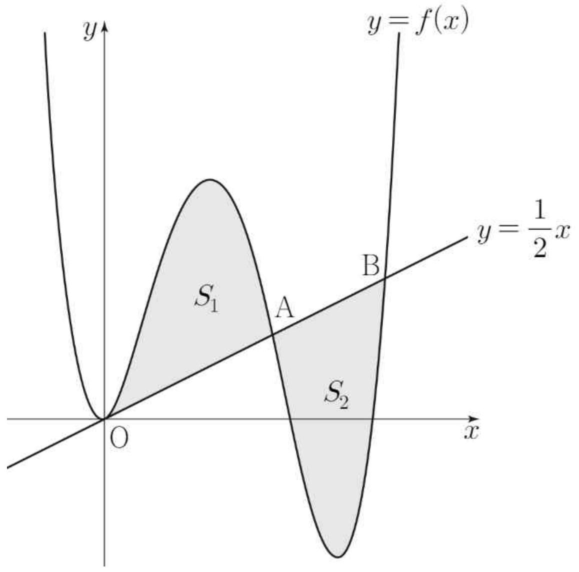
2025학년도 경찰대학교

2. 다음 그림과 같이 삼차함수 $f(x)=x^3-x^2-2x$의 그래프와 직선 $y=kx$로 둘러싸인 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. $S_2-S_1=18$일 때, 실수 k의 값은?



① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{23}{4}$ ③ $\frac{25}{4}$
④ $\frac{27}{4}$ ⑤ $\frac{29}{4}$

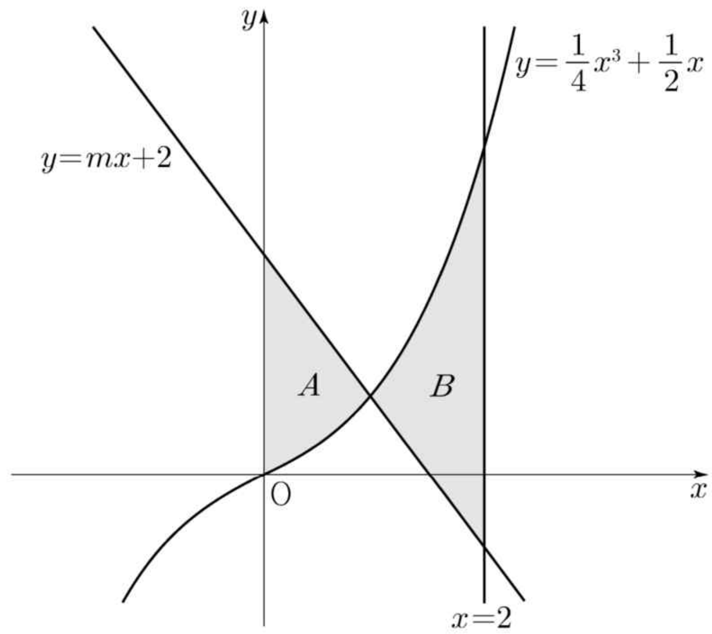
3. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 원점 O에서 접하고 x좌표가 양수인 두 점 A, B ($\overline{\mathrm{OA}}<\overline{\mathrm{OB}}$)에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 선분 OA로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 선분 AB로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_2라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{5}$이고 $S_1=S_2$일 때, $f(1)$의 값은?



① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$
④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{17}{2}$

4. 곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$와 직선 $y=mx+2$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$와 두 직선 $y=mx+2$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $B-A=\frac{2}{3}$일 때, 상수 m의 값은? (단, $m<-1$)

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{17}{12}$ ③ $-\frac{4}{3}$
④ $-\frac{5}{4}$ ⑤ $-\frac{7}{6}$



5. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x^2-2x+6 & (x<0) \\ -x^2+2x+6 & (x\geq 0) \end{cases}$$

의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점을 P, Q라 하고, 상수 k $(k>4)$에 대하여 직선 $x=k$가 x축과 만나는 점을 R이라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=k$ 및 선분 QR로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=2B$일 때, k의 값은? (단, 점 P의 x좌표는 음수이다.)

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$
④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

TH②. 운동 [3,4점]

2025학년도 사관학교

6. 두 점 P와 Q는 시각 $t=0$일 때 각각 점 A(9)와 점 B(1)에서 출발하여 수직선 위를 움직인다. 두 점 P, Q의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 속도는 각각

$$v_1(t)=6t^2-18t+7,\ v_2(t)=2t+1$$

이다. 시각 t에서의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, 닫힌구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(t)$의 최댓값은?

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

7. 양수 a에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t(a-t)$$

이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 16이고, 시각 $t=2a$에서 점 P의 위치는 0이다. 시각 $t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는?

① 54 ② 58 ③ 62
④ 66 ⑤ 70

2025 Trend

8. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=\begin{cases} -t^2+t+2 & (0 \leq t \leq 3) \\ k(t-3)-4 & (t>3) \end{cases}$$

이다. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀌는 시각에서의 점 P의 위치가 1일 때, 양수 k의 값을 구하시오.

TH③. 적분 [4점]

2025학년도 경찰대학교

9. 실수 a, b, c, d에 대하여 삼차함수

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$

(나) $\int_{-1}^{1} xf(x)dx = 0$

함수 $f(x)$에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $abcd \geq 0$

ㄴ. $ab < 0$이면 방정식 $f(x) = 0$은 열린구간 $(-1, 0)$에서 적어도 한 개의 실근을 갖는다.

ㄷ. $ab > 0$이면 방정식 $f(x) = 0$은 열린구간 $(0, 1)$에서 오직 한 개의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2025학년도 경찰대학교

10. 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{0}^{4} f(x)dx$의 값을 구하시오.

(가) 모든 실수 x에 대하여
$(f'(x)+2)(f'(x)-2) = x(x-4)$ 이다.

(나) $f(0) < f(4)$, $f(2) = 1$

2025학년도 사관학교 (22번)

11. 함수 $f(x)=x^2-2x$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\{h(x)-f(x)\}\{h(x)-g(x)\}=0$이다. (나) $h(k)h(k+2)\leq 0$을 만족시키는 서로 다른 실수 k의 개수는 3이다.

$\int_{-3}^{2} h(x)dx=26$이고 $h(10)>80$일 때, $h(1)+h(6)+h(9)$의 값을 구하시오.

2024년 7월 교육청모의고사

12. 두 상수 a, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0\leq x<4$일 때, $f(x)=x^3+ax^2+bx$이다. (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)+16$이다.

$\int_{4}^{7} f(x)dx$의 값은?

① $\frac{255}{4}$ ② $\frac{261}{4}$ ③ $\frac{267}{4}$ ④ $\frac{273}{4}$ ⑤ $\frac{279}{4}$

13. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 정수 k에 대하여

$$2k-8 \le \frac{f(k+2)-f(k)}{2} \le 4k^2+14k$$

를 만족시킬 때, $f'(3)$의 값을 구하시오.

TH④. 정적분으로 표현된 함수 [4점]

2025학년도 경찰대학교

2025 Trend

14. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & (x<1) \\ a-a|x-2| & (x \ge 1) \end{cases}$$

이라 하자. 양수 b에 대하여 함수

$$g(x)=|x(x-2)|\int_b^x f(t)dt$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 최댓값은?

① $\frac{14}{3}$ ② $\frac{29}{6}$ ③ 5 ④ $\frac{31}{6}$ ⑤ $\frac{16}{3}$

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 상수 k $(k \geq 0)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} 2x-k & (x \leq k) \\ f(x) & (x > k) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능하다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여
> $$\int_0^x g(t)\{|t(t-1)|+t(t-1)\}dt \geq 0$$이고
> $$\int_3^x g(t)\{|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)\}dt \geq 0$$이다.

$g(k+1)$의 최솟값은?

① $4-\sqrt{6}$ ② $5-\sqrt{6}$ ③ $6-\sqrt{6}$
④ $7-\sqrt{6}$ ⑤ $8-\sqrt{6}$

16. 최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $\int_0^x f(t)dt=2x^3+\int_0^{-x} f(t)dt$를 만족시킨다. $f(1)=5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

17. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2+3x+a & (x<0) \\ 3x+a & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. 함수

$$g(x)=\int_{-4}^{x} f(t)dt$$

가 $x=2$에서 극솟값을 가질 때, 함수 $g(x)$의 극댓값은?

① 18 ② 20 ③ 22

④ 24 ⑤ 26

18. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\int_{1}^{x} tf(t)\,dt+\int_{-1}^{x} tg(t)\,dt=3x^4+8x^3-3x^2$

(나) $f(x)=xg'(x)$

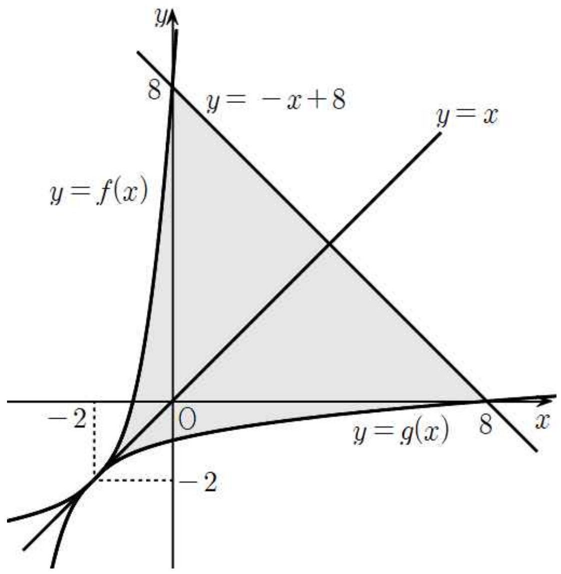
$\displaystyle\int_{0}^{3} g(x)\,dx$의 값은?

① 72 ② 76 ③ 80

④ 84 ⑤ 88

1. [정답] ②

[해설]



방정식 $x^3+6x^2+13x+8=x$, $(x+2)^3=0$에서 $x=-2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 위의 그림과 같다.
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$, y축으로 둘러싸인 넓이와 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=x$, x축으로 둘러싸인 넓이가 서로 같으므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=2\times\int_{-2}^{0}(x^3+6x^2+13x+8-x)dx+\frac{1}{2}\times8\times8$$
$$=2\left[\frac{1}{4}x^4+2x^3+6x^2+8x\right]_{-2}^{0}+32$$
$$=2(-28+32)+32$$
$$=40$$

2. [정답] ④

[해설]
삼차함수 $f(x)=x^3-x^2-2x$에 대하여 $y=f(x)$와 직선 $y=kx$는 서로 다른 세 점에서 만난다. 원점이 아닌 두 교점의 x좌표를 a, b $(a<b)$라 하자.

$$x^3-x^2-2x=kx,\qquad x\{x^2-x-(k+2)\}=0$$
$$x=0 \text{ 또는 } x^2-x-(k+2)=0$$

방정식 $x^2-x-(k+2)=0$의 두 실근이 a, b이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+b=1,\ ab=-k-2$$

$(b-a)^2=(a+b)^2-4ab$ 이므로

$$(b-a)^2=4k+9,\qquad b-a=\sqrt{4k+9}$$

$a+b=1$이므로 $\quad b^2-a^2=\sqrt{4k+9}$

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ 이므로

$$a^2+b^2=2k+5$$

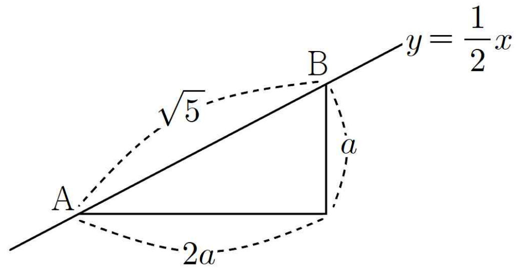
$S_2-S_1=18$ 이므로 $\quad S_1-S_2=-18$

$$S_1-S_2=\int_a^0\{f(x)-kx\}dx-\int_0^b\{kx-f(x)\}dx$$
$$=\int_a^0\{f(x)-kx\}dx+\int_0^b\{f(x)-kx\}dx$$
$$=\int_a^b\{f(x)-kx\}dx$$
$$=\int_a^b\{x^3-x^2-(k+2)x\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{k+2}{2}x^2\right]_a^b$$
$$=\frac{b^4-a^4}{4}-\frac{b^3-a^3}{3}-\frac{k+2}{2}(b^2-a^2)$$
$$=\frac{\sqrt{4k+9}\,(2k+5)}{4}-\frac{\sqrt{4k+9}\,(k+3)}{3}-\frac{\sqrt{4k+9}\,(k+2)}{2}$$

이므로

$$\sqrt{4k+9}\left(\frac{2k+5}{4}-\frac{k+3}{3}-\frac{k+2}{2}\right)=-18$$
$$\left(\sqrt{4k+9}\right)^3=2^3\times3^3,\qquad \sqrt{4k+9}=6$$
$$\therefore\ k=\frac{27}{4}$$

3. 정답 ⑤



기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 선분AB를 빗변으로 하는 직각삼각형의 밑변과 높이의 비는 $2:1$이고, 위의 그림과 같다. 피타고라스 정리에 따라 $5a^2=5$이므로 $a=1$, A의 x좌표를 α라 할 때, B의 x좌표는 $\alpha+2$

$f(x)=\frac{1}{2}x$의 실근이 α, $\alpha+2$와 0이 중근

$$f(x)=x^2(x-\alpha)(x-\alpha-2)+\frac{1}{2}x$$
$$f(x)=x^4-2(\alpha+1)x^3+(\alpha^2+2\alpha)x^2+\frac{1}{2}x$$

$S_1=S_2$이므로 $\int_0^{\alpha+2}\left\{f(x)-\frac{1}{2}x\right\}dx=0$

$$\int_0^{\alpha+2}\{x^4-2(\alpha+1)x^3+(\alpha^2+2\alpha)x^2\}dx$$
$$=\left[\frac{x^5}{5}-\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)x^4+\left(\frac{\alpha^2+2\alpha}{3}\right)x^3\right]_0^{\alpha+2}=0$$
$$=\frac{(\alpha+2)^5}{5}-\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)^4}{2}+\frac{\alpha(\alpha+2)^4}{3}=0$$
$$\frac{\alpha+2}{5}-\frac{\alpha+1}{2}+\frac{\alpha}{3}=0,\quad \frac{6\alpha+12-15\alpha-15+10\alpha}{30}=0$$
$$\alpha-3=0,\ \alpha=3$$
$$\therefore\ f(x)=x^2(x-3)(x-5)+\frac{1}{2}x,$$
$$\therefore\ f(1)=1\times(-2)\times(-4)+\frac{1}{2}=8+\frac{1}{2}=\frac{17}{2}$$

4. [정답] ③

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 공통범위 13 [4.00점]

[해설]

$f(x)=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$, $g(x)=mx+2$ 라 하고 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표를 t $(0<t<2)$라 하면 주어진 그림에서

$$A=\int_0^t\{g(x)-f(x)\}dx,\ B=\int_t^2\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$\begin{aligned}\therefore\ B-A&=\int_t^2\{f(x)-g(x)\}dx-\int_0^t\{g(x)-f(x)\}dx\\&=\int_t^2\{f(x)-g(x)\}dx+\int_0^t\{f(x)-g(x)\}dx\\&=\int_0^2\{f(x)-g(x)\}dx\\&=\int_0^2\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x-mx-2\right)dx\\&=\left[\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{4}x^2-\frac{m}{2}x^2-2x\right]_0^2\\&=1+1-2m-4\\&=-2m-2\end{aligned}$$

따라서 $B-A=\frac{2}{3}$ 에서

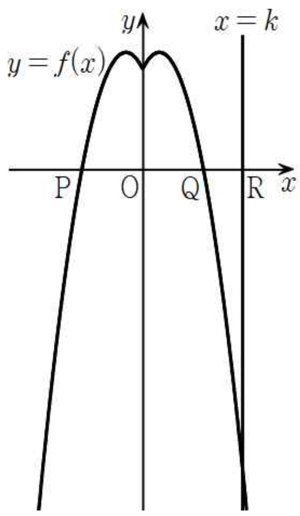
$$-2m-2=\frac{2}{3},\qquad m=-\frac{4}{3}$$

5. [정답] ④

[해설]

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+6 & (x<0)\\-x^2+2x+6 & (x\geq 0)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}-(x+1)^2+7 & (x<0)\\-(x-1)^2+7 & (x\geq 0)\end{cases}$$

에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $x=k$ 및 세 점 P, Q, R는 다음과 같다.



함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 y 축에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 선분 OP 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 선분 OQ 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

따라서 $A=2B$, 즉 $\frac{A}{2}=B$ 에서

$$\int_0^k(-x^2+2x+6)dx=0$$

$$\begin{aligned}\int_0^k(-x^2+2x+6)dx&=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+6x\right]_0^k\\&=-\frac{1}{3}k^3+k^2+6k\end{aligned}$$

$-\frac{1}{3}k^3+k^2+6k=0$ 에서 $\quad -\frac{1}{3}k(k-6)(k+3)=0$

$$\therefore\ k=6\ (\because\ k>4)$$

6. [정답] ③

7. [정답] ②

[해설]

시각 t $(t\geq 0)$에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하자.

$$\begin{aligned}x(t)&=x(0)+\int_0^t v(t)dt\\&=16+\int_0^t 3t(a-t)dt\\&=16+\int_0^t(-3t^2+3at)dt\\&=16+\left[-t^3+\frac{3}{2}at^2\right]_0^t\\&=-t^3+\frac{3}{2}at^2+16\end{aligned}$$

시각 $t=2a$에서 점 P의 위치가 0이므로

$$\begin{aligned}x(2a)&=-(2a)^3+\frac{3}{2}a\times(2a)^2+16\\&=16-2a^3=0\end{aligned}$$

$a^3=8,\ a=2$

$v(t)=3t(2-t)=-3t^2+6t$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=5$까지

점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^5|v(t)|dt$$
$$=\int_0^5|-3t^2+6t|dt$$
$$=\int_0^2(-3t^2+6t)dt+\int_2^5(3t^2-6t)dt$$
$$=\left[-t^3+3t^2\right]_0^2+\left[t^3-3t^2\right]_2^5$$
$$=\{(-8+12)-0\}+\{(125-75)-(8-12)\}$$
$$=58$$

8. [정답] 16

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 공통범위 19
[3.00점]

[해설]
속도 $v(t)$가

$$v(t)=\begin{cases}-t^2+t+2 & (0\le t\le 3)\\ k(t-3)-4 & (t>3)\end{cases}$$

방정식 $-t^2+t+2=0$에서 $\quad -(t-2)(t+1)=0$

$t=2$ 또는 $t=-1$

처음으로 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각 $t=2$이다.
따라서 두 번째로 운동 방향이 바뀌는 시각은

방정식 $k(t-3)-4=0$에서 $\quad t=\dfrac{4}{k}+3$

$t=\dfrac{k}{4}+3$에서의 점 P의 위치가 1이므로

$$\int_0^3(-t^2+t+2)dt+\int_3^{\frac{4}{k}+3}(kt-3k-4)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+2t\right]_0^3+\left[\frac{k}{2}t^2-3kt-4t\right]_3^{\frac{4}{k}+3}$$

$$=\left(-9+\frac{9}{2}+6\right)+\left\{\frac{k}{2}\left(\frac{4}{k}+3\right)^2-3k\left(\frac{4}{k}+3\right)-4\left(\frac{4}{k}+3\right)-\left(\frac{9k}{2}-9k-12\right)\right\}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{8}{k}=1$$

$\therefore\ k=16$

9. [정답] ⑤

[해설]
삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$에 대하여

$\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=0,\ \int_{-1}^{1}xf(x)\,dx=0$이다.

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(ax^3+bx^2+cx+d)\,dx$$

$$=2\int_0^1(bx^2+d)\,dx$$

$$=2\left[\frac{b}{3}x^3+dx\right]_0^1$$

$$=\frac{2b}{3}+2d$$

$\dfrac{2b}{3}+2d=0$이므로 $\quad d=-\dfrac{b}{3}$

$$\int_{-1}^{1}xf(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(ax^4+bx^3+cx^2+dx)\,dx$$

$$=2\int_0^1(ax^4+cx^2)\,dx$$

$$=2\left[\frac{a}{5}x^5+\frac{c}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=\frac{2a}{5}+\frac{2c}{3}$$

$\dfrac{2a}{5}+\dfrac{2c}{3}=0$이므로 $\quad c=-\dfrac{3}{5}a$

ㄱ. 실수 $a,\ b,\ c,\ d$에 대하여 $c=-\dfrac{3}{5}a,\ d=-\dfrac{b}{3}$ 이므로

$$abcd=ab\times\left(-\frac{3}{5}a\right)\times\left(-\frac{b}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{5}(ab)^2\ge 0$$

(참)

ㄴ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서 연속이다.

$$f(-1)=-a+b-c+d$$

$$=-a+b-\left(-\frac{3}{5}a\right)-\frac{b}{3}$$

$$=-\frac{2}{5}a+\frac{2}{3}b$$

$$f(0)=d=-\frac{b}{3}$$

$ab<0$이면

$$f(-1)f(0)=\left(-\frac{2}{5}a+\frac{2}{3}b\right)\left(-\frac{b}{3}\right)$$

$$=\frac{2}{15}ab-\frac{2}{9}b^2<0$$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-1,\ 0)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(참)

ㄷ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이다.

$$f(1)=a+b+c+d$$

$$=a+b-\frac{3}{5}a-\frac{b}{3}$$

$$=\frac{2}{5}a+\frac{2}{3}b$$

$ab>0$이면

$$f(0)f(1)=\left(-\frac{b}{3}\right)\left(\frac{2}{5}a+\frac{2}{3}b\right)$$

$$=-\frac{2}{15}ab-\frac{2}{9}b^2<0$$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

이므로 $f'(x)=3ax^2+2bx-\dfrac{3}{5}a$이다.

함수 $f'(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이다.

$$f'(0)=-\frac{3}{5}a,\ f'(1)=\frac{12}{5}a+2b$$

$ab>0$이면

$$f'(0)f'(1)=-\frac{3}{5}a\left(\frac{12}{5}a+2b\right)$$

$$=-\frac{36}{25}a^2-\frac{6}{5}ab<0$$

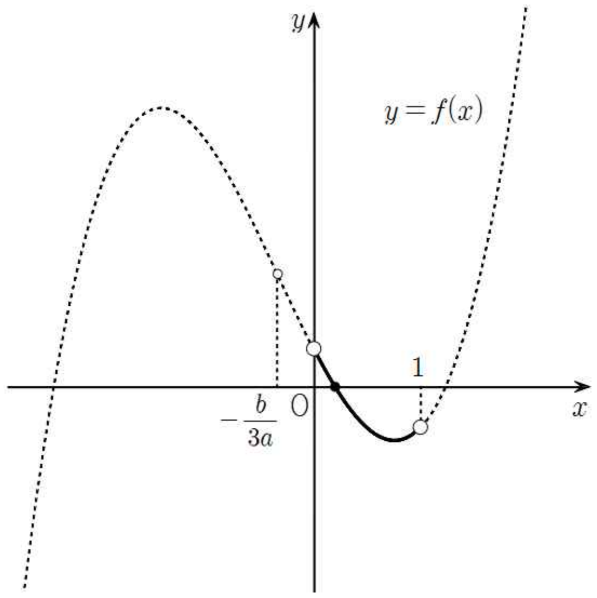
이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f'(x)=0$은 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

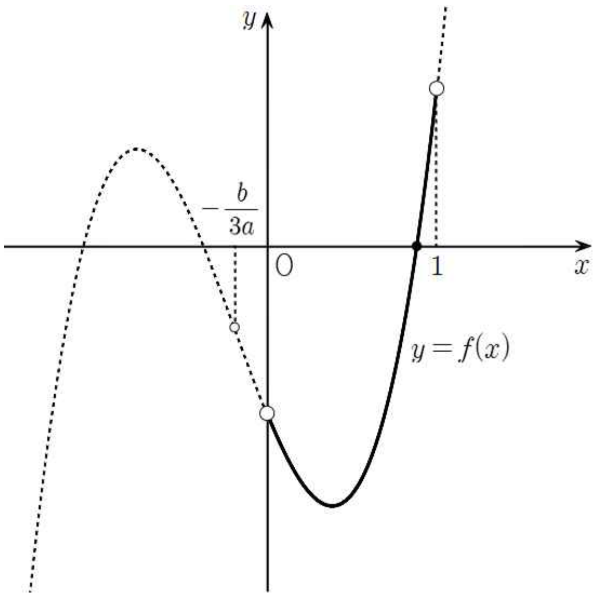
함수 $f(x)$의 그래프는 점 $\left(-\dfrac{b}{3a},\ f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$에 대하여 대칭이다. $ab>0$이면

$$-\frac{b}{3a}<0$$

따라서 방정식 $f'(x)=0$ 은 열린구간 $(0, 1)$ 에서 오직 하나의 실근을 갖는다.

$a>0$, $b>0$ 일 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 2개의 꼴 중 하나이다.





위의 두 그림에 의하여 $a>0$, $b>0$ 일 때, 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(0, 1)$ 에서 오직 한 실근을 갖는다.

$a<0$, $b<0$ 일 때도 위와 같은 방법으로 하면 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(0, 1)$ 에서 오직 한 실근을 갖는다.

따라서 $ab>0$ 이면 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(0, 1)$ 에서 오직 한 실근을 갖는다. (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

10. [정답] 4

[해설]

실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여 조건 (가)의 식 $\{f'(x)+2\}\{f'(x)-2\}=x(x-4)$에서

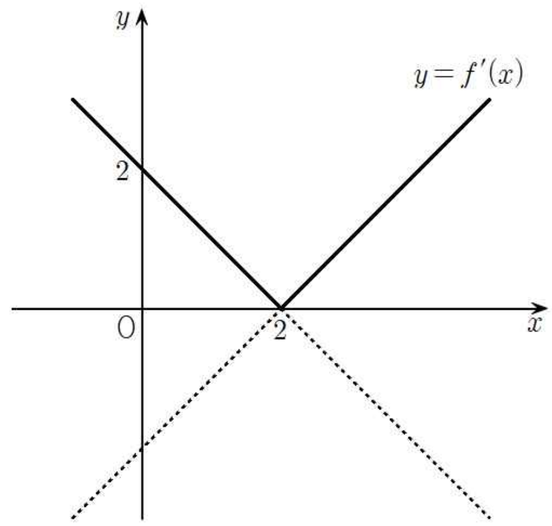
$$\{f'(x)\}^2-(x-2)^2=0$$

$$\{f'(x)-x+2\}\{f'(x)+x-2\}=0$$

$$\therefore\ f'(x)=x-2 \text{ 또는 } f'(x)=-x+2$$

따라서 (나)의 조건을 만족하는 도함수 $f'(x)$ 는 다음과 같다.

$$f'(x)=\begin{cases}-x+2 & (x<2)\\ x-2 & (x\geq 2)\end{cases}$$



이므로

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2+2x+C_1 & (x<2)\\ \dfrac{1}{2}x^2-2x+C_2 & (x\geq 2)\end{cases}$$

$f(2)=1$ 이므로 $C_1=-1,\ C_2=3$

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2+2x-1 & (x<2)\\ \dfrac{1}{2}x^2-2x+3 & (x\geq 2)\end{cases}$$

따라서 $\int_0^4 f(x)\,dx$ 에서

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2\left(-\frac{1}{2}x^2+2x-1\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{6}x^3+x^2-x\right]_0^2$$
$$=\left(-\frac{8}{6}+4-2\right)-0=\frac{2}{3}$$

$$\int_2^4 f(x)\,dx=\int_2^4\left(\frac{1}{2}x^2-2x+3\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{6}x^3-x^2+3x\right]_2^4$$
$$=\left(\frac{64}{6}-16+12\right)-\left(\frac{8}{6}-4+6\right)=\frac{10}{3}$$

$$\therefore\ \int_0^4 f(x)\,dx=\frac{2}{3}+\frac{10}{3}=4$$

11. [정답] 156

12. [정답] ④

[해설]

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=4$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 4+} f(x)=\lim_{x\to 4-} f(x)=f(4)$$

$4\leq x<8$에서의 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $0\leq x<4$에서의 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 16만큼 평행이동한 그래프와 일치한다.

모든 실수 x에 대하여

$f(x+4)=f(x)+16$ 이므로

$$\lim_{x\to 4+} f(x)=\lim_{x\to 0+} f(x+4)$$
$$=\lim_{x\to 0+}\{f(x)+16\}=0+16=16$$

$$\lim_{x\to 4-} f(x)=\lim_{x\to 4-}(x^3+ax^2+bx)$$
$$=64+16a+4b$$

$f(4)=f(0)+16=16$

$b=64+16a+4bb=$

함수 $f(x)$가 $x=4$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 4+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$$

$$\lim_{x\to 4+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x+4)-f(4)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\{f(x)+16\}-16}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{x^3+ax^2+bx}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0+}(x^2+ax+b)=b=-4a-12$$

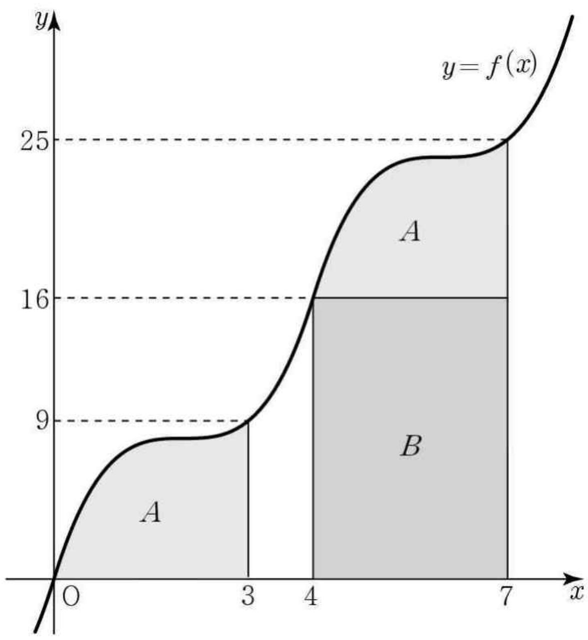
$$\lim_{x\to 4-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to 4-}\frac{(x^3+ax^2+bx)-16}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to 4-}\frac{x^3+ax^2+(-4a-12)x-16}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to 4-}\frac{ax(x-4)+(x-4)(x^2+4x+4)}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to 4-}\{x^2+(a+4)x+4\}=4a+36$$

$-4a-12=4a+36$

$a=-6,\ b=12$

$f(x)=x^3-6x^2+12x\ (0\le x<4)$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 직선 $y=16$과 x축 및 두 직선 $x=4$, $x=7$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하면

$$A=\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3(x^3-6x^2+12x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+6x^2\right]_0^3=\frac{81}{4}$$

$B=3\times 16=48$

따라서 $\int_4^7 f(x)dx=A+B=\frac{81}{4}+48=\frac{273}{4}$

13. [정답] 31

[해설]

부등식 $2k-8\le \frac{f(k+2)-f(k)}{2}\le 4k^2+14k$ ⋯⋯ ㉠

에서 $2k-8=4k^2+14k$를 만족하는 k의 값을 구하면

$4k^2+12k+8=0$, $(k+1)(k+2)=0$

$k=-2$ 또는 $k=-1$

k의 값을 부등식 ㉠에 대입하면

$k=-2$일 때, $-12\le \frac{f(0)-f(-2)}{2}\le -12$

$\therefore\ f(0)-f(-2)=-24$ ⋯⋯ ㉡

$k=-1$일 때, $-10\le \frac{f(1)-f(-1)}{2}\le -10$

$\therefore\ f(1)-f(-1)=-20$ ⋯⋯ ㉢

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)

라 하자. ㉡, ㉢에서

$f(0)-f(-2)=-4a+2b+8$이므로 $-4a+2b+8=-24$

$f(1)-f(-1)=2+2b$이므로 $2+2b=-20$

위 두 식을 연립하면 $a=\frac{5}{2}$, $b=-11$

$f(x)=x^3+\frac{5}{2}x^2-11x+c$이므로

$f'(x)=3x^2+5x-11$

$\therefore\ f'(3)=3\times 3^2+5\times 3-11=31$

14. [정답] ⑤

[해설]

함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & (x<1) \\ a-a|x-2| & (x\ge 1)\end{cases}$에 대하여

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}(x^2-1)$$
$$=0$$
$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}(a-a|x-2|)$$
$$=0$$

$f(1)=0$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. 따라서 함수 $\int_b^x f(t)\,dt$는 미분가능한 함수이다.

$\int_b^x f(t)\,dt=F(x)$라 하자.

$F(b)=0$, $F'(x)=f(x)$

이므로 함수 $g(x)=|x(x-2)|\int_b^x f(t)\,dt$ 에서

$$g(x)=|x(x-2)|F(x)$$

이다.

$$g(x)=\begin{cases} x(x-2)F(x) & (x<0) \\ x(2-x)F(x) & (0\le x<2) \\ x(x-2)F(x) & (x\ge 2) \end{cases}$$

함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$, $x=2$ 에서 미분가능하다.

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{x(x-2)F(x)}{x}=-2F(0)$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x(2-x)F(x)}{x}=2F(0)$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}$ 이므로

$$-2F(0)=2F(0),\qquad F(0)=0,\qquad \int_b^0 f(t)\,dt=0$$

$$\therefore\ \int_0^b f(t)\,dt=0$$

$x=2$ 에서

$$\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{x(2-x)F(x)}{x-2}=-2F(2)$$

$$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{x(x-2)F(x)}{x-2}=2F(2)$$

$\displaystyle\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$ 이므로

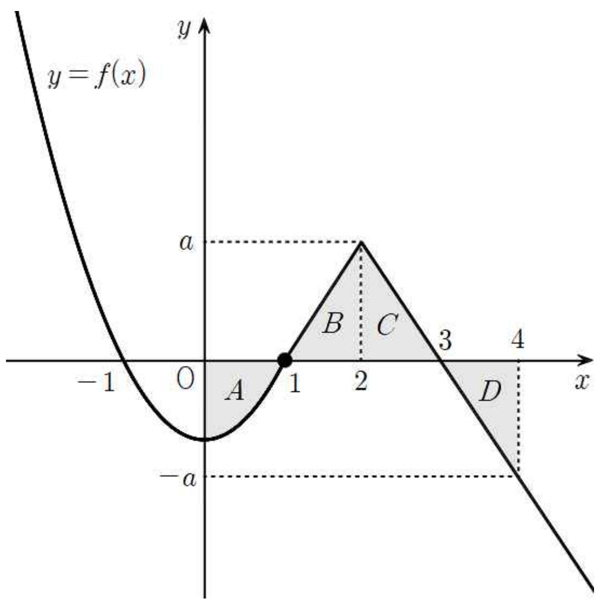
$$-2F(2)=2F(2),\qquad F(2)=0,\qquad \int_b^2 f(t)\,dt=0$$

$$\therefore\ \int_2^b f(t)\,dt=0$$

$\displaystyle\int_0^b f(t)\,dt=0$, $\displaystyle\int_b^2 f(t)\,dt=0$ 이므로

$$\int_0^2 f(t)\,dt=\int_0^b f(t)\,d+\int_b^2 f(t)\,dt=0$$

이다.



$\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt=0$ 이므로 위의 그림에서 두 영역 A, B의 넓이가 같다.

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times 2^3=\frac{a}{2}\qquad \therefore\ a=\frac{4}{3}$$

위의 그림에서 색칠한 네 영역 A, B, C, D의 넓이가 같으므로 $\displaystyle\int_2^b f(t)\,dt=0$ 이고, $b>0$ 인 실수 b는

$$b=2 \text{ 또는 } b=4$$

따라서 $a+b$의 최댓값은 $a=\dfrac{4}{3}$, $b=4$ 일 때 $\dfrac{16}{3}$ 이다.

15. [정답] ②

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 공통범위 15 [4.00점]

[해설]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 상수 k $(k\ge 0)$ 에 대하여

$$g(x)=\begin{cases} 2x-k & (x\le k) \\ f(x) & (x>k) \end{cases}$$

일 때 조건 (가)에서 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능하므로 $x=k$ 에서 연속이고 미분가능하다.

즉 $\displaystyle\lim_{x\to k-}(2x-k)=\lim_{x\to k+}f(x)=k$ 에서 $\quad f(k)=k$

$\displaystyle\lim_{h\to 0-}\frac{2(k+h)-k-k}{h}=2$ 이므로 $\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{f(k+h)-f(k)}{h}=2$ 에서

$$f'(k)=2$$

즉 $f(x)=(x-k)^3+a(x-k)^2+2(x-k)+k$ (a, b는 상수)라 할 수 있다. …… ㉠

$h(t)=|t(t-1)|+t(t-1)$ 라 하면

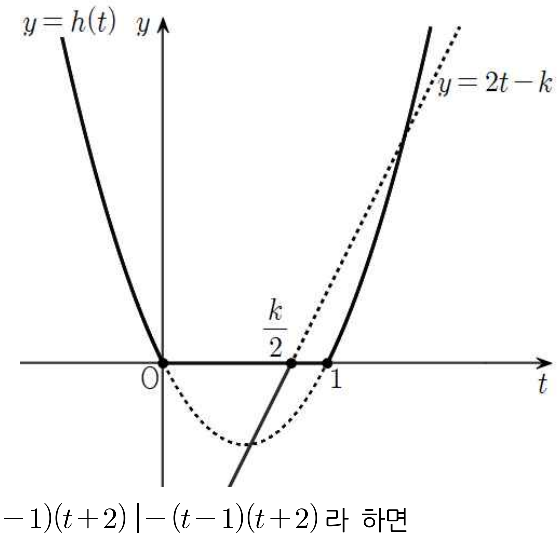
$$h(t)=\begin{cases} 2t(t-1) & (t<0 \text{ 또는 } t>1) \\ 0 & (0\le t\le 1) \end{cases}$$

조건 (가)에서 모든 실수 x 에 대하여 $\displaystyle\int_0^x g(t)h(t)dt\ge 0$ 을 만족시키려면 $t<0$ 또는 $t>1$ 에서 $h(t)>0$ 이므로

$t<0$ 에서 $g(t)<0$, $t>1$ 에서 $g(t)\ge 0$ 이 성립해야 한다.

즉 $2t-k=0$ 에서 $t=\dfrac{k}{2}$ 이므로

$$0\le\frac{k}{2}\le 1,\qquad 0\le k\le 2 \qquad\cdots\cdots ㉡$$



$s(t)=|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)$ 라 하면

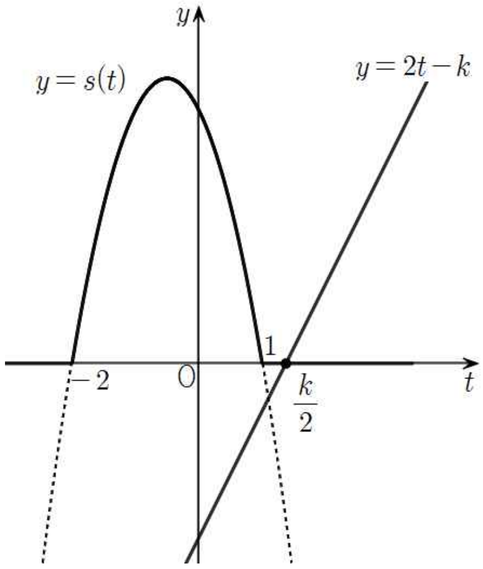
$$s(t)=\begin{cases} 0 & (t<-2 \text{ 또는 } t>1) \\ -2(t+2)(t-1) & (-2\le t\le 1) \end{cases}$$

조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $\int_{3}^{x} g(t)s(t)dt \geq 0$을

만족시키려면 $-2 \leq t \leq 1$에서 $s(t) \geq 0$이므로 $-2 \leq t \leq 1$에서 $g(t) \leq 0$이 성립해야 한다.

즉 $2t-k=0$에서 $t=\frac{k}{2}$이므로

$$\frac{k}{2} \geq 1, \quad k \geq 2 \qquad \cdots\cdots ㉢$$



즉 ㉡, ㉢을 모두 만족시키는 실수 k의 값이 2이므로 ㉠에서

$$f(x)=(x-2)^3+a(x-2)^2+2(x-2)+2,$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x-2)^2+2a(x-2)+2 \\ &= 3x^2+2(a-6)x-4a+14 \\ &= 3\left(x-\frac{6-a}{3}\right)^2+14-4a-\frac{(6-a)^2}{3} \end{aligned}$$

이때 $x \geq 2$일 때 $f'(x) \geq 0$을 만족시켜야 하므로

(ⅰ) $\frac{6-a}{3}<2$, 즉 $a>0$일 때

함수 $f'(x)$는 $x=2$에서 최솟값 2를 가지고 $2>0$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(ⅱ) $\frac{6-a}{3} \geq 2$, 즉 $a \leq 0$일 때

함수 $f'(x)$는 $x=\frac{6-a}{3}$에서 최솟값 $14-4a-\frac{(6-a)^2}{3}$을 가지므로

$$14-4a-\frac{(6-a)^2}{3} \geq 0, \quad 6-a^2 \geq 0$$

즉 $(a+\sqrt{6})(a-\sqrt{6}) \leq 0$에서

$$-\sqrt{6} \leq a \leq 0$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $\quad a \geq -\sqrt{6} \qquad \cdots\cdots ㉣$

$$g(x)=\begin{cases} 2x-2 & (x \leq 2) \\ (x-2)^3+a(x-2)^2+2x-2 & (x>2) \end{cases}$$

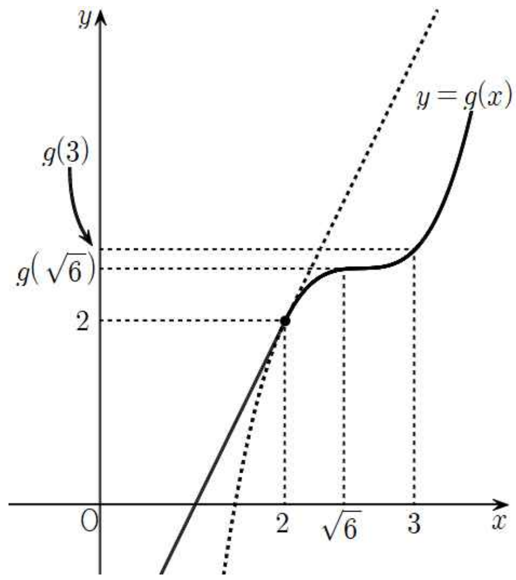
즉 $g(3)=a+5$이므로 ㉣에 의하여

$$g(3) \geq 5-\sqrt{6}$$

따라서 $g(3)$의 최솟값은 $5-\sqrt{6}$이다.

[참고]

$g(3)$의 값이 최소일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



16. 정답 16

$\int_{0}^{x} f(t)dt-\int_{0}^{-x} f(t)dt=2x^3$, $f(x)$의 부정적분을 $F(x)$라 할 때,

$F(x)-F(0)-\{F(-x)-F(0)\}=F(x)-F(-x)=2x^3$

$f(x)=3x^2+ax+b$라 할 때, $F(x)=x^3+\frac{a}{2}x^2+bx+C$

$F(x)-F(-x)=2x^3+2bx=2x^3$, $b=0$, $f(x)=3x^2+ax$

$f(1)=3+a=5$이므로 $a=2$,

$\therefore\ f(x)=3x^2+2x$, $f(2)=12+4=16$

17. [정답] ⑤

[해설]

$g(x)=\int_{-4}^{x} f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)$이므로

$$g'(x)=\begin{cases} 3x^2+3x+a & (x<0) \\ 3x+a & (x \geq 0) \end{cases}$$

함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 가지므로

$g'(2)=6+a=0$에서 $a=-6$이다.

$$g'(x)=\begin{cases} 3(x+2)(x-1) & (x<0) \\ 3(x-2) & (x \geq 0) \end{cases}$$

$g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$의 극댓값은

$$g(-2)=\int_{-4}^{-2}(3t^2+3t-6)dt=\left[t^3+\frac{3}{2}t^2-6t\right]_{-4}^{-2}=26$$

18. [정답] ①

[해설]

조건 (가)에서 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$x\{f(x)+g(x)\}=12x^3+24x^2-6x$$

$$f(x)+g(x)=12x^2+24x-6$$

조건 (나)에서 $f(x)=xg'(x)$이므로

$$xg'(x)+g(x)=12x^2+24x-6$$

이때 $xg'(x)+g(x)=\{xg(x)\}'$ 이므로 위 식의 양변을 적분하면

$$xg(x)=4x^3+12x^2-6x+C \ (C\text{는 적분상수})$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면 $C=0$

$xg(x)=4x^3+12x^2-6x$ 에서 $g(x)=4x^2+12x-6$

$$\therefore \int_0^3 (4x^2+12x-6)\,dx=\left[\frac{4}{3}x^3+6x^2-6x\right]_0^3$$

$$=72$$

김지형
대치예섭