EBS
Mathematics I II

① 수열

TH①. 2024년 수능특강

2024년 수능특강 Lv3

연계 가능

1. 모든 항이 0이 아니고 공차가 음수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하고, 수열 $\{S_n\}$의 각 항을 큰 수부터 다시 차례로 나열한 수열을 $\{M_n\}$이라 하자.

$$M_1 - M_2 = 2,\ M_2 - M_3 = 1$$

이고, $S_n < 0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값이 21일 때, a_1의 값을 구하시오.

2024년 수능특강 Lv2

2025 Trend

2. 모든 항이 양수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2 \times a_3 \times a_4$의 최댓값은?

(가) 모든 자연수 n에 대하여
$a_n \times a_{n+1} \times a_{n+2} = a_2 \times a_3 \times a_4$ 이다.

(나) $a_1 = 2,\ \sum_{n=1}^{100} a_n = 233$

① 11 ② $\frac{23}{2}$ ③ 12 ④ $\frac{25}{2}$ ⑤ 13

3. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 값의 합은?

(가) $a_8=2$이고, 모든 항이 30 이하의 자연수이다.
(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+4 & (a_n\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ \dfrac{1}{3}a_n & (a_n\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

① 68 ② 70 ③ 72
④ 74 ⑤ 76

2024년 수능특강 Lv3

2025 Trend

4. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

를 만족시킬 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $a_2=1$
ㄴ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+2}=a_n+2$이다.
ㄷ. $a_1=3$이면 $\sum_{n=1}^{10} a_n=40$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2024년 수능특강 Lv3

2025 Trend

5. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여

$$(2n-1)a_n+2S_n=2$$

가 성립한다. $\dfrac{a_1a_5}{a_{10}}=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

TH②. 2024년 수능완성

2024년 수능완성

6. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_7의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은?

(가) $a_1=4$이고, 모든 자연수 n에 대하여
$(a_{n+1}-a_n-2)(a_{n+1}-2a_n)=0$이다.
(나) $2\le k\le 7$인 모든 자연수 k에 대하여 a_k는 3의 배수가 아니다.
(다) a_7은 5의 배수이다.

① 200 ② 210 ③ 220
④ 230 ⑤ 240

2025 Trend

7. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{30} a_n$의 최솟값이 90일 때, 양수 k의 값은?

(가) $a_1 > 0$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n a_{n+1} = k$이다.

① 8　② $\frac{17}{2}$　③ 9　④ $\frac{19}{2}$　⑤ 10

2024년 수능완성

8. 자연수 k에 대하여 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 4k-2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} |a_n - 4| & \left(n \le \frac{a_1}{4} + 1\right) \\ a_n + 4 & \left(n > \frac{a_1}{4} + 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_1 = a_{20}$일 때, k의 값은?

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

9. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10} S_{4k}$의 값은? (단, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \neq 0$이다.) [4점]

> $a_1 = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & \left(\dfrac{S_n}{a_n}\text{이 자연수인 경우}\right) \\ a_n - 1 & \left(\dfrac{S_n}{a_n}\text{이 자연수가 아닌 경우}\right) \end{cases}$$
>
> 이다.

① 600　② 610　③ 620
④ 630　⑤ 640

2024년 수능완성

10. 모든 항이 정수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_5의 값의 합을 구하시오. [4점]

> (가) $a_1 = 100$이고, 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+2} = \begin{cases} a_n - a_{n+1} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 2a_{n+1} - a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$
>
> 이다.
>
> (나) 6이하의 모든 자연수 m에 대하여 $a_m a_{m+1} > 0$이다.

11. 모든 항이 2이상인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1=2$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} \dfrac{a_{n+1}}{2} & (a_{n+1} \geq a_n) \\ 4a_{n+1}-4 & (a_{n+1}<a_n) \end{cases}$$

이다.

자연수 k와 5이하의 자연수 m이

$$a_k=k,\ a_{k+m}=k+m$$

을 만족시킬 때, $2k+m$의 값은? [4점]

① 10 ② 14 ③ 18

④ 22 ⑤ 26

1. **정답** 48

풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$a_1 < 0$이면 $S_1 < 0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $a_1 > 0$

또 $a_2 < 0$이면 $S_3 = 3a_2 < 0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $a_1 > a_2 > 0$이므로 2이상의 자연수 k에 대하여

$S_k = M_1$이라 하면 $n \leq k$일 때 $a_n > 0$이고 $n > k+1$일 때

$a_n < 0$이다.

(i) $S_k = M_1,\ S_{k-1} = M_2,\ S_{k+1} = M_3$인 경우

$M_1 - M_2 = S_k - S_{k-1} = a_k = 2$

$M_2 - M_3 = S_{k-1} - S_{k+1} = -a_k - a_{k+1} = 1$

즉, $a_{k+1} = -3$이므로

$d = -5$

이고

$a_1 = a_k - (k-1)\times(-5)$

$= 5k - 3$

이때

$$S_n = \frac{n\{2(5k-3)+(n-1)\times(-5)\}}{2}$$

$$= \frac{n(10k-5n-1)}{2}$$

이므로 $S_n < 0$에서

$$n > 2k - \frac{1}{5}$$

즉, $S_n < 0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값이 $2k$이므로

자연수 n의 최솟값이 21이라는 조건을 만족시킬 수 없다.

(ii) $S_k = M_1,\ S_{k+1} = M_2,\ S_{k-1} = M_3$인 경우

$M_1 - M_2 = S_k - S_{k+1} = -a_{k+1} = 2$

이므로

$a_{k+1} = -2$

$M_2 - M_3 = S_{k+1} - S_{k-1} = a_{k+1} + a_k = 1$

이므로

$a_k = 3$이므로

즉, $d = -5$이고

$a_1 = a_k - (k-1)\times(-5) = 5k - 2$

이때

$$S_n = \frac{n\{2(5k-2)+(n-1)\times(-5)\}}{2}$$

$$= \frac{n(10k-5n+1)}{2}$$

이므로 $S_n < 0$에서

$$n > 2k + \frac{1}{5}$$

즉, $S_n < 0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값이 $2k+1$이므로

$2k+1 = 21$

$k = 10$

따라서

$a_1 = 5\times 10 - 2 = 48$

2. **정답** ④

풀이

$a_2 \times a_3 \times a_4 = c\ (c \neq 0)$ 이라 하자.

모든 자연수 n에 대하여

$a_n \times a_{n+1} \times a_{n+2} = c$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이므로 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1} \times a_{n+2} \times a_{n+3} = c$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$\dfrac{a_{n+3}}{a_n} = \dfrac{c}{c} = 1$, 즉 $a_{n+3} = a_n$

그러므로

$$\sum_{n=1}^{100} = 33\sum_{n=1}^{3} a_n + a_{100}$$

$= 33(a_1 + a_2 + a_3) + a_1$

$= 33(2 + a_2 + a_3) + 2$

$= 33(a_2 + a_3) + 68$

$= 233$

에서 $a_2 + a_3 = 5$

즉, $a_2 \times a_3 = a_2(5 - a_2)$

$$= -\left(a_2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$$

에서

$a_2 \times a_3 \leq \dfrac{25}{4}$ (단, 등호는 $a_2 = a_3 = \dfrac{5}{2}$일 때 성립한다.)

이므로

$a_2 \times a_3 \times a_4 = a_2 \times a_3 \times a_1$

$= a_2 \times a_3 \times 2 \leq \dfrac{25}{4} \times 2 = \dfrac{25}{2}$

따라서 $a_2 \times a_3 \times a_4$는 $a_2 = a_3 = \dfrac{5}{2}$일 때 최댓값 $\dfrac{25}{2}$를 갖는다.

3. **정답** ③

풀이

$$a_n = \begin{cases} a_{n+1} - 4 & (a_n\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ 3a_{n+1} & (a_n\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

이고, 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 30 이하의 자연수이므로 $a_n > 0$이어야 한다.

$a_8 = 2$에서 $a_7 > 0$이어야 하므로

$a_7 = 3a_8 = 3\times 2 = 6$

(i) $a_6 = a_7 - 4 = 6 - 4 = 2$인 경우

$a_5 > 0$이어야 하므로

$a_5 = 3a_6 = 3\times 2 = 6$

㉠ $a_4 = a_5 - 4 = 6 - 4 = 2$일 때

$a_3 > 0$이어야 하므로

$a_3 = 3a_4 = 3\times 2 = 6$

$a_2 = a_3 - 4 = 6 - 4 = 2$이면

$a_1 > 0$이어야 하므로

$a_1=3a_2=3\times2=6$

$a_2=3a_3=3\times6=18$이면

$a_1 \le 30$이어야 하므로

$a_1=a_2-4=18-4=14$

㉡ $a_4=3a_5=3\times6=18$일 때

$a_n \le 30$이어야 하므로

$a_3=a_4-4=18-4=14$

$a_2=a_3-4=14-4=10$

이때 $a_2-4=10-4=6$은 3의 배수이므로

$a_1=3a_2=30$

(ii) $a_6=3a_7=3\times6=18$인 경우

$a_n \le 30$이어야 하므로

$a_5=a_6-4=18-4=14$

$a_4=a_5-4=14-4=10$

이때 $a_4-4=10-4=6$은 3의 배수이므로

$a_3=3a_4=3\times10=30$

마찬가지로 $a_n \le 30$이어야 하므로

$a_2=a_3-4=30-4=26$

$a_1=a_2-4=26-4=22$

따라서 가능한 모든 a_1의 값의 합은

$6+14+30+22=72$

4. 정답 ④

풀이

ㄱ. $a_na_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}a_k$에 $n=1$을 대입하면 $a_1a_2=a_1$

$a_1 \ne 0$이므로 $a_2=1$ (참)

ㄴ. $a_na_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}a_k$에서 n 대신 $n+1$을 대입하면

$$a_{n+1}a_{n+2}=\sum_{k=1}^{n+1}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_k+a_{n+1}=a_na_{n+1}+a_{n+1}$$
$$=a_{n+1}(a_n+1)$$

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}>0$이므로

$a_{n+2}=a_n+1$ (거짓)

ㄷ. $a_{2n+1}=a_{2n-1}+1$이므로 $a_1=3$이면

$a_{2n-1}=3+(n-1)\times1=n+2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

ㄱ에서 $a_2=1$이고 $a_{2n+2}=a_{2n}+1$이므로

$a_{2n}=1+(n-1)\times1=n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

그러므로

$$\sum_{n=1}^{10}=\sum_{n=1}^{5}a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{5}a_{2n}$$
$$=\sum_{n=1}^{5}(n+2)+\sum_{n=1}^{5}n$$
$$=\sum_{n=1}^{5}(2n+2)$$
$$=2\sum_{n=1}^{5}n+\sum_{n=1}^{5}2$$
$$=2\times\frac{5\times6}{2}+2\times5$$
$$=40 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

5. 정답 365

풀이

$(2n-1)a_n+2S_n=2$에 $n=1$을 대입하면

$a_1+2S_1=a_1+2a_1=3a_1=2$이므로 $a_1=\frac{2}{3}$

$(2n-1)a_n+2S_n=2$ …… ㉠

㉠에서 n 대신 $n+1$을 대입하면

$(2n+1)a_n+2S_{n+1}=2$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면

$(2n+1)a_{n+1}-(2n-1)a_n+2(S_{n+1}-S_n)=0$

$(2n+1)a_{n+1}-(2n-1)a_n+2a_{n+1}=0$

$(2n+3)a_{n+1}=(2n-1)a_n$

$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{2n+3}{2n-1}$ …… ㉢

㉢의 n에 5, 6, 7, 8, 9를 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\frac{a_5}{a_6}\times\frac{a_6}{a_7}\times\frac{a_7}{a_8}\times\frac{a_8}{a_9}\times\frac{a_9}{a_{10}}=\frac{13}{9}\times\frac{15}{11}\times\frac{17}{13}\times\frac{19}{15}\times\frac{21}{17}$$

$$\frac{a_5}{a_{10}}=\frac{19\times21}{9\times11}=\frac{133}{33}$$

이때 $a_1=\frac{2}{3}$이므로

$$\frac{a_1a_5}{a_{10}}=\frac{2}{3}\times\frac{133}{33}=\frac{266}{99}$$

따라서 $p=99$, $q=266$이므로

$p+q=365$

6. 정답 ④

조건 (가)에서 $a_{n+1}=a_n+2$ 또는 $a_{n+1}=2a_n$

$a_1=4$이므로 조건 (나)에 의하여 $a_2=2a_1=2\times4=8$

$a_3=a_2+2=8+2=10$ 또는 $a_3=2a_2=2\times8=16$

(i) $a_3=10$인 경우

조건 (나)에 의하여

$a_4=2a_3=2\times10=20$

$a_5=a_4+2=20+2=22$ 또는 $a_5=2a_4=2\times20=40$

$a_5=22$일 때,

조건 (나)에 의하여

$a_6=2a_5=2\times22=44$

$a_7=a_6+2=44+2=46$ 또는 $a_7=2a_6=2\times44=88$

이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

$a_5=40$일 때,

조건 (나)에 의하여

$a_6=2a_5=2\times40=80$

조건 (다)에 의하여

$a_7=2a_6=2\times80=160$ …… ㉠

(ⅱ) $a_3=16$인 경우
조건 (나)에 의하여
$a_4=2a_3=2\times16=32$
$a_5=a_4+2=32+2=34$ 또는 $a_5=2a_4=2\times32=64$
$a_5=34$일 때,
조건 (나)에 의하여
$a_6=2a_5=2\times34=68$
조건 (다)에 의하여
$a_7=a_6+2=68+2=70$ …… ㉡
$a_5=64$일 때,
조건 (나)에 의하여
$a_6=2a_5=2\times64=128$
조건 (다)에 의하여
$a_7=a_6+2=128+2=130$ …… ㉢
(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 조건을 만족시키는 경우는 ㉠, ㉡, ㉢의 세 가지 경우이므로
$M=160,\ m=70$
따라서 $M+m=160+70=230$

7. 정답 ③
$a_1>0,\ k>0$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$이다.
$a_na_{n+1}=k$에서 $a_{n+1}=\dfrac{k}{a_n}$
$a_1=a(a>0)$이라 하면
$a_2=\dfrac{k}{a},\ a_3=\dfrac{k}{\frac{k}{a}}=a,\ a_4=\dfrac{k}{a},\ \cdots$
이므로
$a=a_1=a_3=a_5=\cdots=a_{29},\ \dfrac{k}{a}=a_2=a_4=a_6=\cdots=a_{30}$
$\displaystyle\sum_{n=1}^{30}a_n=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\cdots+(a_{29}+a_{30})$
$=15(a_1+a_2)=15\left(a+\dfrac{k}{a}\right)$
한편, $a>0,\ \dfrac{k}{a}>0$이므로
$a+\dfrac{k}{a}\geq 2\sqrt{a\times\dfrac{k}{a}}=2\sqrt{k}$ $\Big($단, 등호는 $a=\dfrac{k}{a}$, 즉 $a=\sqrt{k}$일 때 성립$\Big)$
즉, $\displaystyle\sum_{n=1}^{30}a_n\geq 15\times2\sqrt{k}=30\sqrt{k}$
$\displaystyle\sum_{n=1}^{30}a_n$의 값은 $a=\sqrt{k}$일 때 최솟값 $30\sqrt{k}$를 가지므로
$30\sqrt{k}=90$에서 $\sqrt{k}=3$
따라서 $k=9$

8. 정답 ⑤
$k=1$일 때, $a_1=2$이므로
$\{a_n\}$: 2, 2, 6, 10, 14, $\cdots$
이고 $a_1=a_2=2$
$k=2$일 때, $a_1=6$이므로
$\{a_n\}$: 6, 2, 2, 6, 10, $\cdots$
이고 $a_1=a_4=6$
$k=3$일 때, $a_1=10$이므로
$\{a_n\}$: 10, 6, 2, 2, 6, 10, 14, $\cdots$
이고 $a_1=a_6=10$
$k=4$일 때, $a_1=14$이므로
$\{a_n\}$: 14, 10, 6, 2, 2, 6, 10, 14, $\cdots$
이고 $a_1=a_8=14$
이와 같은 과정을 반복하면
$a_1=4k-2$일 때 $a_1=a_{2k}$
$a_1=a_{20}$에서 $2k=20$
따라서 $k=10$
[참고]
$a_1=4k-2,\ a_2=4k-6,\ \cdots,\ a_k=4k-2-4(k-1)=2,$
$a_{k+1}=2,\ a_{k+2}=6,\ a_{k+3}=10,\ \cdots$
이므로 자연수 p에 대하여
$a_{k+p}=2+(p-1)\times4=4p-2$
$p=k$일 때, $a_{2k}=4k-2$이므로
$a_1=a_{2k}$

9. 정답 ①
$a_1=1,\ S_1=1$ 이므로 $\dfrac{S_1}{a_1}=\dfrac{1}{1}=1$
1은 자연수이므로 $a_2=a_1+1=1+1=2$
$a_2=2,\ S_2=3$이므로 $\dfrac{S_2}{a_2}=\dfrac{3}{2}$
$\dfrac{3}{2}$은 자연수가 아니므로 $a_3=a_2-1=2-1=1$
$a_3=1,\ S_3=4$이므로 $\dfrac{S_3}{a_3}=\dfrac{4}{1}=4$
4는 자연수이므로 $a_4=a_3+1=1+1=2$
즉, $a_4=2,\ S_4=6$
한편, 어떤 두 자연수 $p,\ q$에 대하여 $a_p=2,\ S_p=6q$이면
$\dfrac{S_p}{a_p}=\dfrac{6q}{2}=3q$
$3q$는 자연수이므로 $a_{p+1}=a_p+1=2+1=3$
$a_{p+1}=3,\ S_{p+1}=6q+3$이므로 $\dfrac{S_{p+1}}{a_{p+1}}=\dfrac{6q+3}{3}=2q+1$
$2q+1$은 자연수이므로 $a_{p+2}=a_{p+1}+1=3+1=4$
$a_{p+2}=4,\ S_{p+2}=6q+7$이므로 $\dfrac{S_{p+2}}{a_{p+2}}=\dfrac{6q+7}{4}$
$\dfrac{6q+7}{4}$은 자연수가 아니므로 $a_{p+3}=a_{p+2}-1=4-1=3$
$a_{p+3}=3,\ S_{p+3}=6q+10$이므로 $\dfrac{S_{p+3}}{a_{p+3}}=\dfrac{6q+10}{3}$
$\dfrac{6q+10}{3}$은 자연수가 아니므로 $a_{p+4}=a_{p+3}-1=3-1=2$

즉, $a_{p+4}=2$, $S_{p+4}=6q+12=6(q+2)$
$6(q+2)$는 6의 배수이므로
$S_{p+4}=S_p+(a_{p+1}+a_{p+2}+a_{p+3}+a_{p+4})$
$\quad =S_p+(3+4+3+2)$
$\quad =S_p+12$
그러므로 수열 $\{S_{4n}\}$은 첫째항이 $S_4=6$, 공차가 12인 등차수열이다.
따라서 $S_{4k}=6+(k-1)\times 12=12k-6$이므로
$$\sum_{k=1}^{10} S_{4k}=\sum_{k=1}^{10}(12k-6)$$
$$=12\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}6=12\times\frac{10\times 11}{2}-6\times 10=600$$

10. **정답** 34
$a_1=100$이고 6 이하의 모든 자연수 m에 대하여 $a_m a_{m+1}>0$이므로
수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 7항까지 모두 자연수이어야 한다.
$a_2=p$(p는 자연수)라 하면
$$a_{n+2}=\begin{cases} a_n-a_{n+1} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 2a_{n+1}-a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$에 의하여
$a_3=a_1-a_2=100-p$이므로
$a_3>0$에서 $100-p>0$, $p<100$ …… ㉠
$a_4=2a_3-a_2=2(100-p)-p=200-3p$이므로
$a_4>0$에서 $200-3p>0$, $p<\frac{200}{3}$ …… ㉡
$a_5=a_3-a_4=(100-p)-(200-3p)=2p-100$이므로
$a_5>0$에서 $2p-100>0$, $p>50$ …… ㉢
$a_6=2a_5-a_4=2(2p-100)-(200-3p)=7p-400$이므로
$a_6>0$에서 $7p-400>0$, $p>\frac{400}{7}$ …… ㉣
$a_7=a_5-a_6=(2p-100)-(7p-400)=-5p+300$이므로
$a_7>0$에서 $-5p+300>0$, $p<60$ …… ㉤
㉠~㉤에서 $\frac{400}{7}<p<60$
이때 $57<\frac{400}{7}<58$이므로 자연수 p의 값은 58 또는 59이다.
따라서
$p=58$일 때 $a_5=2\times 58-100=16$,
$p=59$일 때 $a_5=2\times 59-100=18$
이므로 a_5의 값의 합은
$16+18=34$

11. **정답** ②
조건 (나)에서
$a_{n+1}\geq a_n$이면 $a_{n+2}=\frac{a_{n+1}}{2}$이고, $a_{n+1}\geq 2>0$이므로
$a_{n+2}<a_{n+1}$
$a_{n+1}<a_n$이면 $a_{n+2}=4a_{n+1}-4$이므로
$a_{n+2}-a_{n+1}=(4a_{n+1}-4)-a_{n+1}=3a_{n+1}-4$
이때 $a_{n+1}\geq 2$이므로 $3a_{n+1}-4\geq 0$, 즉 $a_{n+2}\geq a_{n+1}$
그러므로 $a_{n+1}\geq a_n$이면 $a_{n+2}<a_{n+1}$이고,
$a_{n+1}<a_n$이면 $a_{n+2}\geq a_{n+1}$이다. …… ㉠
조건 (가)에서 $a_1=2$이고, 모든 항이 2이상이므로 $a_2\geq a_1$
그러므로 자연수 n에 대하여
$$a_{n+2}=\begin{cases} \frac{a_{n+1}}{2} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 4a_{n+1}-4 & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$
$a_k=k$, $a_{k+m}=k+m$을 만족시키는 자연수 k와 5이하의 자연수 m의 값을 k가 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 찾아보자.
(ⅰ) k가 홀수인 경우
$a_k=k$에서
$a_{k+1}=4k-4$이고 $k+1=4k-4$, $k=\frac{5}{3}$
$a_{k+2}=\frac{4k-4}{2}=2k-2$이고 $k+2=2k-2$, $k=4$
$a_{k+3}=4(2k-2)-4=8k-12$이고 $k+3=8k-12$, $k=\frac{15}{7}$
$a_{k+4}=\frac{8k-12}{2}=4k-6$이고 $k+4=4k-6$, $k=\frac{10}{3}$
$a_{k+5}=4(4k-6)-4=16k-28$이고 $k+5=16k-28$,
$k=\frac{33}{15}$
(ⅱ) k가 짝수인 경우
$a_k=k$에서
$a_{k+1}=\frac{k}{2}$이고 $k+1=\frac{k}{2}$, $k=-2$
$a_{k+2}=4\times\frac{k}{2}-4=2k-4$이고 $k+2=2k-4$, $k=6$
$a_{k+3}=\frac{2k-4}{2}=k-2$이고 $k+3=k-2$인 실수 k는 존재하지 않는다.
$a_{k+4}=4(k-2)-4=4k-12$이고 $k+4=4k-12$, $k=\frac{16}{3}$
$a_{k+5}=\frac{4k-12}{2}=2k-6$이고 $k+5=2k-6$, $k=11$
(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 k, m의 값은 $k=6$, $m=2$
따라서 $2k+m=2\times 6+2=14$

[참고]
$a_2=\frac{9}{2}$, $a_3=\frac{9}{4}$, $a_4=5$, $a_5=\frac{5}{2}$, $a_6=6a_7=3$, $a_8=8$

② 지수/로그

TH①. 2024년 수능특강

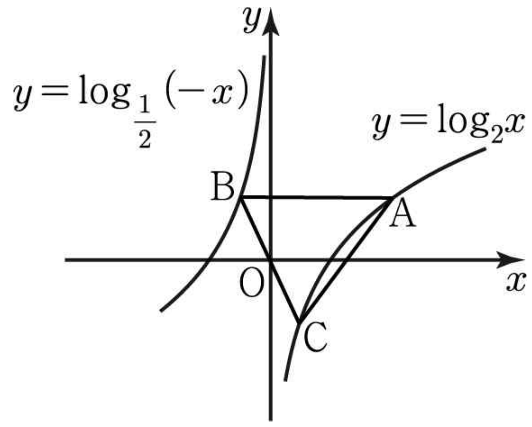
2024년 수능특강 Lv3

1. 원점 O를 지나는 직선 l이 함수 $y=2^{x}$의 그래프와 서로 다른 두 점 P, Q ($\overline{\mathrm{OP}}>\overline{\mathrm{OQ}}$)에서 만난다. 직선 l이 함수 $y=-2^{-x}$의 그래프와 만나는 점 중 점 O와 가까운 점을 R이라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{QR}}=3:2$일 때, 점 Q의 x좌표는?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

2024년 수능특강 Lv3

2. 함수 $y=\log_{2}x$의 그래프 위의 제1사분면에 있는 점 A에 대하여 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$와 만나는 점을 B, 두 점 O, B를 지나는 직선이 함수 $y=\log_{2}x$의 그래프와 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$인 이등변삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.)



① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$
④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

3. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} \left|2^{x+3}-3\right| & (x \le 0) \\ 3^{-x+2}-n & (x>0) \end{cases}$$

이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 개수를 구하시오.

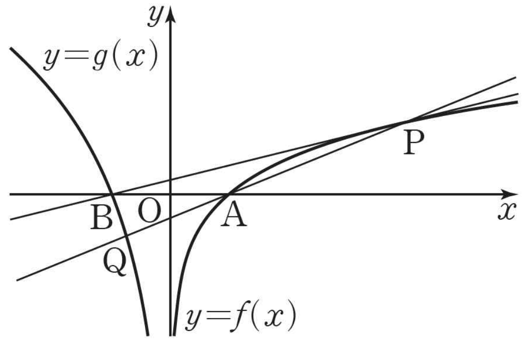
x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 실수 t가 존재한다.

TH②. 2024년 수능완성

4. 그림과 같이 $k>1$인 상수 k에 대하여 두 함수

$f(x)=\log_4 x$, $g(x)=\log_k(-x)$가 있다.

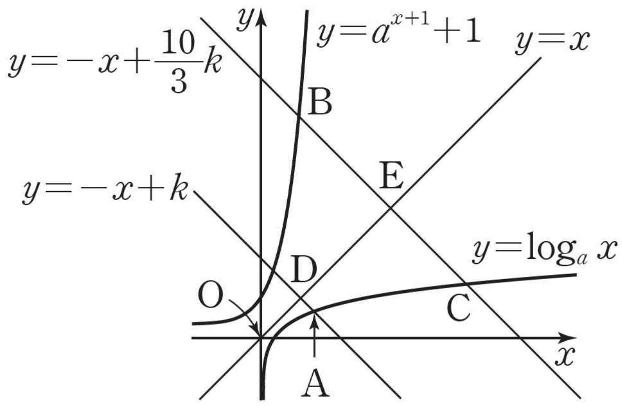
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에 대하여 직선 AP의 기울기를 m_1, 직선 BP의 기울기를 m_2, 직선 AP가 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점을 $\mathrm{Q}(a,\ b)$라 하자. $\dfrac{m_2}{m_1}=\dfrac{3}{5}$, $k^b=-\dfrac{9}{7}b$일 때, a의 값은? (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이고, a, b는 상수이다.)



① $-\dfrac{7}{8}$　② $-\dfrac{13}{16}$　③ $-\dfrac{3}{4}$
④ $-\dfrac{11}{16}$　⑤ $-\dfrac{5}{8}$

5. 그림과 같이 $a>1$인 상수 a와 $k>a+1$인 상수 k에 대하여 직선 $y=-x+k$가 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점을 A라 하고, 직선 $y=-x+\frac{10}{3}k$가 두 곡선 $y=a^{x+1}+1$, $y=\log_a x$와 만나는 점을 각각 B, C라 하자.

직선 $y=x$가 두 직선 $y=-x+k$, $y=-x+\frac{10}{3}k$와 만나는 점을 각각 D, E라 할 때, $\overline{\mathrm{AD}}=\frac{\sqrt{2}}{6}k$, $\overline{\mathrm{CE}}=\sqrt{2}k$이다. $a\times\overline{\mathrm{BE}}$의 값은? (단, 곡선 $y=\log_a x$와 직선 $y=x$는 만나지 않는다.)



① $11\sqrt{2}$　② $12\sqrt{2}$　③ $13\sqrt{2}$
④ $14\sqrt{2}$　⑤ $15\sqrt{2}$

2024년 수능완성

New

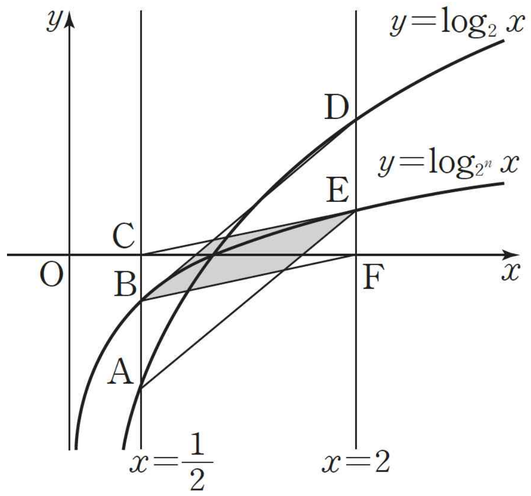
6. 두 실수 a, $b(a<b)$와 두 함수

$$f(x)=x^2-4x+k,$$
$$g(x)=\log_2 x$$

가 있다. $a\le x\le b$에서 함수 $(g\circ f)(x)$의 최댓값과 최솟값의 합이 0이 되는 a, b가 존재하도록 하는 정수 k의 최댓값은? (단, $a\le x\le b$에서 $f(x)>0$이다.)

① -4　② -2　③ 0
④ 2　⑤ 4

7. 그림과 같이 자연수 $n\ (n \geq 2)$에 대하여 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_{2^n} x$ 및 x축이 직선 $x=\frac{1}{2}$과 만나는 점을 각각 A, B, C라 하고 직선 $x=2$와 만나는 점을 각각 D, E, F라 하자. 두 사각형 AEDB, BFEC의 겹치는 부분의 넓이가 $\frac{1}{3}$이 되도록 하는 n의 값은? [4점]



① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

8. 양의 실수 a $\left(a \neq \frac{2}{3},\ a \neq 1\right)$과 상수 b에 대하여 세 집합 A, B, C를

$$A=\{x \mid a^{x^2+bx} \geq a^{x+2},\ x\text{는 실수}\},$$

$$B=\left\{x \,\middle|\, \left(a+\frac{1}{3}\right)^{x^2+bx} \geq \left(a+\frac{1}{3}\right)^{x+2},\ x\text{는 실수}\right\},$$

$$C=\{x \mid x \in A\text{이고 } x \in B,\ x\text{는 실수}\}$$

라 하자. 집합 C는 유한집합이고 $1 \in C$가 되도록 하는 모든 a와 b에 대하여 $p<a$를 만족시키는 실수 p의 최댓값을 M, 집합 C의 모든 원소의 곱을 c라 할 때, $|3 \times M \times b \times c|$의 값을 구하시오. [4점]

9. $|a|\neq 3$, $a\neq 0$인 정수 a에 대하여 곡선

$$y=\left(\frac{a^2}{9}\right)^{|x|}-3$$

과 직선 $y=ax$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 부등식

$$\left(a^4\right)^{a^2-2a+9} \geq \left(a^6\right)^{a^2-a-4}$$

을 만족시키는 모든 정수 a의 값의 합은? [4점]

① -6 ② -3 ③ 0

④ 3 ⑤ 6

2025 Trend

10. 10보다 작은 두 자연수 k, m에 대하여 두 함수

$$f(x)=\left|2^x-k\right|+m,$$

$$g(x)=\left(\log_2\frac{x}{4}\right)^2+2\log_4 x-2$$

가 있다. x에 대한 방정식 $(g\circ f)(x)=0$이 n개의 실근을 갖도록 하는 k, m의 모든 순서쌍 $(k,\ m)$의 개수를 a_n이라 하자.

a_1+a_3의 값을 구하시오. [4점]

11. 1보다 큰 실수 m에 대하여 함수 $y=|x+2|-1$의 그래프와 직선 $y=m$이 만나는 두 점의 x좌표 중 큰 값을 $f(m)$, 작은 값을 $g(m)$이라 하자. $f(m)$의 제곱근 중 음수인 것의 값과 $g(m)$의 세제곱근 중 실수인 것의 값이 같을 때, $f(m)\times g(m)$의 값은? [4점]

① -32 ② -28 ③ -24
④ -20 ⑤ -16

2024년 수능완성

12. 두 양수 a, b에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는

$$f(x)=2^{x-a},\ g(x)=\log_2(x+b)+a-b$$

이다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 서로 다른 두 점에서 만나고, 이 두 점 중 x좌표가 작은 점을 $\mathrm{A}(k,\ k)$라 하면 곡선 $y=g(x)$가 점 A를 지난다. 직선 $y=-x-4k$가 곡선 $y=g(x)$와 제3사분면에서 만나는 점을 B, 직선 $y=-x-4k$가 y축과 만나는 점을 C라 하면 삼각형 ABC의 넓이는 $6k^2$이다. 2^{2a+b+k}의 값을 구하시오. [4점]

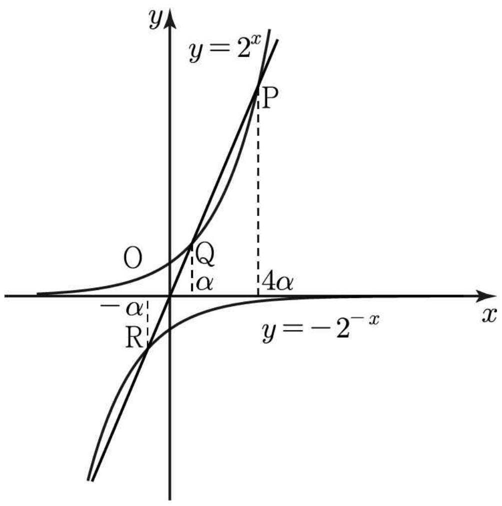
1. **정답** ④

풀이

두 함수 $y=2^{x}$, $y=-2^{-x}$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 두 점 Q, R도 원점에 대하여 대칭이다.

또 $\overline{PQ}:\overline{QR}=3:2$이므로 점 Q의 x좌표를 α $(\alpha>0)$으로 놓으면

$Q(\alpha,\ 2^{\alpha})$, $R(-\alpha,\ -2^{\alpha})$, $P(4\alpha,\ 2^{4\alpha})$



직선 OQ와 직선 OP의 기울기가 서로 같으므로

$$\frac{2^{\alpha}-0}{\alpha-0}=\frac{2^{4\alpha}-0}{4\alpha-0}$$

$\alpha>0$이므로 $2^{\alpha}\times 4=2^{4\alpha}$

$2^{\alpha+2}=2^{4\alpha}$, $4\alpha=\alpha+2$

따라서 $\alpha=\dfrac{2}{3}$

2. **정답** ③

풀이

점 A의 좌표를 $(a,\ \log_2 a)$ $(a>1)$이라 하면 점 B의 y좌표는 $\log_2 a$이므로 점 B의 x좌표는

$\log_{\frac{1}{2}}(-x)=\log_2 a$에서 $-\log_2(-x)=\log_2 a$

$\log_2\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\log_2 a$, $-\dfrac{1}{x}=a$ $\quad\therefore\ x=-\dfrac{1}{a}$

그러므로 점 B의 좌표는 $\left(-\dfrac{1}{a},\ \log_2 a\right)$

한편, 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$는 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)=-\log_2(-x)$ 이므로

함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.

그러므로 원점 O는 선분 BC의 중점이다.

이때 삼각형 ABC가 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로 $\overline{OA}\perp\overline{OB}$

두 직선 OA, OB가 서로 수직이므로

$$\frac{\log_2 a}{a}\times\frac{\log_2 a}{-\frac{1}{a}}=-1\ ,\ (\log_2 a)^2=1$$

$\log_2 a=1$ 또는 $\log_2 a=-1$

$a=2$ 또는 $a=\dfrac{1}{2}$

이때 $a>1$이므로 $a=2$

따라서 $A(2,\ 1)$, $B\left(-\dfrac{1}{2},\ 1\right)$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{OA}=\frac{1}{2}\times2\overline{OB}\times OA$$
$$=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1^2}\times\sqrt{2^2+1^2}$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\times\sqrt{5}$$
$$=\frac{5}{2}$$

3. **정답** 8

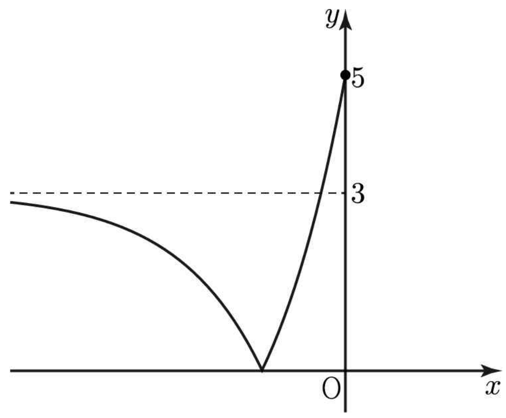
풀이

$x\le 0$일 때, 함수 $y=\left|2^{x+3}-3\right|$의 그래프는 함수 $y=2^{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 후 x축의 아랫부분의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.이때 함수 $y=2^{x+3}-3$의 그래프의 점근선은 직선 $y=-3$이므로 함수 $y=\left|2^{x+3}-3\right|$의 그래프의 점근선은 직선

$y=3$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

또 $x=0$일 때, $y=\left|2^{3}-3\right|=5$이므로

함수 $y=\left|2^{x+3}-3\right|$ $(x\le 0)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



한편, $3^{-x+2}-n=3^{-(x-2)}-n$이므로 $x>0$일 때, 함수 $y=3^{-x+2}-n$의 그래프는 함수 $y=3^{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 $-n$만큼 평행이동한 것이다.

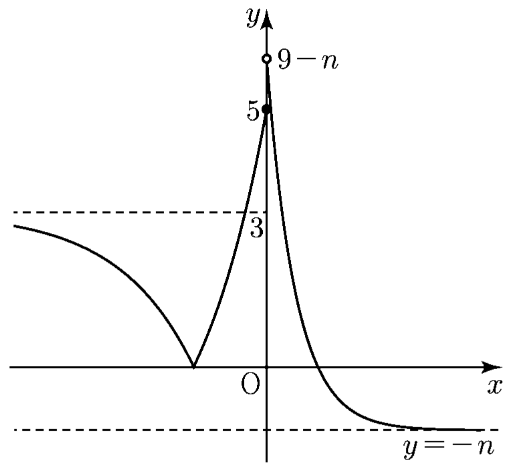
이때 함수 $y=3^{-(x-2)}-n$의 그래프의 점근선은 직선

$y=-n$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

또, $x=0$일 때, $y=9-n$이므로 함수 $y=3^{-(x-2)}-n$의 그래프는 점 $(0,\ 9-n)$을 지난다.

한편, 방정식 $f(x)=t$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 x좌표이다.

이때 ㉠, ㉡과 함수 $y=\left|2^{x+3}-3\right|$의 그래프가 y축과 만나는 점 $(0,\ 5)$를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



그러므로 조건을 만족시키기 위해서는 $9-n>0$이어야 한다.
즉, $n<9$
따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값은 1, 2, 3, ⋯, 8이고 그 개수는 8이다.

4. **정답** ③
점 P의 x좌표를 $t(t>1)$이라 하면 $\mathrm{P}(t,\ \log_4 t)$이다.
$\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(-1,\ 0)$이므로

$$m_1=\frac{\log_4 t-0}{t-1}=\frac{\log_4 t}{t-1},\ m_2=\frac{\log_4 t-0}{t-(-1)}=\frac{\log_4 t}{t+1}$$

$\frac{m_2}{m_1}=\frac{3}{5}$에서 $3m_1=5m_2$, $3\times\frac{\log_4 t}{t-1}=5\times\frac{\log_4 t}{t+1}$

$t>1$에서 $\log_4 t>0$이므로 $\frac{3}{t-1}=\frac{5}{t+1}$

$5t-5=3t+3$, $t=4$
$\mathrm{P}(4,\ 1)$이므로 직선 AP의 방정식은

$y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

점 $\mathrm{Q}(a,\ b)$는 직선 AP의 위의 점이므로

$b=\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}$ …… ㉠

점 $\mathrm{Q}(a,\ b)$는 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로
$b=\log_k(-a)$, $k^b=-a$

$k^b=-\frac{9}{7}b$이므로 $-a=-\frac{9}{7}b$

$b=\frac{7}{9}a$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{7}{9}a=\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}$, $\frac{4}{9}a=-\frac{1}{3}$

따라서 $a=-\frac{3}{4}$

5. **정답** ④
두 식 $y=x$, $y=-x+k$를 연립하여 풀면

$x=y=\frac{1}{2}k$이므로 점 D의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}k,\ \frac{1}{2}k\right)$

$\overline{\mathrm{AD}}=\frac{\sqrt{2}}{6}k$이므로 점 A의 좌표는

$\left(\frac{1}{2}k+\frac{1}{6}k,\ \frac{1}{2}k-\frac{1}{6}k\right)$, 즉 $\left(\frac{2}{3}k,\ \frac{1}{3}k\right)$

두 식 $y=x$, $y=-x+\frac{10}{3}k$를 연립하여 풀면

$x=y=\frac{5}{3}k$이므로 점 E의 좌표는 $\left(\frac{5}{3}k,\ \frac{5}{3}k\right)$

$\overline{\mathrm{CE}}=\sqrt{2}k$이므로 점 C의 좌표는

$\left(\frac{5}{3}k+k,\ \frac{5}{3}k-k\right)$, 즉 $\left(\frac{8}{3}k,\ \frac{2}{3}k\right)$

두 점 A, C는 곡선 $y=\log_a x$ 위의 점이므로

$\frac{1}{3}k=\log_a\frac{2}{3}k$, $\frac{2}{3}k=\log_a\frac{8}{3}k$

두 식을 연립하여 풀면

$2\log_a\frac{2}{3}k=\log_a\frac{8}{3}k$, $\log_a\left(\frac{2}{3}k\right)^2=\log_a\frac{8}{3}k$

$\frac{4}{9}k^2=\frac{8}{3}k$, $k(k-6)=0$

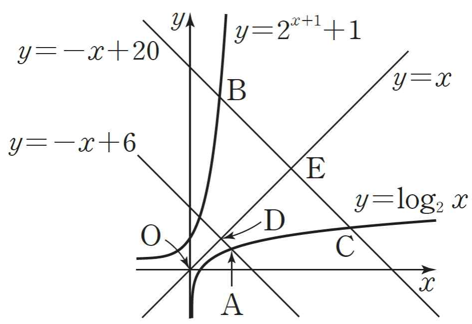
$k>a+1>2$이므로 $k=6$

$k=6$을 $\frac{1}{3}k=\log_a\frac{2}{3}k$에 대입하면 $2=\log_a 4$, $a^2=4$

$a>1$이므로 $a=2$

즉, $a=2$, $k=6$이므로 $y=a^{x+1}+1=2^{x+1}+1$,
$y=\log_a x=\log_2 x$

$y=-x+\frac{10}{3}k=-x+20$이고 $\mathrm{C}(16,\ 4)$, $\mathrm{E}(10,\ 10)$



두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 곡선 $y=2^{x+1}+1$은 곡선 $y=2^x$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 곡선이다. 그러므로 점 B는 점 C를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점이다.
점 C의 좌표가 $(16,\ 4)$이므로 점 B의 좌표는 $(4-1,\ 16+1)$, 즉 $(3,\ 17)$이고 $\overline{\mathrm{BE}}=\sqrt{(10-3)^2+(10-17)^2}=7\sqrt{2}$
따라서 $a\times\overline{\mathrm{BE}}=2\times7\sqrt{2}=14\sqrt{2}$

6. **정답** ⑤
$a\le x\le b$에서 함수 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\log_2\{f(x)\}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.
두 실수 c, $d(0<d<c)$에 대하여 $a\le x\le b$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 c, 최솟값을 d라 하면 $M=\log_2 c$, $m=\log_2 d$이다.
$M+m=\log_2 c+\log_2 d=\log_2 cd=0$에서 $cd=1$

즉, $c>1$, $0<d<1$, $d=\frac{1}{c}$

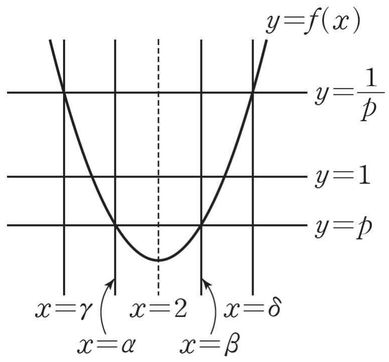
$f(x)=x^2-4x+k=(x-2)^2+k-4$에서
함수 $f(x)$의 최솟값은 $k-4$이다.
(i) $k-4\ge 1$일 때
$f(x)\ge k-4\ge 1$이므로 $(g\circ f)(x)\ge\log_2 1=0$
$0\le m<M$, $M+m>0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $k-4<1$일 때

k가 정수이므로 $k-4\leq 0$

즉, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 y좌표는 0 이하이다.

$0<p<1$인 어떤 실수 p에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=p$의 서로 다른 두 실근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하고, x에 대한 방정식 $f(x)=\dfrac{1}{p}$의 서로 다른 두 실근을 γ, $\delta(\gamma<\delta)$라 하면 $\gamma<\alpha<\beta<\delta$



이때 $a=\gamma$, $b=\alpha$ 또는 $a=\beta$, $b=\delta$이면 $M+m=0$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $k-4<1$, 즉 $k<5$이므로 정수 k의 최댓값은 4이다.

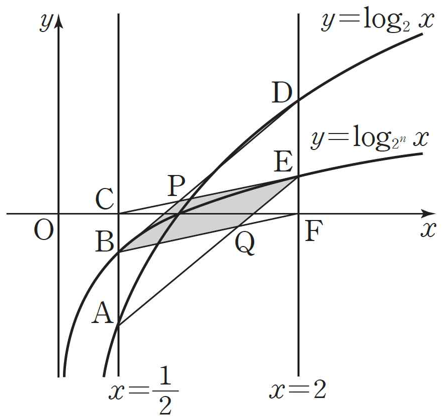
7. **정답** ②

$\log_{2^n}x=\dfrac{1}{n}\log_2 x$ 이므로

$\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2},\ -1\right)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{n}\right)$, $\mathrm{C}\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{D}(2,\ 1)$, $\mathrm{E}\left(2,\ \dfrac{1}{n}\right)$,

$\mathrm{F}(2,\ 0)$ 그러므로 두 사각형 AEDB, BFEC는 각각 평행사변형이고, 사각형 BFEC의 넓이는

$\dfrac{1}{n}\times\left(2-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2n}$



두 직선 BD, CE의 교점을 P, 두 직선 AE, BF의 교점을 Q라 하면 두 삼각형 BPC, EQF는 서로 합동이다.

한편, 두 삼각형 AQB, EQF는 서로 닮은 도형이고 닮음비는

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{EF}}=\left(1-\dfrac{1}{n}\right):\dfrac{1}{n}=(n-1):1$이다.

그러므로 변 EF를 밑변으로 했을 때, 삼각형 EQF의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{n}\times\left\{\dfrac{1}{n}\times\left(2-\dfrac{1}{2}\right)\right\}=\dfrac{3}{4n^2}$

두 사각형 AEDB, BFEC의 겹치는 부분의 넓이는 사각형 BFEC의 넓이에서 서로 합동인 두 삼각형 BPC, EQF의 넓이를 뺀 값과 같으므로

$\dfrac{2}{2n}-2\times\dfrac{3}{4n^2}=\dfrac{3}{2n}-\dfrac{3}{2n^2}$

$\dfrac{3}{2n}-\dfrac{3}{2n^2}=\dfrac{1}{3}$에서

$2n^2-9n+9=0$, $(2n-3)(n-3)=0$

따라서 $n=3$

8. **정답** 8

(ⅰ) $0<a<\dfrac{2}{3}$일 때

$0<a<1$, $0<a+\dfrac{1}{3}<1$이므로

$a^{x^2+bx}\geq a^{x+2}$에서 $x^2+bx\leq x+2$

$\left(a+\dfrac{1}{3}\right)^{x^2+bx}\geq\left(a+\dfrac{1}{3}\right)^{x+2}$에서 $x^2+bx\leq x+2$

$x^2+bx\leq x+2$에서 $x^2+(b-1)x-2\leq 0$

이차방정식 $x^2+(b-1)x-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(b-1)^2+8>0$

이차방정식 $x^2+(b-1)x-2=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 $A=B=C=\{x\,|\,\alpha\leq x\leq\beta,\ x$는 실수$\}$

이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $\dfrac{2}{3}<a<1$일 때

$0<a<1$, $a+\dfrac{1}{3}>1$이므로

$a^{x^2+bx}\geq a^{x+2}$에서 $x^2+bx\leq x+2$ …… ㉠

$\left(a+\dfrac{1}{3}\right)^{x^2+bx}\geq\left(a+\dfrac{1}{3}\right)^{x+2}$에서

$x^2+bx\geq x+2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키려면

$x^2+bx=x+2$, 즉 $x^2+(b-1)x-2=0$

이차방정식 $x^2+(b-1)x-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(b-1)^2+8>0$

이차방정식 $x^2+(b-1)x-2=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 $C=\{\alpha,\ \beta\}$

$n(C)=2$, $1\in C$이고, 집합 C의 모든 원소의 곱이 c이므로

$C=\{1,\ c\}$

그러므로 $C=\{\alpha,\ \beta\}=\{1,\ c\}$

이차방정식 $x^2+(b-1)x-2=0$의 한 근이 1이므로

$1+(b-1)-2=0$에서 $b=2$

$x^2+(b-1)x-2=x^2+x-2=0$에서

$(x+2)(x-1)=0$, $x=-2$ 또는 $x=1$

즉, $C=\{-2,\ 1\}$, $c=-2$이므로 조건을 만족시킨다.

(ⅲ) $a>1$일 때

$a>1$, $a+\dfrac{1}{3}>1$이므로

$a^{x^2+bx}\geq a^{x+2}$에서 $x^2+bx\geq x+2$

$\left(a+\dfrac{1}{3}\right)^{x^2+bx}\geq\left(a+\dfrac{1}{3}\right)^{x+2}$에서 $x^2+bx\geq x+2$

$x^2+bx\geq x+2$에서 $x^2+(b-1)x-2\geq 0$

이차방정식 $x^2+(b-1)x-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(b-1)^2+8>0$

이차방정식 $x^2+(b-1)x-2=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 $A=B=C=\{x\,|\,x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta,\ x$는 실수$\}$

이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$\dfrac{2}{3}<a<1$이므로 $p<a$를 만족시키는 실수 p의 최댓값은

$M=\dfrac{2}{3}$

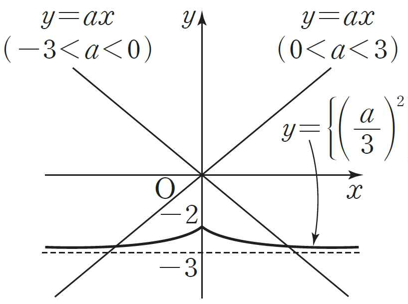
따라서 $|3\times M\times b\times c|=\left|3\times\dfrac{2}{3}\times 2\times(-2)\right|=8$

9. 정답 ①

a의 값에 따라 곡선 $y=\left(\dfrac{a^2}{9}\right)^{|x|}-3$, 즉 $y=\left\{\left(\dfrac{a}{3}\right)^2\right\}^{|x|}-3$과 직선 $y=ax$가 만나는 서로 다른 점의 개수는 다음과 같다.

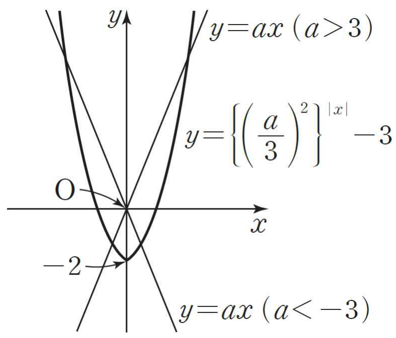
(ⅰ) $-3<a<0$ 또는 $0<a<3$

$0<\left(\dfrac{a}{3}\right)^2<1$이므로 곡선 $y=\left\{\left(\dfrac{a}{3}\right)^2\right\}^{|x|}-3$과 직선 $y=ax$는 그림과 같이 한 점에서만 만난다.



(ⅱ) $a<-3$ 또는 $a>3$일 때

$\left(\dfrac{a}{3}\right)^2>1$이므로 곡선 $y=\left\{\left(\dfrac{a}{3}\right)^2\right\}^{|x|}-3$과 직선 $y=ax$는 그림과 같이 두 점에서 만난다.



(ⅰ), (ⅱ)에서 $a<-3$ 또는 $a>3$, 즉 $a^2>9$

부등식 $(a^4)^{a^2-2a+9}\geq(a^6)^{a^2-a-4}$에서

$(a^2)^{2a^2-4a+18}\geq(a^2)^{3a^2-3a-12}$

$a^2>9$이므로

$2a^2-4a-18\geq 3a^2-3a-12$

$a^2+a-30\leq 0$, $(a+6)(a-5)\leq 0$

$-6\leq a\leq 5$

이때 $a<-3$ 또는 $a>3$이므로 주어진 부등식을 만족시키는 a의 값의 범위는

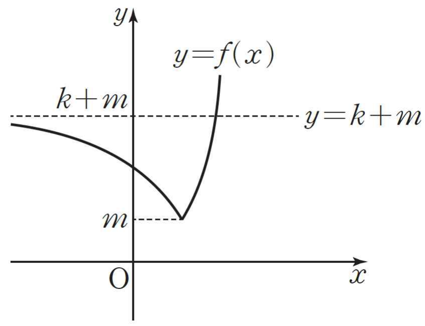
$-6\leq a<-3$ 또는 $3<a\leq 5$

따라서 정수 a의 값은 -6, -5, -4, 4, 5이므로 모든 정수 a의 값의 합은

$-6+(-5)+(-4)+4+5=-6$

10. 정답 19

10보다 작은 두 자연수 k, m에 대하여 $f(x)=|2^x-k|+m$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$g(x)=\left(\log_2\dfrac{x}{4}\right)^2+2\log_4 x-2=(\log_2 x-\log_2 4)^2+\log_2 x-2$

$=(\log_2 x-2)^2+\log_2 x-2=(\log_2 x)^2-3\log_2 x+2$

$=(\log_2 x-1)(\log_2 x-2)$

방정식 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=0$에서

$\log_2 f(x)=1$ 또는 $\log_2 f(x)=2$

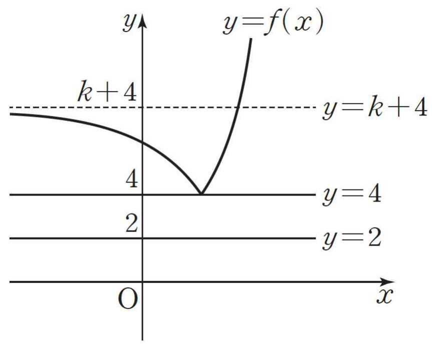
$f(x)=2$ 또는 $f(x)=2^2=4$

(ⅰ) x에 대한 방정식 $(g\circ f)(x)=0$이 1개의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=2$ 또는 직선 $y=4$와 만나는 점이 1개가 되어야 한다.

그런데 직선 $y=2$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나면 직선 $y=4$도 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나므로 방정식 $(g\circ f)(x)=0$은 2개 이상의 실근을 갖는다.

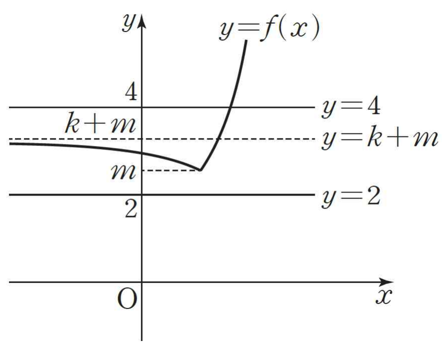
즉, 방정식 $(g\circ f)(x)=0$이 1개의 실근을 가지려면 $m=4$이거나 $m>2$이고 $k+m\leq 4$이어야 한다.

① $m=4$인 경우



순서쌍 $(k,\ m)$은 $(1,\ 4)$, $(2,\ 4)$, $(3,\ 4)$, $\cdots$, $(9,\ 4)$이고, 그 개수는 9이다.

② $m>2$이고 $k+m\leq 4$인 경우



순서쌍 $(k,\ m)$은 $(1,\ 3)$이고, 그 개수는 1이다.

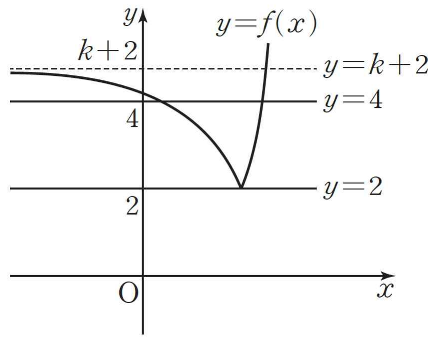
①, ②에서 구하는 순서쌍 $(k,\ m)$의 개수는 $9+1=10$이므로

$a_1=10$

(ⅱ) x에 대한 방정식 $(g\circ f)(x)=0$이 3개의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=2$ 또는 $y=4$와 만나는 점이 3개가 되어야 한다.

① $m=2$인 경우

직선 $y=2$와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 한 점에서만 만난다.



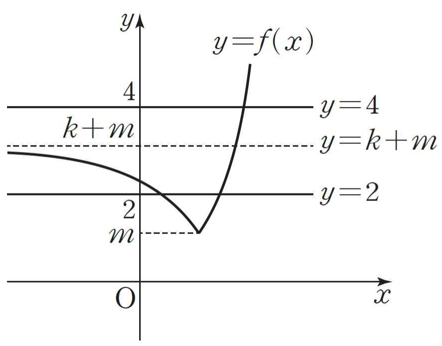
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=4$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$k+2>4$에서 $k>2$

따라서 순서쌍 $(k,\ m)$은 $(3,\ 2)$, $(4,\ 2)$, $(5,\ 2)$, $\cdots$, $(9,\ 2)$이고, 그 개수는 7이다.

② $m\neq 2$인 경우

조건을 만족시키려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2$가 서로 다른 두 점에서 만나고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=4$는 한점에서만 만나야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때 $m<2$, $2<k+m\leq 4$이므로

$m=1$, $1<k\leq 3$

따라서 순서쌍 $(k,\ m)$은 $(2,\ 1)$, $(3,\ 1)$이고, 그 개수는 2이다.

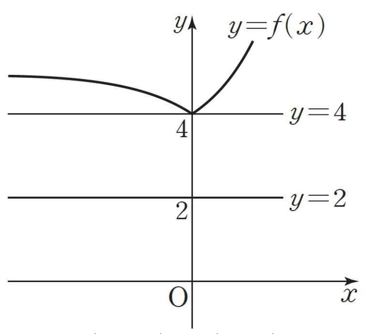
①, ②에서 구하는 순서쌍 $(k,\ m)$의 개수는 $7+2=9$이므로

$a_3=9$

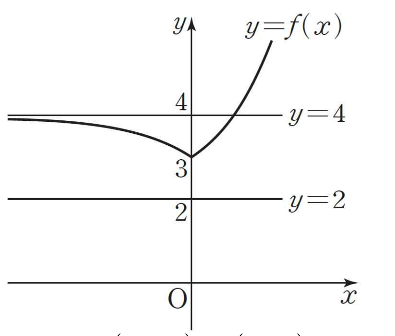
(ⅰ), (ⅱ)에서 $a_1+a_3=10+9=19$

[참고]

(ⅰ)에서 순서쌍 $(k,\ m)$이 $(1,\ 4)$, $(1,\ 3)$인 경우 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



[순서쌍 $(k,\ m)$이 $(1,\ 4)$인 경우]



[순서쌍 $(k,\ m)$이 $(1,\ 3)$인 경우]

11. **정답** ①

$|x+2|-1=m$에서 $|x+2|=m+1$

$x=m-1$ 또는 $x=-m-3$

$m>1$이므로 $m-1>-m-3$

그러므로 $f(m)=m-1$, $g(m)=-m-3$

$f(m)$의 제곱근 중 음수인 것은 $-\sqrt{f(m)}=-\sqrt{m-1}$

$g(m)$의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{g(m)}=\sqrt[3]{-m-3}$

$f(m)$의 제곱근 중 음수인 것의 값과 $g(m)$의 세제곱근 중 실수인 것의 값이 같으므로

$-\sqrt{m-1}=\sqrt[3]{-m-3}$, $\sqrt{m-1}=\sqrt[3]{m+3}$

양변을 여섯제곱하면

$(m-1)^3=(m+3)^2$, $m^3-3m^2+3m-1=m^2+6m+9$

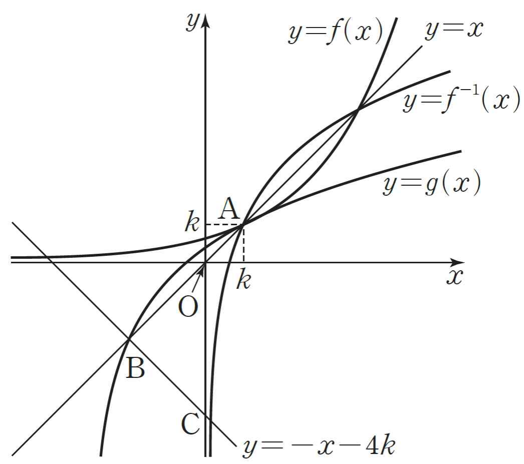
$m^3-4m^2-3m-10=0$, $(m-5)(m^2+m+2)=0$

$m^2+m+2=\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0$이므로 $m=5$

따라서 $f(m)\times g(m)=f(5)\times g(5)=4\times(-8)=-32$

12. **정답** 36

함수 $f(x)=2^{x-a}$의 역함수는 $f^{-1}(x)=\log_2 x+a$ 이고,곡선 $y=f^{-1}(x)$를 x축의 방향으로 $-b$만큼, y축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동한 곡선의 방정식은 $y=\log_2(x+b)+a-b$, 즉 $y=g(x)$이다. …… ㉠



점 $\mathrm{A}(k,\ k)$와 직선 $y=-x-4k$, 즉 $x+y+4k=0$사이의 거리는

$\dfrac{|k+k+4k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{6k}{\sqrt{2}}$

삼각형 ABC의 넓이가 $6k^2$이므로

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{6k}{\sqrt{2}}\times\overline{\mathrm{BC}}=6k^2$에서

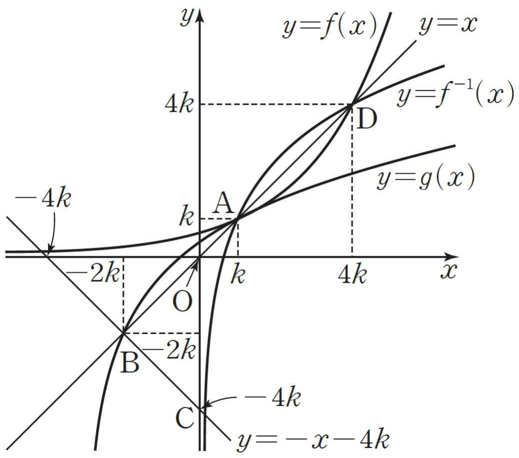
$\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{2}k$

이때 점 B가 직선 $y=-x-4k$위의 점이므로

$\angle\mathrm{OCB}=45^\circ$, $\overline{\mathrm{OC}}=4k$에서 $\mathrm{B}(-2k,\ -2k)$이다.

즉, 점 B는 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=x$가 만나는 점 중 A가 아닌 점이다.

곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=x$와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하면 ㉠에서 점 D를 x축의 방향으로 $-b$만큼, y축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동한 점 $\mathrm{A}(k,\ k)$이고, 점 A를 x축의 방향으로 $-b$만큼, y축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동한 점을 $\mathrm{B}(-2k,\ -2k)$이므로 $b=3k$이고 $\mathrm{D}(4k,\ 4k)$



두 점 A$(k,\ k)$, D$(4k,\ 4k)$가 곡선 $y=f^{-1}(x)$위의 점이므로

$k=\log_2 k+a$ …… ㉡

$4k=\log_2 4k+a$ …… ㉢

㉢−㉡을 하면

$3k=\log_2 4k-\log_2 k=\log_2 \frac{4k}{k}=2$에서

$k=\frac{2}{3}$

이 값을 ㉡에 대입하면

$\frac{2}{3}=\log_2 \frac{2}{3}+a$ 에서

$a=\frac{2}{3}-\log_2 \frac{2}{3}=\frac{2}{3}-(\log_2 2-\log_2 3)=-\frac{1}{3}+\log_2 3$

또한 $b=3k=3\times\frac{2}{3}=2$

따라서

$2a+b+k=2\left(-\frac{1}{3}+\log_2 3\right)+2+\frac{2}{3}=\log_2 9+2$

이므로

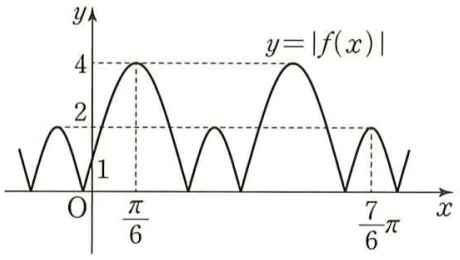
$2^{2a+b+k}=2^{\log_2 9+2}=2^{\log_2 9}\times 2^2=9\times 4=36$

③ 삼각함수

TH①. 2024년 수능특강

2024년 수능특강 Lv2

1. 함수 $f(x)=a\sin bx+c$가 있다.
함수 $y=|f(x)|$의 그래프가 그림과 같이 $|f(0)|=1$, $\left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|=4$, $\left|f\left(\frac{7}{6}\pi\right)\right|=2$가 되도록 하는 세 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M-m$의 값은?



① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

2024년 수능특강 Lv2

2. 두 함수

$$f(x)=\sin 2x,\ g(x)=\pi\cos x$$

에 대하여 $n\pi<x<(n+1)\pi$에서 방정식 $(f\circ g)(x)=0$의 모든 실근의 합이 $\frac{51}{2}\pi$가 되도록 하는 자연수 n의 값을 구하시오.

3. 다음 조건을 만족시키는 네 실수 α, β, M, k에 대하여 $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{k}{M}$의 최솟값은?

> $0 \le x \le \frac{5}{2}\pi$에서 함수
>
> $f(x)=\sin^2\left(\frac{11}{10}\pi-x\right)+\sin\left(x-\frac{3}{5}\pi\right)+k$는 $x=\alpha$일 때
>
> 최댓값 M을 갖고, $x=\beta$일 때 최솟값 0을 갖는다.

① $\frac{5}{7}$ ② $\frac{16}{21}$ ③ $\frac{17}{21}$
④ $\frac{6}{7}$ ⑤ $\frac{19}{21}$

4. 10보다 작은 두 자연수 a, b에 대하여 $0<x<2\pi$에서 함수 $y=a\sin x+b$의 그래프가 세 직선 $y=1$, $y=3$, $y=5$와 만나는 서로 다른 점의 개수를 각각 p, q, r이라 할 때, $p+q+r=3$이 되도록 하는 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오.

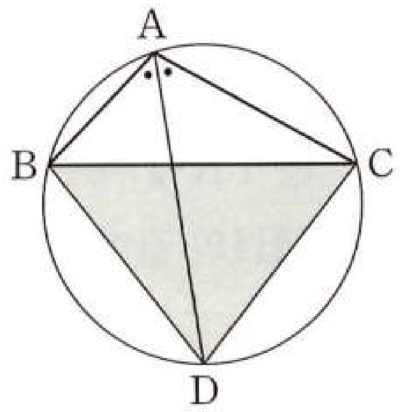
5. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \le x \le 4$ 일 때, $f(x) = \sin \frac{\pi}{2} x$ 이다.
>
> (나) 모든 실수 x 에 대하여
> $f(-x) = f(x)$, $f(x+8) = f(x)$ 이다.

$0 < x < 20$ 일 때, 방정식 $|f(x) + f(x-2)| = 2$ 의 모든 근의 합은?

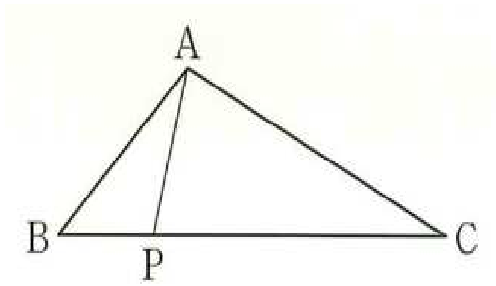
① 41　② 42　③ 43　④ 44　⑤ 45

6. 그림과 같이 $\overline{AB} = 2$, $\overline{BC} = 4$, $\overline{CA} = 3$인 삼각형 ABC에서 ∠BAC의 이등분선이 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하자. 삼각형 BDC의 넓이는?



① $\sqrt{15}$　② $\frac{7\sqrt{15}}{6}$　③ $\frac{4\sqrt{15}}{3}$　④ $\frac{3\sqrt{15}}{2}$　⑤ $\frac{5\sqrt{15}}{3}$

7. 그림과 같이 $\overline{BC}=3\sqrt{2}$, $\overline{CA}=\sqrt{10}$, $\cos C=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 인 삼각형 ABC에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



| 보기 |

ㄱ. $\overline{AB}=2$

ㄴ. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 5π이다.

ㄷ. 선분 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여

$\frac{\overline{BP}\times\overline{CP}}{\sin(\angle PAB)\times\sin(\angle CAP)}$의 최솟값은 $2\sqrt{10}$ 이다.

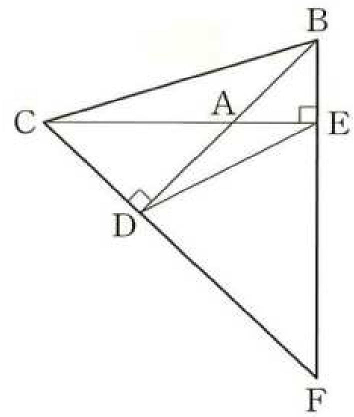
(단, 점 P는 두 점 B, C와 일치하지 않는다.)

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2024년 수능특강 Lv3

New

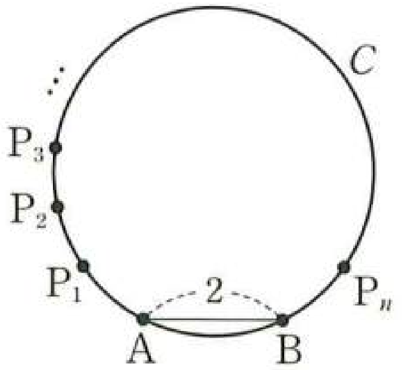
8. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}=2\sqrt{2}$ 이고, $\angle CAB>\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC에 대하여 점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 D, 점 B에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 E라 하고, 두 직선 BE, CD가 만나는 점을 F라 하자. 삼각형 ACD의 외접원과 삼각형 AEB의 외접원이 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리가 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$일 때, 삼각형 DFE 의 외접원의 넓이는?



① 3π　② 4π　③ 5π
④ 6π　⑤ 7π

New

9. 그림과 같이 반지름의 길이가 3인 원 C위에 $\overline{\mathrm{AB}}=2$인 두 점 A, B가 있다. 삼각형 PAB의 넓이가 자연수가 되도록 하는 원 C위의 서로 다른 점 P의 개수는 n이고, 이러한 n개의 점 P 중에서 점 A에 가장 가까운 점을 P_1이라 하고, 나머지 $(n-1)$개의 점들을 점 P_1부터 시계방향으로 P_2, P_3, P_4, $\cdots$, P_n이라 하자. $(\overline{\mathrm{AP}_5}+\overline{\mathrm{AP}_6})^2$의 값은?



① $61+40\sqrt{2}$ ② $62+40\sqrt{2}$ ③ $63+40\sqrt{2}$
④ $64+40\sqrt{2}$ ⑤ $65+40\sqrt{2}$

TH②. 2024년 수능완성

2024년 수능완성

연계 가능성 높음

10. $0<t<2\pi$인 실수 t에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}\cos x-\cos t & (0\leq x\leq t)\\ \cos t-\cos x & (t<x\leq 2\pi)\end{cases}$$

의 최댓값을 $M(t)$, 최솟값을 $m(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $M\left(\frac{\pi}{2}\right)-m\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$

ㄴ. $M(t)-m(t)=2$를 만족시키는 실수 t의 값의 범위는 $\frac{\pi}{2}\leq t\leq \frac{3}{2}\pi$이다.

ㄷ. $M(t)+m(t)=0$을 만족시키는 실수 t의 최댓값과 최솟값의 합은 2π이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

연계 가능성 높음

11. $0 \leq t \leq 2$인 실수 t에 대하여 x에 대한 이차방정식

$$(x-\sin\pi t)(x+\cos\pi t)=0$$

의 두 실근 중에서 작지 않은 것을 $\alpha(t)$, 크지 않은 것을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $\alpha\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}$

ㄴ. $\alpha(t)=\beta(t)$인 서로 다른 실수 t의 개수는 2이다.

ㄷ. $\alpha(s)=\beta\left(s+\frac{1}{2}\right)$을 만족시키는 실수 $s\left(0 \leq s \leq \frac{3}{2}\right)$의 최댓값은 $\frac{5}{4}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

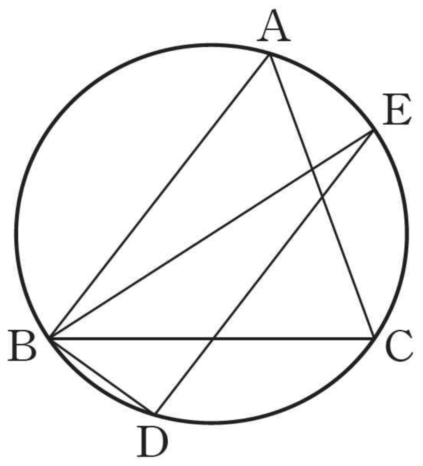
12. 두 실수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\sin\pi x+b$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f\left(\frac{b^4}{a^2}\right)$의 값은? (단, $a \neq 0$) [4점]

(가) 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값과 닫힌구간 $[4,\ 5]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 모두 2이다.

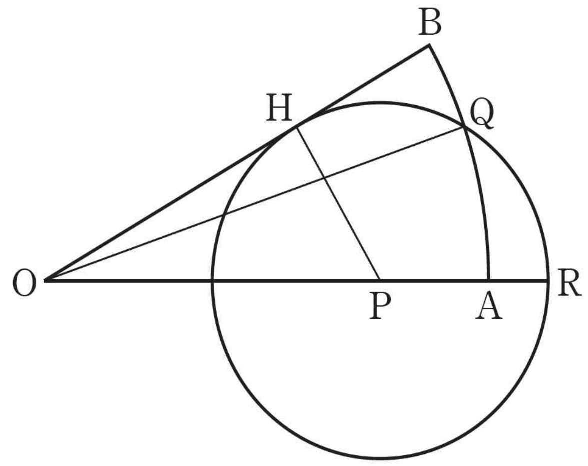
(나) 닫힌구간 $\left[\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 -1이다.

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

13. 그림과 같이 지름의 길이가 6인 원에 내접하고 $\overline{\mathrm{BC}}=5$인 삼각형 ABC가 있다. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{DE}}$, $\overline{\mathrm{AB}} /\!/ \overline{\mathrm{DE}}$를 만족시키는 원 위의 두 점 D, E에 대하여 $\cos(\angle \mathrm{ACB})>0$, $\cos(\angle \mathrm{EDB})=\frac{1}{3}$일 때, $\overline{\mathrm{AC}}=p+q\sqrt{22}$이다. $9pq$의 값을 구하시오. (단, 두 직선 AD, BE는 한 점에서 만나고, p와 q는 유리수이다.)

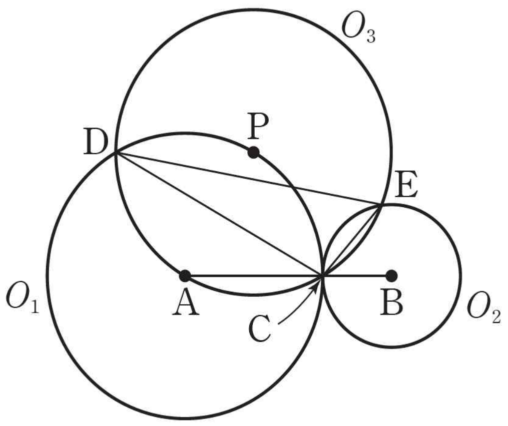


14. 그림과 같이 반지름의 길이가 4이고, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$인 부채꼴 OAB가 있다. 선분 OA 위의 점 P를 중심으로 하고 직선 OB와 점 H에서 접하는 원이 부채꼴 OAB의 호 AB와 만나는 점을 Q라 하고, 이 원이 직선 OA와 만나는 점 중 A에 가까운 점을 R이라 하자. 점 Q가 부채꼴 PRH의 호 RH를 이등분할 때, 부채꼴 PRH의 넓이는? $\left(단, \frac{8}{3}<\overline{\mathrm{OP}}<4\right)$



① $\frac{2}{3}\pi$ ② $\frac{5}{7}\pi$ ③ $\frac{16}{21}\pi$ ④ $\frac{17}{21}\pi$ ⑤ $\frac{6}{7}\pi$

15. 그림과 같이 길이가 3인 선분 AB에 대하여 중심이 A이고 반지름의 길이가 2인 원 O_1과 중심이 B이고 반지름의 길이가 1인 원 O_2가 만나는 점을 C라 하자. 원 O_1 위의 점 P를 중심으로 하고 두 점 A, C를 지나는 원 O_3이 원 O_1과 만나는 점 중 C가 아닌 점을 D라 하고, 원 O_3이 원 O_2와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 E라 할 때, 삼각형 EDC에서 $\sin(\angle \mathrm{EDC})$의 값은?



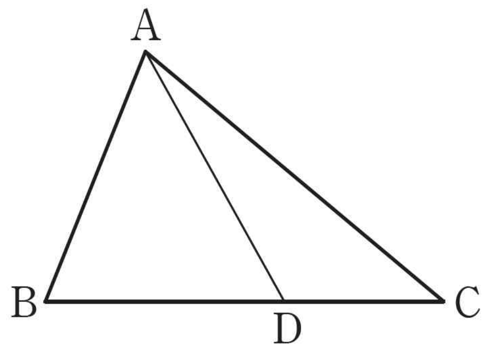
① $\frac{\sqrt{17}}{14}$ ② $\frac{\sqrt{19}}{14}$ ③ $\frac{\sqrt{21}}{14}$

④ $\frac{\sqrt{23}}{14}$ ⑤ $\frac{5}{14}$

2024년 수능완성

New

16. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=2:3$인 삼각형 ABC에서 선분 BC를 $3:2$로 내분하는 점을 D라 하자. $\frac{\cos(\angle \mathrm{ABD})}{\cos(\angle \mathrm{ACD})}=\frac{1}{2}$일 때, $\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$의 값은?



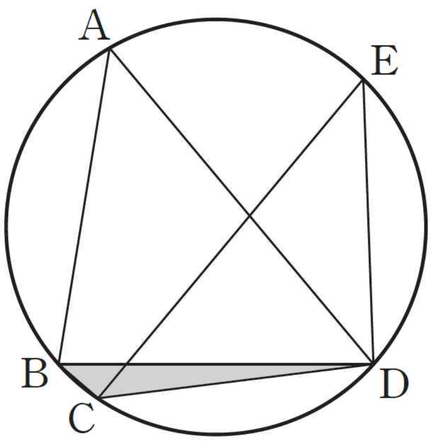
① $\frac{\sqrt{95}}{10}$ ② 1 ③ $\frac{\sqrt{105}}{10}$

④ $\frac{\sqrt{110}}{10}$ ⑤ $\frac{\sqrt{115}}{10}$

17. 그림과 같이 반지름의 길이가 4인 원 위에 5개의 점 A, B, C, D, E가 있다.

$$\sin(\angle\mathrm{BAD})=\frac{3}{4},\ \sin(\angle\mathrm{CED})=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

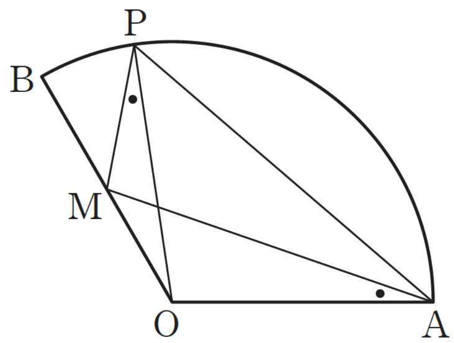
일 때, 삼각형 BCD의 넓이는? (단, 점 C는 호 BD중 길이가 짧은 호 위에 있고, $0<\angle\mathrm{BAD}<\frac{\pi}{2}$, $0<\angle\mathrm{CED}<\frac{\pi}{2}$이다.) [4점]



① $\frac{3\sqrt{7}}{8}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ③ $\frac{5\sqrt{7}}{8}$
④ $\frac{3\sqrt{7}}{4}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{7}}{8}$

2024년 수능완성

18. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 2, 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴 OAB가 있다. 선분 OB의 중점 M가 호 AB 위의 점 중에서 A가 아닌 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{OAM}=\angle\mathrm{OPM}$일 때, 삼각형 PMA의 둘레의 길이는? [4점]

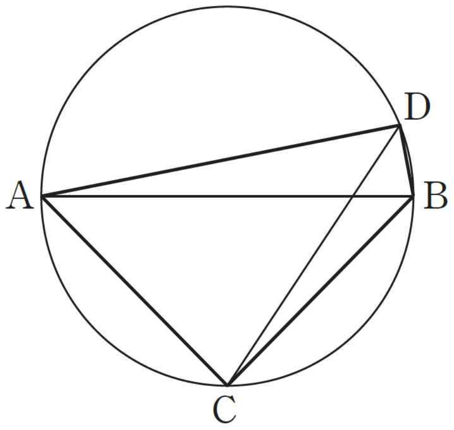


① $\frac{17\sqrt{7}}{7}$ ② $\frac{18\sqrt{7}}{7}$ ③ $\frac{19\sqrt{7}}{7}$
④ $\frac{20\sqrt{7}}{7}$ ⑤ $3\sqrt{7}$

19. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원에 내접하는 사각형 ABCD가 있다.

$$\overline{AB}=4,\ \overline{AC}=\overline{BC},\ \overline{CD}=3$$

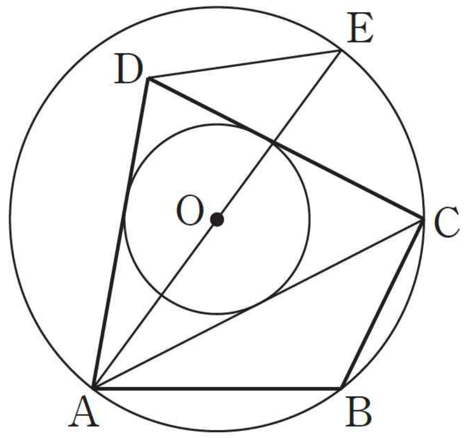
일 때, 선분 BD의 길이는? (단, $\overline{AD}>\overline{BD}$) [4점]



① $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2}$ ② $\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{14}}{2}$
③ $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2}$ ④ $\frac{2\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{2}$
⑤ $\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$

2024년 수능완성

20. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=\sqrt{5}$, $\cos(\angle ABC)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$인 사각형 ABCD에 대하여 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O라 하고, 직선 AO와 이 외접원이 만나는 점 중 점 A가 아닌 점을 E라 하자. 삼각형 ACD의 내접원의 중심이 점 O와 일치할 때, 선분 DE의 길이는? [4점]



① $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{4\sqrt{5}}{3}$
④ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

1. 정답 ④

풀이

$\frac{\pi}{6}<x<\frac{7}{6}\pi$에서 방정식 $|f(x)|=4$의 근, 즉 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=4$가 만나는 점의 x좌표를 α라 하면

$\alpha-\frac{\pi}{6}=2\left(\frac{7}{6}\pi-\alpha\right)$

이므로 $\alpha=\frac{5}{6}\pi$

따라서 함수 $f(x)$의 주기는

$\alpha-\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$

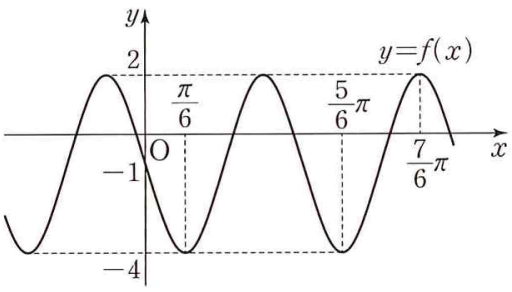
함수 $f(x)=a\sin bx+c$의 주기는 $\frac{2\pi}{|b|}$이므로

$\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2}{3}\pi$

$|b|=3$

한편, $|f(0)|=1$에서 $|c|=1$, 즉 $c=-1$ 또는 $c=1$

(i) $c=-1$일 때



$f(x)=a\sin bx-1$의 최댓값이 2이므로

$|a|-1=2,\ |a|=3$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=-3\sin 3x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

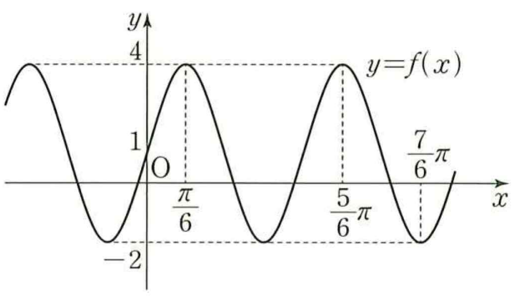
$f(x)=-3\sin 3x-1$

이때 $|a|=|b|=3$이고 $-3\sin 3x=3\sin(-3x)$이므로

$a=-3,\ b=3$ 또는 $a=3,\ b=-3$

따라서 $a+b=0$이므로 $a+b+c$의 값은 -1이다.

(ii) $c=1$일 때



$f(x)=a\sin bx+1$의 최댓값이 4이므로

$|a|+1=4,\ |a|=3$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=3\sin 3x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$f(x)=3\sin 3x+1$

이때 $|a|=|b|=3$ 이고 $3\sin 3x=-3\sin(-3x)$이므로

$a=b=3$ 또는 $a=b=-3$

따라서 $a+b+c$의 값은 $3+3+1=7$ 또는

$-3+(-3)+1=-5$이다.

(i), (ii)에서 $a+b+c$의 최댓값과 최솟값은 각각 $M=7$, $m=-5$이므로

$M-m=7-(-5)=12$

2. 정답 8

풀이

$f(x)=\sin 2x,\ g(x)=\pi\cos x$ 이므로

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$=f(\pi\cos x)$

$=\sin(2\pi\cos x)$

방정식 $(f\circ g)(x)=0$에서

$\sin(2\pi\cos x)=0$ …… ㉠

이때 $n\pi<x<(n+1)\pi$에서

$-1<\cos x<1$

$-2\pi<2\pi\cos x<2\pi$ 이므로 방정식 ㉠의 근은

$2\pi\cos x=-\pi$ 또는 $2\pi\cos x=0$ 또는 $2\pi\cos x=\pi$

즉, $\cos x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=0$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

이때 $nx<x<(n+1)\pi$에서 세 방정식 $\cos x=-\frac{1}{2}$, $\cos x=0$, $\cos x=\frac{1}{2}$ 의 근은 각각 하나씩 존재하고,

방정식 $\cos x=0$의 근은 $x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$

두 방정식 $\cos x=-\frac{1}{2}$, $\cos x=\frac{1}{2}$ 의 근을 각각 α, β라 하면

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$

$\alpha+\beta=2\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$

$n\pi<x<(n+1)\pi$에서 방정식 $(f\circ g)(x)=0$의 모든 실근은 $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$, α, β이고, 그 합이 $\frac{51}{2}\pi$이므로

$\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi+\alpha+\beta=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi+2\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$

$=3\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi=\frac{51}{2}\pi$

따라서 $n=8$

3. 정답 ③

풀이

$\sin^2\left(\frac{11}{10}\pi-x\right)=\sin^2\left\{\frac{\pi}{2}-\left(x-\frac{3}{5}\pi\right)\right\}$

$=\cos^2\left(x-\frac{3}{5}\pi\right)$

$=1-\sin^2\left(x-\frac{3}{5}\pi\right)$

이므로

$f(x)=\sin^2\left(\frac{11}{10}\pi-x\right)+\sin\left(x-\frac{3}{5}\pi\right)+k$

$=\left\{1-\sin^2\left(x-\frac{3}{5}\pi\right)\right\}+\sin\left(x-\frac{3}{5}\pi\right)+k$

$$=-\sin^2\left(x-\frac{3}{5}\pi\right)+\sin\left(x-\frac{3}{5}\pi\right)+k+1$$

이때 $0\le x\le\frac{5}{2}\pi$에서 $-1\le\sin\left(x-\frac{3}{5}\pi\right)\le 1$

$\sin\left(x-\frac{3}{5}\pi\right)=t\ (-1\le t\le 1)$이라 하면

$$f(x)=-t^2+t+k+1=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+k+\frac{5}{4}$$

이므로 함수 $f(x)$는 $t=\frac{1}{2}$, 즉 $\sin\left(x-\frac{3}{5}\pi\right)=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $k+\frac{5}{4}$를 갖고, $t=-1$, 즉 $\sin\left(x-\frac{3}{5}\pi\right)=-1$일 때 최솟값 $k-1$을 갖는다.

함수 $f(x)$의 최솟값이 0이므로

$k-1=0$에서 $k=1$이고 함수 $f(x)$의 최댓값 M은

$$M=k+\frac{5}{4}=1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$$

한편, $0\le x\le\frac{5}{2}\pi$에서 $-\frac{3}{5}\pi\le x-\frac{3}{5}\pi\le\frac{19}{10}\pi$이고 함수 $f(x)$가 $x=\alpha\ \left(0\le\alpha\le\frac{5}{2}\pi\right)$에서 최댓값을 가지므로

$$\sin\left(\alpha-\frac{3}{5}\pi\right)=\frac{1}{2}$$

$$\alpha-\frac{3}{5}\pi=\frac{\pi}{6}\ \text{또는}\ \alpha-\frac{3}{5}\pi=\frac{5}{6}\pi$$

$$\alpha=\frac{23}{30}\pi\ \text{또는}\ \alpha=\frac{43}{30}\pi$$

함수 $f(x)$가 $x=\beta\ \left(0\le\beta\le\frac{5}{2}\pi\right)$에서 최솟값을 가지므로

$$\sin\left(\beta-\frac{3}{5}\pi\right)=-1$$

$$\beta-\frac{3}{5}\pi=-\frac{\pi}{2}\ \text{또는}\ \beta-\frac{3}{5}\pi=\frac{3}{2}\pi$$

$$\beta=\frac{\pi}{10}\ \text{또는}\ \beta=\frac{21}{10}\pi$$

이때 $\frac{\alpha}{\beta}$의 값은 $\alpha=\frac{23}{30}\pi$, $\beta=\frac{21}{10}\pi$일 때 최소이므로

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{k}{M}\ge\frac{\frac{23}{30}\pi}{\frac{21}{10}\pi}+\frac{1}{\frac{9}{4}}=\frac{23}{63}+\frac{4}{9}=\frac{17}{21}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{17}{21}$이다.

4. **정답** 7

풀이

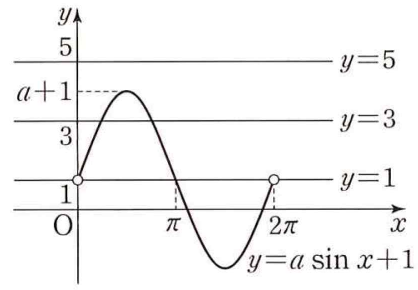
a, b가 자연수이므로 $0<x<2\pi$에서

함수 $y=a\sin x+b$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 최댓값 $a+b$를 갖고,

$x=\frac{3}{2}\pi$에서 최솟값 $-a+b$를 갖는다.

b의 값에 따라 $p+q+r=3$이 되도록 하는 10보다 작은 두 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는 다음과 같다.

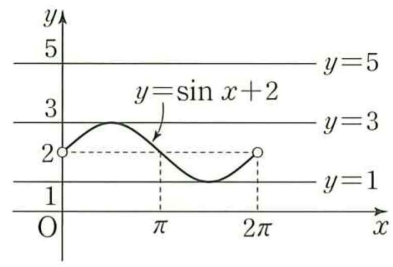
(i) $b=1$일 때

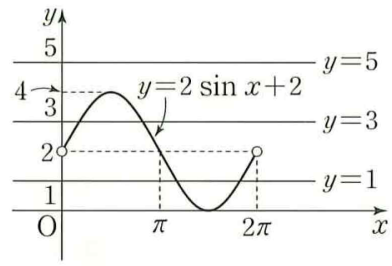


$p=1$, $q=2$, $r=0$, 즉 $a+b=a+1=4$이어야 하므로 $a=3$

즉, 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(3,\ 1)$

(ii) $b=2$일 때



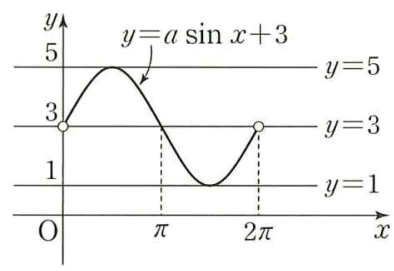


$a=1$이면 $p=1$, $q=1$, $r=0$이고

$a\ge 2$이면 $p=2$, $q=2$, $r\ge 0$이므로

$p+q+r=3$을 만족시키는 a의 값이 존재하지 않는다.

(iii) $b=3$일 때



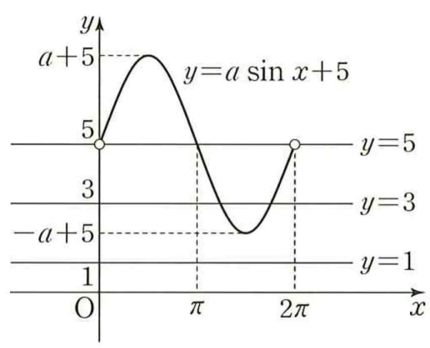
$p=q=r=1$, 즉 $a+b=a+3=5$이어야 하므로 $a=2$

즉, 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(2,\ 3)$

(iv) $b=4$일 때

(ii)의 $b=2$일 때와 마찬가지로 조건을 만족시키는 a의 값이 존재하지 않는다.

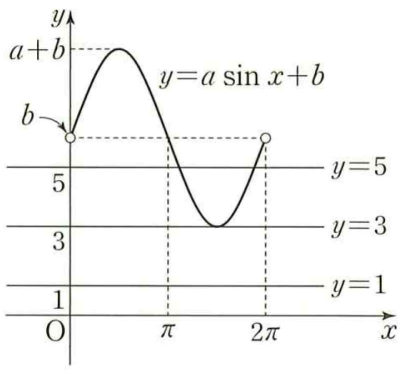
(v) $b=5$일 때



$p=0$, $q=2$, $r=1$, 즉 $-a+b=-a+5=2$이어야 하므로 $a=3$

즉, 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(3,\ 5)$

(vi) $6\le b\le 10$일 때



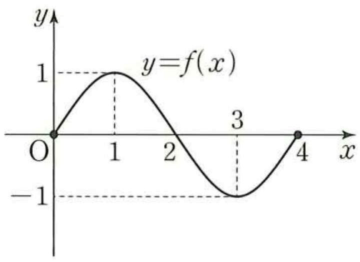
$p=0$, $q=1$, $r=2$, 즉 $-a+b=3$이어야 하므로
$a=b-3$이고 이를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(3,\ 6)$, $(4,\ 7)$, $(5,\ 8)$, $(6,\ 9)$

(ⅰ)~(ⅵ)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(3,\ 1)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 5)$, $(3,\ 6)$, $(4,\ 7)$, $(5,\ 8)$, $(6,\ 9)$이고 그 개수는 7이다.

5. 정답 ⑤

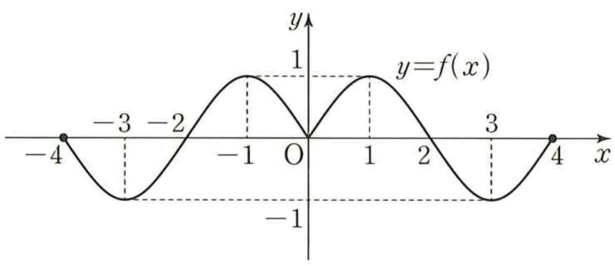
풀이

함수 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$ 이므로 $0\le x\le 4$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같다.



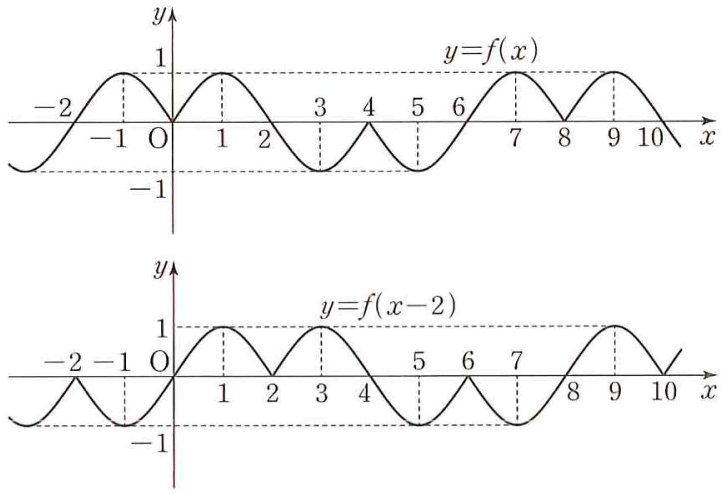
[그림 1]

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$, 즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 $-4\le x\le 4$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

모든 실수 x에 대하여 $f(x+8)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 함수 $y=f(x-2)$의 그래프는 [그림 3]과 같다.



[그림 3]

한편, 방정식 $|f(x)+f(x-2)|=2$에서
$f(x)+f(x-2)=-2$ 또는 $f(x)+f(x-2)=2$
이때 모든 실수 x에 대하여 $-1\le f(x)\le 1$이므로
$f(x)=f(x-2)=-1$ 또는 $f(x)=f(x-2)=1$ 이어야 한다.

(ⅰ) $f(x)=f(x-2)=-1$일 때
$0\le x\le 8$에서 $f(x)=f(x-2)=-1$, 즉 두 함수 $y=f(x)$, $y=f(x-2)$의 그래프가 직선 $y=-1$과 동시에 만나도록 하는 x의 값은 5뿐이다.
두 함수 $f(x)$, $f(x-2)$의 주기는 모두 8이므로
$0<x<20$에서 $f(x)=f(x-2)=-1$을 만족시키는 x의 값은 5, 13이다.

(ⅱ) $f(x)=f(x-2)=1$일 때
$0\le x\le 8$에서 $f(x)=f(x-2)=1$, 즉 두 함수 $y=f(x)$, $y=f(x-2)$의 그래프가 직선 $y=1$과 동시에 만나도록 하는 x의 값은 1뿐이다.
두 함수 $f(x)$, $f(x-2)$의 주기는 모두 8이므로
$0<x<20$에서 $f(x)=f(x-2)=1$을 만족시키는 x의 값은 1, 9, 17이다.

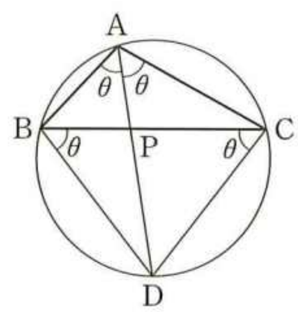
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $0<x<20$일 때, 방정식 $|f(x)+f(x-2)|=2$의 모든 근은 1, 5, 9, 13, 17이므로
그 합은
$1+5+9+13+17=45$

6. 정답 ③

풀이

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-\overline{BC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{CA}}=\frac{2^2+3^2-4^2}{2\times2\times3}=-\frac{1}{4}$$



$\angle \mathrm{BAD}=\angle \mathrm{DAC}=\theta$라 하면 원주각의 성질에 의하여

$\angle \mathrm{DBC}=\angle \mathrm{DCB}=\theta$이므로 삼각형 BDC는 $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CD}}$인 이등변삼각형이다.

$\cos(\angle \mathrm{BDC})=\cos(\pi-A)=-\cos A=\frac{1}{4}$ 이므로

$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CD}}=a$ $(a>0)$이라 하면 삼각형 BDC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{BD}}^2+\overline{\mathrm{CD}}^2-2\times\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\cos(\angle BDC)$

$4^2=a^2+a^2-2\times a\times a\times\frac{1}{4}$

$a^2=\frac{32}{3}$

$a>0$이므로

$a=\frac{4\sqrt{6}}{3}$

즉, $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CD}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$

한편, $\sin(\angle \mathrm{BDC})=\sqrt{1-\cos^2(\angle \mathrm{BDC})}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{15}}{4}$

따라서 삼각형 BDC의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin(\angle BDC)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{6}}{3}\times\frac{4\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{15}}{4}$

$=\frac{4\sqrt{15}}{3}$

7. 정답 ⑤

풀이

ㄱ. 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2-2\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{CA}}\times\cos C$

$=(3\sqrt{2})^2+(\sqrt{10})^2-2\times3\sqrt{2}\times\sqrt{10}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$=4$

이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=2$ (참)

ㄴ. $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{5}}{5}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin C}=2R$

$R=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{2\sin C}=\frac{2}{2\times\frac{\sqrt{5}}{5}}=\sqrt{5}$

이므로 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$\pi\times(\sqrt{5})^2=5\pi$ (참)

ㄷ. 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{CA}}}{\sin B}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin C}$이므로

$\sin B=\frac{\overline{\mathrm{CA}}}{\overline{\mathrm{AB}}}\sin C$

$=\frac{\sqrt{10}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{5}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}$

두 삼각형 ABP, ACP에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{BP}}}{\sin(\angle \mathrm{PAB})}=\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\sin B}$

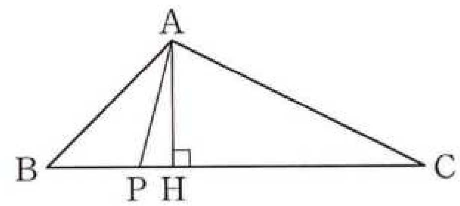
$\frac{\overline{\mathrm{CP}}}{\sin(\angle \mathrm{CAP})}=\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\sin C}$

이므로

$\frac{\overline{BP}\times\overline{CP}}{\sin(\angle \mathrm{PAB})\times\sin(\angle CAP)}=\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\sin B}\times\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\sin C}$

$=\frac{\overline{\mathrm{AP}}^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{5}}$

$=\sqrt{10}\,\overline{\mathrm{AP}}^2$



이때 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AB}}\sin B=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

따라서

$\frac{\overline{BP}\times\overline{CP}}{\sin(\angle \mathrm{PAB})\times\sin(\angle CAP)}=\sqrt{10}\,\overline{\mathrm{AP}}^2$

$\geq\sqrt{10}\,\overline{\mathrm{AH}}^2$

$=\sqrt{10}\times(\sqrt{2})^2$

$=2\sqrt{10}$

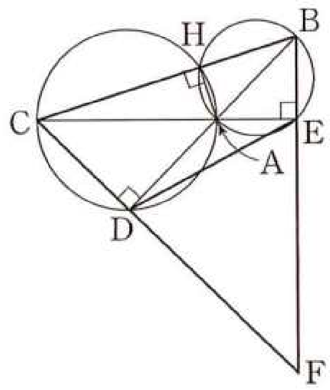
이므로

$\frac{\overline{BP}\times\overline{CP}}{\sin(\angle \mathrm{PAB})\times\sin(\angle CAP)}$의 값은 점 P가 점 H와 일치할 때 최솟값 $2\sqrt{10}$을 갖는다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

8. 정답 ③

풀이



점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\angle ADC = \angle AHC = \frac{\pi}{2}$이므로 삼각형 ACD의 외접원은 선분 AC를 지름으로 하고 점 H를 지난다.

또한, $\angle AEB = \angle AHB = \frac{\pi}{2}$이므로 삼각형 AEB의 외접원은 선분 AB를 지름으로 하고 점 H를 지난다. 따라서 삼각형 ACD의 외접원과 삼각형 AEB의 외접원이 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리가 $\overline{AH}$이므로

$\overline{AH} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

직각삼각형 ABH에서

$$\begin{aligned}\overline{BH} &= \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AH}^2} \\ &= \sqrt{2^2 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} \\ &= \frac{4\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

직각삼각형 ACH에서

$$\begin{aligned}\overline{CH} &= \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AH}^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} \\ &= \frac{6\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

그러므로

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= \overline{BH} + \overline{CH} \\ &= \frac{4\sqrt{5}}{5} + \frac{6\sqrt{5}}{5} \\ &= 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

이때 두 삼각형 ABH, CBD가 서로 닮음이므로

$\overline{AB} : \overline{AH} = \overline{CB} : \overline{CD}$

즉, $2 : \frac{2\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5} : \overline{CD}$

$\overline{CD} = 2$

직각삼각형 ACD에서

$$\begin{aligned}\overline{AD} &= \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2^2} \\ &= 2\end{aligned}$$

따라서 삼각형 ACD는 $\overline{AD} = \overline{CD}$인 직각이등변삼각형이므로

$\angle ACD = \angle DAC = \frac{\pi}{4}$이다.

이때 $\angle BAE = \angle DAC = \frac{\pi}{4}$이므로 삼각형 AEB도 직각이등변삼각형이고

$\overline{AE} = \overline{BE} = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

한편, $\angle CDB = \angle CEB = \frac{\pi}{2}$이므로 삼각형 BCD의 외접원은 점 E를 지나고, 원주각의 성질에 의하여

$\angle CBD = \angle CED$, $\angle BCE = \angle BDE$

두 삼각형 ABC, AED가 서로 닮음이므로

$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AE} : \overline{DE}$

즉, $2 : 2\sqrt{5} = \sqrt{2} : \overline{DE}$

$\overline{DE} = \sqrt{10}$

또한 삼각형 CFE에서 $\angle ECF = \frac{\pi}{4}$, $\angle CEF = \frac{\pi}{2}$이므로

$\angle DFE = \frac{\pi}{4}$

따라서 삼각형 DFE의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{DE}}{\sin(\angle DFE)} = 2R$$

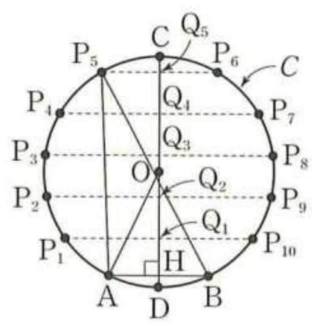
$$R = \frac{\sqrt{10}}{2\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{5}$$

이므로 구하는 외접원의 넓이는

$\pi \times R^2 = 5\pi$

9. **정답** ④

풀이



원 C의 중심을 O라 하고 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 OH는 선분 AB를 수직이등분하므로

$\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

$\overline{OA} = 3$이므로 직각삼각형 OAH에서

$$\begin{aligned}\overline{OH} &= \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} \\ &= \sqrt{3^2 - 1^2} \\ &= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

원 C와 직선 OH가 만나는 두 점을 C, D ($\overline{DH} < \overline{CH}$)라 하면

$\overline{CH} = \overline{OC} + \overline{OH} = 3 + 2\sqrt{2}$

$\overline{DH} = \overline{OD} - \overline{OH} = 3 - 2\sqrt{2}$

이때 $2 < 2\sqrt{2} < 3$이므로

$5 < \overline{CH} < 6$, $0 < \overline{DH} < 1$ $\cdots\cdots$ ㉠

한편, 원 C위의 점 P에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H_1이라 하고

삼각형 PAB의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{PH_1}}$$
$$=\frac{1}{2}\times 2\times\overline{\mathrm{PH_1}}$$
$$=\overline{\mathrm{PH_1}}$$

이므로 삼각형 PAB의 넓이가 자연수이려면 $\overline{\mathrm{PH_1}}$, 즉 점 P와 직선 AB사이의 거리가 자연수이어야 한다.

㉠에 의하여 선분 CH위에 $\overline{\mathrm{HQ_1}}=1$, $\overline{\mathrm{HQ_2}}=2$, $\overline{\mathrm{HQ_3}}=3$, $\overline{\mathrm{HQ_4}}=4$, $\overline{\mathrm{HQ_5}}=5$인 다섯 개의 점 $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{Q_2}$, $\mathrm{Q_3}$, $\mathrm{Q_4}$, $\mathrm{Q_5}$를 잡고, 선분 CD에 수직이며 점 $\mathrm{Q_i}$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$를 지나는 직선과 원 C의 교점을 고려하면 열 개의 점 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{P_3}$, $\cdots$, $\mathrm{P_{10}}$이 존재한다. 이때 두 점 $\mathrm{P_1}$과 $\mathrm{P_{10}}$, 두 점 $\mathrm{P_2}$와 $\mathrm{P_9}$, 두 점 $\mathrm{P_3}$과 $\mathrm{P_8}$, 두 점 $\mathrm{P_4}$와 $\mathrm{P_7}$, 두 점 $\mathrm{P_5}$와 $\mathrm{P_6}$은 모두 직선 CH에 대하여 대칭이고, 두 점 A, B도 직선 CH에 대하여 대칭이므로 $\overline{\mathrm{AP_6}}=\overline{\mathrm{BP_5}}$이다.

원 C의 반지름의 길이가 3이므로 삼각형 $\mathrm{P_5AB}$에서 $\angle\mathrm{AP_5B}=\theta$라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\theta}=2\times 3$$
$$\sin\theta=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

삼각형 $\mathrm{P_5AB}$는 밑변의 길이가 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, 높이가 5이므로 삼각형 $\mathrm{P_5AB}$의 넓이는 5이다.

따라서

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AP_5}}\times\overline{\mathrm{BP_5}}\times\sin\theta=5$$
$$\overline{\mathrm{AP_5}}\times\overline{\mathrm{BP_5}}=\frac{10}{\sin\theta}=\frac{10}{\frac{1}{3}}=30$$

또한 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

이므로 삼각형 $\mathrm{P_5AB}$에서 코사인법칙에 의하여

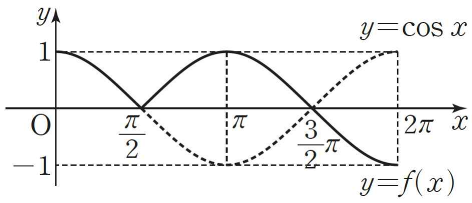
$$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{AP_5}}^2+\overline{\mathrm{BP_5}}^2-2\times\overline{\mathrm{AP_5}}\times\overline{\mathrm{BP_5}}\times\cos\theta$$
$$\overline{\mathrm{AP_5}}^2+\overline{\mathrm{BP_5}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+2\times\overline{\mathrm{AP_5}}\times\overline{\mathrm{BP_5}}\times\cos\theta$$
$$=2^2+2\times 30\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$$
$$=4+40\sqrt{2}$$

따라서

$$\left(\overline{\mathrm{AP_5}}+\overline{\mathrm{AP_6}}\right)^2=\left(\overline{\mathrm{AP_5}}+\overline{\mathrm{BP_5}}\right)^2$$
$$=\overline{\mathrm{AP_5}}^2+\overline{\mathrm{BP_5}}^2+2\times\overline{\mathrm{AP_5}}\times\overline{\mathrm{BP_5}}$$
$$=(4+40\sqrt{2})+2\times 30$$
$$=64+40\sqrt{2}$$

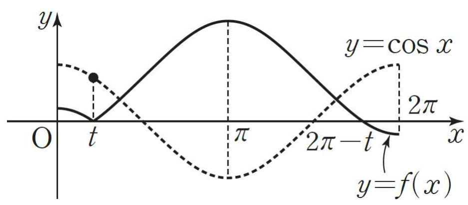
10. **정답** ⑤

ㄱ. $t=\frac{\pi}{2}$일 때 $f(x)=\begin{cases}\cos x & \left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)\\ -\cos x & \left(\frac{\pi}{2}\le x\le 2\pi\right)\end{cases}$ 이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



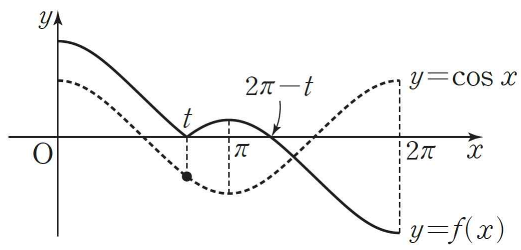
$M\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $m\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$이므로 $M\left(\frac{\pi}{2}\right)-m\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$ (참)

ㄴ. (ⅰ) $0<t\le\frac{\pi}{2}$일 때



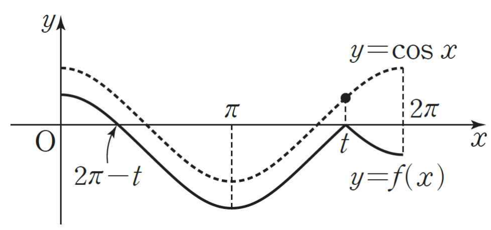
$M(t)=f(\pi)=\cos t-\cos\pi=\cos t+1$,
$m(t)=f(2\pi)=\cos t-\cos 2\pi=\cos t-1$
이므로 $M(t)-m(t)=2$

(ⅱ) $\frac{\pi}{2}<t<\frac{3}{2}\pi$일 때



$M(t)=f(0)=\cos 0-\cos t=1-\cos t$,
$m(t)=f(2\pi)=\cos t-\cos 2\pi=\cos t-1$
이므로 $M(t)-m(t)=2-2\cos t$

(ⅲ) $\frac{3}{2}\pi\le t<2\pi$일 때



$M(t)=f(0)=\cos 0-\cos t=1-\cos t$,
$m(t)=f(\pi)=\cos\pi-\cos t=-1-\cos t$
이므로 $M(t)-m(t)=2$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $M(t)-m(t)=2$를 만족시키는 실수 t의 값의 범위는 $0<t\le\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{2}\pi\le t<2\pi$ (거짓)

ㄷ. ㄴ에서

$0<t\le\frac{\pi}{2}$일 때, $M(t)+m(t)=2\cos t$

$\frac{\pi}{2}<t<\frac{3}{2}\pi$일 때, $M(t)+m(t)=0$

$\frac{3}{2}\pi\le t<2\pi$일 때, $M(t)+m(t)=-2\cos t$

이므로 $\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{3}{2}\pi$일 때, $M(t)+m(t)=0$

따라서 $M(t)+m(t)=0$을 만족시키는 실수 t의 최솟값은 $\frac{\pi}{2}$이고 최댓값은 $\frac{3}{2}\pi$이므로 그 합은 2π이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

11. **정답** ③

ㄱ. $t=\dfrac{1}{2}$일 때, $\left(x-\sin\dfrac{\pi}{2}\right)\left(x+\cos\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

즉, 이차방정식 $x(x-1)=0$의 두 실근은 0, 1이므로

$\alpha\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$, $\beta\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$

따라서 $\alpha\left(\dfrac{1}{2}\right)>\dfrac{1}{2}$ (참)

ㄴ. 이차방정식 $(x-\sin\pi t)(x+\cos\pi t)=0$의 실근은

$x=\sin\pi t$ 또는 $x=-\cos\pi t$

$\sin\pi t=-\cos\pi t$ 즉, $\tan\pi t=-1$에서

$0\le t\le 2$이므로 $\pi t=\dfrac{3}{4}\pi$ 또는 $\pi t=\dfrac{7}{4}\pi$

즉, $t=\dfrac{3}{4}$ 또는 $t=\dfrac{7}{4}$

따라서 $\alpha(t)=\beta(t)$를 만족시키는 서로 다른 실수 t의 개수는 2이다. (참)

ㄷ. $0\le t\le\dfrac{3}{4}$ 또는 $\dfrac{7}{4}\le t\le 2$일 때, $\sin\pi t\ge-\cos\pi t$이므로

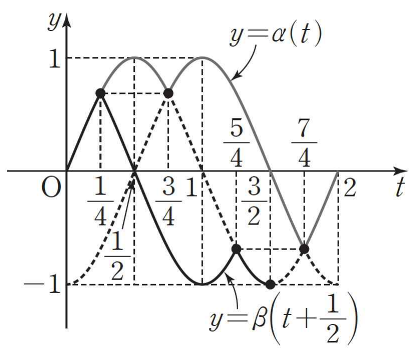
$\alpha(t)=\sin\pi t$, $\beta(t)=-\cos\pi t$

$\dfrac{3}{4}<t<\dfrac{7}{4}$일 때, $\sin\pi t<-\cos\pi t$이므로

$\alpha(t)=-\cos\pi t$, $\beta(t)=\sin\pi t$

따라서 $\alpha(t)=\begin{cases}\sin\pi t & \left(0\le t\le\dfrac{3}{4} \text{ 또는 } \dfrac{7}{4}\le t\le 2\right)\\ -\cos\pi t & \left(\dfrac{3}{4}<t<\dfrac{7}{4}\right)\end{cases}$

$\beta(t)=\begin{cases}-\cos\pi t & \left(0\le t\le\dfrac{3}{4} \text{ 또는 } \dfrac{7}{4}\le t\le 2\right)\\ \sin\pi t & \left(\dfrac{3}{4}<t<\dfrac{7}{4}\right)\end{cases}$



(i) $0\le s\le\dfrac{1}{4}$일 때, $\dfrac{1}{2}\le s+\dfrac{1}{2}\le\dfrac{3}{4}$이므로

$$\begin{aligned}\alpha(s)-\beta\left(s+\frac{1}{2}\right)&=\sin\pi s-\left\{-\cos\pi\left(s+\frac{1}{2}\right)\right\}\\&=\sin\pi s+\cos\left(\pi s+\frac{\pi}{2}\right)\\&=\sin\pi s-\sin\pi s\\&=0\end{aligned}$$

(ii) $\dfrac{1}{4}<s\le\dfrac{3}{4}$일 때, $\dfrac{3}{4}<s+\dfrac{1}{2}\le\dfrac{5}{4}$이므로

$$\begin{aligned}\alpha(s)-\beta\left(s+\frac{1}{2}\right)&=\sin\pi s-\sin\pi\left(s+\frac{1}{2}\right)\\&=\sin\pi s-\cos\pi s>0\end{aligned}$$

(iii) $\dfrac{3}{4}<s<\dfrac{5}{4}$일 때, $\dfrac{5}{4}<s+\dfrac{1}{2}<\dfrac{7}{4}$이므로

$$\begin{aligned}\alpha(s)-\beta\left(s+\frac{1}{2}\right)&=-\cos\pi s-\sin\pi\left(s+\frac{1}{2}\right)\\&=-\cos\pi s-\cos\pi s\\&=-2\cos\pi s>0\end{aligned}$$

(iv) $\dfrac{5}{4}\le s\le\dfrac{3}{2}$일 때, $\dfrac{7}{4}\le s+\dfrac{1}{2}\le 2$이므로

$$\begin{aligned}\alpha(s)-\beta\left(s+\frac{1}{2}\right)&=-\cos\pi s-\left\{-\cos\pi\left(s+\frac{1}{2}\right)\right\}\\&=-\cos\pi s+\cos\left(\pi s+\frac{\pi}{2}\right)\\&=-\cos\pi s-\sin\pi s>0\end{aligned}$$

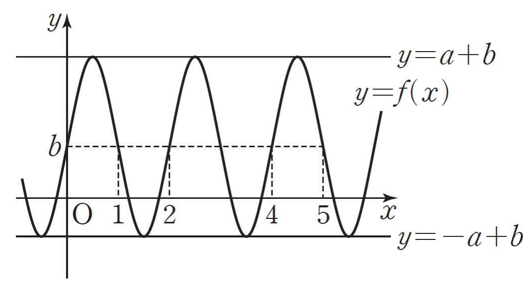
따라서 $\alpha(s)=\beta\left(s+\dfrac{1}{2}\right)$를 만족시키는 실수 $s\left(0\le s\le\dfrac{3}{2}\right)$의 범위는 $0\le s\le\dfrac{1}{4}$이므로 그 최댓값은 $\dfrac{1}{4}$이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

12. **정답** ⑤

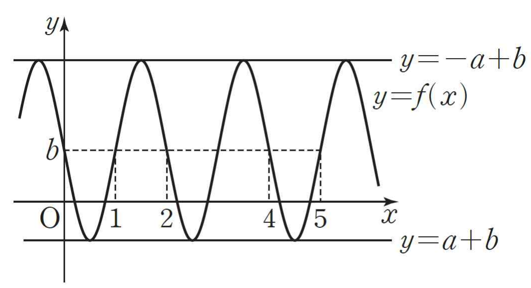
함수 $f(x)=a\sin\pi x+b$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\pi}=2$이고 최댓값은 $|a|+b$, 최솟값은 $-|a|+b$이다.

(i) $a>0$인 경우



닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-a+b$이고,
닫힌구간 $[4,\ 5]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $a+b$이다.
이때 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값과 닫힌구간 $[4,\ 5]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 모두 2이므로
$-a+b=a+b=2$
즉, $a=0$이므로 $a>0$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$인 경우



닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 b이고,
닫힌구간 $[4,\ 5]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 b이다.
이때 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값과 닫힌구간 $[4,\ 5]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 모두 2이므로
$b=2$

(i), (ii)에 의하여 $a<0$, $b=2$

닫힌구간 $\left[\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2}\right]$에서 함수 $f(x)=a\sin\pi x+2$는 $x=\dfrac{1}{3}$일 때 최댓값 -1을 가지므로

$f\left(\frac{1}{3}\right)=a\sin\frac{\pi}{3}+2=\frac{\sqrt{3}}{2}a+2=-1$

$a=\frac{2}{\sqrt{3}}\times(-3)=-2\sqrt{3}$

따라서

$$f\left(\frac{b^4}{a^2}\right)=f\left(\frac{4}{3}\right)$$
$$=-2\sqrt{3}\sin\frac{4}{3}\pi+2$$
$$=-2\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2$$
$$=5$$

13. 정답 10

$\overline{AB}=\overline{DE}$, $\overline{AB}\,/\!/\,\overline{DE}$에서 사각형 ABDE는 평행사변형이므로

$\angle BAE=\angle BDE$

사각형 ABDE가 원에 내접하므로 $\angle BAE+\angle BDE=\pi$

따라서 사각형 ABDE는 직사각형이므로 두 선분 AD, BE는 원의 지름이다.

$\cos(\angle ACB)=\cos(\angle AEB)=\cos(\angle EDB)=\frac{1}{3}$이므로

$\sin(\angle ACB)=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

삼각형 ABC의 외접원의 지름의 길이가 6이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle ACB)}=6$, 즉 $\overline{AB}=6\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$

삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=k\ (k>0)$으로 놓으면 $\overline{BC}=5$이므로 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AC}\times\overline{BC}\times\cos(\angle ACB)$

$32=k^2+25-\frac{10}{3}k$, $3k^2-10k-21=0$

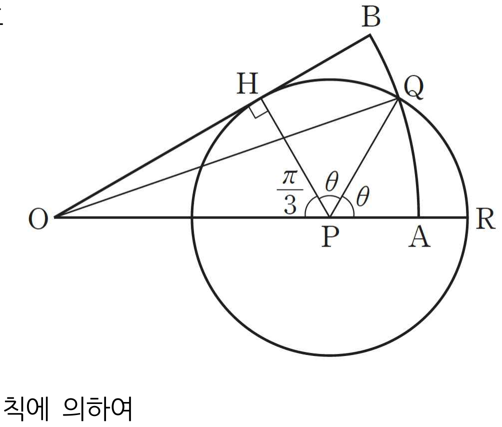
$k>0$이므로 $k=\frac{5+2\sqrt{22}}{3}$, 즉 $\overline{AC}=\frac{5+2\sqrt{22}}{3}$

따라서 $p=\frac{5}{3}$, $q=\frac{2}{3}$이므로 $9pq=10$

14. 정답 ③

$\overline{PH}=a\ (a>0)$이라 하면 $\angle PHO=\frac{\pi}{2}$, $\angle POH=\frac{\pi}{6}$이므로

$=\frac{\overline{PH}}{\sin\frac{\pi}{6}}=2a$



점 Q가 부채꼴 PRH의 호 RH를 이등분하므로

$\angle QPH=\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

라 하면 $\angle QPR=\theta$이고

$\angle OPH=\frac{\pi}{3}$이므로

$\frac{\pi}{3}+2\theta=\pi$에서 $\theta=\frac{\pi}{3}$

삼각형 OPQ에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{OQ}^2=\overline{OP}^2+\overline{PQ}^2-2\times\overline{OP}\times\overline{PQ}\times\cos(\angle OPQ)$

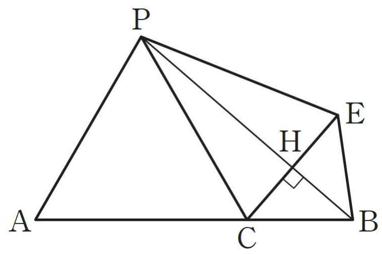
$4^2=(2a)^2+a^2-2\times2a\times a\times\cos\frac{2}{3}\pi$, $7a^2=16$

$a>0$이므로 $a=\frac{4\sqrt{7}}{7}$

따라서 부채꼴 PRH의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{4\sqrt{7}}{7}\right)^2\times\frac{2}{3}\pi=\frac{16}{21}\pi$

15. 정답 ③



선분 CE는 두 원 O_2, O_3의 공통인 현이므로 두 직선 PB, CE는 서로 수직이다.

삼각형 PAC는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로 삼각형 PAB에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{PB}^2=\overline{PA}^2+\overline{AB}^2-2\times\overline{PA}\times\overline{AB}\times\cos(\angle PAB)$

$=2^2+3^2-2\times2\times3\times\frac{1}{2}=7$

$\overline{PB}>0$이므로 $\overline{PB}=\sqrt{7}$

점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 길이가 $\sqrt{3}$이므로 삼각형 PCB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 두 선분 PB, CE의 교점을 H라 하면

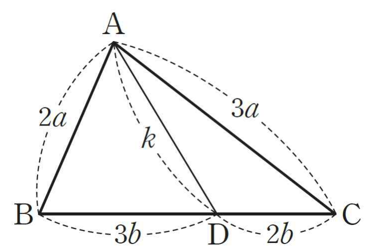
$\frac{1}{2}\times\overline{CH}\times\overline{PB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{CH}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$

$\overline{CE}=2\times\overline{CH}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$

삼각형 EDC의 외접원 O_3의 반지름의 길이가 2이므로 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{CE}}{\sin(\angle EDC)}=2\times2$

따라서 $\sin(\angle EDC)=\frac{\overline{CE}}{4}=\frac{\sqrt{21}}{14}$

16. 정답 ⑤



$\overline{AB}=2a$, $\overline{AC}=3a\ (a>0)$으로 놓고 $\overline{BD}=3b$, $\overline{DC}=2b\ (b>0)$을으로 놓자.

$\overline{AD}=k\ (k>0)$으로 놓으면

$\frac{\cos(\angle ABD)}{\cos(\angle ACD)}=\frac{1}{2}$에서

$2\cos(\angle ABD)=\cos(\angle ACD)$

$2\times\frac{(2a)^2+(3b)^2-k^2}{2\times2a\times3b}=\frac{(3a)^2+(2b)^2-k^2}{2\times3a\times2b}$

$k^2=14b^2-a^2$ …… ㉠

$\cos(\angle BDA)=\cos(\pi-\angle CDA)=-\cos(\angle CDA)$이므로

$\frac{(3b)^2+k^2-(2a)^2}{2\times3b\times k}=\frac{(2b)^2+k^2-(3a)^2}{2\times2b\times k}$

$k^2=7a^2-6b^2$ …… ㉡

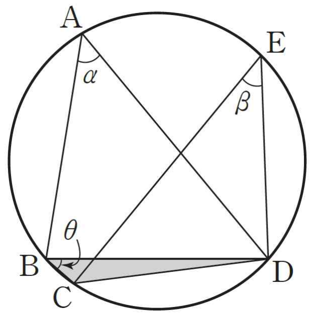
㉠, ㉡에서 $14b^2-a^2=7a^2-6b^2$

즉, $b^2=\frac{2}{5}a^2$이므로 ㉡에 대입하면 $k^2=7a^2-\frac{12}{5}a^2=\frac{23}{5}a^2$

따라서 $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{k}{2a}=\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{23}{5}}=\frac{\sqrt{115}}{10}$

17. **정답** ④

$\angle BAD=\alpha$, $\angle CED=\beta$라 하면



$\sin\alpha=\frac{3}{4}$, $\sin\beta=\frac{\sqrt{7}}{4}$

주어진 원의 반지름의 길이가 4이므로

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BD}}{\sin\alpha}=2\times4$

$\overline{BD}=8\sin\alpha=8\times\frac{3}{4}=6$

삼각형 ECD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{CD}}{\sin\beta}=2\times4$

$\overline{CD}=8\sin\beta=8\times\frac{\sqrt{7}}{4}=2\sqrt{7}$

$\overline{BC}=x$ $(0<x<8)$, $\angle CBD=\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하자.

$\angle CED$와 $\angle CBD$는 모두 호 CD의 원주각이므로 $\theta=\beta$

즉, $\sin\theta=\sin\beta=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}=\frac{3}{4}$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{BD}^2-2\times\overline{BC}\times\overline{BD}\times\cos\theta$

$(2\sqrt{7})^2=x^2+6^2-2\times x\times6\times\frac{3}{4}$

$x^2-9x+8=0$, $(x-1)(x-8)=0$

$0<x<8$이므로 $x=1$

따라서 삼각형 BCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{BD}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times1\times6\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{3\sqrt{7}}{4}$

18. **정답** ②

$\overline{OA}=2$, $\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{OA}=\frac{1}{2}\times2=1$이고 $\angle MOA=\frac{2}{3}\pi$이므로

삼각형 OAM에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AM}^2=\overline{OA}^2+\overline{OM}^2-2\times\overline{OA}\times\overline{OM}\times\cos\frac{2}{3}\pi$

$=2^2+1^2-2\times2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=7$

$\overline{AM}>0$이므로 $\overline{AM}=\sqrt{7}$

$\angle OAM=\angle OPM=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 삼각형 OAM에서

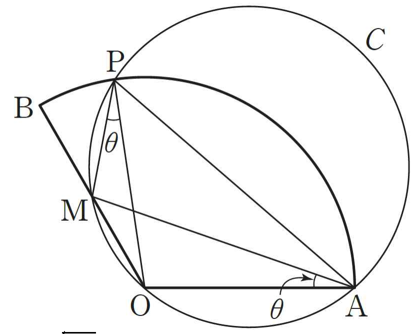
코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{\overline{OA}^2+\overline{AM}^2-\overline{OM}^2}{2\times\overline{OA}\times\overline{AM}}$

$=\frac{2^2+(\sqrt{7})^2-1^2}{2\times2\times\sqrt{7}}$

$=\frac{5}{2\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$

이고



$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{25}{28}}=\frac{\sqrt{21}}{14}$

또한 $\overline{OP}=2$이므로 $\overline{MP}=a(a<\sqrt{7})$이라 하면 삼각형 OPM에서

코사인법칙에 의하여

$\overline{OM}^2=\overline{OP}^2+\overline{MP}^2-2\times\overline{OP}\times\overline{MP}\times\cos\theta$

$1^2=2^2+a^2-2\times2\times a\times\frac{5\sqrt{7}}{14}$, $a^2-\frac{10\sqrt{7}}{7}a+3=0$

$\sqrt{7}a^2-10a+3\sqrt{7}=0$, $(\sqrt{7}a-3)(a-\sqrt{7})=0$

$a<\sqrt{7}$이므로 $a=\frac{3}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{7}$, 즉 $\overline{MP}=\frac{3\sqrt{7}}{7}$

한편, $\angle OAM=\angle OPM$이므로 네 점 O, A, P, M을 모두 지나는 원이 존재한다.

이 원을 C라 하고 원 C의 반지름의 길이를 R이라 하면 삼각형 OAM에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{OM}}{\sin\theta}=2R$,

$R=\frac{\overline{OM}}{2\sin\theta}=\frac{1}{2\times\frac{\sqrt{21}}{14}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$

삼각형 OAP에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{OA}}{\sin(\angle APO)}=2R$

$\sin(\angle APO)=\frac{\overline{OA}}{2R}=\frac{2}{2\times\frac{\sqrt{21}}{3}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$

$\angle APO=\angle AMO$이고 $0<\angle AMO<\frac{\pi}{3}$이므로

$0<\angle APO<\frac{\pi}{3}$

$\cos(\angle APO)=\sqrt{1-\sin^2(\angle APO)}=\sqrt{1-\frac{3}{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$

이때 삼각형 OAP에서 $\overline{OA}=\overline{OP}=2$이므로

$\overline{AP}=2\times\overline{OP}\cos(\angle APO)=2\times2\times\frac{2\sqrt{7}}{7}=\frac{8\sqrt{7}}{7}$

따라서 삼각형 PMA의 둘레의 길이는

$\overline{AM}+\overline{MP}+\overline{AP}=\sqrt{7}+\frac{3\sqrt{7}}{7}+\frac{8\sqrt{7}}{7}=\frac{18\sqrt{7}}{7}$

19. **정답** ①

선분 AB가 지름이고 $\overline{AC}=\overline{BC}$이므로 삼각형 ACB는

$\angle ACB=90^\circ$인 직각이등변삼각형이고

$\overline{AB}=4$에서 $\overline{AC}=\overline{BC}=2\sqrt{2}$

원주각의 성질에 의하여 $\angle ADC=\angle ABC=\frac{\pi}{4}$이고

$\angle \mathrm{BDA}=\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle \mathrm{BDC}=\frac{\pi}{4}$

$\overline{\mathrm{BD}}=x$라 하면 삼각형 CBD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{BD}}^2+\overline{\mathrm{CD}}^2-2\times\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\cos(\angle BDC)$이므로

$(2\sqrt{2})^2=x^2+3^2-2\times x\times 3\times\cos\frac{\pi}{4},\ x^2-3\sqrt{2}x+1=0$

$\overline{\mathrm{BD}}<\overline{\mathrm{BC}}$에서 $0<x<2\sqrt{2}$ 이므로

$x=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{(3\sqrt{2})^2-4}}{2}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2}$

다른 풀이

선분 AB가 지름이고 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$이므로 삼각형 ACB는

$\angle \mathrm{ACB}=90^\circ$인 직각이등변삼각형이고

$\overline{\mathrm{AB}}=4$에서 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{2}$

삼각형 CBD의 외접원의 반지름의 길이가 2이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin(\angle \mathrm{CBD})}=2\times 2$

$\frac{3}{\sin(\angle \mathrm{CBD})}=4,\ \sin(\angle \mathrm{CBD})=\frac{3}{4}$

$\overline{\mathrm{AD}}>\overline{\mathrm{BD}}$에서 $\angle \mathrm{ABD}>\frac{\pi}{4}$이고 직각삼각형 ABC에서

$\angle \mathrm{CBA}=\frac{\pi}{4}$이므로 $\angle \mathrm{CBD}>\frac{\pi}{2}$

$\cos(\angle \mathrm{CBD})<0$이므로

$\cos(\angle \mathrm{CBD})=-\sqrt{1-\sin^2(\angle \mathrm{CBD})}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=-\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\overline{\mathrm{BD}}=x$라 하면 삼각형 CBD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{CD}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{BD}}^2-2\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\cos(\angle CBD)$이므로

$3^2=(2\sqrt{2})^2+x^2-2\times 2\sqrt{2}\times x\times\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right),\ x^2+\sqrt{14}x-1=0$

$x>0$이므로 $x=\frac{-\sqrt{14}+\sqrt{14+4}}{2}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2}$

20. **정답** ②

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\cos(\angle \mathrm{ABC})$

$=3^2+(\sqrt{5})^2-2\times 3\times\sqrt{5}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

$=20$

$\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{5}$

$\sin(\angle \mathrm{ABC})=\sqrt{1-\cos^2(\angle \mathrm{ABC})}=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

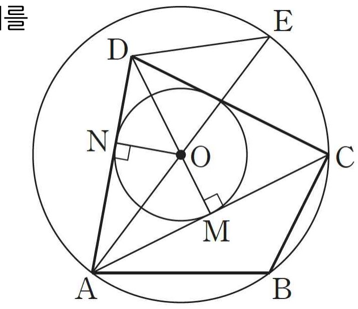
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(\angle \mathrm{ABC})}=2R$

$R=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{2\sin(\angle \mathrm{ABC})}=\frac{2\sqrt{5}}{2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}}=\frac{5}{2}$

점 O는 삼각형 ABC의 외접원의 중심이므로 선분 AC의 수직이등분선 위에 있다.

그러므로 내접원의 중심이 O인 삼각형 ACD는 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{CD}}$인 이등변삼각형이다.



삼각형 ACD의 내접원의 반지름의 길이를 r, 선분 AC의 중점을 M이라 하면 직각삼각형 OAM에서

$\overline{\mathrm{OM}}^2=\overline{\mathrm{AO}}^2-\overline{\mathrm{AM}}^2=R^2-\left(\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{2}\right)^2$

$=\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$

$r=\overline{\mathrm{OM}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

점 O에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 N이라 하면 두 직각삼각형 DAM, DON은 서로 닮은 도형이고 닮음비는

$\overline{\mathrm{AM}}:\overline{\mathrm{ON}}=\sqrt{5}:\frac{\sqrt{5}}{2}=2:1$

$\overline{\mathrm{AD}}=x$라 하면 $\overline{\mathrm{DO}}=\frac{x}{2},\ \overline{\mathrm{DN}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{DM}}$

점 O가 삼각형 ACD의 내접원의 중심이므로

$\overline{\mathrm{AN}}=\overline{\mathrm{AM}},\ \angle \mathrm{DAE}=\angle \mathrm{OAM}$

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AN}}+\overline{\mathrm{DN}}=\overline{\mathrm{AM}}+\frac{1}{2}\overline{\mathrm{DM}}=\overline{\mathrm{AM}}+\frac{1}{2}(\overline{\mathrm{DO}}+\overline{\mathrm{OM}})$에서

$x=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1}{4}x+\frac{5\sqrt{5}}{4}$

$\frac{3}{4}x=\frac{5\sqrt{5}}{4}$

$\overline{\mathrm{AD}}=x=\frac{5\sqrt{5}}{3}$

$\cos(\angle \mathrm{DAE})=\cos(\angle \mathrm{OAM})=\frac{\overline{\mathrm{AM}}}{\overline{\mathrm{AO}}}=\frac{\sqrt{5}}{\frac{5}{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 삼각형 DAE에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{DE}}^2=\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{AE}}^2-2\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{AE}}\times\cos(\angle \mathrm{DAE})$

$=\left(\frac{5\sqrt{5}}{3}\right)^2+5^2-2\times\frac{5\sqrt{5}}{3}\times 5\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{50}{9}$

이므로 $\overline{\mathrm{DE}}=\frac{5\sqrt{2}}{3}$

EBS Ch④ 함수의 극한과 연속

④ 함수의 극한과 연속

TH①. 2024년 수능특강

2024년 수능특강 Lv3

연계 가능

1. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2 & (x<-1) \\ x^2+ax+b & (-1 \le x \le 2) \\ 2 & (x>2) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 두 실수 a, b $(a<b)$에 대하여 $9ab$의 값을 구하시오.

> (가) 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이다.
> (나) 함수 $f(x)$의 최솟값이 -2보다 작다.

2024년 수능특강 Lv3

연계 가능

2. 실수 t와 함수

$$f(x)=\begin{cases} x-3 & (x<-1) \\ (x+1)(x-3) & (x \ge -1) \end{cases}$$

에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 n이라 할 때, 함수 $g(t)$를 다음과 같이 정의한다.

> $n=1$일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 해가 $x=\alpha$이면 $g(t)=\alpha$이다. $n \ge 2$일 때, $g(t)$는 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 모든 실근의 합이다.

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $\lim_{t \to 0-} g(t)=2$

ㄴ. $\lim_{t \to 5} \dfrac{g(-t)+2}{g(t)-4}=6$

ㄷ. 함수 $(|t+2|-2)g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

TH②. 2024년 수능완성

2024년 수능완성

연계 가능

3. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)+g(x)-2}{x}=5$
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여
>
> $\{f(x)+x\}\{g(x)-2\}=x^2\{f(x)+9\}$ 이다.

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)\{g(x)-2\}}{x^2}$ 의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

2024년 수능완성

2025 Trend

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-2x-1}{x} & (x<0)\\ x^2-8x+a & (x\ge 0)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$\lim_{t\to k-}g(t)-\lim_{t\to k+}g(t)>2$$

를 만족시키는 상수 k가 존재하도록 하는 모든 양수 a의 값의 합을 구하시오.

$5.$ 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 세 실수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)=\dfrac{x}{f(x^2+4)}$는 $x=a$에서 불연속이다.

(나) 함수 $h(x)=\dfrac{f(x-4)}{f(x^2)}$는 $x=b$, $x=c$ $(b<c)$에서만 불연속이다.

$\lim_{x\to b}h(x)$의 값이 존재할 때, $f(c)\times\lim_{x\to b}h(x)$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

$6.$ 실수 k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+k & (x<0) \\ -x^2+4x+k & (x\geq 0)\end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보기 |

ㄱ. 함수 $f(x)$가 $x\geq a$에서 감소할 때, 양수 a의 최솟값은 2이다.

ㄴ. $k=-2$일 때, $g(1)=6$

ㄷ. $-4<k<0$인 모든 실수 k와 실수 b에 대하여 $\lim_{t\to b-}g(t)>\lim_{t\to b+}g(t)$를 만족시키는 서로 다른 모든 $g(b)$의 값의 합은 8이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1. 정답 28

풀이

조건 (가)에서 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x=-1$, $x=2$에서 연속이어야 한다.

함수 $|f(x)|$가 $x=-1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to -1-}|f(x)|=\lim_{x\to -1+}|f(x)|=|f(-1)|$ 이어야 한다.

$\lim_{x\to -1-}|f(x)|=\lim_{x\to -1-}|-2|=2$,

$\lim_{x\to -1+}|f(x)|=\lim_{x\to -1+}|x^2+ax+b|=|1-a+b|$,

$|f(-1)|=|1-a+b|$

이므로

$|1-a+b|=2$

$1-a+b=-2$ 또는 $1-a+b=2$

$a-b=3$ 또는 $a-b=-1$

이때 $a<b$이므로 $a-b=-1$ …… ㉠

함수 $|f(x)|$가 $x=2$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 2-}|f(x)|=\lim_{x\to 2+}|f(x)|=|f(2)|$ 이어야 한다.

$\lim_{x\to 2-}|f(x)|=\lim_{x\to 2-}|x^2+ax+b|=|4+2a+b|$,

$\lim_{x\to 2+}|f(x)|=\lim_{x\to 2+}|2|=2$,

$|f(2)|=|4+2a+b|$

이므로

$|4+2a+b|=2$

$4+2a+b=-2$ 또는 $4+2a+b=2$

$2a+b=-6$ 또는 $2a+b=-2$ …… ㉡

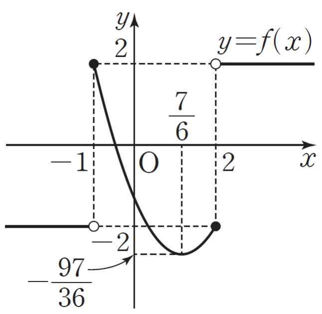
㉠, ㉡에서

(ⅰ) $a-b=-1$, $2a+b=-6$일 때,

연립하여 풀면 $a=-\frac{7}{3}$, $b=-\frac{4}{3}$이므로

$$f(x)=\begin{cases}-2 & (x<-1)\\ x^2-\frac{7}{3}x-\frac{4}{3}=\left(x-\frac{7}{6}\right)^2-\frac{97}{36} & (-1\le x\le 2)\\ 2 & (x>2)\end{cases}$$

이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$의 최솟값이 $-\frac{97}{36}$이고, -2보다 작으므로 조건 (나)를 만족시킨다.

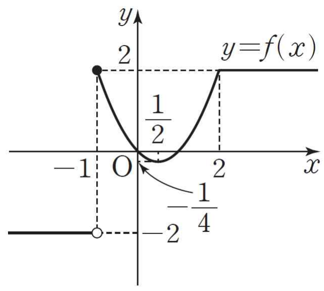
이때 $ab=\left(-\frac{7}{3}\right)\times\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{28}{9}$

(ⅱ) $a-b=-1$, $2a+b=-2$일 때,

연립하여 풀면 $a=-1$, $b=0$이므로

$$f(x)=\begin{cases}-2 & (x<-1)\\ x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4} & (-1\le x\le 2)\\ 2 & (x>2)\end{cases}$$

이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$의 최솟값이 -2이고, 이 값은 -2보다 작지 않으므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $ab=\frac{28}{9}$이므로 $9ab=28$

2. 정답 ④

풀이

$x<-1$일 때, $f(x)=x-3$이고,

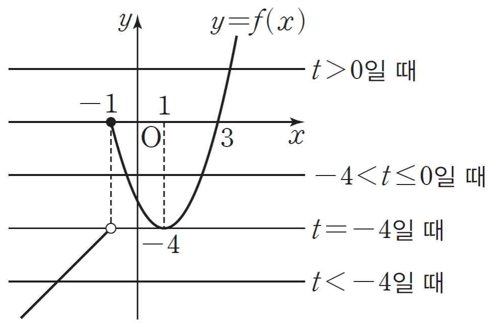
$x\ge -1$일 때,

$f(x)=(x+1)(x-3)$

$=x^2-2x-3$

$=(x-1)^2-4$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(ⅰ) $t<-4$일 때,

방정식 $f(x)=t$의 실근은 두 직선 $y=x-3$ $(x<-1)$과 $y=t$가 만나는 점의 x좌표와 같다.

즉, $x-3=t$에서 $x=t+3$이므로

$g(t)=t+3$

(ⅱ) $t=-4$일 때,

방정식 $f(x)=-4$의 실근은 곡선 $y=x^2-2x-3$ $(x\ge -1)$과 직선 $y=-4$가 만나는 점의 x좌표와 같다.

즉, $x^2-2x-3=-4$, $(x-1)^2=0$에서 $x=1$이므로 $g(t)=1$

(ⅲ) $-4<t\le 0$일 때

방정식 $f(x)=t$의 실근은 곡선 $y=x^2-2x-3$ $(x\ge -1)$과 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표와 같다.

이차방정식 $x^2-2x-3=t$, 즉 $x^2-2x-3-t=0$의 두 실근을 β, γ $(\beta<\gamma)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\beta+\gamma=2$이므로

$g(t)=2$

(ⅳ) $t>0$일 때,

방정식 $f(x)=t$의 실근은 곡선

$y=x^2-2x-3$ $(x\ge -1)$과 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표와

같다.

이차방정식 $x^2-2x-3-t=0$의 실근은

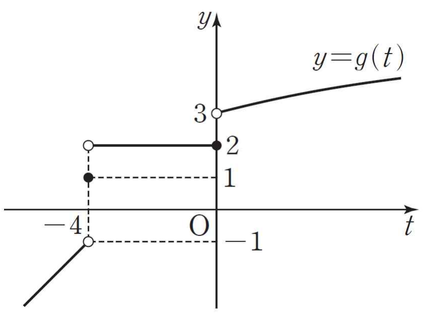
$x=1-\sqrt{t+4}<-1$, $x=1+\sqrt{t+4}>3$이므로

$g(t)=1+\sqrt{t+4}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에 의하여

$$g(t)=\begin{cases} t+3 & (t<-4) \\ 1 & (t=-4) \\ 2 & (-4<t\le 0) \\ 1+\sqrt{t+4} & (t>0) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $\displaystyle\lim_{t\to 0-} g(t)=\lim_{t\to 0-} 2=2$ (참)

ㄴ. $t\to 5$일 때 $-t\to -5$이므로

$g(-t)=-t+3$

$$\lim_{t\to 5}\frac{g(-t)+2}{g(t)-4}=\lim_{t\to 5}\frac{(-t+3)+2}{(1+\sqrt{t+4})-4}$$
$$=\lim_{t\to 5}\frac{-(t-5)}{\sqrt{t+4}-3}$$
$$=\lim_{t\to 5}\frac{-(t-5)(\sqrt{t+4}+3)}{(\sqrt{t+4}-3)(\sqrt{t+4}+3)}$$
$$=\lim_{t\to 5}\frac{-(t-5)(\sqrt{t+4}+3)}{t-5}$$
$$=-\lim_{t\to 5}(\sqrt{t+4}+3)$$
$$=-6 \text{ (거짓)}$$

ㄷ. 함수 $h(t)$를 $h(t)=(|t+2|-2)g(t)$라 하자.

함수 $y=|t+2|-2$는 실수 전체의 집합에서 연속이고, 함수 $y=g(t)$는 $t\neq -4$, $t\neq 0$인 모든 실수에서 연속이므로 함수 $h(t)$는 $t\neq -4$, $t\neq 0$인 모든 실수에서 연속이다.

(ⅰ) $\displaystyle\lim_{t\to -4-} h(t)=\lim_{t\to -4-}(|t+2|-2)g(t)$
$=0\times(-1)=0$,

$\displaystyle\lim_{t\to -4+} h(t)=\lim_{t\to -4+}(|t+2|-2)g(t)$
$=0\times 2=0$,

$h(-4)=0\times 1=0$

이므로

$\displaystyle\lim_{t\to -4-} h(t)=\lim_{t\to -4+} h(t)=h(-4)$

따라서 함수 $h(t)$는 $t=-4$에서 연속이다.

(ⅱ) $\displaystyle\lim_{t\to 0-} h(t)=\lim_{t\to 0-}(|t+2|-2)g(t)$
$=0\times 2=0$,

$\displaystyle\lim_{t\to 0+} h(t)=\lim_{t\to 0+}(|t+2|-2)g(t)$
$=0\times 3=0$,

$h(0)=0\times 2=0$

이므로

$\displaystyle\lim_{t\to 0-} h(t)=\lim_{t\to 0+} h(t)=h(0)$

따라서 함수 $h(t)$는 $t=0$에서 연속이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 함수 $h(t)=(|t+2|-2)g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

3. **정답** ⑤

조건 (가)에서 $x\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\{f(x)+g(x)-2\}=0$에서 $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)+\lim_{x\to 0}g(x)=2$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=a$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}g(x)=b$라 하면 $a+b=2$ …… ㉠

조건 (나)에서 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\{f(x)+x\}\{g(x)-2\}=\lim_{x\to 0}x^2\{f(x)+9\}$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)\times\lim_{x\to 0}\{g(x)-2\}=0$이므로

$a(b-2)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=2$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}g(x)=2$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=c$, $\displaystyle\lim_{c\to 0}\frac{g(x)-2}{x}=d$라 하면 조건 (가)에서

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-2}{x}=5$$

이므로 $c+d=5$ …… ㉢

조건 (나)에서 $x\neq 0$일 때,

$\left\{\dfrac{f(x)}{x}+1\right\}\left\{\dfrac{g(x)-2}{x}\right\}=f(x)+9$ 이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(x)}{x}+1\right\}\left\{\frac{g(x)-2}{x}\right\}=\lim_{x\to 0}\{f(x)+9\}$ 에서

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(x)}{x}+1\right\}\times\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-2}{x}=\lim_{x\to 0}f(x)+9$

$(c+1)d=9$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $c=2$, $d=3$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-2}{x}=3$

따라서

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)\{g(x)-2\}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\times\lim_{x\to 0}g(x)\times\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-2}{x}$$
$$=2\times 2\times 3=12$$

4. **정답** 22

$x<0$일 때, $f(x)=\dfrac{-2x-1}{x}=-\dfrac{1}{x}-2$이므로

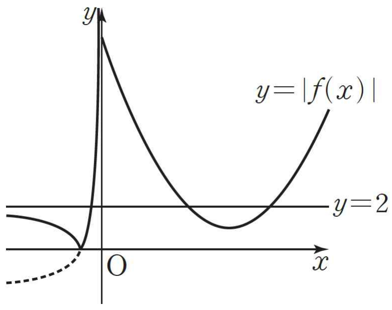
$x<0$에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=2$이다.

$x\ge 0$일 때, $f(x)=x^3-8x+a=(x-4)^2+a-16$이므로

양수 a의 범위를 나누어 함수 $g(t)$를 생각할 수 있다.

(ⅰ) $a-16\ge 0$, 즉 $a\ge 16$인 경우

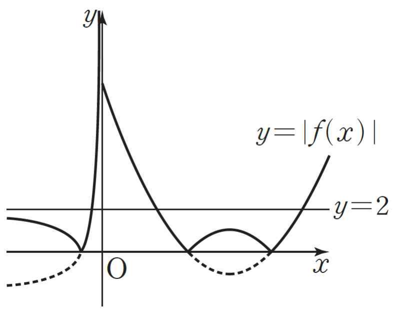
함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



그러므로 $\lim_{t\to k-} g(t) - \lim_{t\to k+} g(g) > 2$를 만족시키는 상수 k가 존재하지 않는다.

(ii) $-2 < a-16 < 0$, 즉 $14 < a < 16$인 경우

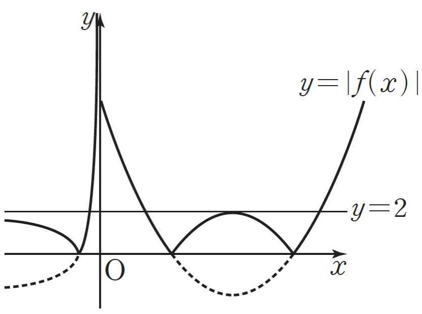
함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



그러므로 $\lim_{t\to k-} g(t) - \lim_{t\to k+} g(t) > 2$를 만족시키는 상수 k가 존재하지 않는다.

(iii) $a-16=-2$, 즉 $a=14$인 경우

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.

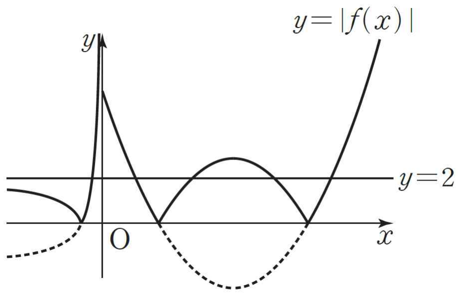


이때 $\lim_{t\to 2-} g(t)=6$, $\lim_{t\to 2+} g(t)=3$이므로

$\lim_{t\to k-} g(t) - \lim_{t\to k+} g(t) > 2$를 만족시키는 상수 $k=2$가 존재한다.

(iv) $-8 < a-16 < -2$, 즉 $8 < a < 14$인 경우

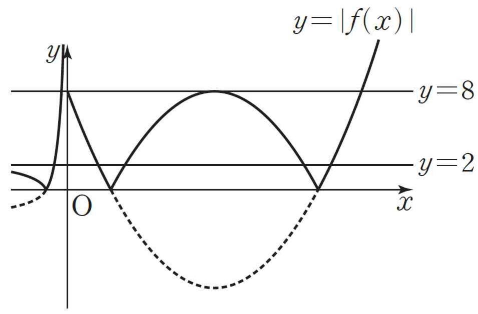
함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



그러므로 $\lim_{t\to k-} g(t) - \lim_{t\to k+} g(t) > 2$를 만족시키는 상수 k가 존재하지 않는다.

(v) $a-16=-8$, 즉 $a=8$인 경우

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.

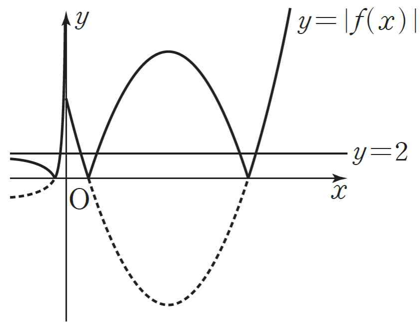


이때, $\lim_{t\to 8-} g(t)=5$, $\lim_{t\to 8+} g(t)=2$이므로

$\lim_{t\to k-} g(t) - \lim_{t\to k+} g(t) > 2$를 만족시키는 상수 $k=8$이 존재한다.

(vi) $-16 < a-16 < -8$, 즉 $0 < a < 8$인 경우

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



그러므로 $\lim_{t\to k-} g(t) - \lim_{t\to k+} g(t) > 2$를 만족시키는 상수 k가 존재하지 않는다.

(i)~(vi)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 상수 k가 존재하도록 하는 모든 양수 a의 값은 8, 14이고 그 합은 22이다.

5. **정답** ②

임의의 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이면 함수 $g(x)$, $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다. 그러므로 $\alpha \le \beta$인 두 상수 α, β에 대하여 함수 $f(x)$를

$f(x)=(x+\alpha)(x+\beta)$라 하면

$$g(x)=\frac{x}{f(x^2+4)}=\frac{x}{(x^2+4+\alpha)(x^2+4+\beta)}$$

이다. 이때 $0<4+\alpha$이면 $0<4+\beta$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x^2+4)>0$이고, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 조건 (가)를 만족시킬 수 없다.

$4+\alpha<0$이면 함수 $g(x)$는 $x=-\sqrt{-\alpha-4}$, $x=\sqrt{-\alpha-4}$에서 불연속이므로 조건 (가)를 만족시킬 수 없다. 그러므로 $4+\alpha=0$, 즉 $\alpha=-4$이어야 하고 $f(x)=(x-4)(x+\beta)$이다.

이때 조건 (나)에서 함수 $h(x)$가 $x=b$, $x=c\,(b<c)$에서만 불연속이고 $h(x)=\dfrac{f(x-4)}{f(x^2)}=\dfrac{(x-8)(x-4+\beta)}{(x+2)(x-2)(x^2+\beta)}$이므로 함수 $h(x)$가 $x=-2$, $x=2$에서만 불연속이려면 $\beta>0$ 또는 $\beta=-4$이어야 한다.

(i) $\beta=-4$인 경우

$h(x)=\dfrac{(x-8)^2}{(x+2)^2(x-2)^2}$이고 $b=-2$, $c=2$이므로

$\lim_{x\to -2} h(x)$의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $\beta>0$인 경우

$h(x)=\dfrac{(x-8)(x-4+\beta)}{(x+2)(x-2)(x^2+\beta)}$이고 $b=-2$, $c=2$이므로

$\lim\limits_{x\to-2}h(x)$의 값이 존재하려면

$\lim\limits_{x\to-2}h(x)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x-8)(x-4+\beta)}{(x+2)(x-2)(x^2+\beta)}$에서 $x\to-2$일 때,

(분모) → 0이므로 (분자) → 0이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to-2}(x-8)(x-4+\beta)=-10(-6+\beta)=0$이므로

$\beta=6$이다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2}h(x)&=\lim_{x\to-2}\frac{(x-8)(x+2)}{(x+2)(x-2)(x^2+6)}\\&=\lim_{x\to-2}\frac{x-8}{(x-2)(x^2+6)}\\&=\frac{-10}{-4\times10}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

이므로 $\lim\limits_{x\to-2}h(x)$의 값이 존재한다.

따라서 $f(x)=(x-4)(x+6)$이므로 $f(c)=f(2)=-16$이고

$f(c)\times\lim\limits_{x\to b}h(x)=-16\times\dfrac{1}{4}=-4$

6. **정답** ②

ㄱ. $x\geq0$일 때, $f(x)=-x^2+4x+k=-(x-2)^2+k+4$

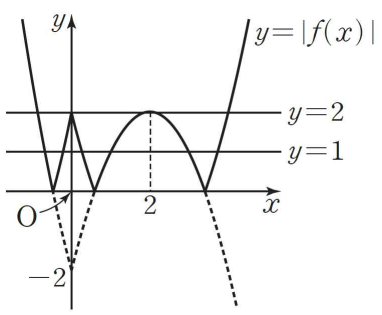
함수 $f(x)$는 $x\geq2$에서 감소하므로 $a\geq2$

따라서 양수 a의 최솟값은 2이다. (참)

ㄴ. $k=-2$일 때

$f(x)=\begin{cases}x^2-4x-2 & (x<0)\\-x^2+4x-2 & (x\geq0)\end{cases}$ 이고 $f(0)=-2$, $f(2)=2$

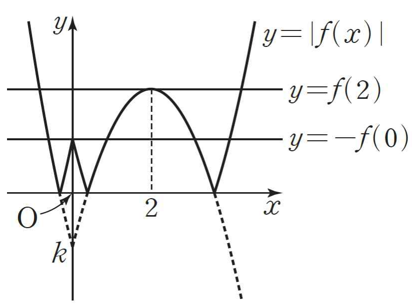
이므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=1$이 만나는 점의 개수가 6이므로 $g(1)=6$ (참)

ㄷ. $-4<k<0$일 때, k의 값의 범위에 따라 함수 $y=|f(x)|$의 그래프를 그리고, 함수 $g(t)$와 $g(b)$의 값을 구해 보자.

(ⅰ) $-2<k<0$일 때



함수 $g(t)$는 다음과 같다.

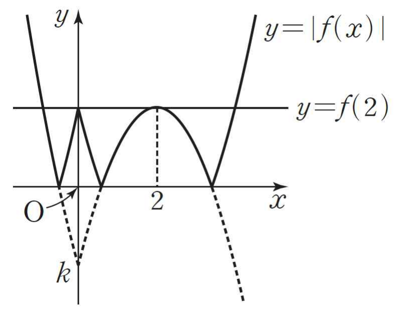
$$g(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\3 & (t=0)\\6 & (0<t<-f(0))\\5 & (t=-f(0))\\4 & (-f(0)<t<f(2))\\3 & (t=f(2))\\2 & (t>f(2))\end{cases}$$

이때 $\lim\limits_{t\to b-}g(t)>\lim\limits_{t\to b+}g(t)$를 만족시키는 b의 값은

$-f(0)$, $f(2)$이므로

$g(b)=g(-f(0))=5$ 또는 $g(b)=g(f(2))=3$

(ⅱ) $k=-2$일 때



따라서 함수 $g(t)$는 다음과 같다.

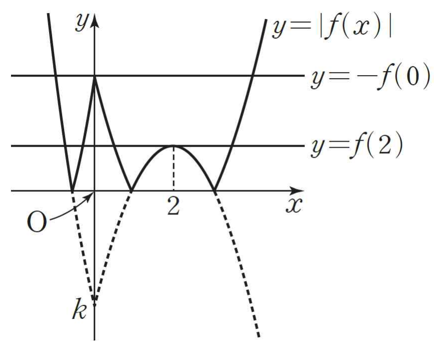
$$g(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\3 & (t=0)\\6 & (0<t<f(2))\\4 & (t=f(2))\\2 & (t>f(2))\end{cases}$$

이때 $\lim\limits_{t\to b-}g(t)>\lim\limits_{t\to b+}g(t)$를 만족시키는 b의 값은

$f(2)$이므로

$g(b)=g(f(2))=4$

(ⅲ) $-4<k<-2$일 때



따라서 함수 $g(t)$는 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\3 & (t=0)\\6 & (0<t<f(2))\\5 & (t=f(2))\\4 & (f(2)<t<-f(0))\\3 & (t=-f(0))\\2 & (t>-f(0))\end{cases}$$

이때 $\lim\limits_{t\to b-}g(t)>\lim\limits_{t\to b+}g(t)$를 만족시키는 b의 값은

$-f(0)$, $f(2)$이므로

$g(b)=g(-f(0))=3$ 또는 $g(b)=g(f(2))=5$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 모든 $g(b)$의 값의 합은 $3+4+5=12$

(거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

⑤ 미분

TH①. 2024년 수능특강

2024년 수능특강 Lv2

연계 가능

1. 함수

$$f(x)=\begin{cases} |x-1| & (x<a) \\ -x^2+bx+b-5 & (x \geq a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 두 상수 a, b에 대하여 $a+b=p+q\sqrt{2}$이다. $|p+q|$의 값을 구하시오. (단, p, q는 정수이다.)

2024년 수능특강 Lv3

연계 가능

2. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} -4x-2 & (x \leq -1) \\ ax^2+bx-1 & (-1<x<2), \\ 2x+c & (x \geq 2) \end{cases}$$

$$g(x)=-x^2+4ax+b-c$$

에 대하여 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\lim_{x \to 1}\dfrac{f(x)g(x)+12}{x-1}$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.)

① -10 ② -8 ③ -6
④ -4 ⑤ -2

연계 가능

3. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 2$

(나) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-2}{x} = 24$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2$는 서로 다른 세 점 A, B, C에서 만나고 점 B는 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점일 때, $f(1)$의 최댓값을 구하시오. (단, 원점 O에 대하여 $\overline{\mathrm{OA}} < \overline{\mathrm{OB}} < \overline{\mathrm{OC}}$이다.)

2024년 수능특강 Lv3

4. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x+16$과 실수 t에 대하여 집합

$$A=\{x \mid f(x)f'(t)(x-t)+f(x)f(t)=0\}$$

일 때, 집합 A의 원소의 개수가 1이 되도록 하는 모든 t의 값의 합은?

① $\frac{11}{2}$　② $\frac{13}{2}$　③ $\frac{15}{2}$　④ $\frac{17}{2}$　⑤ $\frac{19}{2}$

5. 1이 아닌 실수 α와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $|f(x)-f(1)|$은 $x=\alpha$에서만 미분가능하지 않다.
>
> (나) 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$에서 극솟값 0을 갖는다.

실수 t에 대하여 방정식 $f(f(x))=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 $t=\beta$에서만 불연속이다. $\alpha+\beta$의 값은? (단, β는 실수이다.)

① $-\frac{9}{16}$ ② $-\frac{7}{16}$ ③ $-\frac{5}{16}$

④ $-\frac{3}{16}$ ⑤ $-\frac{1}{16}$

2024년 수능특강 Lv3

6. 함수 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $\{f(x)-f(3)\}^2+\{f'(2)\}^2=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.
>
> (나) $0<f(3)<f(2)$

$x \geq k$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x) \geq f(3)$이 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은 p이다. $(3p-1)^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

TH②. 2024년 수능완성

2024년 수능완성

7. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 두 실수 α, β $(\alpha < \beta)$에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$
> (나) $f(\alpha)f(\beta) < 0$, $f(\alpha) + f(\beta) > 0$

방정식 $|f(x)| = |f(k)|$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 실수 k의 개수는 m이고, 이러한 m개의 실수 k의 값을 작은 수부터 차례로 k_1, k_2, k_3, $\cdots$, k_m이라 하자.

$\displaystyle\sum_{i=1}^{m} f(k_i) = nf(\alpha)$일 때, $m+n$의 값을 구하시오.

(단, m, n은 자연수이다.)

2024년 수능완성

8. 두 실수 a, k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = \begin{cases} k(x-a)(x-a+2) & (x < a) \\ |x-a-1| - 1 & (a \leq x \leq a+2) \\ k(x-a-4)(x-a-2) & (x > a+2) \end{cases}$$

라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보기 |

ㄱ. $a = -1$이면 함수 $y = f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

ㄴ. $0 \leq k \leq 1$이면 함수 $f(x)$의 최솟값은 -1이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x = 2$에서만 미분가능하지 않으면 $a + k = \dfrac{1}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 삼차함수 $f(x)=(x+2)(x-1)^2$에 대하여 0이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<0) \\ k-f(-x) & (x>0) \end{cases}$$

이 있다. 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(t,\ g(t))$ $(t\neq 0)$에서의 접선 $y=h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 직선 $y=h(x)$가 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점의 개수가 2 이상일 때, 방정식 $g(x)=h(x)$의 서로 다른 모든 실근의 곱이 음수가 되도록 하는 모든 실수 t의 값의 집합은
> $$\{t\,|\,t\le -p \text{ 또는 } t=p \text{ 또는 } t\ge 1\}\ (0<p<1)$$
> 이다.

$(k\times p)^3$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [4점]

2024년 수능완성 실전편 (22번)

10. 함수 $f(x)=x^4-\frac{8}{3}x^3-2x^2+8x+2$와 상수 k에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=|f(x)-k|$$

이고 두 집합 A, B를

$$A=\left\{x\,\middle|\,\lim_{h\to 0-}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim_{h\to 0+}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=0\right\}$$

$$B=\{g(x)\,|\,x\in A\}$$

라 할 때, $n(A)=7$, $n(B)=3$이다. 집합 B의 모든 원소의 합이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

11. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+2x & (x<-1) \\ -f(x)-2x+a & (-1\leq x<2) \\ f(x)+2x+b & (x\geq 2) \end{cases}$$

라 하면 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. $g(-2)=6$일 때, $g(1)+g(3)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]

2024년 수능완성 실전편 (22번)

12. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x^2}=\frac{1}{2}$

(나) $0<x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_2)-f(x_1)+x_2^2-x_1^2>0$이다.

$f(\sqrt{2})$의 최솟값을 m이라 할 때, $9m^2$의 값을 구하시오. [4점]

1. 정답 10

풀이

(i) $a>1$일 때,

$$f(x)=\begin{cases}-(x-1) & (x<1)\\ x-1 & (1\le x<a)\\ -x^2+bx+b-5 & (x\ge a)\end{cases}$$ 이므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{-(x-1)}{x-1}=-1,$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{x-1}{x-1}=1$$

에서

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않으므로 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다고 할 수 없다.

(ii) $a\le 1$일 때,

$$f(x)=\begin{cases}-(x-1) & (x<a)\\ -x^2+bx+b-5 & (x\ge a)\end{cases}$$ 이므로

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=a$에서 미분가능하면 된다.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하려면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)=f(a)$ 이어야 한다.

이때

$$\lim_{x\to a-}f(x)=-\lim_{x\to a-}(x-1)$$
$$=-(a-1)=-a+1,$$

$$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}(-x^2+bx+b-5)$$
$$=-a^2+ab+b-5,$$

$f(a)=-a^2+ab+b-5$

이므로

$-a+1=-a^2+ab+b-5$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하려면

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$ 이어야 하고,

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a-}\frac{-(x-1)-(-a^2+ab+b-5)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a-}\frac{-(x-1)-(-a+1)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a-}\frac{-(x-a)}{x-a}=-1,$$

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a+}\frac{(-x^2+bx+b-5)-(-a^2+ab+b-5)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a+}\frac{-(x-a)(x+a-b)}{x-a}$$
$$=-\lim_{x\to a+}(x+a-b)=-2a+b$$

이므로

$-1=-2a+b$에서

$b=2a-1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$-a+1=-a^2+a(2a-1)+(2a-1)-5$

$a^2+2a-7=0$

이때 $a\le 1$이므로

$a=-1-\sqrt{1^2-1\times(-7)}=-1-2\sqrt{2}$

이고, ㉡에서

$b=2(-1-2\sqrt{2})-1=-3-4\sqrt{2}$

그러므로

$a+b=(-1-2\sqrt{2})+(-3-4\sqrt{2})$
$=-4-6\sqrt{2}$

따라서 $p=-4$, $q=-6$이므로

$|p+q|=|(-4)+(-6)|=10$

2. 정답 ④

풀이

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

함수 $f(x)$가 $x=-1$과 $x=2$에서 미분가능하다.

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능할 때

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1+}f(x)=f(-1)$$

이어야 한다.

$$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}(-4x-2)=2,$$

$$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}(ax^2+bx-1)=a-b-1,$$

$f(-1)=2$

이므로

$a-b-1=2$

$b=a-3$ …… ㉠

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

이어야 한다.

$$\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1-}\frac{(-4x-2)-2}{x-(-1)}$$
$$=\lim_{x\to-1-}\frac{-4(x+1)}{x+1}$$
$$=-4$$

$$\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1+}\frac{(ax^2+bx-1)-2}{x-(-1)}$$
$$=\lim_{x\to-1+}\frac{ax^2+bx-3}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1+}\frac{ax^2+(a-3)x-3}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1+}\frac{(x+1)(ax-3)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1+}(ax-3)$$
$$=-a-3$$
이므로 $-4=-a-3$, 즉 $a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$b=1-3=-2$

또 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능할 때, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)=f(2)$$

이어야 한다.

$$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}(x^2-2x-1)=-1,$$
$$\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2+}(2x+c)=4+c,$$
$$f(2)=4+c$$

이므로 $-1=4+c$, 즉 $c=-5$

이때

$$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{(x^2-2x-1)-(-1)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2-}\frac{x(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2-}x=2,$$
$$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{(2x-5)-(-1)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2+}\frac{2(x-2)}{x-2}=2$$

이므로

$$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

$$f(x)=\begin{cases}-4x-2 & (x\le -1)\\ x^2-2x-1 & (-1<x<2),\\ 2x-5 & (x\ge 2)\end{cases}$$

$$g(x)=-x^2+4x+3$$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)+12}{x-1}$에서

$h(x)=f(x)g(x)$라 하면

$h(1)=f(1)g(1)=(-2)\times 6=-12$

이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)+12}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}$$
$$=h'(1)$$

이때

$$f'(x)=\begin{cases}-4 & (x\le -1)\\ 2x-2 & (-1<x<2),\\ 2 & (x\ge 2)\end{cases}$$

$$g'(x)=-2x+4$$

이고 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$$h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$$
$$=0\times 6+(-2)\times 2=-4$$

따라서

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)+12}{x-1}=h'(1)=-4$$

3. **정답** 44

풀이

조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=2$이므로 다항함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 삼차함수이다.

조건 (나)의

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}=24 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

에서 $x\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\{f(x)-2\}=0$에서 다항함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$$\lim_{x\to 0}\{f(x)-2\}=f(0)-2=0,\ f(0)=2$$

이때 ㉠에서 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=24$이므로

$f'(0)=24$

한편, $f(0)=2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(0,\ 2)$를 지난다.

또 점 $(0,\ 2)$는 직선 $y=2$ 위의 점이므로 세 점 A, B, C 중 한 점의 좌표가 $(0,\ 2)$이다. 원점 O에서 직선 $y=2$ 위의 점 중 점 $(0,\ 2)$까지의 거리가 최소이고 $\overline{OA}<\overline{OB}<\overline{OC}$이므로 점 A의 좌표는 $(0,\ 2)$이다.

두 점 B, C의 x좌표를 각각 b, c $(0<|b|<|c|)$라 하면

점 B가 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$c=3b$

이때 $f(x)-2=2x(x-b)(x-3b)$이므로

$f(x)=2x(x-b)(x-3b)+2$

$f'(x)=2(x-b)(x-3b)+2x(x-3b)+2x(x-b)$

$f'(0)=6b^2=24$에서

$b^2=4$

$b=-2$ 또는 $b=2$

(ⅰ) $b=-2$일 때,

$f(x)=2x(x+2)(x+6)+2$

$f(1)=2\times 1\times 3\times 7+2=44$

(ⅱ) $b=2$일 때,

$f(x)=2x(x-2)(x-6)+2$

$f(1)=2\times 1\times(-1)\times(-5)+2=12$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(1)$의 최댓값은 44이다.

4. **정답** ②

풀이

$f(x)=x^3-6x^2+9x+16$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	20	↘	16	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 20을 갖고, $x=3$에서 극솟값 16을 갖는다.

한편, $f(x)=(x+1)(x^2-7x+16)$이고

모든 실수 x에 대하여

$x^2-7x+16=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$이므로

$f(x)=0$에서 $x=-1$

집합 A의 $f(x)f'(t)(x-t)+f(x)f(t)=0$ 에서

$f(x)\{f'(t)(x-t)+f(t)\}=0$

$f(x)=0$ 또는 $f'(t)(x-t)+f(t)=0$

이때 $g(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$라 하면 함수 $y=g(x)$의 그래프는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, f(t))$에서의 접선이다. 집합 A의 원소의 개수가 1이려면 방정식 $f(x)g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 1이어야 한다.

즉, 접선 $y=g(x)$가 x축에 평행하거나 점 $(-1, 0)$을 지나야 한다.

$t=1$ 또는 $t=3$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, f(t))$에서의 접선 $y=g(x)$는 x축에 평행하다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3-6t^2+9t+16)=(3t^2-12t+9)(x-t)$

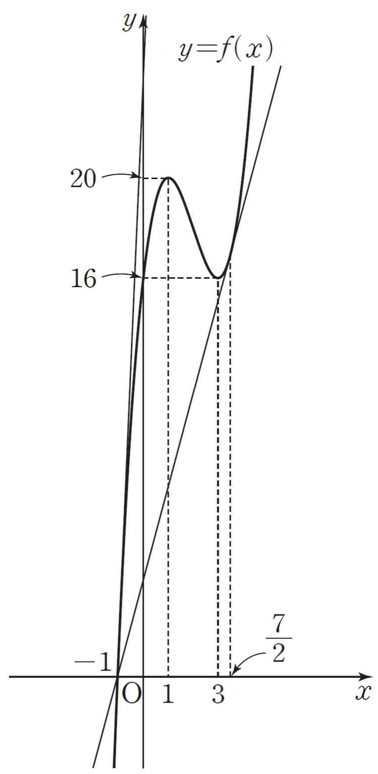
이 접선이 점 $(-1, 0)$을 지날 때,

$0-(t^3-6t^2+9t+16)=(3t^2-12t+9)(-1-t)$

$(t+1)^2(2t-7)=0$

$t=-1$ 또는 $t=\frac{7}{2}$

즉, $t=-1$ 또는 $t=\frac{7}{2}$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, f(t))$에서의 접선 $y=g(x)$는 점 $(-1, 0)$을 지난다.



따라서 집합 A의 원소의 개수가 1이 되도록 하는 모든 t의 값의 합은

$-1+1+3+\frac{7}{2}=\frac{13}{2}$

5. **정답** ③

풀이

사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고, 조건 (가)에서 함수 $|f(x)-f(1)|$은 $x=\alpha$ $(\alpha\neq 1)$에서만 미분가능하지 않으므로

$f(x)-f(1)=(x-1)^3(x-\alpha)$

로 놓을 수 있다.

즉, $f(x)=(x-1)^3(x-\alpha)+f(1)$

$\quad=x^4-(\alpha+3)x^3+3(\alpha+1)x^2-(3\alpha+1)x+\alpha+f(1)$

$f'(x)=4x^3-3(\alpha+3)x^2+6(\alpha+1)x-(3\alpha+1)$

$\quad=(x-1)^2(4x-3\alpha-1)$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$가 $x=-\frac{1}{2}$에서 극값을 가지므로

$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2(-2-3\alpha-1)=0$에서

$\alpha=-1$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 극솟값이 0이므로

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}-1\right)^3\left(-\frac{1}{2}+1\right)+f(1)=0$

$f(1)=\frac{27}{16}$

그러므로 $f(x)=(x-1)^3(x+1)+\frac{27}{16}$

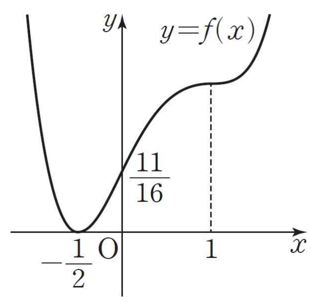
한편, $f'(x)=2(x-1)^2(2x+1)=0$에서

$x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗	$\frac{27}{16}$	↗

$f(0)=\frac{11}{16}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(f(x))=t$에서

$f(x)=X$ $(X\geq 0)$이라 하면

$f(X)=t$

(ⅰ) $t<\frac{11}{16}$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$는 만나지 않거나 만나는 경우에도 교점의 x좌표의 값이 0보다 작으므로 방정식 $f(X)=t$의 해는 없다. 즉, $g(t)=0$이다.

(ⅱ) $t=\frac{11}{16}$일 때,

$f(X)=\frac{11}{16}$에서 $X=0$

즉, $f(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$이므로

$g\left(\frac{11}{16}\right)=1$

(ⅲ) $t>\frac{11}{16}$일 때,

제1사분면에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$는 오직 한 점에서 만나므로 방정식 $f(X)=t$를 만족시키는 실수 X의 값은 1개 존재한다.

방정식 $f(X)=t$의 실근을 p $(p>0)$이라 하면 $X=p$에서

$f(x)=p$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=p$ $(p>0)$은 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=p$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

즉, $g(t)=2$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$$g(t)=\begin{cases}0 & \left(t<\frac{11}{16}\right)\\ 1 & \left(t=\frac{11}{16}\right)\\ 2 & \left(t>\frac{11}{16}\right)\end{cases}$$

함수 $g(t)$는 $t=\frac{11}{16}$에서만 불연속이므로

$\beta=\frac{11}{16}$

따라서 $\alpha+\beta=-1+\frac{11}{16}=-\frac{5}{16}$

6. **정답** 10

풀이

조건 (가)에서

$\{f(x)-f(3)\}^2+\{f'(2)\}^2=0$

이므로

$f(x)-f(3)=0$, $f'(2)=0$

방정식 $\{f(x)-f(3)\}^2+\{f'(2)\}^2=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 방정식 $f(x)-f(3)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

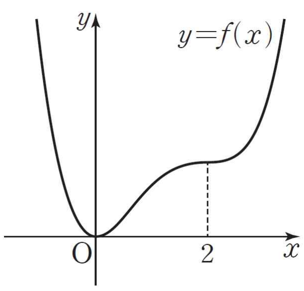
한편, $f(x)=x^4+ax^3+bx^2$에서 $f(0)=0$

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx=x(4x^2+3ax+2b)$에서

$f'(0)=0$

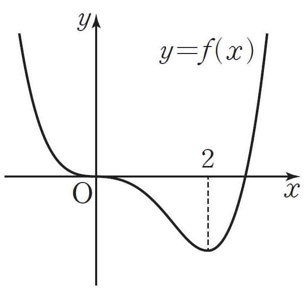
(ⅰ) 함수 $f(x)$가 $x=0$에서만 극값을 갖는 경우

이때 $f(2)<f(3)$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

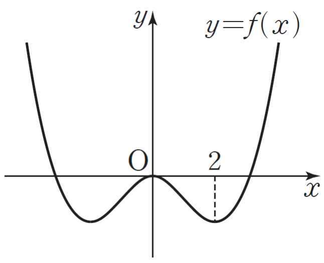


(ⅱ) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서만 극값을 갖는 경우

이때 $f(2)<f(3)$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



(ⅲ) 함수 $f(x)$가 $x=0$, $x=2$에서 모두 극값을 갖는 경우 $f(0)=0$이고 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 가지면 $f(2)<0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



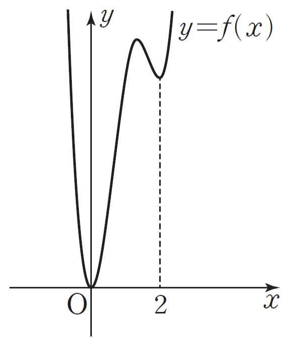
따라서 함수 $f(x)$가 $x=0$, $x=2$에서 모두 극값을 갖는 경우에는 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

(a) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값을 갖는 경우

이때 $f(2)<f(3)$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(b) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 갖는 경우

조건 (나)에서 $f(3)>0$이고 방정식 $f(x)-f(3)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이려면 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 가져야 한다.



즉,

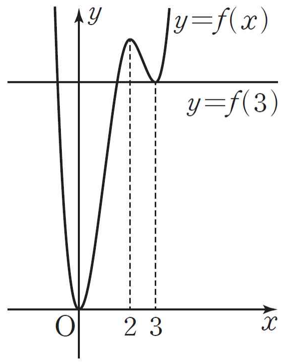
$f'(0)=f'(2)=f'(3)=0$이므로

이차방정식 $4x^2+3ax+2b=0$의 두 근이 2, 3이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$2+3=-\frac{3a}{4}$, $2\times3=\frac{2b}{4}$

즉, $a=-\frac{20}{3}$, $b=12$



이때 $f(x)=x^4-\frac{20}{3}x^3+12x^2$이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $f(x)=x^4-\frac{20}{3}x^3+12x^2$이므로

$f(3)=9$

$f(x)=9$에서 $x^4-\frac{20}{3}x^3+12x^2=9$

$3x^4-20x^3+36x^2-27=0$

$(x-3)^2(3x^2-2x-3)=0$

$x=3$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{10}}{3}$

$x\geq k$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq f(3)$이 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은 $\frac{1+\sqrt{10}}{3}$이다.

따라서 $p=\frac{1+\sqrt{10}}{3}$이므로

$(3p-1)^2=\left(3\times\frac{1+\sqrt{10}}{3}-1\right)^2=10$

7. **정답** 7

조건 (가)에서 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $\alpha<\beta$인 두 실수 α, β에 대하여 $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극대, $x=\beta$에서 극소이다.

조건 (나)에서

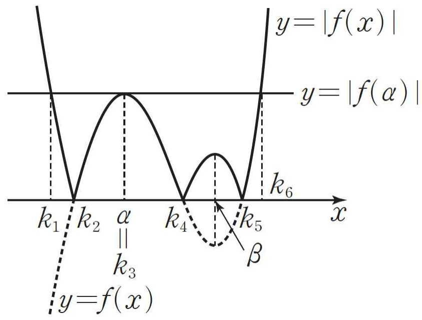
$f(\alpha)f(\beta)<0$이므로

$f(\alpha)>0$, $f(\beta)<0$이고,

$f(\alpha)+f(\beta)>0$이므로

$|f(\alpha)|>|f(\beta)|$이다.

그러므로 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $|f(x)|=|f(k)|$의 서로 다른 실근의 개수가 3이려면 함수 $y=|f(x)|$의 그래프가 직선 $y=|f(k)|$와 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로 $|f(k)|=0$ 또는 $|f(k)|=|f(\alpha)|$이어야 한다.

따라서 k_1, k_2, k_3, $\cdots$, k_m은 함수 $y=|f(x)|$의 그래프가 직선 $y=0$ 또는 직선 $y=|f(\alpha)|$와 만나는 점들이 x좌표이므로 $m=6$이다.

$k_1<k_2<k_3<\cdots<k_6$이므로 $\alpha=k_3$

$|f(k_1)|=|f(k_3)|=|f(k_6)|=|f(\alpha)|$

$|f(k_2)|=|f(k_4)|=|f(k_5)|=0$

이때 $f(k_1)=-f(\alpha)$, $f(k_3)=f(k_6)=f(\alpha)$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}f(k_1)=\sum_{i=1}^{6}f(k_1)\\&=f(k_1)+f(k_2)+f(k_3)+f(k_4)+f(k_5)+f(k_6)\\&=-f(\alpha)+0+f(\alpha)+0+0+f(\alpha)=f(\alpha)\end{aligned}$$

따라서 $m=6$, $n=1$이므로

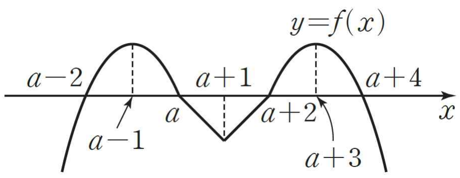
$m+n=6+1=7$

8. 정답 ⑤

함수 $y=k(x-a-4)(x-a-2)$의 그래프는 함수 $y=k(x-a)(x-a+2)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

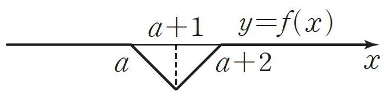
또한 $|x-a-1|-1=\begin{cases}-x+a & (x<a+1)\\ x-a-2 & (x\geq a+1)\end{cases}$이므로 실수 k의 값에 따라 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

(ⅰ) $k<0$일 때



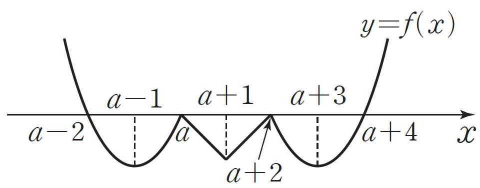
[그림 1]

(ⅱ) $k=0$일 때



[그림 2]

(ⅲ) $k>0$일 때



[그림 3]

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 k의 값에 관계없이 항상 직선 $x=a+1$에 대하여 대칭임을 알 수 있다.

ㄱ. $a=-1$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=0$, 즉 y축에 대하여 대칭이다. (참)

ㄴ. $f(a+1)=-1$이므로

$k=0$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a+1$에서 최솟값 $f(a+1)=-1$을 갖는다.

$0<k\leq 1$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 [그림 3]과 같다.

이때 $f(a-1)=k\times(-1)\times1=-k$

이므로 $-1\leq f(a-1)=-k<0$

따라서 $0\leq k\leq 1$이면 함수 $f(x)$의 최솟값은 -1이다. (참)

ㄷ. $k\geq 0$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$, $x=a+1$, $x=a+2$에서 미분가능하지 않으므로 함수 $f(x)$가 $x=2$에서만 미분가능하지 않으려면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 [그림 1]과 같아야 한다. 즉, $k<0$이고 함수 $f(x)$는 $x=a+1$에서만 미분가능하지 않고, $x=a$, $x=a+2$에서 미분가능하여야 한다.

이때 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하지 않으므로

$a+1=2$에서 $a=1$

함수 $f(x)$가 $x=a$, 즉 $x=1$에서 미분가능하려면

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

이어야 한다.

$f(1)=0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to1-}\frac{k(x-1)(x+1)}{x-1}\\&=k\lim_{x\to1-}(x+1)=2k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to1+}\frac{|x-2|-1}{x-1}\\&=\lim_{x\to1+}\frac{-(x-1)}{x-1}=-1\end{aligned}$$

$2k=-1$에서 $k=-\frac{1}{2}$

이때 $f(3)=0$이므로 $a=1$, $k=-\frac{1}{2}$이면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}&=\lim_{x\to3-}\frac{|x-2|-1}{x-3}\\&=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{x-3}=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}&=\lim_{x\to3+2}\frac{-\frac{1}{2}(x-3)(x-5)}{x-3}\\&=-\frac{1}{2}\lim_{x\to3+}(x-5)=-\frac{1}{2}\times(-2)=1\end{aligned}$$

즉,

$$\lim_{x\to3-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=a+2$, 즉 $x=3$에서도 미분가능하다.

따라서 $a+k=1+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

9. 정답 108

함수 $y=k-f(-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프이다.

$f(x)=(x+2)(x-1)^2$에서

$f'(x)=(x-1)^2+2(x+2)(x-1)=3(x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

이때 $x=-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $f(-1)=4$를 갖고, 함수 $y=k-f(-x)$는 $x=1$에서 극솟값 $k-4$를 갖는다.

문제의 조건을 만족시키려면 그림과 같이 $k-4=f(0)=2$, 즉 $k=6$이어야 한다.

이때 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(-p,\ f(-p))$에서의 접선이 곡선

$y=6-f(-x)$ 위의 점

$(p,\ 6-f(-p))$에서 접한다.

두 점 $(-p,\ f(-p))$,

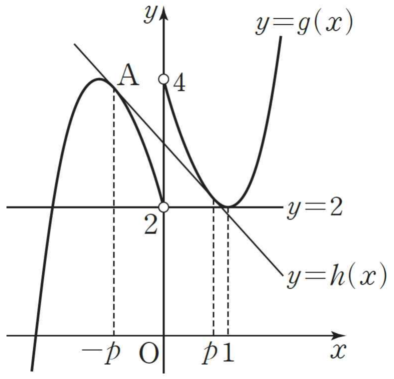
$(p,\ 6-f(-p))$를 지나는 직선의

기울기가 $f'(-p)$이므로

$f'(-p)=\dfrac{6-f(-p)-f(-p)}{p-(-p)}$

$pf'(-p)=3-f(-p)$

$\cdots\cdots$ ㉠



$f(x)=x^3-3x+2$, $f'(x)=3x^2-3$이므로 ㉠에서

$p(3p^2-3)=3-(-p^3+3p+2)$, $2p^3=1$, $p=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

따라서 $(k\times p)^3=\left(\dfrac{6}{\sqrt[3]{2}}\right)^3=\dfrac{216}{2}=108$

10. 정답 35

$f(x)=x^4-\dfrac{8}{3}x^3-2x^2+8x+2$에서

$f(x)=4x^3-8x^2-4x+8=4(x+1)(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

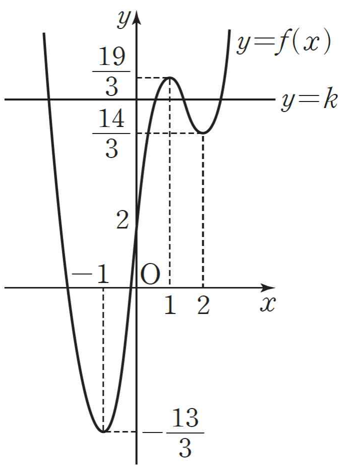
$f(-1)=1+\dfrac{8}{3}-2-8+2=-\dfrac{13}{3}$

$f(1)=1-\dfrac{8}{3}-2+8+2=\dfrac{19}{3}$

$f(2)=16-\dfrac{64}{3}-8+16+2=\dfrac{14}{3}$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는

그림과 같다.



한편, 함수 $y=g(x)$, 즉

$y=|f(x)-k|$의 그래프는 함수

$y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로

$-k$만큼 평행이동한 그래프의 x축의 아래 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

이때 방정식 $f'(x)=0$의 근이 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$이므로

함수 $g(x)$의 $x=a$에서의 미분계수가 0인 x의 값은 $-1,\ 1,\ 2$뿐이다.

또한 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축이 점 $(t,\ g(t))$에서 접하지 않고 만난다고 하면 함수 $g(x)$는 $x=t$에서 미분가능하지 않고

$\lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{g(t+h)-g(t)}{h}=-\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{g(t+h)-g(t)}{h}$

집합$A=\left\{x\,\middle|\,\lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=0\right\}$

의 원소 α에 대하여 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 미분가능하면

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}+\lim_{h\to 0+}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}=g'(\alpha)+g'(\alpha)$$

$$=2g'(\alpha)=0$$

$g'(\alpha)=0$이므로 $-1\in A,\ 1\in A,\ 2\in A$

함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 미분가능하지 않으면

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}+\lim_{h\to 0+}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}=0$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}=-\lim_{h\to 0+}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}$$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축이 접하지 않고 만나는 점의 x좌표는 집합 A의 원소이다.

이때 $n(A)=7$이려면 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축이 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로 $\dfrac{14}{3}<k<\dfrac{19}{3}$이어야 한다.

그림과 같이 $\dfrac{14}{3}<k<\dfrac{19}{3}$일 때

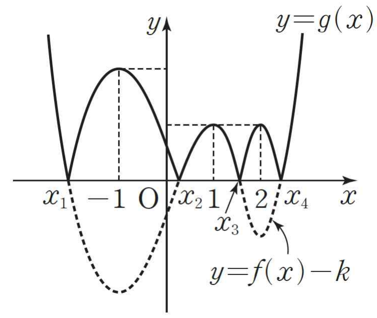
함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축이

만나는 네 점의 x좌표를

$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$

$(x_1<-1<x_2<1<x_3<2<x_4)$

라 하면



$A=\{x_1,\ -1,\ x_2,\ 1,\ x_3,\ 2,\ x_4\}$

$g(x_1)=g(x_2)=g(x_3)=g(x_4)=0$이므로 집합 $B=\{g(x)|x\in A\}$에 대하여 $n(B)=3$이려면 세 함숫값 $g(-1),\ g(1),\ g(2)$ 중 두 함숫값이 서로 같아야 한다.

이때 $\dfrac{14}{3}<k<\dfrac{19}{3}$이므로 세 함숫값 $g(-1),\ g(1),\ g(2)$ 중 두 함숫값이 서로 같은 경우는 $g(-1)\neq g(1)=g(2)$일 때뿐이고, 이 경우에 집합 B는 $B=\{g(x_1),\ g(-1),\ g(1)\}$이다.

$g(1)=|f(1)-k|=\left|\dfrac{19}{3}-k\right|=\dfrac{19}{3}-k,$

$g(2)=|f(2)-k|=\left|\dfrac{14}{3}-k\right|=k-\dfrac{14}{3}$

이므로 $g(1)=g(2)$에서

$\dfrac{19}{3}-k=k-\dfrac{14}{3}$, $2k=11$, $k=\dfrac{11}{2}$

그러므로 $g(x)=|f(x)-k|=\left|f(x)-\dfrac{11}{2}\right|$이고

$g(-1)=\left|f(-1)-\dfrac{11}{2}\right|=\left|-\dfrac{13}{3}-\dfrac{11}{2}\right|=\dfrac{59}{6}$

$g(1)=\left|f(1)-\dfrac{11}{2}\right|=\left|\dfrac{19}{3}-\dfrac{11}{2}\right|=\dfrac{5}{6}$

즉, $B=\left\{0,\ \dfrac{5}{6},\ \dfrac{59}{6}\right\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합은

$0+\dfrac{5}{6}+\dfrac{59}{6}=\dfrac{32}{3}$

따라서 $p=3,\ q=32$이므로

$p+q=3+32=35$

11. 정답 52

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to -1-}g(x)=\lim\limits_{x\to -1+}g(x)=g(-1)$에서

$f(-1)-2=-f(-1)+2+a$

$f(-1)=\dfrac{a+4}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\lim\limits_{x\to 2-}g(x)=\lim\limits_{x\to 2+}g(x)=g(2)$에서

$-f(2)-4+a=f(2)+4+b$

$f(2)=\dfrac{a-b-8}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉡

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하다.

$\displaystyle\lim_{x\to -1-}\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}$

$=\displaystyle\lim_{x\to -1-}\frac{f(x)+2x-\{f(-1)-2\}}{x+1}$

$=f'(-1)+2$

$\displaystyle\lim_{x\to -1+}\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}$

$=\displaystyle\lim_{x\to -1+}\frac{-f(x)-2x+a-\{-f(-1)+2+a\}}{x+1}$

$=-f'(-1)-2$

즉, $f'(-1)+2=-f'(-1)-2$이므로

$f'(-1)=-2$ $\cdots\cdots$ ㉢

또한 함수 $g(x)$는 $x=2$에서도 미분가능하다.

$\displaystyle\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$

$=\displaystyle\lim_{x\to 2-}\frac{-f(x)-2x+a-\{-f(2)-4+a\}}{x-2}$

$=-f'(2)-2$

$\displaystyle\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$

$=\displaystyle\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)+2x+b-\{f(2)+4+b\}}{x-2}$

$=f'(2)+2$

즉, $-f'(2)-2=f'(2)+2$

$f'(2)=-2$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣에 의하여

$f'(x)+2=3(x+1)(x-2)=3x^2-3x-6$

즉, $f'(x)=3x^2-3x-8$이므로

$f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-8x+C$ (단, C는 적분상수)

$g(-2)=f(-2)-4=-8-6+16+C-4=6$에서

$C=8$이므로

$f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-8x+8$

$f(-1)=-1-\dfrac{3}{2}+8+8=\dfrac{27}{2}$이고 ㉠에서 $f(-1)=\dfrac{a+4}{2}$이므로

$\dfrac{a+4}{2}=\dfrac{27}{2}$에서 $a=23$

$f(2)=8-6-16+8=-6$이고 ㉡에서 $f(2)=\dfrac{a-b-8}{2}$이므로

$\dfrac{a-b-8}{2}=-6$에서 $a-b=-4$, $23-b=-4$

$b=27$

따라서 $g(x)=\begin{cases} f(x)+2x & (x<-1) \\ -f(x)-2x+23 & (-1\le x<2) \\ f(x)+2x+27 & (x\ge 2)\end{cases}$이므로

$g(1)=-f(1)-2+23=-\left(-\dfrac{1}{2}\right)+21=\dfrac{43}{2}$

$g(3)=f(3)+6+27=-\dfrac{5}{2}+33=\dfrac{61}{2}$

그러므로 $g(1)+g(3)=\dfrac{43}{2}+\dfrac{61}{2}=52$

12. 정답 16

$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ (a, b, c, d, e는 상수, $a\neq 0$)이라 하면 조건 (가)에서 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4}=\frac{1}{2}$이므로 $a=\dfrac{1}{2}$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x^2}=\frac{1}{2}$에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$이므로 $e=0$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^4+bx^3+cx^2+dx}{2x^2}$

$=\dfrac{1}{2}\times\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}x^2+bx+c+\frac{d}{x}\right)=\frac{1}{2}$

이므로 $c=1$, $d=0$

그러므로 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^4+bx^3+x^2$이다.

조건 (나)에서 $0<x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)+x_1^2<f(x_2)+x_2^2$이므로 $g(x)=f(x)+x^2$이라 하면

함수 $g(x)$는 열린구간 $(0,\ \infty)$에서 증가하는 함수이다.

함수 $g(x)$는 열린구간 $(0,\ \infty)$에서 증가하기 위한 필요조건은 $x>0$일 때, $g'(x)\ge 0$이다.

$g'(x)=f'(x)+2x=2x^3+3bx^2+2x+2x=x(2x^2+3bx+4)$

에서 $x>0$이므로 $2x^2+3bx+4\ge 0$

$h(x)=2x^2+3bx+4$라 하면 $x>0$일 때 이차부등식 $h(x)\ge 0$이 성립하기 위해서는 $x>0$일 때 이차함수 $y=h(x)$의 그래프가 x축과 접하거나 x축보다 위쪽에 있어야 한다.

(ⅰ) $b>0$일 때

이차함수 $y=h(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-\dfrac{3}{4}b<0$이고

$h(0)=4>0$이므로 $x>0$일 때 $h(x)>0$이 성립한다.

(ⅱ) $b<0$일 때

이차함수 $y=h(x)$의 그래프의 축의 방정식은

$x=-\dfrac{3}{4}b>0$이므로 $x>0$일 때 함수 $h(x)$의 최솟값이 0보다 크거나 같아야 한다.

즉, $h\left(-\dfrac{3}{4}b\right)=4-\dfrac{9}{8}b^2\ge 0$에서 $b^2\le\dfrac{32}{9}$이므로

$-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\le b<0$ 이때 $-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}<b<0$이면 함수 $h(x)$의 최솟값이 0보다 크므로 $x>0$일 때 $h(x)>0$이다. 또한

$b=-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$이면 $x=\sqrt{2}$에서만 $h(x)=0$이고, $x=\sqrt{2}$를 제외한 모든 실수 x에서 $h(x)>0$이다.

(ⅲ) $b=0$일 때

$h(x)=2x^2+4$이므로 $x>0$일 때 $h(x)>0$이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $b=-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$일 때 $x=\sqrt{2}$에서만

$g'(x)=0$이고 $x=\sqrt{2}$를 제외한 모든 양의 실수 x에서 $g'(x)>0$이므로 $x>0$일 때 함수 $g(x)$가 증가한다. 그러므로 함수 $g(x)$가 $x>0$일 때 증가하기 위한 필요충분조건은 $b\geq-\frac{4\sqrt{2}}{3}$이다.

$f(\sqrt{2})=4+2\sqrt{2}b\geq 4+2\sqrt{2}\times\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)=-\frac{4}{3}$

따라서 $f(\sqrt{2})$의 최솟값은 $m=-\frac{4}{3}$이므로 $9m^2=9\times\left(-\frac{4}{3}\right)^2=16$

⑥ 적분

TH①. 2024년 수능특강

2024년 수능특강 Lv2

2025 Trend

1. $f(0)=0$이고 최고차항의 계수의 절댓값이 4인 이차함수 $f(x)$와 $a>1$인 실수 a가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\int_0^1 |f(x)|dx = \int_0^1 f(x)dx$,
> $\int_1^a |f(x)|dx = -\int_1^a f(x)dx$
>
> (나) $\left|\int_0^a f(x)dx\right| \le \int_{1-a}^1 f(x)dx$

$f(a)$의 최솟값은?

① $-\frac{7}{2}$ ② -3 ③ $-\frac{5}{2}$
④ -2 ⑤ $-\frac{3}{2}$

2024년 수능특강 Lv3

2025 Trend

2. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수가

$$f'(x)=\begin{cases} a & (x<b) \\ -3x^2+x & (x\ge b) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하고 $f(2)-f(0)=-\frac{15}{2}$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

2025학년도 경찰대학교 유사문제

3. 함수 $f(x)=\frac{2}{7}x^3+x-\frac{16}{7}$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 두 함수 $y=g(x)$, $y=|x|$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{27}{14}$　② 2　③ $\frac{29}{14}$

④ $\frac{15}{7}$　⑤ $\frac{31}{14}$

2024년 수능특강 Lv2

4. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$-1\leq x<1$일 때, $f(x)=-x^2+ax$이고 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=f(x-2)+4$$

를 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=-2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 할 때, $A+B$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 12　② $\frac{38}{3}$　③ $\frac{40}{3}$

④ 14　⑤ $\frac{44}{3}$

5. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(0\le t\le 1)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=-\left|t-\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2},\ v_2(t)=-kt(t-1)\ (k>1)$$

이다. $0<t\le 1$에서 두 점 P, Q가 오직 한 번 만나도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위는 $1<k<\alpha$ 또는 $k=\beta$이다. $\alpha+\beta$의 값은? (단, α, β는 상수이다.)

① $\frac{11+2\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{6+\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{13+2\sqrt{3}}{6}$
④ $\frac{7+\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{15+2\sqrt{3}}{6}$

2024년 수능특강 Lv3

6. 네 점 O(0, 0), A(1, 0), B(1, 1), C(0, 1)을 꼭짓점으로 하는 정사각형 OABC가 있다. $-1<t<1$인 실수 t에 대하여 곡선

$$y=x^2+t\ (0\le x\le 1)$$

위의 x좌표가 0, 1인 점을 각각 P, Q라 하고 점 Q에서 y축에 내린 수선의 발을 R이라 할 때, 곡선

$$y=x^2+t\ (0\le x\le 1)$$

과 두 선분 PR, QR로 둘러싸인 부분의 내부와 사각형 OABC의 내부의 공통부분의 넓이를 $S(t)$라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

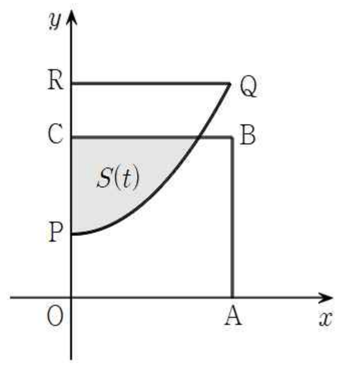
| 보기 |

ㄱ. $S(0)=\frac{2}{3}$

ㄴ. $-1<\alpha<0$인 모든 실수 α에 대하여
$S(\alpha)+S(1+\alpha)=\frac{2}{3}$이다.

ㄷ. $S\left(-\frac{1}{2}\right)+S\left(\frac{1}{2}\right)+S(\beta)=1$을 만족시키는 모든 실수 β $(-1<\beta<1)$의 값의 곱은 $\sqrt[3]{\frac{1}{16}}-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



7. 닫힌구간 $[0, 4]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 $0 \le x < 2$일 때 $|f(x)| = |x-1|$, $2 \le x \le 4$일 때 $|f(x)| = |x-3|$을 만족시킨다. 열린구간 $(0, 4)$에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \int_1^x f(t)dt + \int_3^x f(t)dt$$

라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. 가능한 함수 f의 개수는 16이다.
ㄴ. $|g(2)| + |g'(2)| = 2$
ㄷ. 함수 $g(x)$가 $x = \alpha$ $(1 < \alpha < 4)$에서만 극값을 가지고 $g(\alpha) > 0$일 때, $\alpha + g(\alpha) = 4$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

2024년 수능특강 Lv3
2025 Trend

8. 다음 조건을 만족시키는 실수 전체의 집합에서 연속인 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{-2}^{2} f(x)dx$의 최댓값과 최솟값의 합은?

(가) 모든 실수 x에 대하여
$\{f(x)+x\}\{f(x)-x\} = x^4 - 3x^2 + 1$이다.
(나) $x \le 1$인 모든 실수 x에 대하여
$f(x) - \int_1^x f(t)dt \ge 0$이다.

① $-\frac{8}{3}$ ② $-\frac{4}{3}$ ③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{16}{3}$

9. $f'(0)=0$인 이차함수 $f(x)$와 연속함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xg(x)=\int_{-1}^{1}|x-t|f(t)dt$$

를 만족시킨다. $g(-2)=2$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

2025 Trend

10. 최고차항의 계수의 절댓값이 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le 0) \\ f(x+3) & (x>0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x g(t)dt \le 0$$

을 막족시킬 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $g(0)=0$

ㄴ. $g'(0)$이 존재하면 모든 실수 x에 대하여 $\int_0^x |g'(t)|dt=-g(x)$이다.

ㄷ. $\int_n^1 f(x)dx$의 값이 정수일 때, $\lim_{h\to 0+}\frac{g(h)}{h}$의 최솟값은 $-\frac{99}{14}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 음수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+1 & (x<1) \\ a|x-2|-a & (x \geq 1) \end{cases}$$

이라 할 때, 함수 $g(x)=|x|\int_b^x f(t)dt$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 실수 b의 최댓값을 M이라 하자. $b=M$일 때의 함수 $g(x)$에 대하여 $g(3)=18$일 때, $12M$의 값을 구하시오.

TH②. 2024년 수능완성

12. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$와 양수 a가 다음 조건을 만족시킬 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(가) $-2 \leq x<2$일 때, $f(x)=a(x+2)(x-2)$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=-2f(x)$이다.

| 보기 |

ㄱ. $f(4)=8a$

ㄴ. $\int_2^8 f(x)dx=a$

ㄷ. $\int_{-2}^{12} f(x)dx=4$이면 $a=\frac{3}{8}$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x(x+2)(x-k)$$

라 하고, 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+|f(x)|$$

라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 6이 되도록 하는 k의 값은?

① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 2

2024년 수능완성
공식 활용

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(6)$의 값은?

(가) 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근 a, 1, b $(a<1<b)$ 를 갖고, a, 1, b는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
(나) 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 128이다.

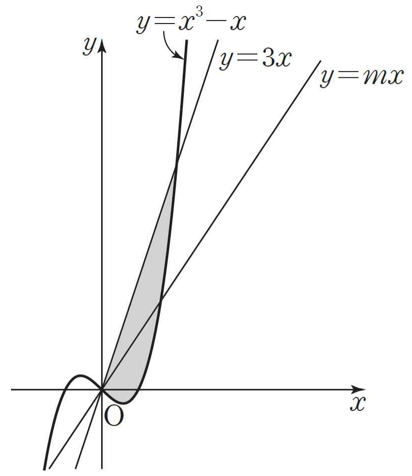
① 42 ② 45 ③ 48
④ 51 ⑤ 54

15. 자연수 k에 대하여 두 점 P와 Q는 시각 $t=0$일 때 각각 점 $\mathrm{A}(k)$와 점 $\mathrm{B}(2k)$에서 출발하여 수직선 위를 움직인다. 두 점 P, Q의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2-12t+k,\ v_2(t)=-2t-4$$

이다. 두 점 P, Q가 출발한 후 한 번만 만나도록 하는 k의 최솟값을 구하시오.

16. 그림과 같이 $x \geq 0$에서 곡선 $y=x^3-x$와 직선 $y=3x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $y=mx$가 이등분할 때, 상수 m의 값은? (단, $0<m<3$) [4점]



① $2(\sqrt{2}-1)$ ② $3-\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{2}-1$
④ $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}+1$

연계 가능

17. 함수 $f(x)=\int_0^x (2x-t)(3t^2+at+b)dt$와 도함수 $f'(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 정수 a와 실수 b에 대하여 $\left|\frac{a}{b}\right|$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) $f'(1)=0$
> (나) 열린구간 $(0,\ 1)$에 속하는 모든 실수 k에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=f(k)$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

2024년 수능완성

18. 최고차항의 계수가 양수이고 $f(0)=f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_{-x}^{x} f(|t|)dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(2)=0$
> (나) 함수 $g(x)$의 모든 극솟값의 합은 -1이다.

$f(3)$의 값은? [4점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

19. 최고차항의 계수가 양수이고 $f(-1)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_{-1}^{1} f(t)dt \times \int_{-1}^{x} f(t)dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \le g(2)$이다.

(나) 실수 k에 대하여 x에 대한 방정식 $g(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(k)$라 할 때, $\left|\lim_{k\to a+} h(k) - \lim_{k\to a-} h(k)\right| = 2$를 만족시키는 실수 a의 값은 3뿐이다.

$30 \times g(0)$의 값을 구하시오. [4점]

1. 정답 ②

풀이

조건 (가)에서

$0 \le x \le 1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge 0$이고,

$1 \le x \le a$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \le 0$이므로

$f(1)=0$이다.

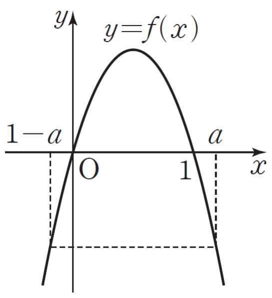
이때 $f(0)=0$, $f(1)=0$이므로 이차항의 계수는 음수, 즉 -4이고

$f(x)=-4x(x-1)$이다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=\frac{1}{2}$이므로

$$\int_0^a f(x)dx=\int_{1-a}^1 f(x)dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

를 만족시키다



따라서 조건 (나)와 ㉠에서

$\left|\int_0^a f(x)dx\right| \le \int_{1-a}^1 f(x)dx=\int_0^a f(x)dx$ 인데

$\left|\int_0^a f(x)dx\right| \ge \int_0^a f(x)dx$ 이므로

$\left|\int_0^a f(x)dx\right| = \int_0^a f(x)dx$

즉, $\int_0^a f(x)dx \ge 0$이다.

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)dx&=\int_0^a \{-4x(x-1)\}dx\\&=-4\int_0^a (x^2-x)dx\\&=-4\times\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^a\\&=-4\times\left(\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^2\right)\\&=-\frac{4}{3}a^2\left(a-\frac{3}{2}\right)\ge 0\end{aligned}$$

에서 $a \le \frac{3}{2}$

$a>1$이므로 $1<a\le\frac{3}{2}$

닫힌구간 $\left[1, \frac{3}{2}\right]$에서 함수 $f(x)$는 감소하고 $f(1)=0$,

$f\left(\frac{3}{2}\right)=-3$이므로

$f\left(\frac{3}{2}\right)\le f(a)<f(1)$

$-3\le f(a)<0$

따라서 $f(a)$의 최솟값은 -3이다.

2. 정답 ②

풀이

$f'(x)=\begin{cases}a & (x<b)\\ -3x^2+x & (x\ge b)\end{cases}$에서 실수 전체의 집합에서 정의된 두

함수 $f_1'(x)$, $f_2'(x)$를

$f_1'(x)=a$, $f_2'(x)=-3x^2+x$라 하자.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의

집합에서 연속이다. 함수 $f(x)$가 연속함수가 되도록 하는 $f_1'(x)$의

부정적분 중 하나를 $f_1(x)$라 하고, $f_2'(x)$의 부정적분 중 하나를

$f_2(x)$라 하자. 즉, $f(x)=\begin{cases}f_1(x) & (x<b)\\ f_2(x) & (x\ge b)\end{cases}$라 하자.

함수 $f(x)$가 $x=b$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to b-}f(x)=\lim\limits_{x\to b+}f(x)=f(b)$ 이다.

$\lim\limits_{x\to b-}f(x)=\lim\limits_{x\to b-}f_1(x)=f_1(b)$,

$\lim\limits_{x\to b+}f(x)=\lim\limits_{x\to b+}f_2(x)=f_2(b)$,

$f(b)=f_2(b)$

이므로 $f(b)=f_1(b)=f_2(b)$

함수 $f(x)$가 $x=b$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to b-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim\limits_{x\to b+}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$ 이다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to b-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}&=\lim_{x\to b-}\frac{f_1(x)-f_2(b)}{x-b}\\&=\lim_{x\to b-}\frac{f_1(x)-f_1(b)}{x-b}\\&=f_1'(b)=a,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to b+}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}&=\lim_{x\to b+}\frac{f_2(x)-f_2(b)}{x-b}\\&=f_2'(b)=-3b^2+b\end{aligned}$$

이므로 $a=-3b^2+b$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

연속함수 $f(x)$의 역함수가 존재하고

$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(-3x^2+x)=-\infty$ 이므로 모든 실수 x에

대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

즉, $x<b$에서 $f'(x)=a\le 0$이고 $x\ge b$에서

$f'(x)=-x(3x-1)\le 0$이어야 한다.

$a=0$이면 $x<b$에서 함수 $f(x)$가 상수함수가 되어 함수 $f(x)$의

역함수가 존재한다는 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a<0$이다.

이때 ㉠에서 $a=-3b^2+b=-b(3b-1)<0$이므로

$b<0$ 또는 $b>\frac{1}{3}$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

또한 $x\ge b$에서 $f'(x)=-x(3x-1)\le 0$이려면 $b\ge\frac{1}{3}$이고, ㉡을

만족시키려면 $b>\frac{1}{3}$이다.

또한 ㉠에 의하여 함수 $f'(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$f(2)-f(0)=\int_0^2 f'(x)dx$ 이다.

$f(2)-f(0)=-\frac{15}{2}$ 이므로

$$\int_0^2 f'(x)dx=-\frac{15}{2}$$

(i) $b>2$인 경우

$$\int_0^2 f'(x)dx=\int_0^2 adx=\Big[ax\Big]_0^2=2a=-\frac{15}{2}$$

에서 $a=-\frac{15}{4}$

㉠에서

$-3b^2+b=-\frac{15}{4}$, $12b^2-4b-15=0$

$$b=\frac{2\pm2\sqrt{46}}{12}=\frac{1\pm\sqrt{46}}{6}$$

이때 $b>2$라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\frac{1}{3}<b\le 2$인 경우

$$\int_0^2 f'(x)dx$$

$$=\int_0^b f'(x)dx+\int_b^2 f'(x)dx$$

$$=\int_0^b adx+\int_b^2(-3x^2+x)dx$$

$$=\Big[ax\Big]_0^b+\Big[-x^3+\frac{1}{2}x^2\Big]_b^2$$

$$=ab+\left(-6+b^3-\frac{1}{2}b^2\right)$$

$$=(-3b^2+b)b+\left(-6+b^3-\frac{1}{2}b^2\right)$$

$$=-2b^3+\frac{1}{2}b^2-6=-\frac{15}{2}$$

에서

$4b^3-b^2-3=0$

$(b-1)(4b^2+3b+3)=0$

$b=1$ 또는 $4b^2+3b+3=0$

이차방정식 $4b^2+3b+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=9-48=-39<0$이므로 이 방정식은 실근을 갖지 않는다.

즉, $b=1$

(i), (ii)에 의하여 $b=1$이고 ㉠에서 $a=-2$이므로

$a+b=-2+1=-1$

3. 정답 ⑤

풀이

$f(x)=\frac{2}{7}x^3+x-\frac{16}{7}$에서 $f'(x)=\frac{6}{7}x^2+1>0$이므로

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=x$의 그래프의 교점의 x좌표를 구해 보자.

$\frac{2}{7}x^3+x-\frac{16}{7}=x$, $x^3=8$

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+2x+4=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=4-16=-12<0$

이므로 이 이차방정식은 실근을 갖지 않는다.

그러므로 ㉠에서 $x=2$

두 함수 $y=f(x)$, $y=-x$의 그래프의 교점의 x좌표를 구해 보자.

$\frac{2}{7}x^3+x-\frac{16}{7}=-x$, $x^3+7x-8=0$

$(x-1)(x^2+x+8)=0$ …… ㉡

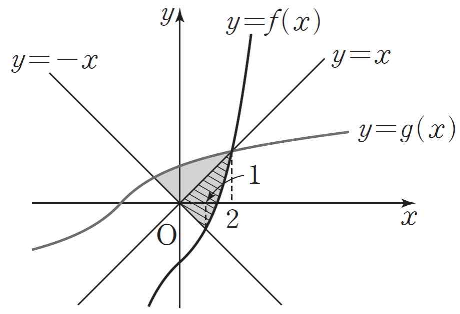
이차방정식 $x^2+x+8=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=1-32=-31<0$

이므로 이 이차방정식은 실근을 갖지 않는다.

그러므로 ㉡에서 $x=1$

그러므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 두 함수 $y=g(x)$, $y=|x|$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 세 함수 $y=f(x)$, $y=x$, $y=-x$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1\{x-(-x)\}dx+\int_1^2\left\{x-\left(\frac{2}{7}x^3+x-\frac{16}{7}\right)\right\}dx$$

$$=\int_0^1 2xdx+\int_1^2\left(-\frac{2}{7}x^3+\frac{16}{7}\right)dx$$

$$=\Big[x^2\Big]_0^1+\Big[-\frac{1}{14}x^4+\frac{16}{7}x\Big]_1^2$$

$$=1+\frac{17}{14}=\frac{31}{14}$$

4. 정답 ②

풀이

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$이다.

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(-x^2+ax)=-1+a$,

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}\{f(x-2)+4\}$

$=\lim_{x\to-1+}\{f(x)+4\}$

$=(-1-a)+4=3-a$,

$f(1)=f(-1)+4=(-1-a)+4=3-a$

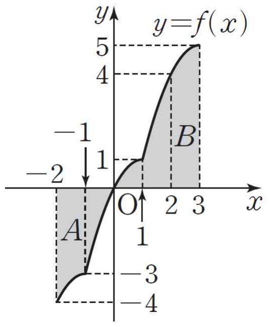
이므로 $-1+a=3-a$

즉, $a=2$

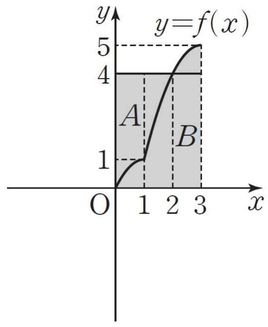
그러므로 $-1\le x<1$일 때, $f(x)=-x^2+2x$이다.

모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x-2)+4$이므로 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 곡선 $y=f(x-2)+4$는 곡선 $y=f(x)$와 일치한다.

따라서 $-2\le x\le 3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같다.



[그림 1]



[그림 2]

곡선 $y=f(x)$와 x축 (직선 $y=0$) 및 직선 $x=-2$로 둘러싸인 부분의 넓이 A는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4$ 및 y축 (직선 $x=0$)으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로 구하는 넓이 $A+B$는 [그림 2]의 색칠한 부분의 넓이와 같다.

따라서

$$A+B=3\times4+\int_2^3\{f(x)-4\}dx$$
$$=12+\int_0^1 f(x)dx$$
$$=12+\int_0^1(-x^2+2x)dx$$
$$=12+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^1$$
$$=12+\frac{2}{3}=\frac{38}{3}$$

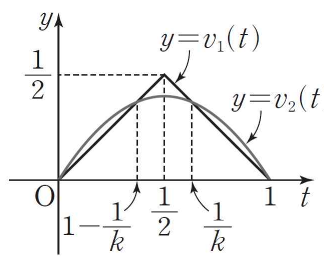
5. 정답 ⑤

풀이

시각 $t=t_1$ $(0<t_1\le 1)$에서 두 점 P, Q의 위치가 같으면

$$0+\int_0^{t_1}v_1(t)dt=0+\int_0^{t_1}v_2(t)dt$$
$$\int_0^{t_1}\{v_1(t)-v_2(t)\}dt=0$$

이때 두 함수 $y=v_1(t)$, $y=v_2(t)$의 그래프가 다음 그림과 같이 서로 다른 네 점에서 만나야 한다.



$0\le t\le\frac{1}{2}$일 때, 곡선 $y=-kt(t-1)$과 직선 $y=t$의 교점의 t좌표를 구하면

$t=-kt(t-1)$

$t(kt-k+1)=0$

$t=0$ 또는 $t=1-\frac{1}{k}$

두 함수 $y=v_1(t)$, $y=v_2(t)$의 그래프는 모두 직선 $t=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이므로 나머지 교점의 t좌표는 각각 $\frac{1}{k}$, 1이다.

$f(x)=\int_0^x\{v_1(t)-v_2(t)\}dt$라 하면 두 점 P, Q의 위치가 같도록 하는 시각 t의 값은 방정식 $f(x)=0$의 실근과 같다. 그러므로 $0<t\le 1$에서 두 점 P, Q가 오직 한 번 만나려면 $0<x\le 1$에서 방정식 $f(x)=0$의 실근이 오직 하나이어야 한다.

$0<x<1$일 때, $f'(x)=v_1(x)-v_2(x)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=1-\frac{1}{k}$ 또는 $x=\frac{1}{k}$

$0\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$1-\frac{1}{k}$	$\cdots$	$\frac{1}{k}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	극소	↗	극대	↘	

따라서 $0<x\le 1$에서 방정식 $f(x)=0$의 실근이 오직 하나이려면

$f\left(\frac{1}{k}\right)=0$ 또는 $f(1)>0$

(ⅰ) $f\left(\frac{1}{k}\right)=0$인 경우

$$f\left(\frac{1}{k}\right)=\int_0^{\frac{1}{k}}\{v_1(t)-v_2(t)\}dt$$
$$=\int_0^{\frac{1}{k}}v_1(t)dt-\int_0^{\frac{1}{k}}v_2(t)dt=0$$

에서

$$\int_0^{\frac{1}{k}}v_1(t)dt=\int_0^{\frac{1}{k}}v_2(t)dt$$
$$\int_0^{\frac{1}{2}}tdt+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{k}}(1-t)dt=\int_0^{\frac{1}{k}}(-kt^2+kt)dt$$
$$\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[t-\frac{1}{2}t^2\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{k}}=\left[-\frac{k}{3}t^3+\frac{k}{2}t^2\right]_0^{\frac{1}{k}}$$
$$\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)=-\frac{1}{3k^2}+\frac{1}{2k}$$
$$3k^2-6k+2=0$$

$k>1$이므로 $k=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$

(ⅱ) $f(1)>0$인 경우

$f(1)=2f\left(\frac{1}{2}\right)$이고 $f(1)>0$이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)>0$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}\{v_1(t)-v_2(t)\}dt$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}v_1(t)dt-\int_0^{\frac{1}{2}}v_2(t)dt$$
$$=\frac{1}{8}-\left[-\frac{k}{3}t^3+\frac{k}{2}t^2\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{8}-\left(-\frac{k}{24}+\frac{k}{8}\right)$$

$=\frac{1}{8}-\frac{k}{12}>0$

에서 $k<\frac{3}{2}$

$k>1$이므로 $1<k<\frac{3}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\frac{3+\sqrt{3}}{3}>\frac{3}{2}$이므로

$1<k<\frac{3}{2}$ 또는 $k=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$

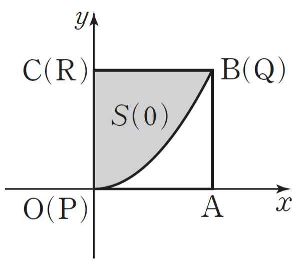
따라서 $\alpha=\frac{3}{2}$, $\beta=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$이므로

$\alpha+\beta=\frac{15+2\sqrt{3}}{6}$

6. 정답 ⑤

풀이

ㄱ. $t=0$일 때, 곡선 $y=x^2$ $(0\le x\le 1)$과 두 선분 PR, QR로 둘러싸인 부분의 내부와 사각형 OABC의 내부의 공통부분은 [그림 1]과 같다.

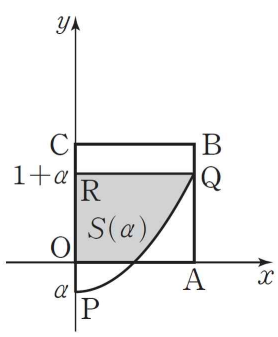


[그림 1]

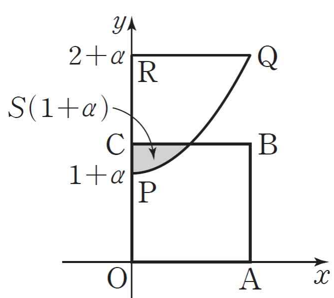
따라서

$$S(0)=\int_0^1(1-x^2)dx$$
$$=\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)-0=\frac{2}{3}\ (참)$$

ㄴ. $-1<\alpha<0$인 α에 대하여 $S(\alpha)$의 값은 [그림 2]의 색칠한 부분의 넓이와 같다. 또한 $S(1+\alpha)$의 값은 [그림 3]의 색칠한 부분의 넓이와 같다.



[그림 2]



[그림 3]

곡선 $y=x^2+\alpha$를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이 곡선 $y=x^2+\alpha+1$이므로 곡선 $y=x^2+\alpha$ $(0\le x\le 1)$과 x축 (직선 $y=0$) 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=x^2+\alpha+1$ $(0\le x\le 1)$과 직선 $y=1$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

따라서 $S(\alpha)+S(1+\alpha)$의 값은 곡선 $y=x^2$ $(0\le x\le 1)$과 두 선분 OC, CB로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로 ㄱ에 의하여

$S(\alpha)+S(1+\alpha)=\frac{2}{3}$ (참)

ㄷ. ㄴ에 의하여

$S\left(-\frac{1}{2}\right)+S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}$

$S\left(-\frac{1}{2}\right)+S\left(\frac{1}{2}\right)+S(\beta)=1$에서

$S(\beta)=\frac{1}{3}$

ㄱ에서 $S(0)=\frac{2}{3}$이므로 $\beta\neq 0$

(ⅰ) $0<\beta<1$인 경우

$0<t<1$일 때, 곡선 $y=x^2+t$ $(0\le x\le 1)$과 직선 $y=1$이 만나는 점의 x좌표는

$x^2+t=1$에서 $x^2=1-t$, $x>0$이므로

$x=\sqrt{1-t}$

따라서

$$S(t)=\int_0^{\sqrt{1-t}}\{1-(x^2+t)\}dx$$
$$=\left[(1-t)x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{1-t}}$$
$$=(1-t)\sqrt{1-t}-\frac{1}{3}(1-t)\sqrt{1-t}$$
$$=\frac{2}{3}(1-t)\sqrt{1-t}$$

$S(\beta)=\frac{2}{3}(1-\beta)\sqrt{1-\beta}=\frac{1}{3}$에서

$(\sqrt{1-\beta})^3=\frac{1}{2}$, $\sqrt{1-\beta}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

$1-\beta=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$, 즉 $\beta=1-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

(ⅱ) $-1<\beta<0$인 경우

$S(\beta)=\frac{1}{3}$이면 ㄴ에서 $S(1+\beta)=\frac{1}{3}$이고

(ⅰ)에서 $1+\beta=1-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$이므로 $\beta=-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 β의 값의 곱은

$-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\times\left(1-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)=\sqrt[3]{\frac{1}{16}}-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

7. 정답 ⑤

풀이

ㄱ. $0\le x<2$일 때 $|f(x)|=|x-1|$,

$2\le x\le 4$일 때 $|f(x)|=|x-3|$에서

$f(1)=0$, $f(3)=0$이다.

닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$가 연속함수이므로

$0\le x<1$일 때, $f(x)=x-1$ 또는 $f(x)=-x+1$

$1\le x<2$일 때 $f(x)=x-1$이면,

$2\le x<3$일 때 $f(x)=-x+3$ …… ㉠

$1\le x<2$일 때 $f(x)=-x+1$이면,

$2\le x<3$일 때 $f(x)=x-3$ …… ㉡

$3 \le x \le 4$일 때, $f(x)=x-3$ 또는 $f(x)=-x+3$이다.

그러므로 가능한 함수 f의 개수는 $2\times2\times2=8$이다. (거짓)

ㄴ. ㉠, ㉡에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $1 \le x \le 3$에서 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭성을 이용하면

$\int_1^2 f(t)dt=\int_2^3 f(t)dt$ 이므로

$$g(2)=\int_1^2 f(t)dt+\int_3^2 f(t)dt$$
$$=\int_1^2 f(t)dt-\int_2^3 f(t)dt=0$$

그러므로 ㄱ에서 구한 8개의 연속함수 $f(x)$에 대하여 $g(2)=0$이다.

한편, $g(x)=\int_1^x f(t)dt+\int_3^x f(t)dt$ 에서

$g'(x)=f(x)+f(x)=2f(x)$ …… ㉢

㉢에서 $g'(2)=2f(2)$이고,

㉠의 경우 $f(2)=1$,

㉡의 경우 $f(2)=-1$이므로

$|g'(2)|=|2f(2)|=2$

따라서 $|g(2)|+|g'(2)|=0+2=2$ (참)

ㄷ. ㉢에서 $g'(x)=2f(x)$이므로

$g'(x)=0$에서 $f(x)=0$

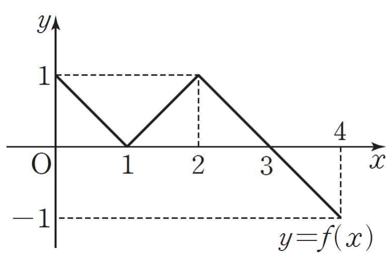
즉, $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $g(x)$가 $x=\alpha$ $(1<\alpha<4)$에서만 극값을 가지므로 $\alpha=3$이다.

$g'(x)=2f(x)$이므로 $x=3$의 좌우에서 함수 $f(x)$의 부호가 바뀌고 $x=1$의 좌우에서 함수 $f(x)$의 부호가 바뀌지 않아야 한다.

ㄴ에서 $g(2)=0$이므로 $g(\alpha)=g(3)>0$이려면 닫힌구간 $[2, 3]$에서 함수 $g(x)$는 증가해야 하므로 이 구간에서 $f(x) \ge 0$이어야 한다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극대이고

$$g(3)=\int_1^3 f(t)dt+\int_3^3 f(t)dt$$
$$=\int_1^2 f(t)dt+\int_2^3 f(t)dt+0$$
$$=\int_1^2 (t-1)dt+\int_2^3 (-t+3)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2-t\right]_1^2+\left[-\frac{1}{2}t^2+3t\right]_2^3$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

따라서 $\alpha+g(\alpha)=3+g(3)=3+1=4$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

8. **정답** ⑤

풀이

조건 (가)의 $\{f(x)+x\}\{f(x)-x\}=x^4-3x^2+1$ 에서

$\{f(x)\}^2-x^2=x^4-3x^2+1$

$\{f(x)\}^2=x^4-2x^2+1$

$\{f(x)\}^2=(x^2-1)^2$

$f(x)=x^2-1$ 또는 $f(x)=-x^2+1$

이때 두 곡선 $y=x^2-1$, $y=-x^2+1$이

두 점 $(-1, 0)$, $(1, 0)$에서 만나므로 반드시 $f(-1)=0$, $f(1)=0$이다. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)$는 세 구간 $(-\infty, -1]$, $[-1, 1]$, $[1, \infty)$에서 각각 두 함수 $y=x^2-1$, $y=-x^2+1$ 중 하나를 택하여 정해진다. 그러므로 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 될 수 있는 것은 8개이다.

(i) $-1<x<1$에서 $f(x)=x^2-1$인 경우

$-1<x<1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<0$이므로

$\int_x^1 f(t)dt<0$이다.

그러므로 $-1<x<1$에서

$f(x)-\int_1^x f(t)dt=f(x)+\int_x^1 f(t)dt<0$ 이 되어

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $-1<x<1$에서 $f(x)=-x^2+1$인 경우

(a) $x<-1$에서 $f(x)=-x^2+1$인 경우

$x \le 1$에서 $f(x)=-x^2+1$이므로

$$f(x)-\int_1^x f(t)dt=-x^2+1-\int_1^x (-t^2+1)dt$$
$$=-x^2+1-\left[-\frac{1}{3}t^3+t\right]_1^x$$
$$=\frac{1}{3}x^3-x^2-x+\frac{5}{3}$$

이때 $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-x+\frac{5}{3}\right)=-\infty$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(b) $x<-1$에서 $f(x)=x^2-1$인 경우

$x \le 1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge 0$이므로

$\int_x^1 f(t)dt \ge 0$이다.

그러므로 $x \le 1$인 모든 실수 x에 대하여

$f(x)-\int_1^x f(t)dt=f(x)+\int_x^1 f(t)dt \ge 0$ 이 되어 조건 (나)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$는 $x<-1$에서 $f(x)=x^2-1$, $-1 \le x<1$에서 $f(x)=-x^2+1$임을 알 수 있다.

또 $x \ge 1$에서는 $f(x)=x^2-1$ 또는 $f(x)=-x^2+1$이다.

$$\int_{-2}^2 f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^{-1} f(x)dx+\int_{-1}^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx+\int_{-1}^1(-x^2+1)dx+\int_1^2 f(x)dx$$

이고, $x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $x^2-1 \geq 0$,

$-x^2+1 \leq 0$이므로 $\int_{-2}^{2} f(x)dx$의 최댓값, 최솟값을 각각

M, m이라 하면

$$M=\int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx+\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx+\int_{1}^{2}(x^2-1)dx$$

$$m=\int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx+\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx+\int_{1}^{2}(-x^2+1)dx$$

따라서

$$\begin{aligned}M+m&=2\int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx+2\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx\\&\quad+\int_{1}^{2}\{(x^2-1)+(-x^2+1)\}dx\\&=2\times\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_{-2}^{-1}+2\times\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^{1}+0\\&=2\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)+2\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)\\&=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}\end{aligned}$$

9. 정답 21

풀이

$f'(0)=0$이므로 이차함수 $f(x)$를

$f(x)=ax^2+b$ (a, b는 상수, $a \neq 0$)으로 놓을 수 있다.

$xg(x)=\int_{-1}^{1}|x-t|f(t)dt$에서

$$xg(x)=\int_{-1}^{1}|x-t|(at^2+b)dt \quad \cdots\cdots ㉠$$

이차함수 $f(x)$와 연속함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 ㉠을 만족시키므로 ㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$\begin{aligned}0&=\int_{-1}^{1}|t|(at^2+b)dt\\&=\int_{-1}^{1}(at^2|t|+b|t|)dt\\&=2\int_{0}^{1}(at^3+bt)dt\\&=2\times\left[\frac{a}{4}t^4+\frac{b}{2}t^2\right]_{0}^{1}\\&=\frac{a}{2}+b\end{aligned}$$

즉, $a+2b=0 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$$\begin{aligned}-2g(-2)&=\int_{-1}^{1}|-2-t|(at^2+b)dt\\&=\int_{-1}^{1}(t+2)(at^2+b)dt\\&=\int_{-1}^{1}(at^3+2at^2+bt+2b)dt\\&=\int_{-1}^{1}(at^3+bt)dt+\int_{-1}^{1}(2at^2+2b)dt\\&=0+2\int_{0}^{1}(2at^2+2b)dt\\&=2\times\left[\frac{2a}{3}t^3+2bt\right]_{0}^{1}\\&=\frac{4a}{3}+4b\end{aligned}$$

$g(-2)=2$이므로

$\frac{4a}{3}+4b=-4$

즉, $a+3b=-3 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉡, ㉢에서 $a=6$, $b=-3$

따라서 $f(x)=6x^2-3$이므로

$f(2)=21$

10. 정답 ⑤

풀이

ㄱ. 함수 $g(x)=\begin{cases}f(x) & (x \leq 0)\\ f(x+3) & (x>0)\end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0+}g(x)=g(0) \quad \cdots\cdots ㉠$

삼차함수 $f(x)$는 연속함수이고, 함수 $f(x+3)$도 연속 함수이므로

$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=f(0)$,

$\lim_{x\to 0+}g(x)=\lim_{x\to 0+}f(x+3)=f(3)$,

$g(0)=f(0)$

이고 ㉠에서

$g(0)=f(0)=f(3)$

그런데 $f(0)>0$이면 $f(3)>0$이고 절댓값이 충분히 작은 양수 α에 대하여 닫힌구간 $[3, 3+\alpha]$에 속하는 모든 x에서 $f(x)>0$이므로

$\int_{0}^{\alpha}g(x)dx=\int_{0}^{\alpha}f(x+3)dx=\int_{3}^{3+\alpha}f(x)dx>0$이 되어

조건을 만족시키지 않는다.

또 $f(0)<0$이면 절댓값이 충분히 작은 양수 β에 대하여 닫힌구간 $[-\beta, 0]$에 속하는 모든 x에서 $f(x)<0$이므로

$\int_{0}^{-\beta}g(x)dx=\int_{0}^{-\beta}f(x)dx=-\int_{-\beta}^{0}f(x)dx>0$이 되어

조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $f(0)=0$이므로 $g(0)=f(0)=0$이다. (참)

ㄴ. ㄱ에서 $g(0)=0$이므로 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $\int_{0}^{x}g(t)dt \leq 0$을 만족시키려면 $x \leq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=f(x) \geq 0$이고 $x \geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=f(x+3) \leq 0$이어야 한다.

이때 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=f(3)=0$이고 $f(x)$의 최고차항의 계수의 절댓값이 1이므로 최고차항의 계수는 음수, 즉 -1이어야 한다.

$x<0$에서 $f(x)>0$, $x>3$에서 $f(x)<0$이므로 최고차항의 계수가 -1인 삼차함수 $f(x)$는 $x \leq 0$에서도 감소하고, $x \geq 3$에서도 감소한다. 그러므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소한다.

이때 $g'(0)$이 존재하면 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 모든 실수 x에 대하여 $g'(x) \leq 0$이다.

따라서 $g'(0)$이 존재하면 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x |g'(t)|dt=\int_0^x \{-g'(t)\}dt$$
$$=\Big[-g(t)\Big]_0^x$$
$$=-g(x)-\{-g(0)\}$$
$$=-g(x)-0$$
$$=-g(x)\ (참)$$

ㄷ. ㄱ과 ㄴ의 ㉡에서

$f(x)=-x(x-3)(x-a)=-x^3+(a+3)x^2-3ax$

(a는 $0\le a\le 3$인 실수)

로 놓을 수 있다.

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\{-x^3+(a+3)x^2-3ax\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{a+3}{3}x^3-\frac{3a}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=-\frac{7}{6}a+\frac{3}{4}$$

$0\le a\le 3$에서 $-\frac{11}{4}\le -\frac{7}{6}a+\frac{3}{4}\le \frac{3}{4}$이므로

$\int_0^1 f(x)dx$의 값이 될 수 있는 정수는 -2, -1, 0이다.

한편, $f'(x)=-3x^2+2(a+3)x-3a$이고 $f(3)=0$이므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(h)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{f(h+3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$
$$=f'(3)=3a-9$$

그러므로 $\int_0^1 f(x)dx=-\frac{7}{6}a+\frac{3}{4}$의 값이 최대이면

$\lim_{h\to 0+}\frac{g(h)}{h}=3a-9$의 값은 최소이다.

즉, $-\frac{7}{6}a+\frac{3}{4}=0$에서 $a=\frac{9}{14}$일 때 $\lim_{h\to 0+}\frac{g(h)}{h}$의 값이

최소이고 그 최솟값은 $3a-9=3\times\frac{9}{14}-9=-\frac{99}{14}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

11. **정답** 54

풀이

함수 $f(x)$에서

$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(-x^2+1)=0$,

$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}(a|x-2|-a)=0$,

$f(1)=a|1-2|-a=0$

이므로 $\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

그러므로 함수 $y=\int_b^x f(t)dt$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

한편, 함수 $y=|x|$는 $x\ne 0$인 모든 실수 x에 대하여 미분가능하다.

따라서 함수 $g(x)=|x|\int_b^x f(t)dt$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=0$에서 미분가능해야 하므로

$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$이어야 한다.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-}=\lim_{x\to 0+}\frac{|x|\int_b^x f(t)dt}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{x\int_b^x f(t)dt}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\int_b^x f(t)dt$$
$$=\int_b^0 f(t)dt$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-}=\lim_{x\to 0-}\frac{|x|\int_b^x f(t)dt}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\frac{-x\int_b^x f(t)dt}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\left\{-\int_b^x f(t)dt\right\}$$
$$=-\int_b^0 f(t)dt$$

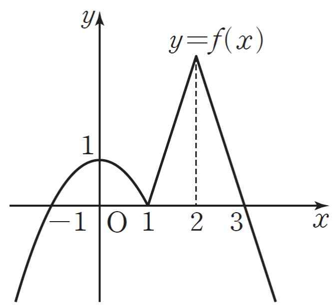
이므로 $\int_b^0 f(t)dt=-\int_b^0 f(t)dt$에서

$\int_b^0 f(t)dt=0$, 즉 $\int_0^b f(t)dt=0$

이어야 한다.

따라서 $h(x)=\int_0^x f(t)dt$라 하면 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 실수 b는 방정식 $h(x)=0$의 실근이다.

$a<0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$h'(x)=f(x)$이므로 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↘	극소	↗		↗	극대	↘

$h(3)>h(0)=\int_0^0 f(t)dt=0$이고 $\lim_{x\to\infty}h(x)=-\infty$이므로

$h(x)=0$이 되는 양수 x는 구간 $(3, \infty)$에 단 하나 존재한다. 즉, $M>3$이다.

$b=M$일 때의 함수 $g(x)$에 대하여 $g(3)=18$이므로

$g(3)=|3|\displaystyle\int_M^3 f(t)dt=18$에서

$\displaystyle\int_M^3 f(t)dt=6$

이때 $h(M)=0$, 즉 $\displaystyle\int_0^M f(t)dt=0$이므로

$$\int_0^3 f(t)dt=\int_0^M f(t)dt+\int_M^3 f(t)dt$$
$$=0+6=6 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

한편,

$$\int_0^3 f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^2 f(t)dt+\int_2^3 f(t)dt$$
$$=\int_0^1(-t^2+1)dt+\int_1^2(-at+a)dt+\int_2^3(at-3a)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t\right]_0^1+\left[-\frac{a}{2}t^2+at\right]_1^2+\left[\frac{a}{2}t^2-3at\right]_2^3$$
$$=\frac{2}{3}+\left(-\frac{a}{2}\right)+\left(-\frac{a}{2}\right)=\frac{2}{3}-a \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$\dfrac{2}{3}-a=6$, 즉 $a=-\dfrac{16}{3}$

$x\geq 3$에서 $f(x)=ax-3a$, 즉 $f(x)=-\dfrac{16}{3}x+16$이고

$\displaystyle\int_M^3 f(t)dt=6$이므로

$$\int_M^3 f(t)dt=\int_M^3\left(-\frac{16}{3}t+16\right)dt$$
$$=\left[-\frac{8}{3}t^2+16t\right]_M^3$$
$$=-24+48+\frac{8}{3}M^2-16M=6$$

에서 $4M^2-24M+27=0$

$(2M-3)(2M-9)=0$

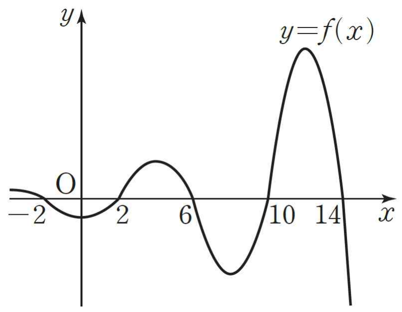
$M>3$이므로 $M=\dfrac{9}{2}$

따라서 $12M=12\times\dfrac{9}{2}=54$

12. **정답** ③

ㄱ. 조건 (가)에서 $f(0)=-4a$이고,
조건 (나)에서 $f(4)=-2f(0)$이므로 $f(4)=8a$ (참)

ㄴ. $f(-2)=0$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=-2f(x)$이므로 모든 정수 k에 대하여 $f(4k-2)=0$이다.
또한 모든 정수 k에 대하여
$$\lim_{x\to(4k-2)-}f(x)=\lim_{x\to(4k-2)+}f(x)=0$$이므로 함수 $f(x)$는 $x=4k-2$에서 연속이고, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. 모든 정수 k에 대하여 닫힌구간 $[4k-2,\ 4k+2]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 각 함숫값을 2배한 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동시킨 그래프가 닫힌구간 $[4k+2,\ 4k+6]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 일치한다. 그러므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



모든 정수 k에 대하여

$\displaystyle\int_{4k+2}^{4k+6} f(x)dx=-2\int_{4k-2}^{4k+2} f(x)dx$가 성립하므로

$$\int_6^{10} f(x)dx=-2\int_2^6 f(x)dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또한 $-2\leq x\leq 2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 $2\leq x\leq 6$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=4$에 대하여 대칭이고, $6\leq x\leq 10$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=8$에 대하여 대칭이다.

그러므로 $\displaystyle\int_6^8 f(x)dx=\int_8^{10} f(x)dx$이고

$\displaystyle\int_6^{10} f(x)dx=2\int_6^8 f(x)dx$

㉠에서 $2\displaystyle\int_6^8 f(x)dx=-2\int_2^6 f(x)dx$이므로

$\displaystyle\int_6^8 f(x)dx=-\int_2^6 f(x)dx$

따라서 $\displaystyle\int_2^8 f(x)dx=\int_2^6 f(x)dx+\int_6^8 f(x)dx=0$ (거짓)

ㄷ. $\displaystyle\int_2^6 f(x)dx=-2\int_{-2}^2 f(x)dx$이고

$\displaystyle\int_2^6 f(x)dx=2\int_2^4 f(x)dx$이므로

$$\int_2^4 f(x)dx=-\int_{-2}^2 f(x)dx \qquad \cdots\cdots ㉡$$
$$\int_{-2}^4 f(x)dx=0 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

$\displaystyle\int_{10}^{14} f(x)dx=-2\int_6^{10} f(x)dx$이고

$\displaystyle\int_{10}^{14} f(x)dx=2\int_{10}^{12} f(x)dx$이므로

$$\int_{10}^{12} f(x)dx=-\int_6^{10} f(x)dx$$
$$\int_6^{12} f(x)dx=0 \qquad \cdots\cdots ㉣$$

㉢, ㉣에 의하여

$$\int_{-2}^{12} f(x)dx=\int_{-2}^4 f(x)dx+\int_4^6 f(x)dx+\int_6^{12} f(x)dx$$
$$=\int_4^6 f(x)dx$$

㉡에서 $\displaystyle\int_4^6 f(x)dx=\int_2^4 f(x)dx=-\int_{-2}^2 f(x)dx$이고

$\displaystyle\int_{-2}^2 f(x)dx=\int_{-2}^2 a(x^2-4)dx=2a\int_0^2(x^2-4)dx$

$$=2a\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_0^2=2a\left(\frac{8}{3}-8\right)=-\frac{32}{3}a$$

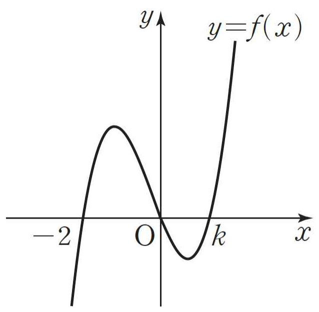
이므로 $\displaystyle\int_{-2}^{12}f(x)dx=\frac{32}{3}a$

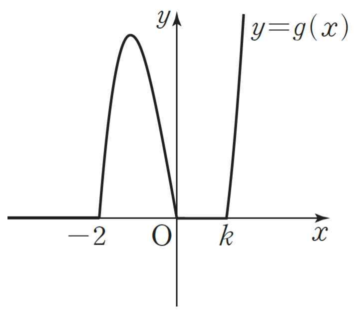
따라서 $\dfrac{32}{3}a=4$에서 $a=\dfrac{8}{3}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

13. **정답** ②

함수 $g(x)$가 $g(x)=\begin{cases} 2f(x) & (f(x)\geq 0) \\ 0 & (f(x)<0) \end{cases}$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.





그러므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-2}^{0}2f(x)dx=2\int_{-2}^{0}\{x^3+(2-k)x^2-2kx\}dx$$

$$=2\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2-k}{3}x^3-kx^2\right]_{-2}^{0}$$

$$=2\left\{0-\left(4+\frac{8k-16}{3}-4k\right)\right\}$$

$$=\frac{8}{3}k+\frac{8}{3}$$

$\dfrac{8}{3}k+\dfrac{8}{3}=6$이므로 $\dfrac{8}{3}k=\dfrac{10}{3}$

따라서 $k=\dfrac{5}{4}$

14. **정답** ②

방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근 a, 1, b $(a<1<b)$ 를 갖고, a, 1, b는 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$b-1=1-a=d$ $(d>0)$이라 하면

$f(x)=(x-1+d)(x-1)(x-1-d)$

한편, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 너 넓이는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 곡선 $y=f(x+1)$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

$f(x+1)=x(x+d)(x-d)=x^3-d^2x$이고 곡선 $y=f(x+1)$은 원점에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=f(x+1)$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-d}^{0}(x^3-d^2x)dx+\int_{0}^{d}(-x^3+d^2x)dx$$

$$=2\int_{0}^{d}(-x^3+d^2x)dx$$

$$=2\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{d^2}{2}x^2\right]_0^d$$

$$=2\left(-\frac{d^4}{4}+\frac{d^4}{2}\right)=\frac{d^4}{2}$$

$\dfrac{d^4}{2}=128$, 즉 $d^4=256$에서 $d>0$이므로 $d=4$

따라서 $f(x)=(x+3)(x-1)(x-5)$이므로

$f(6)=9\times5\times1=45$

15. **정답** 5

시각 t에서 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면

$$x_1(t)=k+\int_0^t v_1(t)dt$$

$$=k+\int_0^t(3t^2-12t+k)dt$$

$$=k+\left[t^3-6t^2+kt\right]_0^t$$

$$=t^3-6t^2+kt+k$$

$$x_2(t)=2k+\int_0^t v_2(t)dt$$

$$=2k+\int_0^t(-2t-4)dt$$

$$=2k+\left[-t^2-4t\right]_0^t$$

$$=-t^2-4t+2k$$

$x_1(t)=x_2(t)$에서

$t^3-6t^2+kt+k=-t^2-4t+2k$

$t^3-5t^2+(k+4)t-k=0$

$(t-1)(t^2-4t+k)=0$

$x_1(1)=x_2(1)$이므로 두 점 P, Q는 시각 $t=1$일 때 만난다.

이때 두 점 P, Q가 출발한 후 한 번만 만나려면 t에 대한 이차방정식 $t^2-4t+k=0$의 실근이 존재하지 않거나 양수인 실근이 존재한다면 그 실근은 $t=1$뿐이어야 한다.

이차방정식 $t^2-4t+k=0$의 실근이 존재하는 경우 실근이 모두 음수일 수는 없고, $t=1$을 실근으로 갖는 경우 $k=3$이므로 $t=3$도 실근으로 갖게 되어 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

그러므로 이차방정식 $t^2-4t+k=0$의 실근이 존재하지 않아야 하고

이차방정식 $t^2-4t+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=4-k<0$이어야 하므로 $k>4$

따라서 구하는 자연수 k의 최솟값은 5이다.

16. **정답** ③

곡선 $y=x^3-x$와 직선 $y=3x$가 만날 때,

$x^3-x=3x$에서 $x^3-4x=0$, $x(x+2)(x-1)=0$

$x>0$에서 곡선 $y=x^3-x$와 직선 $y=3x$가 만나는 점의 x좌표는 2이므로 $x\geq 0$에서 곡선 $y=x^3-x$와 직선 $y=3x$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^2\{3x-(x^3-x)\}dx=\int_0^2(4x-x^3)dx$$

$$=\left[2x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^2$$

$$=8-4=4$$

곡선 $y=x^3-x$와 직선 $y=mx$가 만날 때,

$x^3-x=mx$에서 $x(x^2-x-m)=0$

$x>0$에서 곡선 $y=x^3-x$와 직선 $y=mx$가 만나는 점의 x좌표는 $\sqrt{m+1}$이므로 $x\geq 0$에서 곡선 $y=x^3-x$와 직선 $y=mx$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^{\sqrt{m+1}}\{mx-(x^3-x)\}dx=\int_0^{\sqrt{m+1}}\{(m+1)x-x^3\}dx$$
$$=\left[\frac{m+1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^{\sqrt{m+1}}$$
$$=\frac{(m+1)^2}{2}-\frac{(m+1)^2}{4}$$
$$=\frac{(m+1)^2}{4}$$

$\frac{(m+1)^2}{4}=\frac{1}{2}\times4=2$에서 $(m+1)^2=8$

$0<m<3$이므로 $m+1=2\sqrt{2}$

따라서 $m=2\sqrt{2}-1$

17. **정답** 3

$$f(x)=\int_0^x(2x-t)(3t^2+at+b)dt$$
$$=2x\int_0^x(3t^2+at+b)dt-\int_0^x t(3t^2+at+b)dt$$

이므로

$f'(x)$

$$=\left\{2\int_0^x(3t^2+at+b)dt+2x(3x^2+ax+b)\right\}-x(3x^2+ax+b)$$
$$=2\int_0^x(3t^2+at+b)dt+x(3x^2+ax+b)$$
$$=2\left[t^3+\frac{a}{2}t^2+bt\right]_0^x+3x^3+ax^2+bx$$
$$=(2x^3+ax^2+2bx)+3x^3+ax^2+bx$$
$$=x(5x^2+2ax+3b) \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이때 조건 (가)에서 $f'(1)=0$이므로 ㉠에서

$f'(1)=5+2a+3b=0$

$$b=-\frac{2a+5}{3} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

따라서 $f'(x)=x(5x^2+2ax-2a-5)=x(x-1)(5x+2a+5)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-\frac{2a+5}{5}$

조건 (나)에서 열린구간 $(0,\ 1)$에 속하는 모든 실수 k에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=f(k)$의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면 함수 $f=(x)$의 그래프와 $y=f(k)(0<k<1)$이 만나는 서로 다른 점의 개수가 2이어야 한다.

즉, 함수 $f(x)$의 극댓값이 존재하지 않아야 하므로

$-\frac{2a+5}{5}=0$ 또는 $-\frac{2a+5}{5}=1$

이어야 한다.

즉, $a=-\frac{5}{2}$ 또는 $a=-5$

이때 a는 정수이므로 $a=-5$이고, ㉡에서

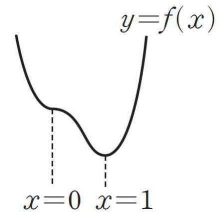
$$b=-\frac{2a+5}{3}=-\frac{2\times(-5)+5}{3}=\frac{5}{3}$$

따라서 $\left|\frac{a}{b}\right|=\left|\frac{-5}{\frac{5}{3}}\right|=3$

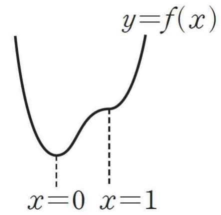
[참고]

a의 값에 따라 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

(i) $a=-\frac{5}{2}$일 때



(ii) $a=-5$일 때



18. **정답** ⑤

$h(t)=f(|t|)$라 하면 모든 실수 t에 대하여 $h(-t)=h(t)$이므로

$$g(x)=\int_{-x}^x f(|t|)dt=\int_{-x}^x h(t)dt=2\int_0^x h(t)dt=2\int_0^x f(|t|)dt$$

이고, $x>0$일 때

$$g(x)=2\int_0^x f(t)dt \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

또 모든 실수 x에 대하여

$$g(-x)=\int_{-x}^x f(|t|)dt=-\int_{-x}^x f(|t|)dt=-g(x) \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

한편, 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수이고 $f(0)=f(1)=0$인 삼차함수이므로

$f(x)=ax(x-1)(x-k)$ $(a>0,\ k$는 상수)

로 놓을 수 있다.

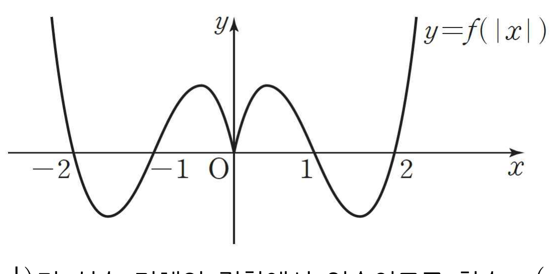
$$g(2)=2\int_0^2 f(t)dt=2\int_0^2 at(t-1)(t-k)dt$$
$$=2a\int_0^2\{t^3-(k+1)t^2+kt\}dt=2a\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{k+1}{3}t^3+\frac{k}{2}t^2\right]_0^2$$
$$=2a\left\{4-\frac{8}{3}(k+1)+2k\right\}=\frac{4}{3}a(2-k)$$

이고 조건 (가)에서 $g(2)=0$이므로

$\frac{4}{3}a(2-k)=0$에서 $k=2$

그러므로 $f(x)=ax(x-1)(x-2)$

이때 $f(|x|)=\begin{cases}f(x) & (x\geq 0)\\ f(-x) & (x<0)\end{cases}$이므로 $x\geq 0$에서 함수 $y=f(|x|)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 같고, $x<0$에서 함수 $y=f(|x|)$의 그래프는 $x\geq 0$에서의 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로 함수 $y=f(|x|)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $f(|x|)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

그러므로 $x>0$일 때 ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

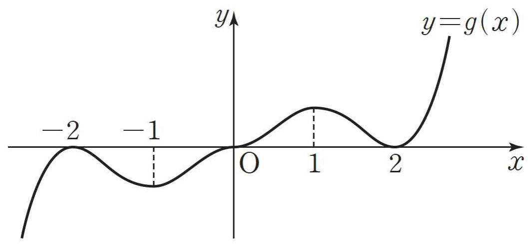
$g'(x)=2f(x)$이고, $x>0$일 때 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	(0)	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하고

$\lim_{x\to 0+} g'(x)=\lim_{x\to 0+} 2f(x)=0$이므로 $g'(0)=0$이다.

또 $g(0)=0$이고, ㉡에 의하여 함수 $y=g(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



함수 $g(x)$는 $x=-1$, $x=2$에서 극소이고, 조건 (가)에 의하여 $g(2)=0$이므로 조건 (나)에 의하여 함수 $g(x)$의 모든 극솟값의 합이 -1이려면 $g(-1)=-1$이어야 한다.

㉡에 의하여 $g(-1)=-g(1)=-1$에서 $g(1)=1$

$$g(1)=\int_{-1}^{1} f(|t|)dt=2\int_{0}^{1} f(t)dt$$

$$=2a\int_{0}^{1}(t^3-3t^2+2t)dt=2a\left[\frac{1}{4}t^4-t^3+t^2\right]_0^1$$

$$=2a\left(\frac{1}{4}-1+1\right)=\frac{a}{2}$$

즉, $\frac{a}{2}=1$에서 $a=2$

따라서 $f(x)=2x(x-1)(x-2)$이므로

$f(3)=2\times3\times2\times1=12$

19. 정답 10

$\int_{-1}^{1} f(t)dt=0$이면 $g(x)=0$이 되어 조건 (나)를 만족시키지 않으므로

$\int_{-1}^{1} f(t)dt>0$ 또는 $\int_{-1}^{1} f(t)dt<0$이다.

(ⅰ) $\int_{-1}^{1} f(t)dt>0$일 때

$g'(x)=\int_{-1}^{1} f(t)dt\times f(x)$이고, 함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이므로

$\lim_{x\to\infty} g'(x)=\infty$

즉, 함수 $g(x)$의 최댓값이 존재하지 않으므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $\int_{-1}^{1} f(t)dt<0$일 때

$g'(x)=\int_{-1}^{1} f(t)dt\times f(x)$이고, 조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 극대인 동시에 최대이므로

$g'(2)=0$에서 $f(2)=0$

그러므로 함수 $f(x)$를

$f(x)=\alpha(x+1)(x-2)(x-\beta)$ ($\alpha>0$, β는 상수)

로 놓을 수 있다.

이때

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt=\int_{-1}^{1}\alpha(x+1)(x-2)(x-\beta)dt$$

$$=\alpha\int_{-1}^{1}\{t^3-(\beta+1)t^2-(2-\beta)t+2\beta\}dt$$

$$=2\alpha\int_{-1}^{1}\{-(\beta+1)t^2+2\beta\}dt$$

$$=2\alpha\left[-\frac{\beta+1}{3}t^3+2\beta t\right]_0^1$$

$$=\frac{2\alpha(5\beta-1)}{3}$$

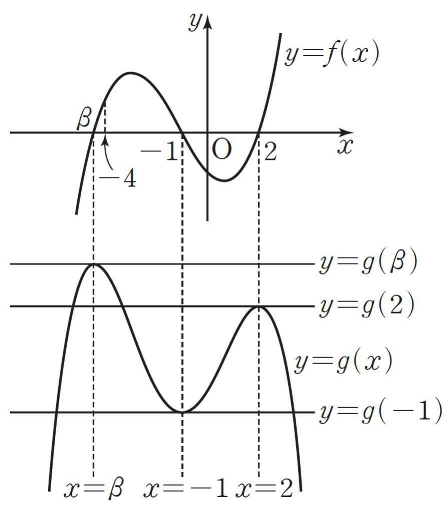
$\int_{-1}^{1} f(t)dt<0$이므로

$\frac{2\alpha(5\beta-1)}{3}<0$에서 $\beta<\frac{1}{5}$

한편, $\beta=-4$일 때, $\int_{-4}^{2} f(t)dt=0$이므로 β의 값의 범위를 나누어 $\int_{-1}^{1} f(t)dt<0$과 주어진 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하면 다음과 같다.

① $\beta<-4$일 때

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 [그림 1]과 같다.

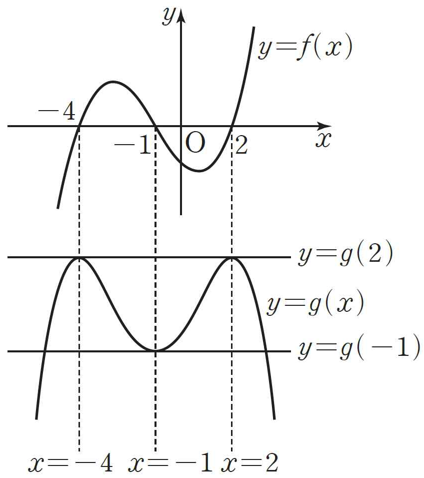


[그림 1]

이때 $g(\beta)>g(2)$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

② $\beta=-4$일 때

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 [그림 2]과 같다.



[그림 2]

함수 $h(k)$는 다음과 같다.

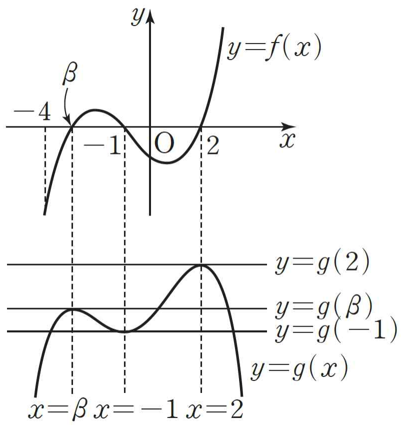
$$h(k)=\begin{cases} 2 & (k<g(-1)) \\ 3 & (k=g(-1)) \\ 4 & (g(-1)<k<g(2)) \\ 2 & (k=g(2)) \\ 0 & (k>g(2)) \end{cases}$$

이때 $\left|\lim_{k\to a+}h(k)-\lim_{k\to a-}h(k)\right|=2$를 만족시키는 a의 값은 $g(-1)$뿐이다.

그런데 $g(-1)=0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

③ $-4<\beta<-1$일 때

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 [그림 3]과 같다.



[그림 3]

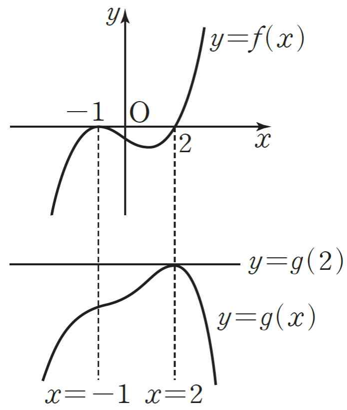
함수 $h(k)$는 다음과 같다.

$$h(k)=\begin{cases} 2 & (k<g(-1)) \\ 3 & (k=g(-1)) \\ 4 & (g(-1)<k<g(\beta)) \\ 3 & (k=g(\beta)) \\ 2 & (g(\beta)<k<g(2)) \\ 1 & (k=g(2)) \\ 0 & (k>g(2)) \end{cases}$$

이때 $\left|\lim_{k\to a+}h(k)-\lim_{k\to a-}h(k)\right|=2$를 만족시키는 a의 값은 $g(2)$, $g(\beta)$, $g(-1)$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

④ $\beta=-1$일 때

$f(x)=\alpha(x+1)^2(x-2)=\alpha(x^3-3x-2)$이고, 함수 $y=f(x)$와 그에 따른 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 [그림 4]와 같다.



[그림 4]

함수 $h(k)$는 다음과 같다.

$$h(k)=\begin{cases} 2 & (k<g(2)) \\ 1 & (k=g(2)) \\ 0 & (k>g(2)) \end{cases}$$

이때 $\left|\lim_{k\to a+}h(k)-\lim_{k\to a-}h(k)\right|=2$를 만족시키는 a의 값은 $g(2)$뿐이므로 조건 (나)에 의하여 $g(2)=3$이어야 한다.

$$\int_{-1}^{1}f(t)dt=\int_{-1}^{1}\alpha(t^3-3t-2)dt=2\alpha\int_{0}^{1}(-2)dt$$

$$=2\alpha\Big[-2t\Big]_0^1=-4\alpha$$

$$\int_{-1}^{2}f(t)dt=\int_{-1}^{2}\alpha(t^3-3t-2)dt=\alpha\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2-2t\right]_{-1}^{2}$$

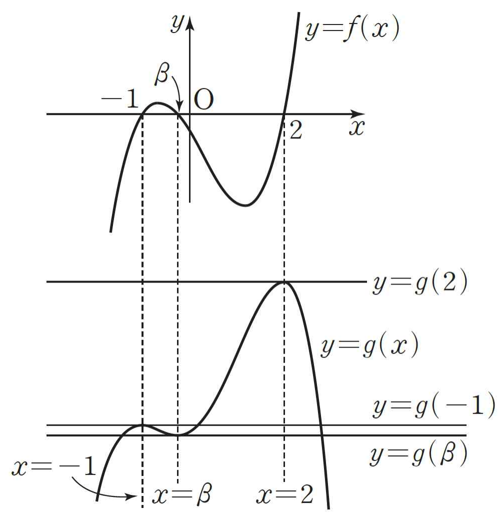
$$=\alpha\left(-6-\frac{3}{4}\right)=-\frac{27}{4}\alpha$$

즉, $27\alpha^2=3$에서 $\alpha>0$이므로 $\alpha=\dfrac{1}{3}$

그러므로 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x-\dfrac{2}{3}$

⑤ $-1<\beta<\dfrac{1}{5}$일 때

$y=f(x)$와 그에 따른 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 [그림 5]와 같다.



[그림 5]

함수 $h(k)$는 다음과 같다.

$$h(k)=\begin{cases} 2 & (k<g(\beta)) \\ 3 & (k=g(\beta)) \\ 4 & (g(\beta)<k<g(-1)) \\ 3 & (k=g(-1)) \\ 2 & (g(-1)<k<g(2)) \\ 1 & (k=g(2)) \\ 0 & (k>g(2)) \end{cases}$$

이때 $\left|\lim_{k\to a+}h(k)-\lim_{k\to a-}h(k)\right|=2$를 만족시키는 a의 값은

$g(2)$, $g(-1)$, $g(\beta)$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x-\frac{2}{3}$

따라서

$$g(0)=\int_{-1}^{1}f(t)dt\times\int_{-1}^{0}f(t)dt$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}t^3-t-\frac{2}{3}\right)dt\times\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{3}t^3-t-\frac{2}{3}\right)dt$$

$$=2\left[-\frac{2}{3}t\right]_0^1\times\left[\frac{1}{12}t^4-\frac{1}{2}t^2-\frac{2}{3}t\right]_{-1}^{0}$$

$$-\frac{4}{3}\times\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{3}$$

이므로 $30\times g(0)=30\times\frac{1}{3}=10$

[참고]

$g(\beta)=g(2)$인 β의 값은 다음과 같이 구할 수 있다.

$\int_{-1}^{\beta}f(t)dt=\int_{-1}^{2}f(t)dt$에서 $\int_{-1}^{2}f(t)dt-\int_{-1}^{\beta}f(t)dt=0$

즉, $\int_{-1}^{2}f(t)dt+\int_{\beta}^{-1}f(t)dt=0$에서 $\int_{\beta}^{2}f(t)dt=0$

$$\int_{\beta}^{2}f(t)dt=\alpha\int_{\beta}^{2}(t+1)(t-2)(t-\beta)dt$$

$$=\alpha\int_{\beta}^{2}\{t^3-(\beta+1)t^2-(2-\beta)t+2\beta\}dt$$

$$=\alpha\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{\beta+1}{3}t^3-\frac{2-\beta}{2}t^2+2\beta t\right]_{\beta}^{2}$$

$$=\frac{\alpha}{12}(\beta^4-2\beta^3-12\beta^2+40\beta-32)=\frac{\alpha}{12}(\beta-2)^3(\beta+4)$$

$\beta<\frac{1}{5}$ 이므로 $\frac{\alpha}{12}(\beta-2)^3(\beta+4)=0$에서 $\beta=-4$

그러므로 $\int_{-4}^{2}f(t)dt=0$

김지형