著 : 雀
sukita1729@gmail.com

1. 미분가능한 함수 f에 대하여 $f(0)=0$, $f(1)=4$가 성립할 때, $f'(c)-3=2c$를 만족하는 c가 열린구간 $(0,1)$에 존재함을 증명하시오. [★☆☆☆☆]

근의 존재성을 보이기 위해 평균값 정리를 사용하는 기본 문제이다. 식을 조작하면 $f'(c)-2c=3$이고, 좌변은 $g(x)=f(x)-x^2$이라는 함수를 미분한 후 $x=c$를 대입한 것임을 알아내면 끝이다.

주어진 조건에 의해 f는 미분가능하므로 g 역시 미분가능하고, 구간 $(0,1)$에 대하여 평균값 정리를 적용하면 $f'(c)-2c=g'(c)=\dfrac{g(1)-g(0)}{1-0}=3$을 만족시키는 실수 c가 열린구간 $(0,1)$에 존재한다. 이 c는 우리가 찾고자 하는 c이므로 증명이 완료되었다. ■

2. 감소하는 연속함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$에 대하여 방정식 $f(x)=x$의 실근이 유일하게 존재함을 증명하시오. [★★☆☆☆]

그래프의 개형을 생각해보면 정말 당연한 사실이지만 이 문제에서는 당연한 사실을 엄밀하게 증명할 것을 요구하고 있다. 당연한 사실을 증명할 때에는 항상 귀류법을 생각해보자.

귀류법을 이용하기 위해 $f(x)=x$의 서로 다른 두 실근 x_1, x_2가 존재한다고 가정해보자. 일반성을 잃지 않고 $x_1>x_2$라 하면 f는 감소함수이므로 감소함수의 정의에 의해 $f(x_1)<f(x_2)$이다. 하지만 x_1, x_2는 방정식 $f(x)=x$의 두 실근이었으므로 $x_1<x_2$이고, 이는 $x_1>x_2$라는 가정에 모순이다. 따라서 방정식 $f(x)=x$의 실근의 유일성이 증명되었다. (즉, 만약에 존재한다면 유일하다는 것이다. 존재성 역시 따로 증명이 필요하다.)

이제 존재성을 보이도록 한다. 함수 $g(x)=f(x)-x$에 대하여 $x>0$일 때 $f(x)<f(0)$이므로 $g(x)<f(0)-x$이다. 이때 $f(0)$는 상수이고 함수 f, g는 실수 전체의 집합에서 정의되어 있으므로 충분히 큰 실수 x_1이 존재하여 $g(x_1)<0$이다. 또한, $x<0$일 때 $f(x)>f(0)$이므로 $g(x)>f(0)-x$이고, 마찬가지로 $f(0)$는 상수이므로 충분히 작은 실수 x_2가 존재하여 $g(x_2)>0$이다. g는 연속함수이므로 구간 (x_2, x_1)에 대한 사잇값정리를 적용하면 $g(c)=0$인 실수 c가 열린구간 (x_2, x_1)에 적어도 하나 존재하고, $x=c$는 방정식 $f(x)=x$의 근이 된다.

따라서 방정식 $f(x)=x$의 실근의 존재성과 유일성이 모두 증명되었다. ■

3. 연속함수 f에 대하여 $\int_0^1 f(x)dx = 1$일 때,

$\int_0^c f(x)dx = 1 - cf(c)$를 만족하는 c가

열린구간 $(0, 1)$에 존재함을 증명하시오.

[★★★☆☆]

평균값 정리를 사용하겠다는 확신을 가지고 바라보지 않으면 잘 안 보일 수도 있는 문제이다. 한쪽을 상수로 만들어서 (c에 관한 함수) = (상수)의 형태로 식을 변형해보자.

주어진 식은 $cf(c) + \int_0^c f(x)dx = 1$과 같다. 좌변을 잘 살펴보면 이는 $g(x) = x\int_0^x f(t)dt$로 정의된 함수 g를 미분한 후 $x = c$를 대입한 것이고, 미적분학의 기본정리에 의해 g는 미분가능하므로 구간 $(0, 1)$에 대하여 평균값 정리를 적용하자.

$g'(c) = \dfrac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = \int_0^1 f(t)dt = 1$을 만족시키는 실수 c가 열린구간 $(0, 1)$에 존재하고, 이 c는 우리가 찾고자 하는 c이므로 증명이 완료되었다. ■

4. 연속함수 f에 대하여 $\int_0^1 f(x)dx = 0$일 때,

$\int_0^c f(x)dx = f(c)$를 만족하는 c가 열린구간 $(0, 1)$에 존재함을 증명하시오. [★★★★☆]

이 문제는 재미있게도 평균값 정리와 사잇값 정리를 모두 사용할 수 있다. 3번 문제처럼 우변을 상수 0으로 만들면 $f(c) - \int_0^c f(x)dx = 0$이지만, 좌변의 부정적분은 잘 보이지 않는다. 이때 (도함수) - (원함수)의 형태가 보이므로 양변에 e^{-c}을 곱해보자.

$e^{-c}f(c) - e^{-c}\int_0^c f(x)dx = 0$에서 좌변은

$g(x) = e^{-x}\int_0^x f(t)dt$로 정의되는 함수 g를 미분한 후 $x = c$를 대입한 것이고, 미적분학의 기본정리에 의해 g는 미분가능하므로 구간 $(0, 1)$에 대하여 평균값 정리를 적용할 수 있다. 따라서

$g'(c) = \dfrac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = e^{-1}\int_0^1 f(t)dt = 0$을 만족시키는 상수 c가 열린구간 $(0, 1)$에 존재하고, $g'(c) = 0$에서 $e^{-c} \neq 0$이므로 $\int_0^c f(x)dx = f(c)$임을 알 수 있다. ■

한편 사잇값 정리를 이용하기 위해 그래프의 개형을 생각해볼 수도 있다. 먼저 $f(x) = 0$인 상수함수인 경우, $c = \dfrac{1}{2}$로 존재하므로 자명하다. f가 상수함수가 아닌 경우, 적어도 한 점에 대하여 함숫값이 양수 또는 음수가 되고, $\int_0^1 f(x)dx = 0$이므로 f는 그 함숫값이 양수인 구간과 음수인 구간이 모두 존재한다.

또한 f는 연속함수이므로 최대최소 정리에 의해 구간 $[0, 1]$에서의 최댓값 $f(a) = M > 0$과 최솟값 $f(b) = m < 0$이 존재한다. 이제

$g(x) = f(x) - \int_0^x f(t)dt$로 정의하자.

$0 \le a, b \le 1$이므로

$g(a) = f(a) - \int_0^a f(t)dt > f(a) - \int_0^a f(a)dt$

$= (1-a)f(a) \ge 0,$

$g(b) = f(b) - \int_0^b f(t)dt < f(b) - \int_0^b f(b)dt$

$= (1-b)f(b) \le 0$에서 $g(a)g(b) = 0$이다. 한편 a, b 중

작은 값을 x_1, 큰 값을 x_2라 하면 g는 연속함수이므로 구간 (x_1, x_2)에 대하여 사잇값 정리를 적용하면 $g(c)=0$인 실수 c가 열린구간 (x_1, x_2)에 존재하고, 이는 우리가 찾고자 하는 c이므로 증명이 완료되었다. ■

5. $\int_0^1 f(x)dx = \frac{\sqrt{\pi}(e-1)}{e^3}$을 만족시키는 연속함수 f에 대하여 $\int_1^c \frac{1}{x} f(\ln x)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{3c^2} - \frac{1}{3} f(\ln c)$를 만족시키는 실수 c가 열린구간 $(1, e)$에 적어도 하나 존재함을 증명하시오. [★★★★☆]

3번과 마찬가지로 상수만 남기고 넘긴 후 부정적분을 구하는 전형적인 평균값 정리 문제이지만, 부정적분을 알아내기가 훨씬 까다롭다.

우선 좌변의 적분에서 $u = \ln x$, $du = \frac{1}{x}dx$로 치환하여 식을 간단하게 바꿔보자.

$\int_1^c \frac{1}{x} f(\ln x)dx = \int_0^{\ln c} f(u)du$이므로 주어진 식은

$3c^2 \int_0^{\ln c} f(u)du + c^2 f(\ln c) = \sqrt{\pi}$가 된다. 여기서 좌변의 식을 잘 보면 적분구간에 있는 $\ln c$가 f 안에 들어가 있는 것을 알 수 있다. 여기서

$\frac{d}{dx}\int_0^{\ln x} f(t)dt = \frac{1}{x} f(\ln x)$이므로 $c^2 f(\ln c)$를

$c^3 \times \frac{1}{c} \ln c$로 볼 수 있고, 마침 왼쪽에는 $3c^2$이 있으므로 좌변은 $g(x) = x^3 \int_0^{\ln x} f(t)dt$를 미분한 후 $x=c$를 대입한 것과 같다는 결론을 얻는다.

미적분학의 기본정리에 의해 g는 미분가능하므로 구간 $(1, e)$에 대하여 평균값 정리를 적용하면

$g'(c) = \frac{g(e)-g(1)}{e-1} = \sqrt{\pi}$를 만족시키는 실수 c가 열린구간 $(1, e)$에 존재한다는 것을 알 수 있고, 이 c는 우리가 찾고자 하는 c이므로 증명이 완료되었다. ■

6. 임의의 실수 a, b, c에 대하여 다음 방정식의 실근 중 적어도 하나가 $\frac{1}{6}$과 $\frac{5}{6}$ 사이에 존재함을 증명하여라. [★★★★★]

$$4ax^3+3bx^2+2cx-(a+b+c)=0$$

괴상한 아이디어를 이용하는 자작문제.

기본적인 아이디어는 사잇값 정리를 이용하는 것이며, 조건이 부족하기 때문에 다음과 같은 이상적인 상황이 되었으면 좋겠다는 생각을 해보는 것이 시작이다.

$f(x)=4ax^3+3bx^2+2cx-(a+b+c)$라 하자. 서로 다른 두 실수 m, n이 존재하여 $f(m)f(n)<0$이라면 사잇값 정리의 의해 m과 n 사이에 $f(x)=0$의 실근이 존재할 것이고, 만약 $\frac{1}{6} \le m, n \le \frac{5}{6}$라면 증명이 완료된다.

이러한 m, n을 직접적으로 찾기 위해 더 이상적인 상황을 생각해보자. $f(m)=-f(n)$인 상황이다. (a, b, c가 그 어떤 실수도 될 수 있기 때문에 이러한 추가적인 조건이 없다면 m, n의 값을 특정하는 것은 불가능에 가깝다. 즉, 조건이 부족한 상황을 해결하기 위해 강제로 조건을 추가하는 것이다. 이러한 m, n을 한 쌍만 찾으면 증명이 끝나기 때문.)

$f(m)=-f(n)$에서 m, n은 구하고자 하는 상수이고, a, b, c는 임의의 실수이므로 이 식은 실수 a, b, c에 대한 항등식이 된다. 따라서 양변의 a, b, c의 계수를 비교하면 $m+n=1$, $m^2+n^2=\frac{2}{3}$, $m^3+n^3=\frac{1}{2}$를 얻는다. 이때 식 세 개 중 두 개만 이용해도 m과 n은 구해지는데, 만약 이렇게 구한 m, n을 나머지 한 식에 대입했을 때 성립하지 않는다면 이는 a, b, c에 대한 항등식이 아니므로 항상 $f(m)=-f(n)$인 m, n이 존재하지 않는다는 뜻이 된다.

하지만 이 문제의 경우 $m+n=1$, $m^2+n^2=\frac{2}{3}$일 때

$mn=\frac{1}{6}$이므로

$m^3+n^3=(m+n)^3-3mn(m+n)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$이

되어 기적적으로 세 번째 식이 자동으로 만족된다.

따라서 m, n은 이차방정식 $6x^2-6x+1=0$의 두 근이고, $m>n$을 가정하고 이를 직접 구해보면

$m=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$, $n=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$의 서로 다른 두 실수로 구해진다. 또한 $1<\sqrt{3}<2$이므로 $\frac{1}{6}<n<m<\frac{5}{6}$이고, 사잇값 정리에 의해 $n<x_0<m$인 $f(x)=0$의 실근이 적어도 하나 존재하므로 증명이 완료되었다.

($f(m)=f(n)=0$인 경우 m, n이 그 자체로 $\frac{1}{6}$과 $\frac{5}{6}$ 사이에 있는 실근이 되어 여전히 성립한다.) ■

7. 함수 $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$는 연속이고 모든 $x \in [a, b]$에 대하여 $g(x) \ge 0$이다. 이때,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

를 만족하는 실수 c가 열린구간 (a, b)에 존재함을 증명하시오. [★★★★☆]

$h(x) = f(x)\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx$라 하면 문제는 $h(x) = 0$의 실근이 구간 (a, b)이 존재함을 보이는 것과 동치이다. 이때 f는 연속함수이므로 최대최소 정리에 의해 구간 $[a, b]$에서의 최솟값과 최댓값이 존재한다. 최솟값을 $f(\beta)$, 최댓값을 $f(\alpha)$라 하자. $(\alpha, \beta \in [a, b])$

한편 $h(\beta) = f(\beta)\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx$

$= \int_a^b f(\beta)g(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx$

$= \int_a^b [f(\beta) - f(x)]g(x)dx$이고,

$f(\beta) - f(x) \le 0$, $g(x) \ge 0$이므로 $h(\beta) \le 0$이다.

마찬가지로 $h(\alpha) = f(\alpha)\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx$

$= \int_a^b f(\alpha)g(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx$

$= \int_a^b [f(\alpha) - f(x)]g(x)dx$이고,

$f(\alpha) - f(x) \ge 0$, $g(x) \ge 0$이므로 $h(\alpha) \ge 0$이다.

$h(\alpha) = 0$인 경우 $a \le \alpha \le b$이므로 $c = \alpha$일 때 성립하고, $h(\beta) = 0$인 경우 역시 $a \le \beta \le b$이므로 $c = \beta$일 때 성립한다.

$h(\alpha)h(\beta) \ne 0$인 경우, $h(\alpha)h(\beta) < 0$이고 h는 연속함수이므로 사잇값 정리에 의해 $h(c) = 0$인 실수 c가 열린구간 $(\min\{\alpha, \beta\}, \max\{\alpha, \beta\})$에 존재한다. 이때 $a \le \alpha, \beta \le b$이므로 $c \in (a, b)$이고, 증명이 완료되었다. ■

8. 연속함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$의 합성함수 $f \circ f$가 항등함수일 때, $f(c) = c$인 실수 c가 존재함을 증명하시오. (단, 함수 g가 항등함수인 것은 정의역의 임의의 x에 대하여 $g(x) = x$인 것을 의미한다.) [★★★☆☆]

$g(x) = f(x) - x$라 하자. 문제는 $g(x) = 0$의 실근이 존재함을 보이는 것과 동치이다.

우선 모든 실수 x에 대하여 $g(x) = f(x) - x > 0$이라 가정하자. 이때 $f(x) > x$이므로 x의 자리에 $f(x)$를 대입하면 $f(f(x)) > f(x)$이고, $f(f(x)) > f(x) > x$이다. 하지만 $f(f(x)) = x$이므로 이는 모순이다.

이제 모든 실수 x에 대하여 $g(x) = f(x) - x < 0$이라 가정하자. $f(x) < x$이므로 x의 자리에 $f(x)$를 대입하면 $f(f(x)) < f(x)$이고, $f(f(x)) < f(x) < x$이다. 하지만 $f(f(x)) = x$이므로 이는 모순이다.

따라서 두 실수 a, b가 존재하여 $g(a) \ge 0$이고 $g(b) \le 0$이다. 만약 $g(a) = 0$ 또는 $g(b) = 0$인 경우 a 또는 b 그 자체가 $g(x) = 0$의 실근이 되므로 증명이 완료된다.

그렇지 않은 경우, g는 연속함수이므로 사잇값 정리에 의해 $g(c) = f(c) - c = 0$인 실수 c가 열린구간 $(\min\{a, b\}, \max\{a, b\})$에 존재한다. 즉, $f(c) = c$이므로 증명이 완료되었다. ■

9. 두 연속함수 $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$에 대하여 $f \circ g = g \circ f$가 성립할 때, $f(c) = g(c)$를 만족시키는 실수 c가 닫힌구간 $[0, 1]$에 존재함을 증명하시오. [★★★★★]

최대최소 정리, 사잇값 정리, 귀류법, 수학적 귀납법을 모두 사용해야 하는 최고난이도 문제.

$h(x) = f(x) - g(x)$라 하면 문제는 $h(x) = 0$의 실근이 닫힌구간 $[0, 1]$에 존재함을 보이는 것과 동치이다. h는 연속함수이므로 최대최소 정리에 의해 구간 $[0, 1]$에서의 최솟값 m이 존재한다.

우선 구간 $[0, 1]$의 모든 실수 x에 대하여 $h(x) > 0$이라 가정하자. $h(x) > 0$이므로 $m > 0$이고 $f(x) - g(x) \geq m$이다. x의 자리에 $f(x), g(x)$를 각각 대입하면
$f(f(x)) - g(f(x)) \geq m, \qquad f(g(x)) - g(g(x)) \geq m$이다.
또한, $f(g(x)) = g(f(x))$이므로 위 부등식 두 개를 더하면 $f(f(x)) - g(g(x)) \geq 2m$을 얻는다.

이제 수학적 귀납법을 이용하여 자연수 n에 대하여 $f_n(x) - g_n(x) \geq nm$이 성립함을 보이자. (단, f_n과 g_n은 각각 f가 n번, g가 n번 합성된 함수이다. 예를 들어, $f_1 = f$이고 $f_2 = f \circ f$이다.)

$n = 1, 2$인 경우 앞서 $f(x) - g(x) \geq m$,
$f(f(x)) - g(g(x)) \geq 2m$임을 설명했으므로 충분하다.

자연수 k에 대하여 $n = k$인 경우 $f_k(x) - g_k(x) \geq km$이라 가정하자. x의 자리에 $f(x)$를 대입하면
$f_k(g(x)) - g_k(g(x)) = f_k(g(x)) - g_{k+1}(x) \geq km$이다.
또한 $f(x) - g(x) \geq m$에서 x의 자리에 $f_k(x)$를 대입하면 $f_{k+1}(x) - g(f_k(x)) \geq m$이다.

한편 $f \circ g = g \circ f$이므로
$f \circ f \circ g = f \circ g \circ f = g \circ f \circ f$이고, 같은 방법으로 f와 g의 합성 순서를 계속 바꾸어 $f_k(g(x)) = g(f_k(x))$를 얻을 수 있다.

따라서 부등식 $f_k(g(x)) - g_{k+1}(x) \geq km$과
$f_{k+1}(x) - g(f_k(x)) \geq m$을 합하면
$f_{k+1}(x) - g_{k+1}(x) \geq (k+1)m$을 얻고, 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대하여 $f_n(x) - g_n(x) \geq nm$이 성립한다. 이때 $m(>0)$의 값이 아무리 작더라도
충분히 큰 자연수 n_0가 존재하여 $n_0 > \dfrac{1}{m}$이고,
$f_{n_0}(x) - g_{n_0}(x) \geq n_0 m > 1$이다. 하지만 f, g의 정의역과 치역은 모두 $[0, 1]$이므로 f_n, g_n의 정의역과 치역도 모두 $[0, 1]$이고, 따라서 $f_{n_0}(x) - g_{n_0}(x) > 1$은 불가능하다. (즉, 모순이다.)

마찬가지로 구간 $[0, 1]$의 모든 실수 x에 대하여 $h(x) < 0$인 경우 역시 충분히 큰 자연수 n_0가 존재하여 $f_{n_0}(x) - g_{n_0}(x) < -1$이고 모순이 발생한다.

따라서 두 실수 a, b가 존재하여 $h(a) \geq 0$이고 $h(b) \leq 0$이다. $h(a) = 0$ 또는 $h(b) = 0$인 경우 a 또는 b 자체가 $h(x) = 0$의 근이 되어 성립하고, $h(a)h(b) \neq 0$인 경우 $h(a)h(b) < 0$이고 h는 연속함수이므로 사잇값 정리에 의해 $h(c) = 0$인 실수 c가 열린구간 $(\min\{a, b\}, \max\{a, b\})$에 존재한다. 즉, $c \in [0, 1]$이므로 증명이 완료되었다. ■

10. (보너스 문제) 다음 적분의 값을 구하여라.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3x+4}{(4x+3)^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

우선 분모에 $\sqrt{1-x^2}$이 있으므로 문제를 보자마자 $x=\sin u$, $x=\cos u$ 등의 치환을 생각해야 한다. 비슷한 맥락으로 분모에 $1+x^2$이 있다면 $x=\tan u$ 치환을 반드시 고려해야 한다. 꼭 기억하자.

주어진 적분을 I라 하자. $x=\sin u$, $dx=\cos u du$로 치환하면 $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{3\sin u+4}{(4\sin u+3)^2}\,du$이다. 여기서 분모와 분자의 $3, 4$의 대칭성을 이용하기 위해 분모 분자를 $\cos^2 u$로 나누자.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{3\sin u+4}{(4\sin u+3)^2}\,du=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{3\sec u\tan u+4\sec^2 u}{(4\tan u+3\sec u)^2}\,du$$

이고, 분모의 제곱 안의 식을 잘 살펴보면 분자에 마침 그 도함수가 있는 것을 볼 수 있다.

따라서 $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{3\sec u\tan u+4\sec^2 u}{(4\tan u+3\sec u)^2}\,du$

$=\left[-\frac{1}{4\tan u+3\sec u}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{10}$이다. ■